Licence Sciences et Techniques
L1 INFO MATH

M11 Partie 1
Mathématiques 1

Recueil d'exercices.

Gloria Faccanoni
http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignement.html

Année 2024-2025

Table des matières

Les exercices de ce recueil, dont les corrigés sont disponibles en ligne, sont de difficulté variée, et doivent vous permettre de vous former aux bases du calcul différentiel, nécessaire à toute formation scientifique. Une méthode d'étude efficace consiste à chercher activement la solution d'un exercice (en écrivant ses tentatives au brouillon !), avant de chercher éventuellement de l'aide (soit auprès d'un camarade ou d'un enseignant, soit en consultant le début de la correction), et enfin de passer à une rédaction propre de la solution.

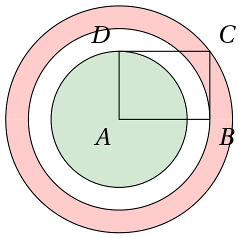
Ce recueil a été mis au point sur plusieurs années par G. Faccanoni, et légèrement retravaillé par T. Champion depuis 2020. Il contient encore très certainement des erreurs, malgré de nombreuses relectures, que vous êtes encouragé-e-s à signaler à : thierry.champion@univ-tln.fr

1
Méthodologie disciplinaire

Géométrie

Exercice 1.1
La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.2
Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Exercice 1.3 (Le tour du monde — MathC2+)
On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faut-il ajouter à cette ceinture si on veut l'écarter d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ? NB. Le rayon de la Terre est de 6400km environ.
Même question pour un ballon de handball (le rayon d'un tel ballon est d'environ 16cm).

Calcul

Exercice 1.4
Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A = \frac{51}{136}, \qquad B = \frac{1015}{2\,450}, \qquad C = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125}, \qquad D = 1 - \frac{27}{125} - \frac{549}{1\,000},$$

$$E = \frac{549}{1\,000} + 2 \times \frac{235}{1\,000}, \qquad F = 0{,}000\,001\,25, \qquad G = \frac{\frac{4}{7} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}.$$

Exercice 1.5
Sans utiliser la calculatrice, calculer

$$A)\,12.5\% \text{ de } 164 \qquad B)\,13\% \text{ de } 50\% \text{ de } 800 \qquad C)\,\frac{300}{30\%} \qquad D)\,14 \times 5\% \qquad E)\,(412 - 518) \times 116\%$$

Exercice 1.6
Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100} \times \sqrt{9}$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$,

Exercice 1.7
Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $A = 2x$, $B = 4x^2 - 1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C = 2xB - A, \qquad D = 2xC - B, \qquad E = 2xD - C.$$

Exercice 1.8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2001^2 - 1999^2$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$,

Logarithmes et exponentielles

Exercice 1.9
Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 1.10
Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1\,000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$

f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$

k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 1.11
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \quad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \quad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)),$$

$$D = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1\text{)}, \quad E = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \quad F = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Puissances

Exercice 1.12
Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 1.13
Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Exercice 1.14
Calculer, factoriser ou simplifier (quand c'est possible) :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) $e^3 + e^6$ d) $e^{-6}e^8$ e) $2^4 4^7$ f) $2^4 e^5$

Exercice 1.15
Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} \qquad B = (\sqrt[6]{3})^3 \qquad C = \sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E = \frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G = \sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H = (2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I = \frac{2 \times \left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Équations et inégalités

Exercice 1.16

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $(\sqrt{x})^2 = 1$
3. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x + 3(18 - 26x + 4^2) = 70 - 3x$

Exercice 1.17

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
3. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
4. $x^2 < 0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x} > 0{,}000\,1$,
6. $x^2 > 1$.

Exercice 1.18

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 1.19

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ .... $]-\infty,-\sqrt{7}[\cup]-1,1[\cup]+\sqrt{7},+\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-1/2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geq x-3$ .... $\left]-\infty, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \setminus \{-1,1\}$

Géométrie analytique

Exercice 1.20 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 1.21 (Cercles)

1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

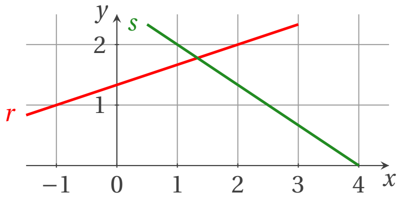
Exercice 1.22 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Systèmes linéaires

Exercice 1.23

Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 1.24

Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de Gauss

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 15. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} -2u - 4v + 3w = -1 \\ 2v - w = 1 \\ u + v - 3w = -6 \end{cases}$$

Exercice 1.25

Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ -11x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Exercice 1.26 (V. Guirardel)

Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
Qui	7	12	6	8
Quo	11	6	10	9
Qua	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Exercice 1.27

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x - \alpha y = 1, \\ \alpha x - y = 1. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.28

Soit le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + \beta z = 3, \\ x + \beta y + 3z = -3. \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.29 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.30 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Problèmes

Exercice 1.31
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing?

Exercice 1.32 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")
On suppose que les concombres sont composés de a% d'eau à la cueillette. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain, à cause de la chaleur et de l'évaporation, les concombres ne contient plus que b% d'eau avec $0<b<a<100$. Quel est le nouveau poids de ce stock de concombres?
Considérer par exemple $M=500$, $a=99$ et $b=98$.

Exercice 1.33
Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% des votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus?

Exercice 1.34
La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009?

Exercice 1.35
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial?

Exercice 1.36
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20%?

Exercice 1.37
Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60%?

Exercice 1.38
Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier?

Exercice 1.39
Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km)?

Exercice 1.40 (L'architecte — MathC2+)
Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable?

2

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Logique

Exercice 2.1

Écrire les tables de vérité suivantes :

a) "non(P) et Q"

b) "non(P et Q)"

c) "(non(P)) ou (non(Q))"

d) "$P \implies Q$" (*i.e.* "(non(P)) ou Q")

Exercice 2.2

Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque, et dire si elle est vraie ou fausse (on justifie succinctement) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x > 2 \implies x > 3$
3. $x = 3 \implies x^2 = 9$
4. $x^2 = 9 \implies x = -3$

Exercice 2.3

Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
5. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Exercice 2.4

Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non(P) $\wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non(P) $\vee Q$" est fausse

Exercice 2.5

1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Exercice 2.6

On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Exercice 2.7
Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.». Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 2.8 (Th. CHAMPION)
On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 2.9 (Th. CHAMPION)
On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

> "Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 2.10
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend exactement une fois la valeur 1
4. f prend ses valeurs entre -2 et 3
5. f ne prend que des valeurs entiers
6. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1,1[$

Exercice 2.11
Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 2.12
On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Récurrence

Exercice 2.13
Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, 2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2)$,

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$,

Ensembles

Exercice 2.14
Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E\left(C_E F\right) = F$

2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$

3) $C_E(F \cup G) = \left(C_E F\right) \cap \left(C_E G\right)$ et $C_E(F \cap G) = \left(C_E F\right) \cup \left(C_E G\right)$ [Lois de Morgan]

Exercice 2.15
Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Exercice 2.16
Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Avancé

Exercice 2.17
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right].$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;

8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, 11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;

3

Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

Exercice 3.1

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(e^x) \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\ln(x)}$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{1-x^2} \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{|x|} \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(|x|)$$

Exercice 3.2

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x) = e^x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x) = e^{2x} - (x+1)e^x, \qquad f_6(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x) = \ln(x) - x,$$

Composée de fonctions

Exercice 3.3

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x \mapsto 2x-8$ et $v\colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 3.4

Considérons les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x} \qquad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) \qquad w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $h \circ g \circ f$ d) $u \circ v$ e) $v \circ u$ f) $w \circ v \circ u$

Exercice 3.5

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux

formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Parité

Exercice 3.6
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x)=x^2-1+\sin^2(x),\qquad f_2(x)=\frac{\tan(x)-x}{x^3\cos(x)},\qquad f_3(x)=\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan(x)},\qquad f_4(x)=\frac{x-1}{\sin(x+1)}+\cos(x).$$

Périodicité

Exercice 3.7
Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\cos(3x),\qquad f_2(x)=\sqrt{\tan(x)},\qquad f_3(x)=\cos^4(8x),\qquad f_4(x)=|\cos(5x)|,$$
$$f_5(x)=\cos(3x)+\sin(2x),\qquad f_6(x)=\frac{\cos(5x)}{\sin(5x)},\qquad f_7(x)=\cos(5x)\sin(3x),\qquad f_8(x)=\cos(3x)\sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes

Exercice 3.8
Pour chaque fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x)=x^2$
2. $f(x)=1-x^2$
3. $f(x)=-2(x+1)^2$
4. $f(x)=\sqrt{x}$
5. $f(x)=3\sqrt{x-1}$
6. $f(x)=\sqrt{3x}-1$
7. $f(x)=\ln(x)$
8. $f(x)=\ln(-x)$
9. $f(x)=\ln(x-1)$
10. $f(x)=e^x$
11. $f(x)=e^{x-1}$
12. $f(x)=e^{-x}$
13. $f(x)=\cos(x)$
14. $f(x)=\cos(2x)$
15. $f(x)=1+\cos(2x)$

Exercice 3.9
Soit $f\colon x\mapsto |x-3|-|2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction d'intervalles de valeurs pour x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3.10
On considère la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln(x)\end{aligned}$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Exercice 3.11

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

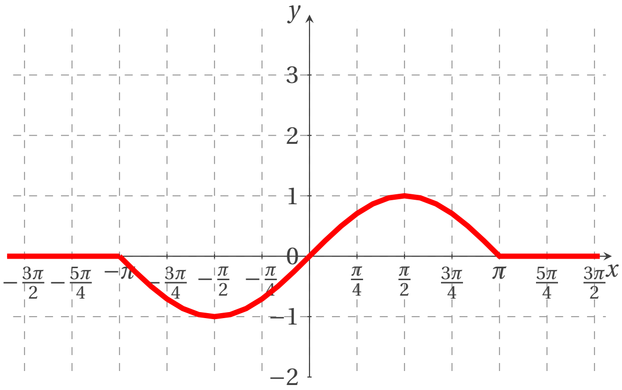
$$f: x \mapsto x, \qquad g: x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h: x \mapsto x^2, \qquad u: x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w: x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 3.12

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

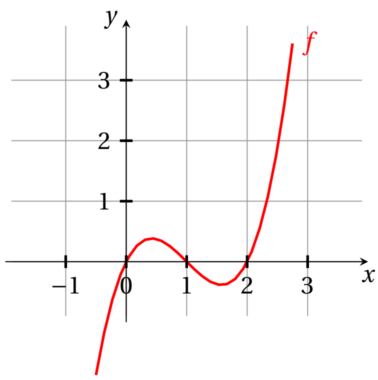
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi; \pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



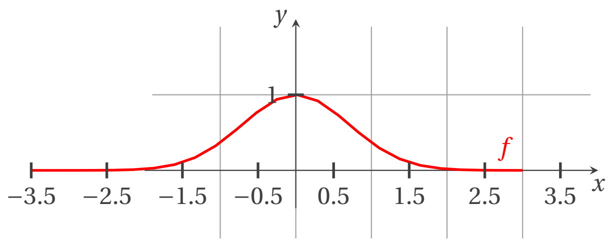
Exercice 3.13

Pour la fonction dont le graphe est reproduit ci-contre, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.14

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 3.16
Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1,2,3,4$.

Exercice 3.17
Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 3.18 (Échelles de température)
Une température de 32 °F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212 °F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit?

Exercice 3.19
Un réseau de téléphonie mobile annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne?

Exercice 3.20 (Gaz parfait)
D'après la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 3.21
D'après Michaelis et Menten, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de Michaelis-Menten spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Exercice 3.22
La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Exercice 3.23
Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Exercice 3.24
Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 $\mathrm{m\,s^{-1}}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète?

Exercice 3.25
L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Injectivité, surjectivité...

Exercice 3.26

Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si...”

