fiche de i23 de Mehdi Ben Ahmed

Definitions et props

Définition 1: Commutatif les variables peuvent etre inverses

Définition 2: L'arbre de Derivation C'est un format de pour representer une proposition

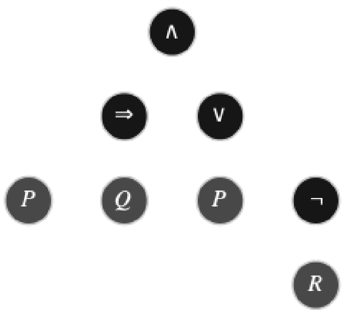

Figure 1: $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg R)$

Définition 3: Loi de De Morgan Soit P et Q deux assertions, alors
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Tables de verite

il est assume qu'un connecteur est commutatif sauf mentione autrement

table de $\wedge$: q binaire

⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊤	⊤	⊤

table de $\vee$: q binaire

⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊤	⊤	⊤

table de $\oplus$: q binaire

⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊤	⊤	⊥

table de $\Rightarrow$: q binaire dit non commutatif

⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤

autrement dit, vrai sauf si p est vrai et q est faux

table de $\Leftrightarrow$: q binaire

⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊥
⊤	⊤	⊤

vrai si les deux variables ont la meme valeur

Proprietes

- comutativite de $\wedge$ et $\vee$

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

- associativite de $\wedge$ et $\vee$

$((P \wedge Q) \wedge R) \equiv ((q \wedge R) \wedge P)$ $((P \vee Q) \vee R) \equiv ((Q \vee R) \vee P)$

- idempotence de $\wedge$ et $\vee$

$(p \wedge p) \equiv p$
$(p \vee p) \equiv p$

Modus{ponens, tollens}

Définition 4: modus ponen Soit P et Q deux propositions, si P est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors Q est vrai.

$$P, P \Rightarrow Q \dashv Q$$

car $P \Rightarrow q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$

Définition 5: modus ponen Soit P et Q deux propositions, si $\neg Q$ est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors la proposition $\neg P$ est vrai.

$$\neg Q, P \Rightarrow Q \dashv \neg P$$

TPs

Question 1: Ecrire une fonction `interpretations(nbVar)` qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles

la technique que j'ai opte est de calculer tous les nombre possible en binaire jusqu'a 2^{nbvar}, puis de les retranscrire en tuple de vrai/faux. Voici le code (on assume une fonction translate to tuple defini comme le suit)

```
# Q1: ecrire une fonction Inter(nbvar) qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles
def translatetotuple(binary: str):
    result = []
    for i in binary:
        if i == '1':
            result.append(True)
```

```python
        else:
            result.append(False)

    return tuple(result)

def inter(nbvar):
    finalresult = ()
    for i in range(nbvar**2):
        result = bin(i)
        result = result[2:]
        while len(result)<nbvar:
            result = '0'+result
        result = translatetotuple(result)
        finalresult += result,
    return finalresult
```

Question 2.
Une formule propositionelle FP de n variables est codee par une chiande de caracteres respectant la syntaxe python. les variables étant toujours codées V[0], V[1],… ,V[n-1]. Écrivez une fonction TV(FP,n) qui renvoie la table de vérité de la formule FP sous forme de tuple de tuples à l'aide de la fonction Inter et la fonction d'évaluation eval(chaine) du Python qui évalue une chaine de caractères si elle respecte la syntaxe du langage Python.

Exemple. Avec la chaîne de caractère FP = "V[0] and V[1]", l'appel de la fonction TV(FP,2) doit renvoyer le tuple `((False,False,False),(False,True,False),(True,False,False),(True,True,True))`

le code est incomplet, mais le concept est juste. on genere les combinaison, puis on laisse exec evaluer l'expression, enfin on append dans la variable resultat final et on renvoie (le code n'est pas au point mais le concept est celui la)

```python
def TV(fp, nbvar):
   variables = inter(nbvar)
   endresult = ()
   for V in variables:
       endresult += (i, (exec(fp)),)
```

axiomes et predicats

Ensembles

Définition 6: ensemble Un ensemble est une collection X d'objets *definis* et *unique*. un objet appartenant a l'ensemble est dit membre de *X* et on dit que l'objet et membre. un membre est unique dans un ensemble, il ne peut pas y avoir deux fois le meme element

exemple:

$$\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$$

sur python, un type ensemble existe qui est appele `set`

Définition 7: Difference Soit X et Y deux enembles. la difference entre les ensembles X et Y est l'ensemble $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, qui est l'ensembles qui contients les elements de X mais pas les elements de Y. on note aussi XY l'ensemble qui contient seulement les differences d'un ensemble $X \cap Y$ est $X \Delta Y$

