4

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction...), seront représentés par des lettres a, b, E, μ ... et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \qquad \text{ou bien} \qquad a \neq b.$$

4.1 Logique et quantificateurs

4.1 Définition (Assertion)
Une ASSERTION est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

EXEMPLE
"$1 < 2$" est une assertion vraie, "$4 < 3$" est une assertion fausse.

4.2 Définition (Proposition ou Prédicat)
Une PROPOSITION (ou prédicat) est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

EXEMPLE
- ⋆ "$x < 2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.
- ⋆ L'énoncé «Mon pays se situe en Europe» sera vrai ou faux en fonction de la valeur de la variable «Mon pays». Si le lecteur est français, on obtiendra la proposition «La France se situe en Europe», qui est vraie ; si le lecteur est canadien, on obtiendra la proposition «Le Canada se situe en Europe» qui est fausse

4.3 Définition (Négation d'une proposition)
La NÉGATION d'une proposition "P", notée "non(P)" ou "$\neg(P)$", est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie. Par conséquent, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes.

EXEMPLE
La proposition "$x < 2$" est la négation de la proposition "$x \geq 2$" .

4.4 Définition (Conjonction de deux propositions)
La CONJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P et Q" ou "$P \wedge Q$", est une proposition vraie si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

EXEMPLE
La conjonction des propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 2$" est "$x = 2$".

4.5 Définition (Incompatibilité de deux propositions)
Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

EXEMPLE
Les propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 5$" sont incompatibles.

4.6 Définition (Disjonction de deux propositions)
La DISJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P ou Q" ou "$P \vee Q$', est une proposition vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

EXEMPLE
La disjonction "$x > 2$ ou $x < 2$" est "$x \ne 2$".

4.7 Définition (Implication de deux propositions)
L'IMPLICATION de deux propositions P, Q, notée "$P \implies Q$", est la proposition "(non(P)) ou Q".
Sa contraposée (qui est logiquement équivalente) est la proposition "(non(non(Q))) ou (non$P$)", notée "(non(Q)) $\implies$ (non(P))".
Sa négation est la proposition "P et (non(Q))".
Sa réciproque est la proposition "(non(Q)) ou P", notée "$Q \implies P$".

Remarque
L'implication "$P \implies Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P \implies Q$" soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse.
L'implication "$P \implies Q$" équivaut à l'implication "non(Q) $\implies$ non(P)" (sa contraposée) et on écrit

$$\text{“}P \implies Q\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“non}(Q) \implies \text{non}(P)\text{”}$$

4.8 Définition (Théorème)
P et Q étant deux assertions, si l'implication "$P \implies Q$" est vraie on dit que c'est un THÉORÈME (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'HYPOTHÈSE et Q la CONCLUSION).

ATTENTION
Soit P ="Jour férié" et Q ="le facteur ne passe pas". La phrase «Les jours fériés le facteur ne passe pas» signifie que "$P \implies Q$". Il ne viendrait à l'esprit de personne d'inverser le raisonnement en «Le facteur ne passe pas aujourd'hui donc c'est forcément un jour férié», autrement dit, si on sait juste que "$P \implies Q$", alors à partir de "$\neg P$" il n'est pas possible de déduire quoi que ce soit.

4.9 Définition (Équivalence de deux propositions)
L'ÉQUIVALENCE de deux propositions P, Q, notée "$P \iff Q$", est la proposition "($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)".
Sa négation est la proposition "(P et non(Q)) ou (Q et non(P))" qui signifie "ou bien P, ou bien Q".

Tables de vérité La méthode des tables de vérité est une méthode élémentaire pour tester la validité d'une formule du calcul propositionnel. Les énoncés étant composés à partir des connecteurs «non», «et», «ou», «si…, alors», «si et seulement si», notés respectivement $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$, les fonctions de vérités du calcul propositionnel classique sont données par la table de vérité suivante :

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V	V	V	V

En logique classique, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes (*i.e.* même table de vérité). Voici quelques règles d'utilisation des négations en logique classique :

- ⋆ "$\neg(P \vee Q)$" ≡ "$(\neg(P)) \wedge (\neg(Q))$"
- ⋆ "$\neg(P \wedge Q)$" ≡ "$(\neg(P)) \vee (\neg(Q))$"
- ⋆ "$\neg(P \implies Q)$" ≡ "$P \wedge (\neg(Q))$"

