

Решения

1. Ранг матрицы

Задача

Найдите ранг для следующей матрицы 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Произведем последовательные элементарные преобразования.

- Поменяем 1-ый и 2-ой столбцы местами:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Умножим 1-ую строку на -2 и прибавим к 3-ей:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 - 2 * 2 & 7 - 2 * 1 & 1 - 2 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Умножим 2-ую строку на $-\frac{5}{4}$ и прибавим к 3-ей:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 - \frac{5}{4} * 4 & -5 - \frac{5}{4} * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -8\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

В результате преобразований получена матрица, содержащая 3 ненулевых строки, следовательно $rank(A) = 3$.

Ответ: $rank(A) = 3$.

2. Обратная матрица

Задача

Найдите обратную матрицу для следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -10 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Для нахождения обратной матрицы найдем ее определитель с помощью метода Саррюса.

$$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -10 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 * 3 * (-3) + (-7) * 4 * 5 + (-10) * 6 * (-2) - \\ &\quad - (-10) * 3 * 5 - 4 * 4 * (-2) - (-7) * 6 * (-3) = \\ &= -36 + (-140) + 120 - (-150) - (-32) - 126 = 0. \end{aligned}$$

Можно видеть, что определитель матрицы равен нулю, следовательно обратная матрица не определена.

Ответ: $A^{-1} \in \emptyset$.

3. Разреженные матрицы – sparse матрицы

Задача

Дана разреженная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переведите матрицу в формат CSR (Compressed Sparse Row).

Решение

Значения ненулевых элементов:

$$\text{values} = [1, 2, 3].$$

Индексы столбцов ненулевых элементов:

$$\text{columns} = [3, 1, 0].$$

Массив, указывающий диапазон индексов ненулевых элементов (values) для каждой строки разреженной матрицы A :

$$\text{indptr} = [0, 1, 2, 2, 3].$$

Ответ: Матрица A в формате CSR будет представлена как

$$\text{values} = [1, 2, 3], \text{columns} = [3, 1, 0], \text{indptr} = [0, 1, 2, 2, 3].$$