Définition 8: Cardinal On appelle le cardinal d'un ensemble sa taille. Lorsqu'un ensemble est fini, le cardinal est la longueur de cette ensemble

Predicats

Définition 9: Predicat enonce contenant des variables tel qu'en substituant chaque variables par une valeure choisi, on obtient une proposition

exemple: $x|P(x)$ (se lit x tel que P(x)) est un predicat dans lesquelles la proposition P(x) est vraie pour x la theorie de ZF distingue deux tyupes de predicats:
- 1. predicat collectivisant: un predicat $P(X)$ tel que les valeurs de x pour lesquelles la proposition P(x) est vrai constituent un enssemble note $(x|P(x))$
- 2. predicat non collectivisant: un predicat P(x) tel que les valeurss x pour lesquelles la prop P(X) est vraie ne constituent pas un ensemble

considerant le predicat $P(x, y)$ defini sur deux variables reelles x et y suivant:

$$x^2 - y = 1$$

on peut definir le predicat $Q(x)$ de la variable suivante:

$$\exists y \in \mathbb{R} x^2 - y = 1$$

Quantificateurs

Définition 10: quantificateur Il existe 3 quantificateurs:
- $\forall$ qui se lit "pour tout" (appele forall en latex et typst
- $\exists$ qui se lit "il existe"
- $\exists!$ qui est un "il existe" unique

le quantificateur $\exists!$ est lui meme une proposition qui est: $(\exists x \in X P(X)) \land (\forall x \in X \forall y \in X P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y$ le terme de gauche codel'existence et le terme droit l'unicite en exprimant sous forme contraposee que deux elements distincts x et y de l'ensemble X ne peuvent simultanement satisfaire le predicat $P(x) : x \neq\Rightarrow \neg(P(x) \land P(y))$.

Axiomes

Définition 11: axiome Soit X et Y deux ensembles. on dit que X est inclus dans Y ou que X est une partie de Y ou encore que X est un sousensemble de Y, ce que l'ont note $X \subseteq Y$ ou $Y \supseteq X$ seulement si $\forall x x \in X \Rightarrow x \in Y$

TP

logique de boole

Algebre de boole

soit $\mathbb{B}$ un enssemble munit d'une structure algebrique, on l'appelle algebre de boole.

Définition 12: on appelle booleen toute variable defini sur un ensemble a deux elements

Pour simplifier l'ecriture des expressions logique, l'operande $\neg$ peut etre ecrit de cette facon: $\bar{x}$. et on a

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

dans le cadre de l'algebre de Boole, un litterale designe la aussi une variable x (litteral positif) ou sa negation $\bar{x}$ (litteral negatif)

Proprietes de calcul

on dispose des nombreuses proprietess suivantes heritees du calcul propositionnel:

1. associativite: $(a+b)+C = a+(b+c) = a+b+c$
2. commutativite $a+b = b+a$
3. distributivite $a(b+c) = ab+(ac)$
4. idempotence: $a+a+a+a... = a$ et $aaa.... = a$
5. element neutre: $a+0 = 0+a = a$ et $a1 = 1a = a$
6. absorption $0a = a$ et $1+a = 1$
7. simplifcication: $a+\bar{a}b = a+b$ et $a(\bar{a}+b) = ab$
8. redondance: $ab+\bar{a}c = ab+\bar{a}c+bc$ et $(a+b)(\bar{a}+c) = (a+b)(\tilde{a}+c)(b+c)$
9. DeMorgan: $a\bar{b} = \bar{a}+\bar{b}$
10. Involution: $\bar{\bar{a}} = a$
11. tiers exclu: $\bar{a}+a = 1$
12. non contradiction: $a\bar{a} = 0$

on retrouve les cinq autres operateur binaire, implication, equifvvalence, disjonction exclusive, non conjenction et non disjonction:

$$a \Rightarrow b = \tilde{a}+b,$$

$$a \Leftrightarrow b = (\tilde{a}+b)\big(a+\tilde{b}\big)$$

$$a \oplus b = (a+b)\big(\tilde{a}+\tilde{b}\big)$$

$$a \uparrow b = \tilde{ab}$$

$$a \downarrow b = \widetilde{a+b}$$

qui ont les tables de verite:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

Definitions:

Définition 13: antilogie L'antilogie est le cas ou une formule repond toujours faux, a l'inverse de la tautologie qui répond toujours vrai

