5
Limites et continuité

Exercice 5.1
Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_m$.

Exercice 5.2
En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Correction
$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{\mu}$.

Exercice 5.3
Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Correction
$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} P_m \frac{1}{\frac{K}{e^{rP_m t}}+1} = P_m$.

Exercice 5.4 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Correction
a) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \lim_{x\to0} \frac{(1+x+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x\to0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$,

b) La limite $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ n'existe pas car on a $\displaystyle\lim_{x\to0^\pm} \frac{x^2+2|x|}{x} = \pm2$,

c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}x-2=-\infty$,

d) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=4$,

e) $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to\pi}\dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)}=\lim_{x\to\pi}1-\cos(x)=2$,

f) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\dfrac{(1+x)-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\lim_{x\to0}\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}$,

g) La limite $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$ n'existe pas car l'existence des racines impose $x\ge3$,

h) $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\dfrac{1}{n}$,

i) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0^+$;

Exercice 5.5

Compléter le tableau suivant :

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to0}f(x)$				
$\lim_{x\to+\infty}f(x)$				
$\lim_{x\to-\infty}f(x)$				

Correction

	$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to0}f(x)$	0	1	0	$\nexists$
$\lim_{x\to+\infty}f(x)$	1	0	$+\infty$	0
$\lim_{x\to-\infty}f(x)$	1	0	$-\infty$	0

On connaît la limite fondamentale $\lim_n n\sin\left(\frac{1}{n}\right)=1$. À partir de cette limite on va démontrer les réponses données au tableau ci-dessus.

- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ car $-1\le\sin(x)\le1$
- ⋆ D'après la limite fondamentale on a immédiatement $\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$
- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\overset{x=-t}{=}\lim_{t\to+\infty}-t\sin\left(-\frac{1}{t}\right)\overset{\sin(-a)=-\sin(a)}{=}\lim_{t\to+\infty}t\sin\left(\frac{1}{t}\right)=1$
- ⋆ Par changement de variable on trouve $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\sin(x)=\overset{x=1/t}{=}\lim_{t\to\pm\infty}t\sin\left(\frac{1}{t}\right)=1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\sin(x)=0$ car $-1\le\sin(x)\le1$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$ car $-1\le\cos(x)\le1$
- ⋆ $\lim_{x\to+\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to-\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$
- ⋆ $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cos(x)$ n'existe pas car $\lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x}\cos(x)=\pm\infty$
- ⋆ D'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cos(x)=0$ car $-1\le\cos(x)\le1$

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\qquad f(x):=x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Correction
Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

qui est continue.

Exercice 5.7

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Correction
Elle est continue car $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x > 0$, $x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue pour $x < 0$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0), \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0). \end{aligned}$$

Exercice 5.8

1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Correction
1. On a $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x\to -1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1 mais elle est prolongeable par continuité en -1 et ce prolongement vaut $-1/2$.
2. On a $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to 1} f(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$. La fonction f n'est donc pas prolongeable par continuité en -1 mais elle est prolongeable par continuité en 1 et ce prolongement vaut $-1/2$.

Exercice 5.9

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,
b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,
c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,
d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Correction
Les énoncés du *théorème des valeurs intermédiaires* suivants sont équivalents :

- ⋆ Si f est définie et continue en tout point d'un intervalle I alors pour tout sous-intervalle J de I, l'image $f(J)$ est un intervalle.
- ⋆ L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$ avec $f(a) \le f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$; plus précisément :

$$\forall d \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

a) On considère la fonction $f\colon x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement croissante sur $]0; +\infty[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 16$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -16)$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$. De plus $f(0) = -16$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

c) On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - \sqrt{2}$. f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étant une parabole convexe de sommet $(0, -\sqrt{2})$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. De plus $f(0) = -\sqrt{2}$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Par conséquent, la fonction f, strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, est négative en $x = 0$ et positive pour $x \to -\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation associée à la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

d) Soit $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi} = 0$. f est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Elle est strictement croissante, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\sqrt{\pi} < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un et un seul $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$ et ce c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.10

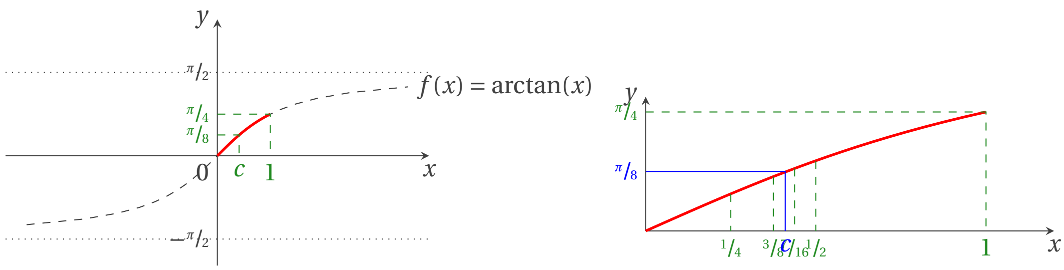
Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Correction

Rappelons le théorème des valeurs intermédiaires : *soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.* Comme la fonction arctan est définie et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc continue sur l'intervalle $[0; 1]$. Puisque $\pi/8$ est compris entre $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \pi/4$, alors il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $\arctan(c) = \pi/8$. De plus, la fonction arctan est monotone croissante donc ce c est unique.

Dichotomie :

k	a_k	b_k	x_k	$\text{erreur}_k \leq$
1	0	1	1/2	1
2	0	1/2	1/4	1/2
3	1/4	1/2	3/8	1/4
4	3/8	1/2	7/16	1/8



Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction

On ne peut pas définir une application $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ car

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +1.$$

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Correction

La limite de $f(x)$ pour x qui tend vers 0 n'existe pas.

Exercice 5.13

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Correction

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ est solution du problème. Si $f(1) = 1$ alors $\alpha = 1$ est solution du problème. Supposons $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$. Soit g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$. Comme $f(0) > 0$ alors $g(0) > 0$. Comme $f(1) < 1$ alors $g(1) < 0$. Or g est continue sur $[0,1]$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui implique $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction

On considère la fonction $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. On remarque que $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $h(x_0) = 0$. Comme $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$, alors $x_0 \in]a,b[$. Comme $h(x_0) = 0$ alors $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5.15

Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Correction

On considère trois points x_i tels que $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. Supposons par absurde que $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, si on considère l'intervalle $I = [f(x_2), \min f(x_1), f(x_3)]$, pour tout $u \in I$ il existe $s \in]x_1, x_2[$ et $t \in]x_2, x_3[$ tels que $f(s) = u = f(t)$. Puisque f est injective, $s = t$, en contradiction avec le fait que $x_1 < s < x_2 < t < x_3$.

Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

Correction

Soit le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec n impair. Si $a_n > 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. De même, si $a_n < 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$; P étant une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.