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

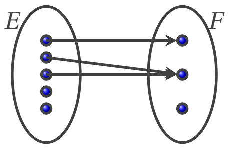
Exercice 3.27

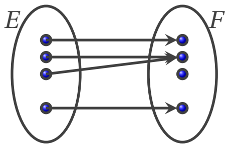
Comment doit-on compléter la définition suivante : “ Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si...”

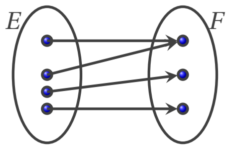
☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

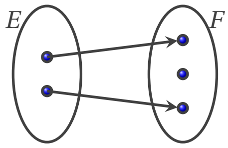
Exercice 3.28

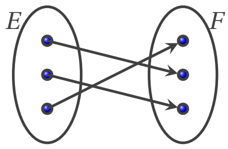
Soit E et F deux ensembles. Pour chaque fonction de E dans F représentée ci-dessous, déterminer le domaine de définition, et si elle est injective et/ou surjective.

1. 

2. 

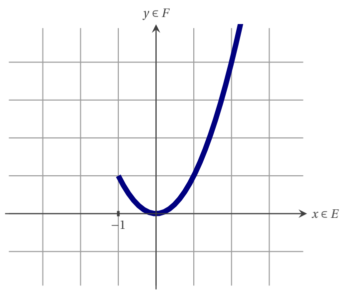
3. 

4. 

5. 

Exercice 3.29

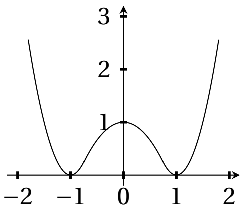
Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :



Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Exercice 3.30
On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 3.31
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 3.32
Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 3.33
Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercice 3.34
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.
1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

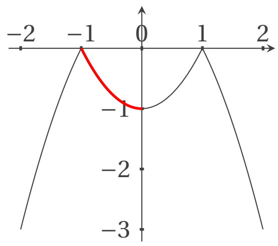
Exercice 3.35
1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3.36 (composition, réciprocité)
Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3.37 (réciprocité)
1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.38
Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x)=f(x)$.
   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x)=f(x)$.
   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Exercice 3.39
Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$ $\quad A_4 = \{3+7q \,:\, q\in\mathbb{N}\}$ $\quad A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n\in\mathbb{N}^*\}$
$A_2 = \mathbb{N}$ $\quad A_5 = \{3-7q \,:\, q\in\mathbb{N}\}$ $\quad A_8 = \mathbb{R}$
$A_3 = \mathbb{Z}$ $\quad A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n\in\mathbb{N}\}$ $\quad A_9 =]5,6]$

Exercice 3.40
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1+x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A=[0,1]$ $\quad B=]-1,4[$ $\quad C=[0,+\infty[$ $\quad D=]-\infty,5]$

Exercice 3.41
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Soient $A:=[-2,1]$ et $B:=[-1,4]$.

1. Comparer $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$.
2. Comparer $f(A\cup B)$ et $f(A)\cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 3.42
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=2x^2+1$. Soit $A=[-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, c) $\sup_A f$, d) $\inf_A f$.

Exercice 3.43
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=1-2x^2$. Soit $A=[-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, c) $\sup_A f$, d) $\inf_A f$.

Avancé

Exercice 3.44
Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que
$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)=\bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)\subset\bigcap_{i\in I} f(A_i).$$
2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)=\bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 3.45
Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A\subset E,\ A\subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B\subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big)\subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A\subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big)=A$;
4. f est surjective ssi $\forall B\subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big)=B$.

4

Suites numériques et limites

Suites arithmétiques et géométriques

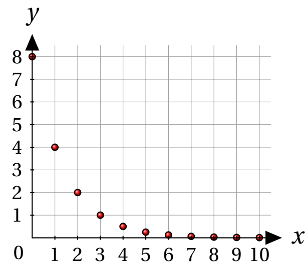
Exercice 4.1

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 4.2 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 4.3

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Calculs de limites

Exercice 4.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5

Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a) $\dfrac{1}{n}+n^2+1$ b) $\dfrac{2n}{n^3+1}$ c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ f) $\sqrt{n^5+3n}-n$ g) $n-\sqrt{n^3-3n}$ h) $n-\sqrt{n^2-3n}$

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}$ j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}$ k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ n) $\dfrac{(-1)^n\arctan(n)}{n}$ o) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$ p) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$

Exercice 4.6

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Exercice 4.7

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,

Exercice 4.8

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, en supposant que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

a) $u_n>\ln n$ *b)* $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac{1}{n}$ *c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\dfrac{1}{n}$ *d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$

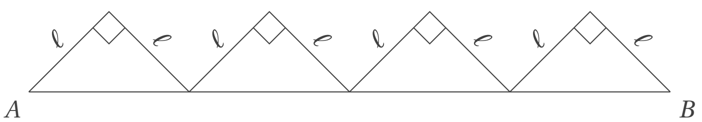
e) $u_n=\ln n+\sin(n)$ *f)* $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n=\dfrac{n}{e}+\dfrac{1}{e^n}$ *h)* $u_n=\dfrac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *n)* $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *o)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$ *p)* $u_n=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

Exercice 4.9

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient une ligne de segments de longueur $L=2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Suites récurrentes

Exercice 4.10 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,}\\ u_{n+1}=\varphi(u_n) & \forall n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$ b) $1 \leq u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Exercice 4.11 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 4.12

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \ldots}}}}$$

Lequel et que vaut b ?

Avancé

Exercice 4.13

Donner l'exemple

1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 4.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(a) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$."

(b) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$."

(c) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement"

(d) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M."

5

Limites et continuité

Exercice 5.1

Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 5.2

En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de $g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Exercice 5.3

Dans le modèle de croissance de population de Verhulst la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 5.4 (F.I.)

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Exercice 5.5

Compléter le tableau suivant :

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$				

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.7

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.8

1. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 5.9

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,

b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 5.10

Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.13

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 5.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5.15

Soit f une fonction continue et injective de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

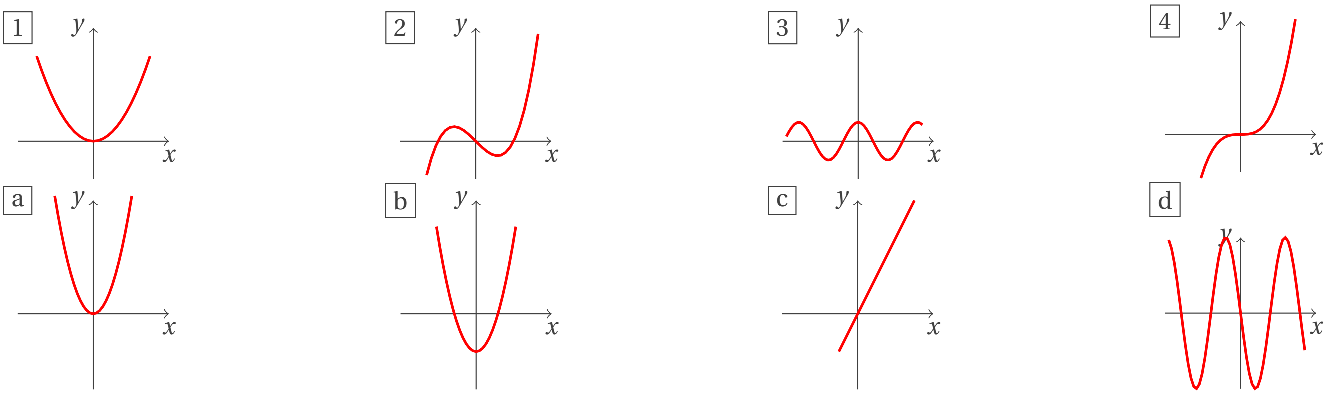
Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

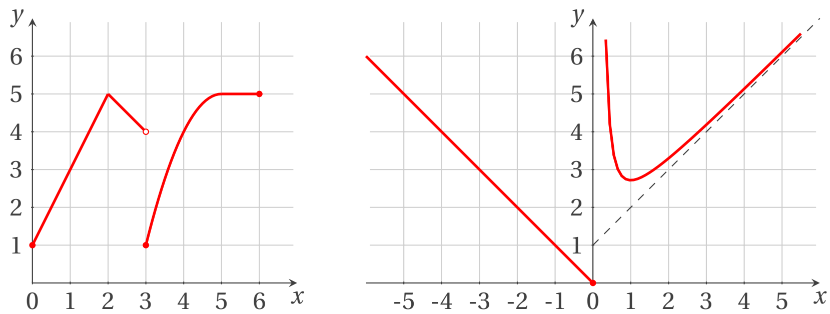
6
Dérivabilité

Premiers calculs

Exercice 6.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 6.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.



Exercice 6.3
Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $4x^3+2x-1$ c) $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ d) $x^3\sin(x)$

e) $x^2\tan(x)$ f) $5x^2$ g) $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$ h) $\sin(x)\cos(x)$

i) $\cos(-2x+1)$ j) $\dfrac{x}{\sin(2x)}$ k) $\ln(x^2+1)$ l) e^{x^2-3}

Exercice 6.4 (Tangentes)
1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=x^2+1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$. Trouver a et b.

5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x=a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x=1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x=1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$ si $f(1)=3$ et $g(1)=2$?

Exercice 6.5

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V)=nRT/(V-nb)-an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Exercice 6.6

Trouver la vitesse au temps $t=2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t)=A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Règle de L'Hôpital

Exercice 6.7 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

Exercice 6.8 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Exercice 6.9 (Théorème de l'HÔPITAL)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL pour les calculer ?

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Exercice 6.10 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Exercice 6.11 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[\infty - \infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Exercice 6.12

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Étude des variations

Exercice 6.13

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

Exercice 6.14

Considérons la fonction $f: [-\frac{\pi}{2}; \pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Exercice 6.15

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

- [ ] 1. $f(x) = |x| + 1$
- [ ] 2. $f(x) = e^x - x$
- [ ] 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- [ ] 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- [ ] 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Exercice 6.16

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.17

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x=0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=1$.
3. f est-elle dérivable en $x=0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x=0$ le cas échéant.

Exercice 6.18

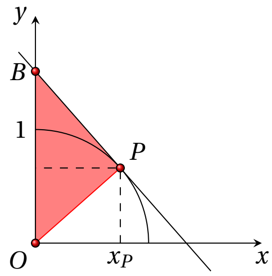
Soit $g:]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_-$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1;0[$.

Recherche d'extrema

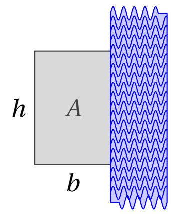
Exercice 6.19

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Exercice 6.20

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Exercice 6.21

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4,0)$.

Exercice 6.22 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exercice 6.23 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 6.24

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 6.25
On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Théorème des accroissements finis

Exercice 6.26 (Application du théorème des accroissements finis)
Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 6.27
Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Avancé

Exercice 6.28
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 6.29
On considère une fonction exponentielle $f\colon x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* la valeur choisie pour c.

Exercice 6.30
Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,

b) f est surjective et non injective,

c) f est bijective et non continue au point 1,

d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,

e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,

f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' existe mais est non continue au point 0,

g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Nota bene : les domaines de départ et d'arrivée sont donnés ! On ne peut choisir que l'expression de $f(x)$.

Exercice 6.31
Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

7

Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 7.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en précisant les points suivants :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. convexité, concavité,
5. graphe.

Exercice 7.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. graph.