En effet

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(P \implies Q)$	$(\neg(P)) \wedge (\neg(Q))$	$(\neg(P)) \vee (\neg(Q))$	$P \wedge (\neg(Q))$
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F

Implication		Proposition
$P \implies Q$	≡	$(\neg P) \vee Q$
≡		≡
Contraposée		Proposition
$(\neg Q) \implies (\neg P)$	≡	$(\neg(\neg Q)) \vee (\neg P)$

Négation		Proposition
$\neg(P \implies Q)$	≡	$P \wedge (\neg Q)$

Réciproque		Proposition
$Q \implies P$	≡	$(\neg Q) \vee P$
≡		≡
Contraposée de la réciproque		Proposition
$(\neg P) \implies (\neg Q)$	≡	$(\neg(\neg P)) \vee (\neg Q)$

Équivalence		
$P \iff Q$	≡	$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$

4.2 Différents types de raisonnement

Prouver une implication "$P \implies Q$" Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'implication "$P \implies Q$" est vraie il existe différents types de raisonnements.

Raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Raisonnement par contraposée : on sait que "$P \implies Q$" et "non$(Q) \implies$ non(P)" ont même véracité. Pour montrer "$P \implies Q$" on peut donc montrer que l'implication "non$(Q) \implies$ non(P)" est vraie, *i.e.* on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.

Raisonnement par l'absurde : on suppose que "$P \implies Q$" est fausse (ou, ce qui est équivalent, que "P et (non(Q))" est vraie) et on montre que l'on obtient une contradiction.

Remarque

P et Q étant deux assertions, on veut prouver que l'implication "$P \implies Q$" est fausse. On peut utiliser le

Raisonnement par négation (ou contre-exemple) : on montre que sa négation, qui est la proposition "P et (non(Q))", est vraie.

Exemple

On veut montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

⋆ Montrons d'abord que p^2 pair $\implies$ p pair pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
On note $A =$"p^2 pair" et $B =$"p pair". Pour montrer que $A \implies B$ on va utiliser un raisonnement «par contraposée» et montrer l'énoncé équivalent $\neg B \implies \neg A$:

$$\begin{aligned}
\neg B \text{ vrai} &\implies B \text{ faux}\\
&\implies p \text{ impair}\\
&\implies p = 2k+1 \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}\\
&\implies p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1\\
&\implies p^2 \text{ impair}\\
&\implies A \text{ faux}\\
&\implies \neg A \text{ vrai}
\end{aligned}$$

⋆ Montrons maintenant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On va utiliser une démonstration «par l'absurde». Si l'on pouvait écrire $\sqrt{2} = p/q$, une fraction irréductible (*i.e.* qu'on ne peut pas simplifier), alors, en élevant au carré, on aurait $2 = p^2/q^2$, donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 serait un nombre pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, p aussi serait un nombre pair, alors p^2 serait divisible par 4, donc q^2 serait pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, q aussi serait pair, ce qui est contradictoire avec le fait que la fraction était irréductible.

Prouver une équivalence "$P \iff Q$" Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'équivalence "$P \iff Q$" est vraie on peut

1. soit montrer les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$ avec l'une des méthodes du paragraphe précédent,
2. soit procéder directement par équivalences : $P \iff P_1 \iff \dots \iff Q$.

Raisonnement par récurrence Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on considère une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Alors, si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \geq n_0$, l'implication $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Le raisonnement par récurrence est une manière de démontrer qu'un résultat portant sur une infinité de nombres naturels est vrai. Mais avant de commencer la preuve par récurrence, il faut d'abord connaître le résultat à prouver ! C'est la partie créative des mathématiques ☺

Exemple
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.
Raisonnons par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Hérédité : Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Soit un entier $n \geq 0$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors

$$5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \overset{\mathscr{P}(n)}{\geq} 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) \geq 4 \times 4^{n+2} + 3 \times 3^{n+2}) = 4^{n+3} + 3^{n+3}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Exemple
On trace n droites dans le plan. On veut montrer que les régions ainsi formées par les n droites peuvent toujours être coloriées avec deux couleurs, de manière à ce qu'aucune région ait la même couleur que sa ou ses régions voisines, c'est-à-dire les régions qui partagent avec elle un segment de droite comme frontière.
Raisonnons par récurrence :

Initialisation : on peut certainement colorier le plan avec deux couleurs, disons noir et blanc, lorsqu'il n'y a qu'une seule droite.