Code Gray

Définition 14: Code Gray

Minterme, maxterme

Définition 15: Minterme, Maxterme on appelle Minterme toute fonction d'ordre n, prenant une seule fois la valeur 1

Relations et applications

analyse combinatoire

Ensembles naturel

Définition 16: Ensemble Naturel On appelle ensemble naturel $(N, \preccurlyeq)$ tout ensemble ordonne qui satisfait les trois proprietes suivantes:
- Toute partie non vide admet un plus petit element
- Toute partie non vide et majoree admet un plus grand element
- L'ensemble n'admet pas de plus grand element

l'existance d'un ensemble naturel est acquise grace a l'axiome de l'infini (consulter wikipedia) Pour demontrer qu'un ensemble naturel est ordonne, on peut emettre la proposition suivante:

$$\exists m \in \{a,b\}(m \preccurlyeq a) \wedge (m \preccurlyeq b)$$

deux element a, b dans l'enemble N. D'apres l'axiome de la paire, l'ensemble $\{a, b\}$ existe, n'est pas vide et admet donc un plus petit element (un ensemble naturel est toujours minore mais jamais majore) Comme $m \in N$ on a $(m = a) \wedge (m = b)$ et on deduit que $(a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ la demi droite $\rrbracket n, \rightarrow \llbracket$ n'est pas vide, sinon n serait le plus grand element, ce qui va a l'encontre de la 3eme propriete. $\rrbracket n, \rightarrow \llbracket$ admet un plus petit element appele $succ(n)$, le successeur de n

recurrence

Définition 17: Theoreme principe de recurrence Toute partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et stable pour l'application successeur est egale a $\mathbb{N}$

Définition 18: theoreme recurrence simple
Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$ heredite

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 19: theoreme recurrence forte
Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in \llbracket a, n \rrbracket P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ heredite forte

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 20: theoreme recurrence multiple
Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket P(a+i)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+k)$

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 21: theoreme recurrence finie
Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \llbracket a, m-1 \rrbracket P(n) \Rightarrow P(n+1)$

alors $\forall n \in \llbracket a, m \rrbracket P(n)$

fiche de i22 de Mehdi Ben Ahmed

bases et codage

rappels

decimale	binaire	octal	hexa
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

rappels logique

x	y	$x+y$	xy	$\tilde{x}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Arithmetique tronque a gauche:

logique combinatoire

Définition 22: tableau de Karnaugh il sert a representer l'ensemble des arguments d'une fonction booleenne, a la meme facon qu'un tableau de valeur. cette forme est efficace pour trouver:

- la FND d'une fonction
- trouver l fonction booleenne ayant le moins de variable et d'operateurs possible: simplification des fonctions booleennes

un tableau de karnaugh a pour argument n, qui signifie n nombre d'arguments d'une fonction booleenne

exemple pour un tableau $n = 3$:

xy z	00	01	11	10
0	$f(0,0,0)$	$f(0,1,0)$	$f(1,1,0)$	$f(1,0,0)$
1	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,0,1)$

Définition 23: forme nominal disjonctive (FND) let n variabless, $x_1...x_n$, on appelle monome d'ordre n le produit $y_1, y_2...y_n$ avec $y_i = x_i$ ou $y_i = \tilde{x_i}$ pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$. une fonction est dite sous forme nominal disjonctive si la fonction est une somme de monomes d'ordre n. toute fonctions non nulle de n variables peut s'ecrire de facon unique sous forme nominale disjonctive.

exemple: soit une fonction f boolenne de 2 arguments dont son tableau de karnaugh est

xy z	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0

La FND de f est $f(x, y, z) = \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} + xy\tilde{z} + x\tilde{y}\tilde{z} + \tilde{x} + yz$ on peut donc simplifier la fonction a

$$xy + x\tilde{y} = x$$

en effet $xy + x\tilde{y} = x(y + \tilde{y}) = x1 = x$

logique sequentielle

fiche de i21 de Mehdi Ben Ahmed

Conception d'algorithme

Définition 24: Invalider un algo Pour montrer qu'un algo n'est pas valide, il suffit de montrer un contre exemple, soit un cas ou l'algorithme ne marcherait pas

Analyse asymptotique

Définition 25: Analyser un algorithme c'est analyser les couts par rapport au temps d'execution, l'espace memoire, et la consommation electrique