Exercice 7.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche les asymptotes.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Exercice 7.4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

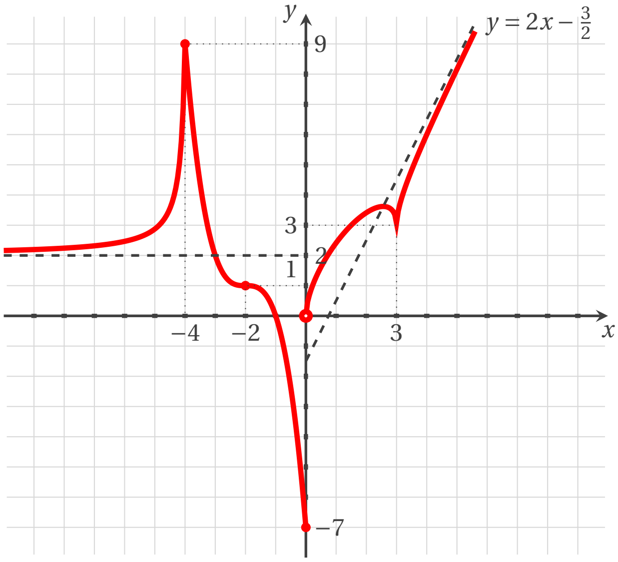
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 7.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x+27} & \text{si } x \le -4, \\ 1 - (x+2)^3 & \text{si } -4 < x \le 0, \\ x + \sqrt{|x^2 - 3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.

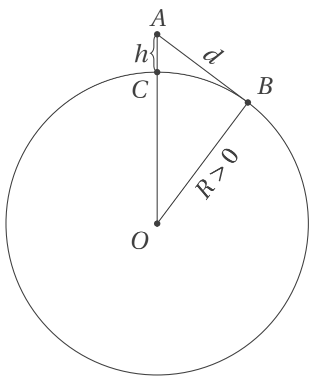


Pour la plupart des questions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$? Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
5. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$.

Exercice 7.6

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \ge 0$ au-dessus du niveau de la mer.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Étudier cette limite de visibilité en fonction de h.
Exemples : Le rayon de la terre est $R \approx 6371$ km. Un adulte de $h = 1.80$ m voit jusqu'à $d(h) \approx 4.8$ km, un enfant de $h = 1$ m verra jusqu'à $d(h) \approx 3.6$ km. Depuis le sommet de la tour Eiffel $h = 273$ m, on voit jusqu'à $d(h) \approx 59$ km.

1

Méthodologie disciplinaire

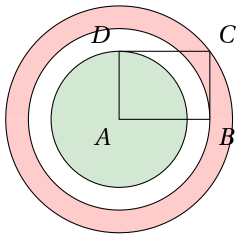
Géométrie

Exercice 1.1

La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.2

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Exercice 1.3 (Le tour du monde — MathC2+)

On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faut-il ajouter à cette ceinture si on veut l'écarter d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ? NB. Le rayon de la Terre est de 6400km environ.

Même question pour un ballon de handball (le rayon d'un tel ballon est d'environ 16cm).

Calcul

Exercice 1.4

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A=\frac{51}{136},\qquad B=\frac{1015}{2\,450},\qquad C=\frac{9}{40}+\frac{9}{50}+\frac{18}{125},\qquad D=1-\frac{27}{125}-\frac{549}{1\,000},$$

$$E=\frac{549}{1\,000}+2\times\frac{235}{1\,000},\qquad F=0{,}000\,001\,25,\qquad G=\frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}.$$

Exercice 1.5

Sans utiliser la calculatrice, calculer

$A)$12.5% de 164 $\qquad B)$13% de 50% de 800 $\qquad C)\dfrac{300}{30\%}$ $\qquad D)14\times 5\%$ $\qquad E)(412-518)\times 116\%$

Exercice 1.6

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$,

Exercice 1.7
Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $A = 2x$, $B = 4x^2 - 1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C = 2xB - A, \qquad D = 2xC - B, \qquad E = 2xD - C.$$

Exercice 1.8
Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2001^2 - 1999^2$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$,

Logarithmes et exponentielles

Exercice 1.9
Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 1.10
Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1\,000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$
f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$
k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 1.11
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \qquad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \qquad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)),$$

$$D = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1\text{)}, \qquad E = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \qquad F = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Puissances

Exercice 1.12
Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 1.13
Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Exercice 1.14
Calculer, factoriser ou simplifier (quand c'est possible) :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) $e^3 + e^6$ d) $e^{-6}e^8$ e) $2^4 4^7$ f) 2^4e^5

Exercice 1.15
Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} \qquad B = (\sqrt[6]{3})^3 \qquad C = \sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E = \frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G = \sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H = (2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I = \frac{2 \times \left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Équations et inégalités

Exercice 1.16

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $(\sqrt{x})^2 = 1$
3. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x + 3(18 - 26x + 4^2) = 70 - 3x$

Exercice 1.17

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
3. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
4. $x^2 < 0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x} > 0{,}000\,1$,
6. $x^2 > 1$.

Exercice 1.18

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 1.19

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]+2,+\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty,1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ .... $]-\infty,-\sqrt{7}[\cup]-1,1[\cup]+\sqrt{7},+\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty,0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-1/2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2,+\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ .... $[4,+\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geq x-3$ .... $\left]-\infty, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \setminus \{-1,1\}$

Géométrie analytique

Exercice 1.20 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 1.21 (Cercles)

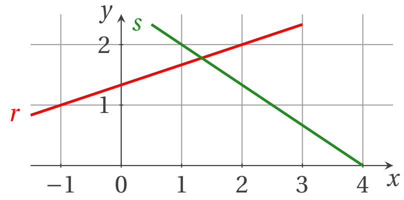
1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Exercice 1.22 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Systèmes linéaires

Exercice 1.23
Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 1.24
Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3.\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8,\\ 4x_1+x_2-4x_3=15.\end{cases}\qquad (3)\begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6\end{cases}$$

Exercice 1.25
Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+2x_3=0,\\ -11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}\qquad (3)\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Exercice 1.26 (V. GUIRARDEL)
Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Exercice 1.27
Soit le système linéaire

$$(S)\quad\begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x-y=1.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.28
Soit le système linéaire

$$(S)\quad\begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.29 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.30 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Problèmes

Exercice 1.31
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Exercice 1.32 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")
On suppose que les concombres sont composés de $a\%$ d'eau à la cueillette. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain, à cause de la chaleur et de l'évaporation, les concombres ne contient plus que $b\%$ d'eau avec $0<b<a<100$. Quel est le nouveau poids de ce stock de concombres ?
Considérer par exemple $M=500$, $a=99$ et $b=98$.

Exercice 1.33
Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% des votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Exercice 1.34
La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Exercice 1.35
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Exercice 1.36
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Exercice 1.37
Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Exercice 1.38
Dans un panier de fruits, 1/7 de tous les fruits sont des ananas, 3/8 des pamplemousses et 2/5 des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Exercice 1.39
Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Exercice 1.40 (L'architecte — MathC2+)
Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable ?

2
Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Logique

Exercice 2.1
Écrire les tables de vérité suivantes :

a) "non(P) et Q"

b) "non(P et Q)"

c) "(non(P)) ou (non(Q))"

d) "$P \implies Q$" (*i.e.* "(non(P)) ou Q")

Exercice 2.2
Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque, et dire si elle est vraie ou fausse (on justifie succinctement) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x > 2 \implies x > 3$
3. $x = 3 \implies x^2 = 9$
4. $x^2 = 9 \implies x = -3$

Exercice 2.3
Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
5. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Exercice 2.4
Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non(P) $\wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non(P) $\vee Q$" est fausse

Exercice 2.5
1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Exercice 2.6
On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Exercice 2.7
Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.». Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 2.8 (Th. CHAMPION)
On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 2.9 (Th. CHAMPION)
On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

"Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 2.10
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend exactement une fois la valeur 1
4. f prend ses valeurs entre -2 et 3
5. f ne prend que des valeurs entiers
6. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1, 1[$

Exercice 2.11
Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 2.12
On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Récurrence

Exercice 2.13
Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2},$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2),$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$

Ensembles

Exercice 2.14
Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E\left(C_E F\right) = F$

2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$

3) $C_E(F \cup G) = \left(C_E F\right) \cap \left(C_E G\right)$ et $C_E(F \cap G) = \left(C_E F\right) \cup \left(C_E G\right)$ [Lois de Morgan]

Exercice 2.15
Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Exercice 2.16
Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Avancé

Exercice 2.17
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right].$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;

3

Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

Exercice 3.1

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \tfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\end{aligned} \qquad f_2\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \ln(e^x)\end{aligned} \qquad f_3\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto e^{\ln(x)}\end{aligned} \qquad f_4\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \tfrac{1-x}{1-x^2}\end{aligned} \qquad f_5\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \sqrt{|x|}\end{aligned} \qquad f_6\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R},\\ x &\mapsto \ln(|x|)\end{aligned}$$

Exercice 3.2

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x) = e^x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x) = e^{2x} - (x+1)e^x, \qquad f_6(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x) = \ln(x) - x,$$

Composée de fonctions

Exercice 3.3

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x \mapsto 2x-8$ et $v\colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 3.4

Considérons les fonctions

$$f\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{1}{1-x}\end{aligned} \qquad g\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sqrt{x}\end{aligned} \qquad h\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

$$u\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{1}{1+x}\end{aligned} \qquad v\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln(x)\end{aligned} \qquad w\colon \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto e^x\end{aligned}$$

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $h \circ g \circ f$ d) $u \circ v$ e) $v \circ u$ f) $w \circ v \circ u$

Exercice 3.5

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux

formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Parité

Exercice 3.6

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x), \qquad f_2(x) = \frac{\tan(x) - x}{x^3\cos(x)}, \qquad f_3(x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x).$$

Périodicité

Exercice 3.7

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x), \qquad f_2(x) = \sqrt{\tan(x)}, \qquad f_3(x) = \cos^4(8x), \qquad f_4(x) = |\cos(5x)|,$$
$$f_5(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \qquad f_6(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}, \qquad f_7(x) = \cos(5x)\sin(3x), \qquad f_8(x) = \cos(3x)\sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes

Exercice 3.8

Pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = -2(x+1)^2$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x} - 1$
7. $f(x) = \ln(x)$
8. $f(x) = \ln(-x)$
9. $f(x) = \ln(x-1)$
10. $f(x) = e^x$
11. $f(x) = e^{x-1}$
12. $f(x) = e^{-x}$
13. $f(x) = \cos(x)$
14. $f(x) = \cos(2x)$
15. $f(x) = 1 + \cos(2x)$

Exercice 3.9

Soit $f : x \mapsto |x-3| - |2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction d'intervalles de valeurs pour x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3.10

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Exercice 3.11

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

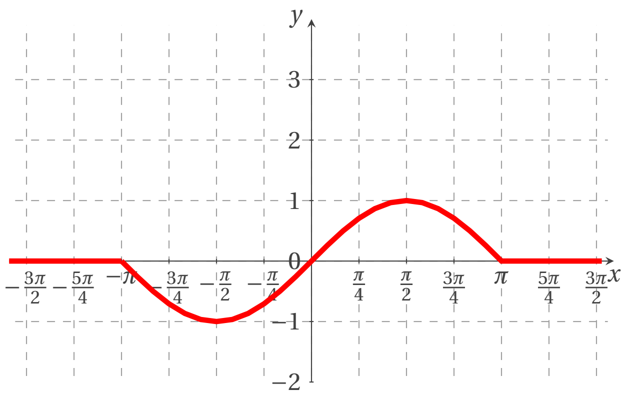
$$f\colon x \mapsto x, \qquad g\colon x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h\colon x \mapsto x^2, \qquad u\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 3.12

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

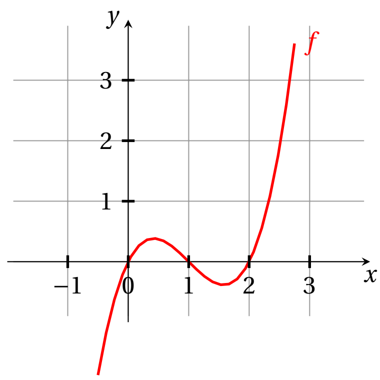
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



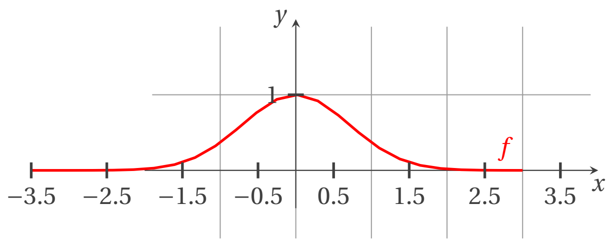
Exercice 3.13

Pour la fonction dont le graphe est reproduit ci-contre, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.14

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 3.16

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 3.17

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 3.18 (Échelles de température)

Une température de 32 °F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212 °F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Exercice 3.19

Un réseau de téléphonie mobile annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Exercice 3.20 (Gaz parfait)

D'après la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 3.21

D'après Michaelis et Menten, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de Michaelis-Menten spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Exercice 3.22

La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Exercice 3.23

Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Exercice 3.24

Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 $\mathrm{m\,s^{-1}}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Exercice 3.25

L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Injectivité, surjectivité...