Hérédité : Notre hypothèse d'induction est qu'on peut colorier les régions d'un plan contenant n droites. On considère un plan avec $n+1$ droites. On enlève une droite parmi les $n+1$: il en reste seulement n et par l'hypothèse, il est possible de colorier les régions du plan formées par les n droites. On réintroduit la$(n+1)$-ième droite. Cette droite sépare le plan en deux demi-plans. On choisit un de ces deux demi-plans et on change systématiquement les couleurs dans chacune des régions de ce demi-plan : les régions noires deviennent blanches et les régions blanches deviennent noires. On laisse l'autre demi-plan (de l'autre côté de la droite) intact. Le plan est maintenant adéquatement colorié. En effet,

- ⋆ si deux régions du plan séparé par les $n+1$ droites ont une frontière composée d'un segment appartenant à une des premières n droites, alors ces régions avaient déjà des couleurs différentes avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on laisse ces couleurs déjà différentes telles quelles ou on les changes toutes les deux ;
- ⋆ si deux régions ont une frontière composée d'un segment appartenant à la $(n+1)$-ième droite, alors avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite, elles faisaient partie de la même région et donc étaient coloriées de la même couleur. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on change les couleurs d'une des deux régions, d'un côté de la droite, mais pas de l'autre. Ces régions nouvellement voisines ont donc maintenant des couleurs différentes.

Source : `http://www.thedudeminds.net/`

EXEMPLE

Le nombre d'or est noté φ et vaut $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On veut montrer par récurrence que toute puissance de φ s'écrit comme $a\varphi + b$ avec a et b deux constantes indépendantes de φ.
Pour cela on va d'abord démontrer une formule portant sur le nombre d'or :

$$\varphi^2 = \varphi + 1. \tag{4.1}$$

Preuve : $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}+4}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$. On peut alors énoncer le théorème : “pour tout $n \geq 0$, $P(n)$ est vraie” avec

$$P(n) = \text{“}\exists a_n, b_n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \varphi^n = a_n\varphi + b_n\text{”}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n :

Initialisation Pour $n =$, $\varphi^0 = 1$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Hérédité Prouvons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on a l'implication $P(n) \implies P(n+1)$. Soit $P(n)$ vraie, alors

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n\varphi \overset{P(n)}{=} (a_n\varphi + b_n)\varphi = a_n\varphi^2 + b_n\varphi \overset{(4.1)}{=} a_n(\varphi+1) + b_n\varphi = (a_n+b_n)\varphi + a_n$$

ainsi si on note $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n$ on a bien $\varphi^{n+1} = a_{n+1}\varphi + b_{n+1}$, *i.e.* $P(n+1)$ est vraie.

Si on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de FIBONACCI :

$$\begin{cases} F_0 = 1, \\ F_1 = 1,; \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

on remarque que $a_n = F_n$ et $b_n = F_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.3 Théorie des ensembles et quantificateurs

4.10 **Définition (Ensemble, élément)**
Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a \in E \qquad \text{ou bien} \qquad a \notin E.$$

Remarque
On dit aussi “a est élément de E” ou bien “a n'est pas élément de E” ou encore “E contient a” ou bien “E ne contient pas a”. Si un ensemble E est constitué des éléments a, b, c, on écrira : $E = \{a, b, c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a \in a$.

4.11 **Définition (Inclusion)**
Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F \subset E$.

Remarque
On dit aussi “F est une partie de E” ou encore “F est un sous-ensemble de E”.

4.12 Définition (Complémentaire)
Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

4.13 Définition (Égalité)
Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

4.14 Définition (Utilisation des quantificateurs)
Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

Notation "Il existe x élément de E" s'écrit "$\exists x \in E$".
"Pour tout x de E" ou "Quel que soit un élément x de E" s'écrit "$\forall x \in E$".

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x, y),$$
$$\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important :

- ⋆ dans l'écriture
$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y)$$
y dépend de x,
- ⋆ dans l'écriture
$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$$
y est indépendant de x.