Définition 26: le modele random access machine machine hypothetique ou:
- les operands consomment une unite de temps
- les boucles depend du nombre d'iterations et des operation inside
- un read consomme une unite de temps
- la memoire est illimite

l'efficacite d'un algo est defini par une fonction notee C(n) ou T(n), meme si dans un cas reel ca serait plutot note O(n)

exemple:
- recherche d'un element:
  - n cases a tester
  - 5 cases: > 5 tests
  - 10 cases: > 10 tests
- ramasssage de plots:
  - n! chemins a tester
  - 5 plots: 120 chemins possible

la notation est qui suit:
- $\Omega(n)$: meilleur cas
- $O(n)$: pire cas
- $\Theta(n)$: cas moyen

Définition 27: $f(n) = O(g(n))$ il existe une constance c et un entier n_0 tels que $\forall n \geq n_0, f(n) =< cg(n)$

exemples:
- $3n^2 - n + 6 = O(n^2)$ en prenant $c = 3$ et $n_0 = 6$
- $3n^2 - n + 6 = O(n^3)$ en prenant $c = 1$ et $n_0 = 4$
- $3n^2 - n + 6 \neq O(n)$ car $\forall c, cn < 3n^2 - n + 6$ quand $n > c + 1$

Définition 28: $f(n) = \Omega(g(n))$ il existe une constance c et un entier n_0 tels que $\forall n \geq n_0, f(n) \Rightarrow cg(n)$

exemples:
- $3n^2 - n + 6 = \Omega(n^2)$ en prenant $c = 2$ et $n_0 = 2$
- $3n^2 - n + 6 \neq \Omega(n^3) \forall c, 3n^2 - n + 6 < cn^3$ quand $cn > 3$ et $n > 6$
- $3n^2 - n + 6 = \Omega(n)$ en prenant $c = 1$ et $n_0 = 1$

Définition 29: $f(n) = \Theta(g(n))$ il existe une constance c et un entier n_0 tels que $\forall n \geq n_0 c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$
($f(n) - O((g(n)$ et $f(n) = \Omega(g((n)))$)

- $3n^2 - n + 6 = \Theta(n^2)$
- $3n^2 - n + 6 = \Theta(n^3)$
- $3n^2 - n + 6 = \Theta(n)$

Bases d'algo

parcours de tableau

Algos de recherche

Algos de tri

3 types d'algos de tri:
- tri par selection
- tri par propagation
- tri par insertion

tout les algorithmes reposent sur une méthode d'echange d'items basé sur leurs indice:

```
def swap(T, i, j):
    a = T[i]
    T[i] = T[j]
    T[j] = a
```

tri par selection

bien que simple, l'algorithme est considere comme inefficace a cause de son temps d'execution quadratique

$$\Omega(n) = n^2$$
$$O(n) = n^2$$
$$\Theta(n) = n^2$$

il consiste a parcourir une liste, et echanger le plus petit element par le premier, puis d'avencer l'indice du premier jusqu'a finir de parcourir la liste

```
procédure tri_selection(tableau t)
    n ← longueur(t)
    pour i de 0 à n - 2
        min ← i
        pour j de i + 1 à n - 1
            si t[j] < t[min], alors min ← j
        fin pour
        si min ≠ i, alors échanger t[i] et t[min]
    fin pour
fin procédure
```

tri par propagation (Bubble sort)

il a une complexite de n^2, sauf pour le meilleur cas, ou $\Omega(n) = n$ il consiste a echanger les elements qui sont dans le désordre ($n + 1 < n$), a la fin de chaque iteration, le dernier element est le plus grand, donc l'indice est soustre a chaque fois

```
tri_à_bulles(Tableau T)
   pour i allant de (taille de T)-1 à 1
       pour j allant de 0 à i-1
           si T[j+1] < T[j]
               (T[j+1], T[j]) ← (T[j], T[j+1])
```

tri par insertion

il parcours la liste, et a chaque fois que l'algo trouve un nombre inferieur au precedent, il revient en arriere pour le placer correctement

```
  procédure tri_insertion(tableau T)

       pour i de 1 à taille(T) - 1

            # mémoriser T[i] dans x
            x ← T[i]

            # décaler les éléments T[0]..T[i-1] qui sont
plus grands que x, en partant de T[i-1]
            j ← i
            tant que j > 0 et T[j - 1] > x
                     T[j] ← T[j - 1]
                     j ← j - 1

            # placer x dans le "trou" laissé par le
décalage
            T[j] ← x
```

Algos de recherche

Recheche Dichotomique

Soit une liste triee, l'algorithme consiste a chercher x dans la moitie de la liste:

- si $T[i] < x$, on prend la partie gauche
- si $T[i] > x$, on prend la partie droite