Exercice 3.26

Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si..."

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

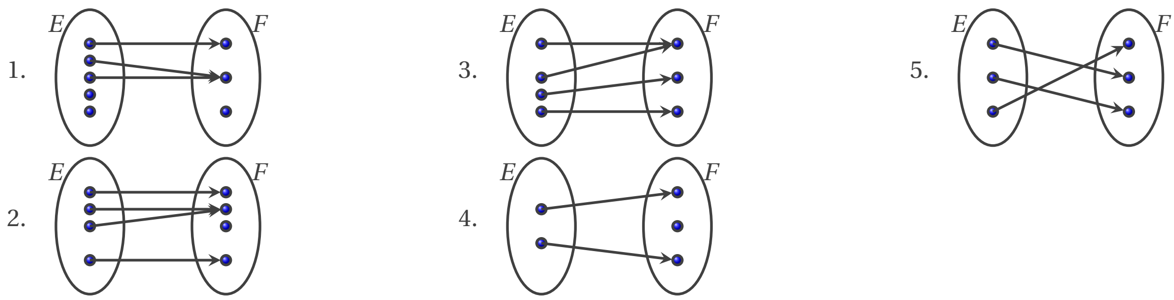
Exercice 3.27

Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si..."

☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

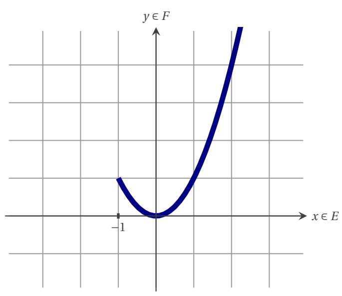
Exercice 3.28

Soit E et F deux ensembles. Pour chaque fonction de E dans F représentée ci-dessous, déterminer le domaine de définition, et si elle est injective et/ou surjective.



Exercice 3.29

Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :

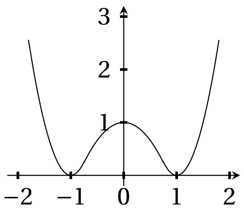


Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Exercice 3.30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 3.31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 3.32

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 3.33

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercice 3.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Exercice 3.35

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3.36 (composition, réciprocité)

Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

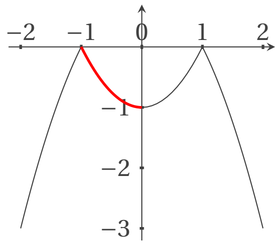
Exercice 3.37 (réciprocité)

1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.38

Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$.
   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$.
   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Exercice 3.39

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$ $\quad A_4 = \{3+7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}^*\}$

$A_2 = \mathbb{N}$ $\quad A_5 = \{3-7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_8 = \mathbb{R}$

$A_3 = \mathbb{Z}$ $\quad A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_9 =]5,6]$

Exercice 3.40

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A = [0,1]$ $\quad B =]-1,4[$ $\quad C = [0,+\infty[$ $\quad D =]-\infty,5]$

Exercice 3.41

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 3.42

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, c) $\sup_A f$, d) $\inf_A f$.

Exercice 3.43

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, c) $\sup_A f$, d) $\inf_A f$.

Avancé

Exercice 3.44

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 3.45

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

4

Suites numériques et limites

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 4.1

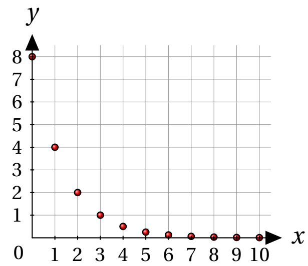
Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13 200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11 600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10 000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 4.2 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.

1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.



Exercice 4.3

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Calculs de limites

Exercice 4.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5

Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a) $\dfrac{1}{n}+n^2+1$ b) $\dfrac{2n}{n^3+1}$ c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ f) $\sqrt{n^5+3n}-n$ g) $n-\sqrt{n^3-3n}$ h) $n-\sqrt{n^2-3n}$

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}$ j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}$ k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ n) $\dfrac{(-1)^n\arctan(n)}{n}$ o) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$ p) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$

Exercice 4.6

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Exercice 4.7

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,

Exercice 4.8

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, en supposant que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

a) $u_n>\ln n$ *b)* $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac{1}{n}$ *c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\dfrac{1}{n}$ *d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$

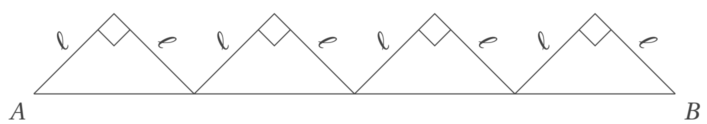
e) $u_n=\ln n+\sin(n)$ *f)* $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n=\dfrac{n}{e}+\dfrac{1}{e^n}$ *h)* $u_n=\dfrac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *n)* $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *o)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$ *p)* $u_n=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

Exercice 4.9

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient une ligne de segments de longueur $L=2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Suites récurrentes

Exercice 4.10 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,}\\ u_{n+1}=\varphi(u_n) & \forall n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$ b) $1 \leq u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Exercice 4.11 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 4.12

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \ldots}}}}$$

Lequel et que vaut b ?

Avancé

Exercice 4.13

Donner l'exemple
1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 4.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(a) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$."

(b) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$."

(c) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement"

(d) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M."

5

Limites et continuité

Exercice 5.1

Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 5.2

En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de g m s^{-2}. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Exercice 5.3

Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 5.4 (F.I.)

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $\quad (n \in \mathbb{N})$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Exercice 5.5

Compléter le tableau suivant :

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$				

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.7

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.8

1. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 5.9

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,

b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 5.10

Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.13

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 5.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5.15

Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

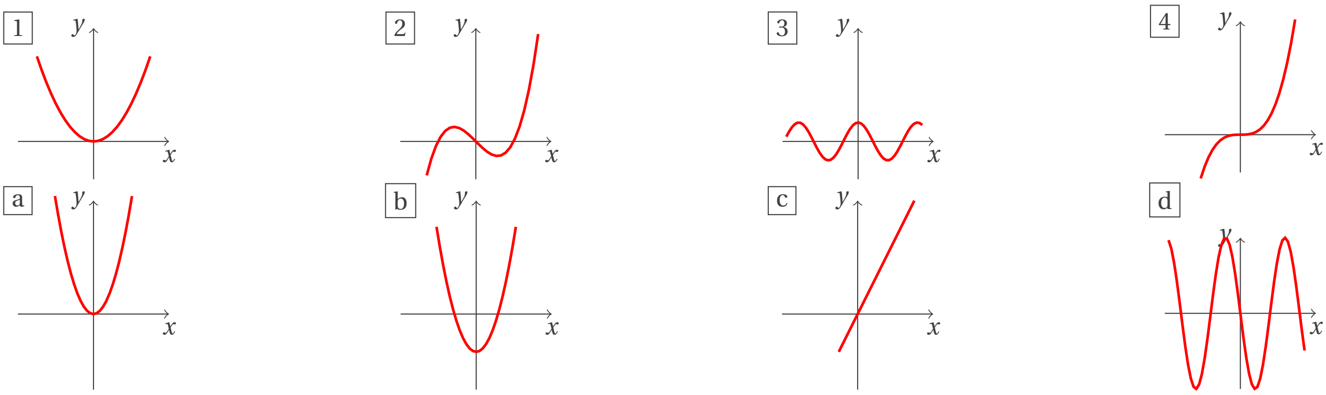
Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

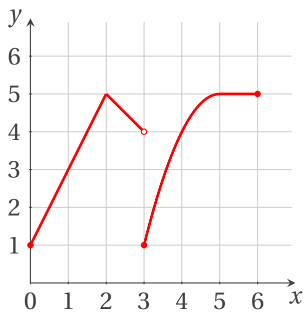
6
Dérivabilité

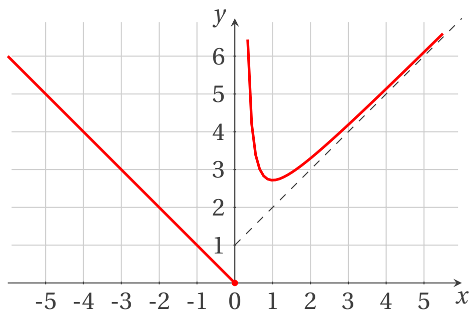
Premiers calculs

Exercice 6.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 6.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.





Exercice 6.3
Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $4x^3+2x-1$ c) $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ d) $x^3\sin(x)$

e) $x^2\tan(x)$ f) $5x^2$ g) $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$ h) $\sin(x)\cos(x)$

i) $\cos(-2x+1)$ j) $\dfrac{x}{\sin(2x)}$ k) $\ln(x^2+1)$ l) e^{x^2-3}

Exercice 6.4 (Tangentes)
1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=x^2+1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$. Trouver a et b.

5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x=a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x=1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x=1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$ si $f(1)=3$ et $g(1)=2$?

Exercice 6.5
Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de Van der Waals qui s'écrit $P(V)=nRT/(V-nb)-an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Exercice 6.6
Trouver la vitesse au temps $t=2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t)=A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Règle de L'Hôpital

Exercice 6.7 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

Exercice 6.8 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Exercice 6.9 (Théorème de l'Hôpital)
Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'Hôpital pour les calculer ?

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Exercice 6.10 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[0\cdot\infty]$)
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Exercice 6.11 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[\infty - \infty]$)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Exercice 6.12
Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to 1}\frac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Étude des variations

Exercice 6.13
Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2-3x+2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

Exercice 6.14
Considérons la fonction $f\colon [-\frac{\pi}{2};\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$.

Exercice 6.15

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

- [ ] 1. $f(x) = |x| + 1$
- [ ] 2. $f(x) = e^x - x$
- [ ] 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- [ ] 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- [ ] 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Exercice 6.16
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\\ x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0.\end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.17
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.

Exercice 6.18

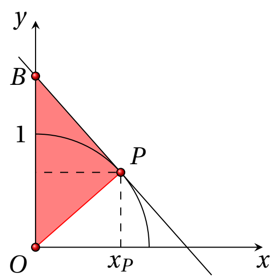
Soit $g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_-$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1; 0[$.

Recherche d'extrema

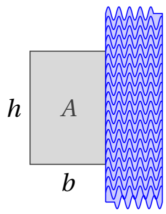
Exercice 6.19

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Exercice 6.20

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Exercice 6.21

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

Exercice 6.22 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exercice 6.23 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 6.24

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 6.25
On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Théorème des accroissements finis

Exercice 6.26 (Application du théorème des accroissements finis)
Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 6.27
Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Avancé

Exercice 6.28
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 6.29
On considère une fonction exponentielle $f\colon x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* la valeur choisie pour c.

Exercice 6.30
Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,
b) f est surjective et non injective,
c) f est bijective et non continue au point 1,
d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,
e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,
f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' existe mais est non continue au point 0,
g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Nota bene : les domaines de départ et d'arrivée sont donnés ! On ne peut choisir que l'expression de $f(x)$.

Exercice 6.31
Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

7
Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 7.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en précisant les points suivants :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. convexité, concavité,
5. graphe.