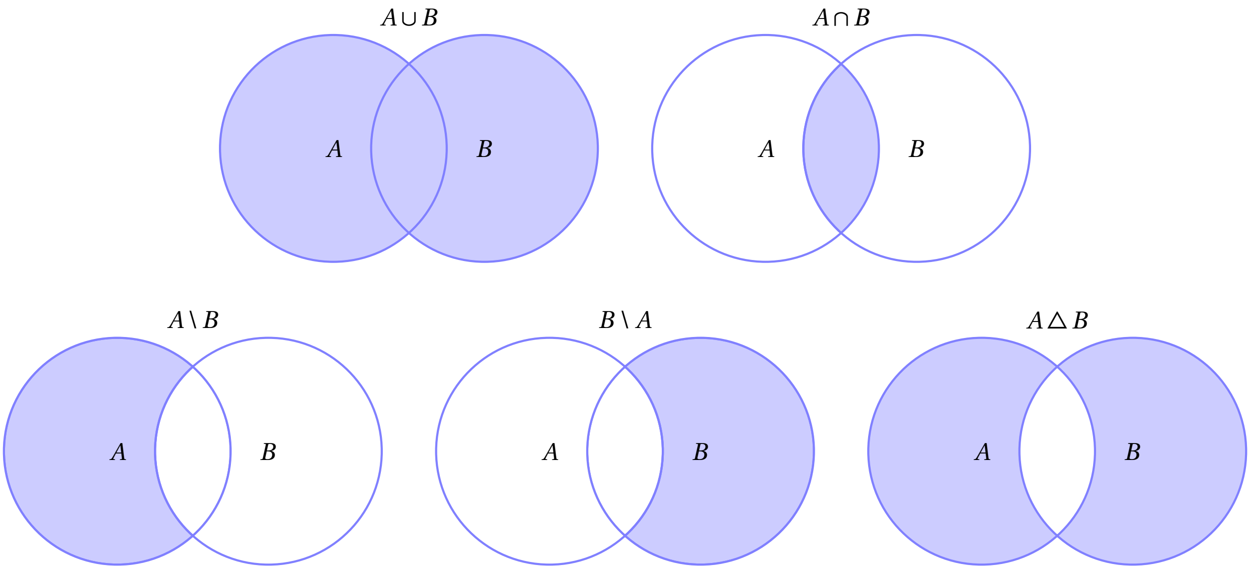
Négation La négation de "$\forall x \in E$, x vérifie p" est "$\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p". La négation de "$\exists x \in E$, x vérifie p" est "$\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p".

Remarque
Soit A une partie de E.

- ⋆ L'énoncé "A est la partie *vide*" (on note $A = \emptyset$) et sa négation "A est *non vide*" (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à "quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A" et "il existe au moins un élément de E qui est élément de A" et s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \notin A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \in A$.
- ⋆ L'énoncé "A est la partie *pleine*" (on note $A = E$) et sa négation "A n'est pas la partie *pleine*" (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \in A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \notin A$.
- ⋆ Les propositions "$x \in A$" et "$x \notin A$" sont souvent remplacées respectivement par "x vérifie la propriété p" et "x ne vérifie pas la propriété p" où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.

4.15 Définition (Opérations booléennes)
Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

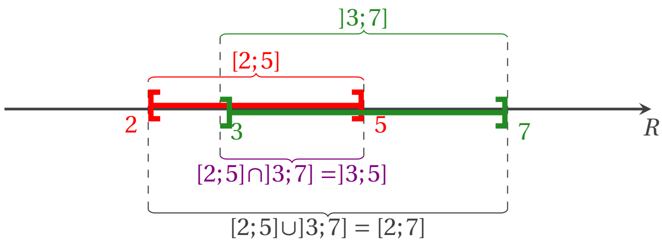
- ⋆ $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
- ⋆ $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.



4.16 Définition (Réunion et intersection d'une famille de parties de E)
Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \qquad\qquad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$

Exemple



EXEMPLE

A_n	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$[2;4]$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$]2;4]$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$[2;4[$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$]2;4[$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$[0;5[$	$[1;4]$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]0;5[$	$[1;4]$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$[0;5[$	$[1;4[$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]0;5[$	$[1;4[$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$]2;5]$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$]2;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$[0;6]$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]0;6]$	$[1;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$[0;6[$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]0;6[$	$[1;5]$

