

Решения

- Что такое базис? Приведите пример.

Базис — это набор линейно независимых векторов, с помощью которых можно выразить любой вектор в данном пространстве.

В трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 стандартным базисом является набор векторов:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Пусть дан вектор $[20, 45, 34]$, разложите по стандартному базису.

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 45 \\ 34 \end{bmatrix} = 20 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 45 * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 34 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 20 * \vec{e}_1 + 45 * \vec{e}_2 + 34 * \vec{e}_3.$$

- Чем расстояние евклидово отличается от манхэттеновского? Рассчитайте евклидово расстояние и расстояние Манхэттена между 2 векторами: $\vec{a} = [23, -34, 56]$, $\vec{b} = [45, 67, -28]$.

Евклидово расстояние — это расстояние между двумя точками в пространстве, которое вычисляется по теореме Пифагора. Оно равно длине прямой линии, соединяющей две точки.

Манхэттеновское расстояние (или "расстояние по городским кварталам") — это сумма абсолютных разностей по каждой координате. Оно выражает расстояние, которое нужно пройти по осям сетки, не используя диагонали.

$$\begin{aligned} d_{\text{евклид}}(\vec{a}, \vec{b}) &= \sqrt{(45 - 23)^2 + (67 + 34)^2 + (-28 - 56)^2} = \\ &= \sqrt{484 + 10201 + 7056} = \sqrt{17741} \approx 133,2 \end{aligned}$$

$$d_{\text{манхэттен}}(\vec{a}, \vec{b}) = |45 - 23| + |67 + 34| + |-28 - 56| = 22 + 101 + 84 = 207.$$

Ответ: $d_{\text{евклид}} \approx 133,2$, $d_{\text{манхэттен}} = 207$.

- Что такое метрическое пространство?

Метрическое пространство — это упорядоченная пара (X, d) , где X — непустое множество, а d — функция, называемая метрикой или расстоянием.

- Что такое метрика? Какими свойствами должна обладать метрика?

Метрика — это функция (d) , которая определяет расстояние между двумя элементами в метрическом пространстве. Для любых $x, y, z \in X$, где X — непустое множество, метрика должна удовлетворять следующим условиям:

1. Неотрицательность: $d(x, y) \geq 0$, при этом $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. Симметрия: $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Неравенство треугольника: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.