Exercice 7.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. graph.

Exercice 7.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche les asymptotes.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Exercice 7.4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

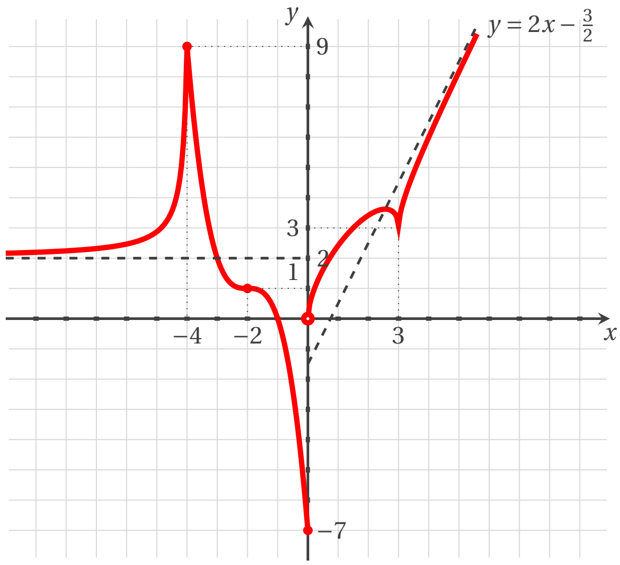
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 7.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x+27} & \text{si } x \leq -4, \\ 1-(x+2)^3 & \text{si } -4 < x \leq 0, \\ x + \sqrt{|x^2-3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.

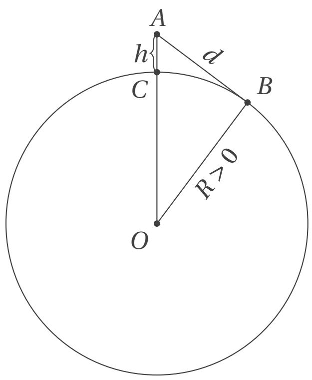


Pour la plupart des questions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$? Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$.

Exercice 7.6

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \geq 0$ au-dessus du niveau de la mer.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Étudier cette limite de visibilité en fonction de h.
Exemples : Le rayon de la terre est $R \approx 6371$ km. Un adulte de $h = 1.80$ m voit jusqu'à $d(h) \approx 4.8$ km, un enfant de $h = 1$ m verra jusqu'à $d(h) \approx 3.6$ km. Depuis le sommet de la tour Eiffel $h = 273$ m, on voit jusqu'à $d(h) \approx 59$ km.

1

Méthodologie disciplinaire

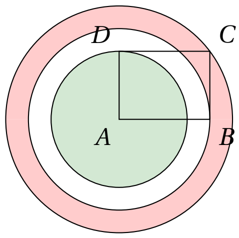
Géométrie

Exercice 1.1

La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.2

Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Exercice 1.3 (Le tour du monde — MathC2+)

On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faut-il ajouter à cette ceinture si on veut l'écarter d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ? NB. Le rayon de la Terre est de 6400km environ.
Même question pour un ballon de handball (le rayon d'un tel ballon est d'environ 16cm).

Calcul

Exercice 1.4

Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A=\frac{51}{136},\qquad B=\frac{1015}{2\,450},\qquad C=\frac{9}{40}+\frac{9}{50}+\frac{18}{125},\qquad D=1-\frac{27}{125}-\frac{549}{1\,000},$$

$$E=\frac{549}{1\,000}+2\times\frac{235}{1\,000},\qquad F=0{,}000\,001\,25,\qquad G=\frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}.$$

Exercice 1.5

Sans utiliser la calculatrice, calculer

$A)$ 12.5% de 164 $\qquad B)$ 13% de 50% de 800 $\qquad C)\ \dfrac{300}{30\%}$ $\qquad D)\ 14\times 5\%$ $\qquad E)\ (412-518)\times 116\%$

Exercice 1.6

Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$,

Exercice 1.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $A = 2x$, $B = 4x^2 - 1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C = 2xB - A, \qquad D = 2xC - B, \qquad E = 2xD - C.$$

Exercice 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2001^2 - 1999^2$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$,

Logarithmes et exponentielles

Exercice 1.9

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 1.10

Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1\,000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$

f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$

k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 1.11

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \quad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \quad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)),$$

$$D = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \quad E = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \quad F = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Puissances

Exercice 1.12

Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 1.13

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Exercice 1.14

Calculer, factoriser ou simplifier (quand c'est possible) :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) $e^3 + e^6$ d) $e^{-6}e^8$ e) $2^4 4^7$ f) $2^4 e^5$

Exercice 1.15

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} \qquad B = (\sqrt[6]{3})^3 \qquad C = \sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E = \frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G = \sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H = (2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I = \frac{2 \times \left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Équations et inégalités

Exercice 1.16

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $(\sqrt{x})^2 = 1$
3. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x + 3(18 - 26x + 4^2) = 70 - 3x$

Exercice 1.17

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
3. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
4. $x^2 < 0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x} > 0{,}000\,1$,
6. $x^2 > 1$.

Exercice 1.18

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 1.19

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]+2, +\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty, 1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ .... $]-\infty, -\sqrt{7}[\cup]-1, 1[\cup]+\sqrt{7}, +\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty, 0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-1/2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2, +\infty[$
8. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-1$ .... $[4, +\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2+8|x|-9}{x^2-1}} \geq x-3$ .... $\left]-\infty, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \setminus \{-1, 1\}$

Géométrie analytique

Exercice 1.20 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x+3y=9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 1.21 (Cercles)

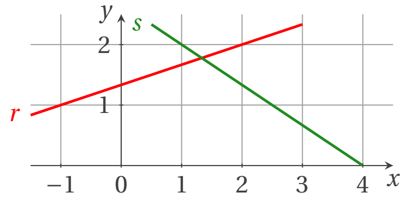
1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2+y^2+kx-2y+k^2-2=0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Exercice 1.22 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x+2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2-5x+2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x-1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Systèmes linéaires

Exercice 1.23
Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 1.24
Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$(1)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3.\end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8,\\ 4x_1+x_2-4x_3=15.\end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v-w=1\\ u+v-3w=-6\end{cases}$$

Exercice 1.25
Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+2x_3=0,\\ -11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Exercice 1.26 (V. GUIRARDEL)
Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique?

Exercice 1.27
Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x-y=1.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Exercice 1.28
Soit le système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions;
2. aucune solution;
3. une solution unique.

Exercice 1.29 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.30 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Problèmes

Exercice 1.31
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Exercice 1.32 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")
On suppose que les concombres sont composés de $a\%$ d'eau à la cueillette. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain, à cause de la chaleur et de l'évaporation, les concombres ne contient plus que $b\%$ d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quel est le nouveau poids de ce stock de concombres ?
Considérer par exemple $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$.

Exercice 1.33
Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% des votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Exercice 1.34
La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Exercice 1.35
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Exercice 1.36
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Exercice 1.37
Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Exercice 1.38
Dans un panier de fruits, $1/7$ de tous les fruits sont des ananas, $3/8$ des pamplemousses et $2/5$ des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Exercice 1.39
Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Exercice 1.40 (L'architecte — MathC2+)
Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable ?

2

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Logique

Exercice 2.1

Écrire les tables de vérité suivantes :

a) "non(P) et Q"

b) "non(P et Q)"

c) "(non(P)) ou (non(Q))"

d) "$P \implies Q$" (*i.e.* "(non(P)) ou Q")

Exercice 2.2

Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque, et dire si elle est vraie ou fausse (on justifie succinctement) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x > 2 \implies x > 3$
3. $x = 3 \implies x^2 = 9$
4. $x^2 = 9 \implies x = -3$

Exercice 2.3

Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
5. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Exercice 2.4

Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non(P) $\wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non(P) $\vee Q$" est fausse

Exercice 2.5

1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Exercice 2.6

On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Exercice 2.7

Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.». Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 2.8 (Th. Champion)

On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 2.9 (Th. Champion)

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

> "Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 2.10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend exactement une fois la valeur 1
4. f prend ses valeurs entre -2 et 3
5. f ne prend que des valeurs entiers
6. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1,1[$

Exercice 2.11

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 2.12

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Récurrence

Exercice 2.13
Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2),$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$

Ensembles

Exercice 2.14
Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E\left(C_E F\right) = F$

2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$

3) $C_E(F \cup G) = \left(C_E F\right) \cap \left(C_E G\right)$ et $C_E(F \cap G) = \left(C_E F\right) \cup \left(C_E G\right)$ [Lois de Morgan]

Exercice 2.15
Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i.$

Exercice 2.16
Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Avancé

Exercice 2.17
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right].$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$, 3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, 7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;

8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$, 10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, 11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, 13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, 14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;

3

Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

Exercice 3.1

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(e^x) \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\ln(x)}$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1-x}{1-x^2} \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{|x|} \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(|x|)$$

Exercice 3.2

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x) = e^x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x) = e^{2x} - (x+1)e^x, \qquad f_6(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x) = \ln(x) - x,$$

Composée de fonctions

Exercice 3.3

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x \mapsto 2x-8$ et $v\colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 3.4

Considérons les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x} \qquad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) \qquad w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $h \circ g \circ f$ d) $u \circ v$ e) $v \circ u$ f) $w \circ v \circ u$

Exercice 3.5

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux

formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Parité

Exercice 3.6

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x), \qquad f_2(x) = \frac{\tan(x) - x}{x^3\cos(x)}, \qquad f_3(x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x).$$

Périodicité

Exercice 3.7

Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x), \qquad f_2(x) = \sqrt{\tan(x)}, \qquad f_3(x) = \cos^4(8x), \qquad f_4(x) = |\cos(5x)|,$$
$$f_5(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \qquad f_6(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}, \qquad f_7(x) = \cos(5x)\sin(3x), \qquad f_8(x) = \cos(3x)\sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes

Exercice 3.8

Pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = -2(x+1)^2$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x} - 1$
7. $f(x) = \ln(x)$
8. $f(x) = \ln(-x)$
9. $f(x) = \ln(x-1)$
10. $f(x) = e^x$
11. $f(x) = e^{x-1}$
12. $f(x) = e^{-x}$
13. $f(x) = \cos(x)$
14. $f(x) = \cos(2x)$
15. $f(x) = 1 + \cos(2x)$

Exercice 3.9

Soit $f : x \mapsto |x-3| - |2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction d'intervalles de valeurs pour x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3.10

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Exercice 3.11

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

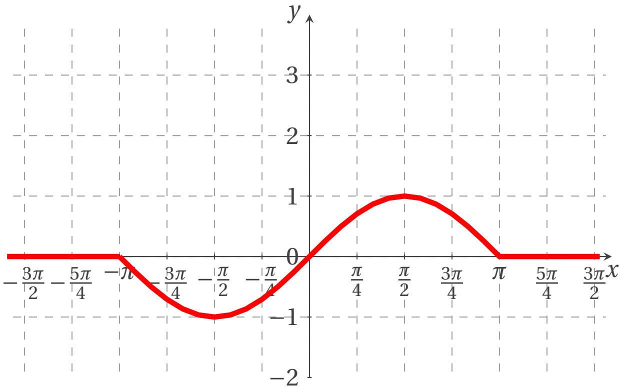
$$f\colon x \mapsto x, \qquad g\colon x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h\colon x \mapsto x^2, \qquad u\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 3.12

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

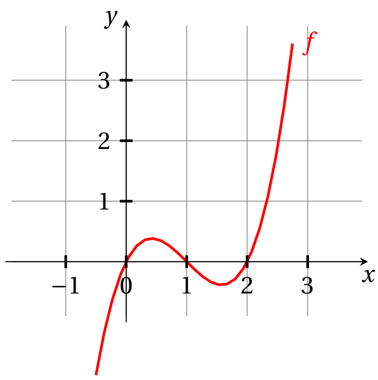
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



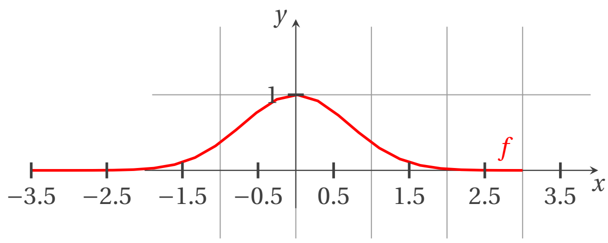
Exercice 3.13

Pour la fonction dont le graphe est reproduit ci-contre, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.14

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 3.16
Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 3.17
Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 3.18 (Échelles de température)
Une température de 32 °F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212 °F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Exercice 3.19
Un réseau de téléphonie mobile annonce ses tarifs :
Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.
Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Exercice 3.20 (Gaz parfait)
D'après la loi de BOYLE-MARIOTTE pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 3.21
D'après MICHAELIS et MENTEN, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de MICHAELIS-MENTEN spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Exercice 3.22
La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Exercice 3.23
Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Exercice 3.24
Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=$9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Exercice 3.25
L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Injectivité, surjectivité...

Exercice 3.26

Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si..."

- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

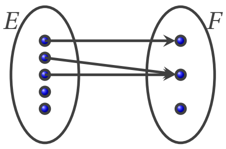
Exercice 3.27

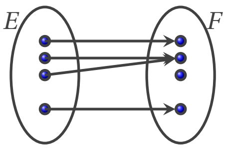
Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si..."

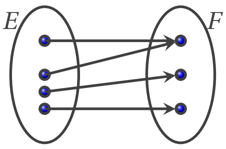
- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

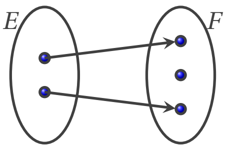
Exercice 3.28

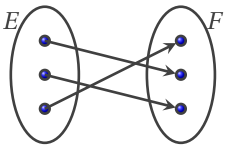
Soit E et F deux ensembles. Pour chaque fonction de E dans F représentée ci-dessous, déterminer le domaine de définition, et si elle est injective et/ou surjective.

1. 

2. 

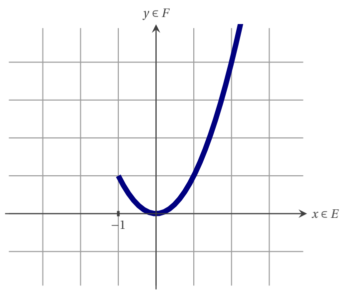
3. 

4. 

5. 

Exercice 3.29

Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :

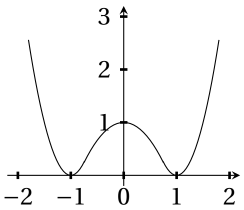


Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Exercice 3.30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 3.31

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 3.32

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 3.33

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercice 3.34

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Exercice 3.35

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3.36 (composition, réciprocité)

Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3.37 (réciprocité)

1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.38

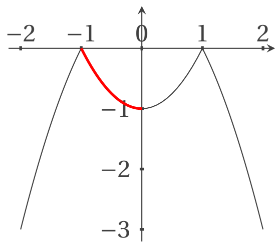
Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée cidessous.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$.

   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?

2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$.

   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Exercice 3.39

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$ $\quad A_4 = \{3+7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}^*\}$

$A_2 = \mathbb{N}$ $\quad A_5 = \{3-7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_8 = \mathbb{R}$

$A_3 = \mathbb{Z}$ $\quad A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_9 = \,]5,6]$

Exercice 3.40

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1+x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A = [0,1]$ $\quad B =]-1,4[$ $\quad C = [0,+\infty[$ $\quad D =]-\infty,5]$

Exercice 3.41

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$.
2. Comparer $f(A\cup B)$ et $f(A)\cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 3.42

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2+1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, $\quad$ b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\quad$ c) $\sup_A f$, $\quad$ d) $\inf_A f$.

Exercice 3.43

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1-2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, $\quad$ b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\quad$ c) $\sup_A f$, $\quad$ d) $\inf_A f$.

Avancé

Exercice 3.44

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 3.45

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

4

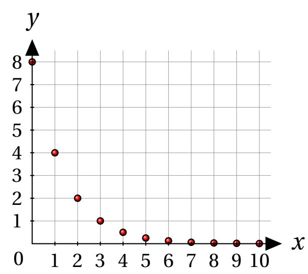
Suites numériques et limites

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 4.1
Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 4.2 (Lecture graphique, suite géométrique)
Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 4.3
Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Calculs de limites

Exercice 4.4 (Suite géométrique)
Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5
Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a) $\dfrac{1}{n}+n^2+1$ b) $\dfrac{2n}{n^3+1}$ c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ f) $\sqrt{n^5+3n}-n$ g) $n-\sqrt{n^3-3n}$ h) $n-\sqrt{n^2-3n}$

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}$ j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}$ k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ n) $\dfrac{(-1)^n\arctan(n)}{n}$ o) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$ p) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$

Exercice 4.6
Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Exercice 4.7
Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,

Exercice 4.8
Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, en supposant que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

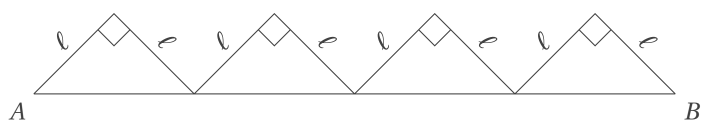
a) $u_n>\ln n$ *b)* $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac{1}{n}$ *c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\dfrac{1}{n}$ *d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$

e) $u_n=\ln n+\sin(n)$ *f)* $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n=\dfrac{n}{e}+\dfrac{1}{e^n}$ *h)* $u_n=\dfrac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *n)* $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *o)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$ *p)* $u_n=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

Exercice 4.9
Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient une ligne de segments de longueur $L=2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Suites récurrentes

Exercice 4.10 (Suite récurrente)
Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,}\\ u_{n+1}=\varphi(u_n) & \forall n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$ b) $1 \leq u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Exercice 4.11 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 4.12

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \ldots}}}}.$$

Lequel et que vaut b ?

Avancé

Exercice 4.13

Donner l'exemple

1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 4.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \geq M$

(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

(a) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$."

(b) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$."

(c) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement"

(d) "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M."

5
Limites et continuité

Exercice 5.1
Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 5.2
En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de $g \, \mathrm{m\,s^{-2}}$. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Exercice 5.3
Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 5.4 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Exercice 5.5
Compléter le tableau suivant :

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$				

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)
Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.7
Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.8
1. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 5.9
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,

b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 5.10
Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)
Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.13
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 5.14
Soit f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

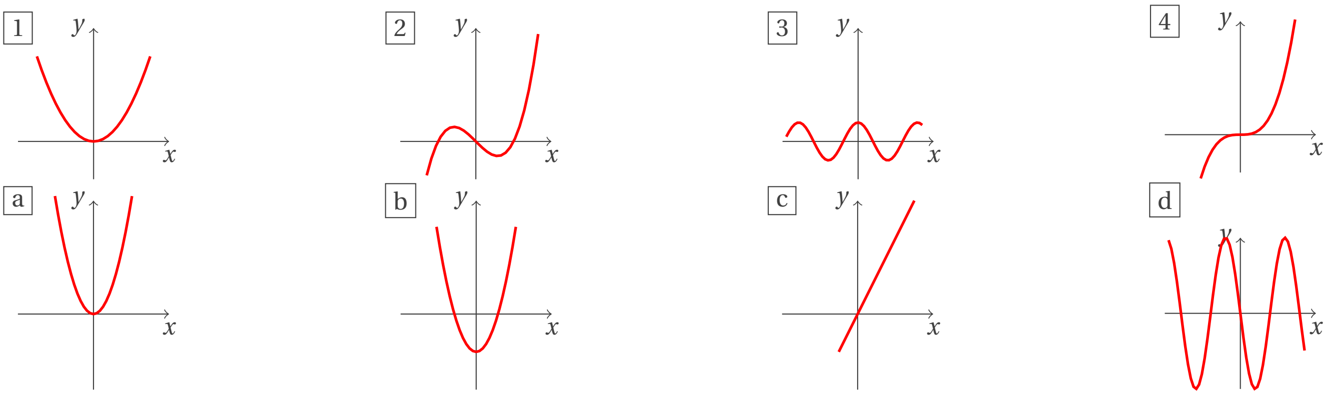
Exercice 5.15
Soit f une fonction continue et injective de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

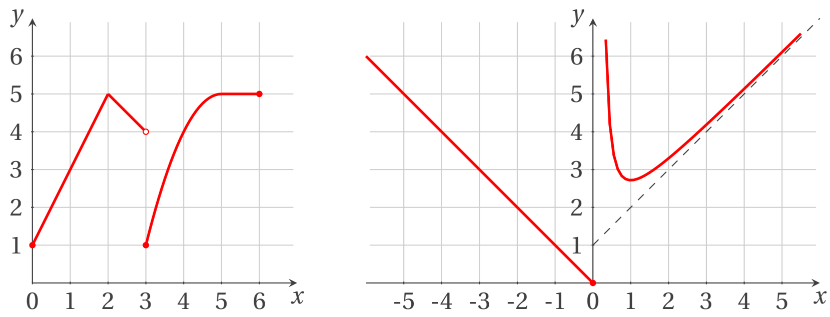
6
Dérivabilité

Premiers calculs

Exercice 6.1
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 6.2
Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.



Exercice 6.3
Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	b) $4x^3+2x-1$	c) $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$	d) $x^3\sin(x)$
e) $x^2\tan(x)$	f) $5x^2$	g) $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$	h) $\sin(x)\cos(x)$
i) $\cos(-2x+1)$	j) $\dfrac{x}{\sin(2x)}$	k) $\ln(x^2+1)$	l) e^{x^2-3}

Exercice 6.4 (Tangentes)
1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = x^2+1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x) = ax^2+bx+3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = 3x+2$. Trouver a et b.

5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x=a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x=1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x=1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$ si $f(1)=3$ et $g(1)=2$?

Exercice 6.5

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V)=nRT/(V-nb)-an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Exercice 6.6

Trouver la vitesse au temps $t=2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t)=A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Règle de L'Hôpital

Exercice 6.7 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

Exercice 6.8 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Exercice 6.9 (Théorème de l'HÔPITAL)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL pour les calculer ?

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Exercice 6.10 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Exercice 6.11 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[\infty - \infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Exercice 6.12

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Étude des variations

Exercice 6.13

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2-3x+2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

Exercice 6.14

Considérons la fonction $f\colon [-\frac{\pi}{2};\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$.

Exercice 6.15

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être…

- ☐ 1. $f(x) = |x|+1$
- ☐ 2. $f(x) = e^x - x$
- ☐ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- ☐ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- ☐ 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Exercice 6.16

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{si } x=0,\\ x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x<0.\end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x=0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x=\frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x=0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.17

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.

Exercice 6.18

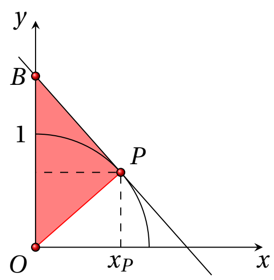
Soit $g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1; 0[$.

Recherche d'extrema

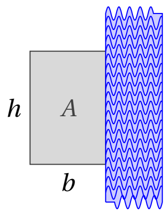
Exercice 6.19

On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Exercice 6.20

Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Exercice 6.21

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

Exercice 6.22 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exercice 6.23 (Dérivée d'une fonction composée)

Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 6.24

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 6.25
On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Théorème des accroissements finis

Exercice 6.26 (Application du théorème des accroissements finis)
Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 6.27
Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Avancé

Exercice 6.28
Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 6.29
On considère une fonction exponentielle $f\colon x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* la valeur choisie pour c.

Exercice 6.30
Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,
b) f est surjective et non injective,
c) f est bijective et non continue au point 1,
d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,
e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,
f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' existe mais est non continue au point 0,
g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Nota bene : les domaines de départ et d'arrivée sont donnés ! On ne peut choisir que l'expression de $f(x)$.

Exercice 6.31
Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

7

Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 7.1

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en précisant les points suivants :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. convexité, concavité,
5. graphe.

Exercice 7.2

Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. graph.

Exercice 7.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche les asymptotes.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Exercice 7.4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

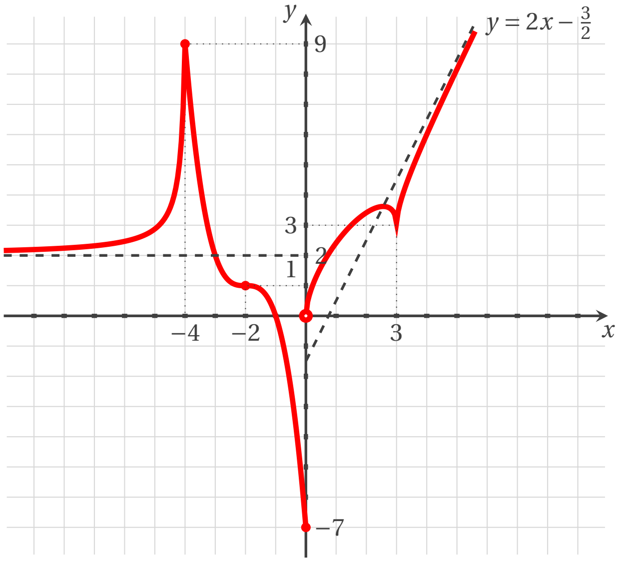
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 7.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x+27} & \text{si } x \leq -4, \\ 1 - (x+2)^3 & \text{si } -4 < x \leq 0, \\ x + \sqrt{|x^2 - 3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.

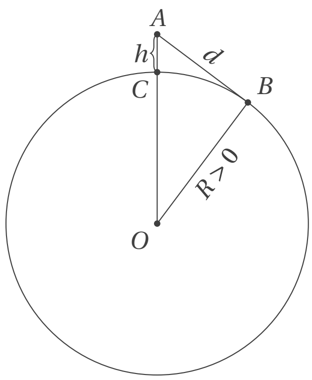


Pour la plupart des questions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f'}$? Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_{f''}$?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$.

Exercice 7.6

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \geq 0$ au-dessus du niveau de la mer.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

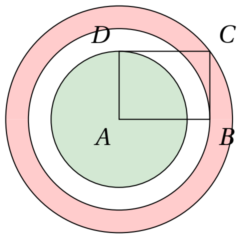
Étudier cette limite de visibilité en fonction de h.
Exemples : Le rayon de la terre est $R \approx 6371$ km. Un adulte de $h = 1.80$ m voit jusqu'à $d(h) \approx 4.8$ km, un enfant de $h = 1$ m verra jusqu'à $d(h) \approx 3.6$ km. Depuis le sommet de la tour Eiffel $h = 273$ m, on voit jusqu'à $d(h) \approx 59$ km.

1
Méthodologie disciplinaire

Géométrie

Exercice 1.1
La piste de course d'un stade entoure le terrain qui a la forme d'un rectangle dont les deux côtés sont dotés de demi-cercles. Si la longueur du rectangle est de 100 m et sa largeur est de 30 m, quelle est la longueur de la piste ?

Exercice 1.2
Considérons un rectangle $ABCD$ et les trois cercles ayant pour centre A et pour rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$. Colorions ensuite la couronne de frontières les deux cercles de rayon $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ et le disque de rayon $\overline{AD}$. Laquelle des deux zones coloriées possède l'aire la plus grande ?



Exercice 1.3 (Le tour du monde — MathC2+)
On ceinture la planète avec une corde au niveau de l'équateur. Quelle longueur de corde faut-il ajouter à cette ceinture si on veut l'écarter d'un mètre de la surface de la Terre sur toute la circonférence ? NB. Le rayon de la Terre est de 6400km environ.
Même question pour un ballon de handball (le rayon d'un tel ballon est d'environ 16cm).

Calcul

Exercice 1.4
Sans utiliser la calculatrice mettre sous forme de fraction irréductible les expressions suivantes :

$$A=\frac{51}{136},\qquad B=\frac{1015}{2\,450},\qquad C=\frac{9}{40}+\frac{9}{50}+\frac{18}{125},\qquad D=1-\frac{27}{125}-\frac{549}{1\,000},$$

$$E=\frac{549}{1\,000}+2\times\frac{235}{1\,000},\qquad F=0{,}000\,001\,25,\qquad G=\frac{\frac{4}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{9}}.$$

Exercice 1.5
Sans utiliser la calculatrice, calculer

$$A)\,12.5\%\text{ de }164\qquad B)\,13\%\text{ de }50\%\text{ de }800\qquad C)\,\frac{300}{30\%}\qquad D)\,14\times 5\%\qquad E)\,(412-518)\times 116\%$$

Exercice 1.6
Sans utiliser la calculatrice, établir laquelle des expressions suivantes a la plus grande valeur :

i) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{8}$;

ii) $\sqrt{100+69}$, $\sqrt{100}\times\sqrt{9}$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{6}}$,

Exercice 1.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. On donne $A = 2x$, $B = 4x^2 - 1$. Calculer les expressions suivantes en fonction de x :

$$C = 2xB - A, \qquad D = 2xC - B, \qquad E = 2xD - C.$$

Exercice 1.8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser les expressions suivantes :

a) $2001^2 - 1999^2$

b) $\dfrac{n^2-1}{9} - \dfrac{n+1}{6}$,

c) $\dfrac{(n-2)(n+1)}{4} + 4\dfrac{n+1}{3}$,

d) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{(n+1)^2}{4}$,

Logarithmes et exponentielles

Exercice 1.9

Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln(x)$. Compléter le tableau suivant :

$x =$	e	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$e\sqrt{e}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) =$							

Exercice 1.10

Calculer ou simplifier.

a) $\log_{10}(1\,000)$ b) $\log_5(1/25)$ c) $\ln(e^{\sqrt{2}})$ d) $\log_{10}(10) + \log_{10}(4)$ e) $\log_{10}(10) - \log_{10}(4)$

f) $\log_{10}(10)\log_{10}(4)$ g) $\log_3(108) - \log_3(4)$ h) $\log_{10}(0.1)$ i) $\log_{10}(100/67)$ j) $3\log_{10}(10)$

k) $\log_{10}(1)$ l) $\log_2(8)$ m) $\log_2(0.25)$ n) $\ln(1/e)$ o) $(\ln(e))^{-1}$

Exercice 1.11

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1), \quad B = \ln((\sqrt{3}+1)^{18}) + \ln((\sqrt{3}-1)^{18}), \quad C = \ln(1+\cos(x)) + \ln(1-\cos(x)) - 2\ln(\sin(x)),$$

$$D = \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \text{ (ici } x \neq 1), \quad E = (\ln(x))^2 - \ln(x^2), \quad F = (\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 1.$$

Puissances

Exercice 1.12

Soit $n = 10^{45}$, calculer $-\dfrac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 1.13

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

a) $(2^2)^2$ *b)* $2^{(2^2)}$ *c)* $(2^2)^3$ *d)* $2^{(2^3)}$ *e)* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$ *f)* $\dfrac{a^{-4}(b^2)^3(a^2b)^{-1}}{(ab^3)^2b^{-1}}$.

Exercice 1.14

Calculer, factoriser ou simplifier (quand c'est possible) :

a) $(e^3)^6$ b) e^3e^6 c) $e^3 + e^6$ d) $e^{-6}e^8$ e) $2^4 4^7$ f) $2^4 e^5$

Exercice 1.15

Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

$$A = 1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5} \qquad B = (\sqrt[6]{3})^3 \qquad C = \sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\sqrt[15]{3^2} \qquad D = \frac{(x^2)^n}{x^{n+1}} \qquad E = \frac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$$

$$F = (x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2} \qquad G = \sqrt{2^{2^{(2n+1)}}} \qquad H = (2^{2n})^{(2n)^{2^n}} \qquad I = \frac{2 \times \left((2^{2n-1})^2\right)^{2^n}}{8^{n^2}}$$

Équations et inégalités

Exercice 1.16

Calculer la valeur de l'inconnue x :

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $(\sqrt{x})^2 = 1$
3. $\dfrac{30}{75} = \dfrac{20}{x}$
4. $\dfrac{4}{x+5} = \dfrac{5}{x-23}$
5. $\dfrac{6x}{x+14} = \dfrac{6}{8}$
6. $\dfrac{(55x-38)\times 4}{11} = \dfrac{4}{\frac{3}{8}}$
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{8} = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
8. $-3(4-x) = \frac{x}{2} - (2-(3+2x))(3-4)$
9. $35x + 3(18 - 26x + 4^2) = 70 - 3x$

Exercice 1.17

Indiquer comment choisir x pour que l'on ait

1. $x^2 > 10\,000$,
2. $\frac{1}{x} > 10\,000$,
3. $\frac{1}{x} < 10^{-6}$,
4. $x^2 < 0{,}000\,1$,
5. $\frac{1}{x} > 0{,}000\,1$,
6. $x^2 > 1$.

Exercice 1.18

Trouver le plus petit entier n tel que 2^n soit supérieur à 1000. En déduire la partie entière de $\log_2(1000)$.

Exercice 1.19

Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ des inégalités suivantes (pour chaque inégalité, la réponse est indiquée à droite) :

1. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} < 1 + \dfrac{1}{4-x^2}$ .... $]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]+2, +\infty[$
2. $x|x| < 1$ .... $]-\infty, 1[$
3. $x^2 - 4|x| - 5 > 0$ .... $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$
4. $|4-x^2| - |3-x| > x$ .... $]-\infty, -\sqrt{7}[\cup]-1, 1[\cup]+\sqrt{7}, +\infty[$
5. $|x+2| < 1 + |x-1|$ .... $]-\infty, 0[$
6. $\sqrt{2x+1} > x$ .... $[-1/2, 1+\sqrt{2}[$
7. $\sqrt{x+2} < x$ .... $]2, +\infty[$
8. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 1$ .... $[4, +\infty[$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2 + 8|x| - 9}{x^2 - 1}} \geq x - 3$ .... $\left]-\infty, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \setminus \{-1, 1\}$

Géométrie analytique

Exercice 1.20 (Droites)

1. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,3)$ et parallèle à la droite passant par $(7,9)$ et $(3,-2)$.
2. Trouver l'équation de la droite passant par $(2,6)$ et $(3,10)$. Quelle est sa pente ? Trouver l'équation d'une droite qui lui est parallèle et qui passe par $(7,2)$. Quelles sont les intersections de cette droite avec les axes ?
3. Trouver l'équation de la droite passant par $(5,-3)$ et possède une pente de 4. Trouver l'équation de la droite qui est parallèle à la droite d'équation $5x + 3y = 9$ et qui passe par $(2,5)$. Trouver l'intersection entre les deux droites.

Exercice 1.21 (Cercles)

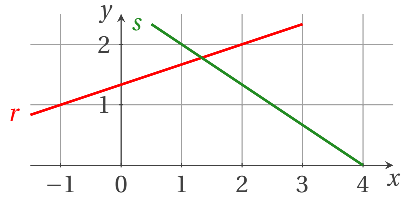
1. Trouver l'équation du cercle de centre $(-2,-5)$ et rayon 6.
2. Établir pour quelles valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation $x^2 + y^2 + kx - 2y + k^2 - 2 = 0$ représente un cercle. Ensuite, en calculer le centre.

Exercice 1.22 (Paraboles)

1. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = x + 2$ avec la parabole d'équation $y = 3x^2 - 5x + 2$.
2. Calculer les intersections de la droite d'équation $y = 2x - 1$ avec la parabole passant par les points $(0,3)$, $(1,8)$ et $(-2,-1)$.

Systèmes linéaires

Exercice 1.23
Trouver l'équation des droites r et s représentées ci-dessous et calculer les coordonnées du point d'intersection :



Exercice 1.24
Résoudre les systèmes linéaires suivantes par la méthode de GAUSS

$$(1)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_2-3x_3=-6,\\ x_1+4x_2+4x_3=3.\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases} -x_1+x_2+3x_3=12,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-8,\\ 4x_1+x_2-4x_3=15.\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases} -2u-4v+3w=-1\\ 2v\ -w=1\\ u\ +v-3w=-6\end{cases}$$

Exercice 1.25
Trouver toutes les solutions des systèmes linéaires homogènes suivantes

$$(1)\ \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+2x_3=0,\\ -11x_1+6x_2+5x_3=0.\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1+x_3-x_4=0.\end{cases}\qquad (3)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3=0.\end{cases}$$

Exercice 1.26 (V. GUIRARDEL)
Vous projetez de passer un concours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

CANDIDAT	Mathématique	Anglais	Informatique	Moyenne
QUI	7	12	6	8
QUO	11	6	10	9
QUA	11	16	14	14

Retrouver les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ?

Exercice 1.27
Soit le système linéaire

$$(S)\qquad \begin{cases} x-\alpha y=1,\\ \alpha x-y=1.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de α de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.28
Soit le système linéaire

$$(S)\qquad \begin{cases} x+y-z=1,\\ 2x+3y+\beta z=3,\\ x+\beta y+3z=-3.\end{cases}$$

Déterminer les valeurs de β de telle sorte que ce système possède :
1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. une solution unique.

Exercice 1.29 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1.30 (Résolution de systèmes non carrés)
Résoudre le système

$$(S)\quad \begin{cases} x+2y+z=-1, \\ 2x+y-z=1, \\ -x+y+2z=-2, \\ x+y+z=4, \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Problèmes

Exercice 1.31
Un parpaing pèse un kilo plus un demi parpaing. Combien pèse un parpaing ?

Exercice 1.32 (Paul Halmos, "*Problème pour mathématiciens, petits et grands*")
On suppose que les concombres sont composés de a% d'eau à la cueillette. On laisse reposer M kilogrammes de concombre pendant une nuit et le lendemain, à cause de la chaleur et de l'évaporation, les concombres ne contient plus que b% d'eau avec $0 < b < a < 100$. Quel est le nouveau poids de ce stock de concombres ?
Considérer par exemple $M = 500$, $a = 99$ et $b = 98$.

Exercice 1.33
Un comité de 70 personnes élit son président. Deux candidats se sont présentés. Si le premier a obtenu 60% des votes et le deuxième deux fois moins, combien d'électeurs se sont abstenus ?

Exercice 1.34
La population de l'Allemagne diminue chaque année de 0.3%. Si à la fin de l'année 2007 la population était de 82 200 000, quelle était la population de l'Allemagne à la fin de l'année 2009 ?

Exercice 1.35
Un prix vient d'augmenter de 25%. De quel pourcentage faut-il le baisser pour revenir au prix initial ?

Exercice 1.36
Un prix subit deux augmentations successives, d'abord de 20%, puis de 50%. Quel est le pourcentage de l'augmentation globale ? L'augmentation globale serait-elle la même si le prix avait d'abord augmenté de 50%, puis de 20% ?

Exercice 1.37
Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40% d'un certain produit avec une solution à 90% du même produit pour obtenir une solution à 60% ?

Exercice 1.38
Dans un panier de fruits, $1/7$ de tous les fruits sont des ananas, $3/8$ des pamplemousses et $2/5$ des nectarines. Si les 23 fruits restantes sont des pommes, combien d'ananas y a-t-il dans le panier ?

Exercice 1.39
Une feuille de papier d'une épaisseur d'un dixième de millimètre est pliée 15 fois en deux : quelle est l'épaisseur du résultat après pliage ? Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la distance Terre-Lune (la distance Terre-Lune vaut approximativement 300 000 km) ?

Exercice 1.40 (L'architecte — MathC2+)
Un architecte a dessiné les plans d'un bâtiment rectangulaire destiné aux mathématiciens toulonnais. Ils ont demandé à l'architecte à ce que le bâtiment respecte la condition suivante : si on lui retire le plus grand carré à l'une de ses extrémités (soit un carré de côté la largeur du bâtiment), le rectangle restant a exactement les mêmes proportions que le bâtiment entier. La condition fixée par les mathématiciens est-elle réalisable ?

2

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Logique

Exercice 2.1
Écrire les tables de vérité suivantes :

a) "non(P) et Q"

b) "non(P et Q)"

c) "(non(P)) ou (non(Q))"

d) "$P \implies Q$" (*i.e.* "(non(P)) ou Q")

Exercice 2.2
Pour chaque proposition, écrire la contraposée, la négation et la réciproque, et dire si elle est vraie ou fausse (on justifie succinctement) :

1. $x > 3 \implies x > 2$
2. $x > 2 \implies x > 3$
3. $x = 3 \implies x^2 = 9$
4. $x^2 = 9 \implies x = -3$

Exercice 2.3
Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses :

1. $(2 < 3)$ et (2 divise 4)
2. $(2 < 3)$ et (2 divise 5)
3. $(2 < 3)$ ou (2 divise 5)
4. $(2 < 3)$ et $\neg$(2 divise 5)
5. $\neg(2 < 3)$ ou (2 divise 5)

Exercice 2.4
Soient les propositions définies par $P(x) =$"$x \leq 1$" et $Q(x) =$"$x \geq 2$". Donner les valeurs de x dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles

1. "$P \wedge Q$" est vraie
2. "non(P) $\wedge Q$" est fausse
3. "$P \vee Q$" est vraie
4. "non(P) $\vee Q$" est fausse

Exercice 2.5
1. "4 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "2 divise n" ?
2. "3 divise n" est-elle une condition nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante pour que "9 divise n" ?

Exercice 2.6
On considère la proposition $\mathscr{I}$ suivante :

$\mathscr{I}$ = "Si l'entier naturel n se termine par 5, alors il est divisible par 5."

1. Écrire la contraposée de la proposition $\mathscr{I}$.
2. Écrire la négation de la proposition $\mathscr{I}$.
3. Écrire la réciproque de la proposition $\mathscr{I}$.

Exercice 2.7

Sur le portail d'une maison il y a une pancarte : «Chien qui aboie, ne mord pas. Notre chien n'aboie pas.». Franchiriez-vous cette porte ?

Exercice 2.8 (Th. Champion)

On considère les propositions suivantes

1. "les éléphants portent toujours des pantalons courts" ;
2. "si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse" ;
3. "si un animal est facile à avaler alors il mange du miel" ;
4. "si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse".

On suppose que ces propositions sont vraies. Quelqu'un prétend en déduire que les éléphants sont faciles à avaler. Cette conclusion est-elle correcte ?

Exercice 2.9 (Th. Champion)

On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

> "Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression."

1. Écrire la contraposée et la négation du principe ci-dessus.
2. On étudie un gaz qui a la propriété suivante : "quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue." Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non ?

Exercice 2.10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propriétés suivantes :

1. f prend toujours la valeur 1
2. f prend au moins une fois la valeur 1
3. f prend exactement une fois la valeur 1
4. f prend ses valeurs entre -2 et 3
5. f ne prend que des valeurs entiers
6. f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[-1,1[$

Exercice 2.11

Pour chaque énoncé, écrire la négation, puis dire si l'énoncé original est vrai ou faux (en justifiant la réponse à l'aide d'une démonstration).

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n$

c) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 2.12

On considère $x, y, z \in \mathbb{N}$. Soit la proposition

$$(P) \qquad \text{«si } (x = 3) \text{ alors } (y = 5 \text{ et } z = 1)\text{».}$$

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse :

a) (P) est équivalente à «si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$».

b) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il suffit que $x = 3$».

c) (P) est équivalente à «pour que $y = 5$ et $z = 1$ il faut que $x = 3$».

d) La négation de (P) est «$x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

e) La négation de (P) est «si $x = 3$, alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$».

Récurrence

Exercice 2.13

Démontrer (par récurrence) les propositions

1) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

2) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n(n+2)$,

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$,

5) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$,

Ensembles

Exercice 2.14

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E. Montrer que

1) $C_E(C_E F) = F$

2) $F \subset G \iff C_E F \supset C_E G$

3) $C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G)$ et $C_E(F \cap G) = (C_E F) \cup (C_E G)$ [Lois de Morgan]

Exercice 2.15

Soit I un ensemble et $\{A\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que

1. $C_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} C_E A_i$
2. $C_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} C_E A_i$.

Exercice 2.16

Expliciter les sous-ensembles suivants de la droite réelle

$$\bigcup_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left]\frac{x}{2}, 2x\right[\qquad \bigcup_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right] \qquad \bigcap_{x\in[0,1]} \left[\frac{x}{2}, 2x\right]$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[\qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1+\frac{1}{n}, n\right] \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[3, 3+\frac{1}{n^2}\right[\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-2-\frac{1}{n}, 4+n^2\right]$$

Avancé

Exercice 2.17

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$$A_i = \left[0, 1+\frac{1}{i}\right], \qquad B_i = \left[0, 1-\frac{1}{i}\right].$$

avec $i \in \mathbb{N}^*$. Trouver les ensembles

1. $C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$,
3. $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,
4. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,
6. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$,
7. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(A_i)$;
8. $C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
9. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$,
10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$,
11. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
12. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$,
13. $C_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$,
14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\mathbb{R}}(B_i)$;

3

Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition

Exercice 3.1

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(e^x) \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\ln(x)} \qquad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1-x}{1-x^2} \qquad f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{|x|} \qquad f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(|x|)$$

Exercice 3.2

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes définies par la donnée du réel $f(x)$.

$$f_1(x) = e^x - x^2, \qquad f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+5x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \qquad f_5(x) = e^{2x} - (x+1)e^x, \qquad f_6(x) = \frac{\ln(x^2+2)}{2x},$$

$$f_7(x) = \frac{\sqrt{e^x+2}}{x}, \qquad f_8(x) = \frac{e^{3x}}{x^2+e^x}, \qquad f_9(x) = \ln(x) - x,$$

Composée de fonctions

Exercice 3.3

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u\colon x \mapsto 2x-8$ et $v\colon x \mapsto x^2$. Donner les ensembles de définition et les expressions des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 3.4

Considérons les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x} \qquad v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) \qquad w : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$$

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et écrire explicitement l'expression de la composition :

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $h \circ g \circ f$ d) $u \circ v$ e) $v \circ u$ f) $w \circ v \circ u$

Exercice 3.5

Compléter le tableau suivant (dans cet exercice on ne s'intéresse pas aux domaines de définition mais exclusivement aux

formules).

$f(x)$	$g(y)$	$g(f(x))$
$x-7$	$\sqrt{y}$	
	$\sqrt{y-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$x+2$	$3y$	
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{y}{y-1}$	
	$1+\frac{1}{y}$	x
$\frac{1}{x}$		x
$\frac{2x+3}{x+7}$		x

Parité

Exercice 3.6
Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont paires ou impaires ?

$$f_1(x) = x^2 - 1 + \sin^2(x), \qquad f_2(x) = \frac{\tan(x) - x}{x^3 \cos(x)}, \qquad f_3(x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan(x)}, \qquad f_4(x) = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos(x).$$

Périodicité

Exercice 3.7
Calculer la période des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(3x), \qquad f_2(x) = \sqrt{\tan(x)}, \qquad f_3(x) = \cos^4(8x), \qquad f_4(x) = |\cos(5x)|,$$
$$f_5(x) = \cos(3x) + \sin(2x), \qquad f_6(x) = \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}, \qquad f_7(x) = \cos(5x)\sin(3x), \qquad f_8(x) = \cos(3x)\sin(3x).$$

Fonctions usuelles et graphes

Exercice 3.8
Pour chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indiquer l'ensemble de définition et l'ensemble image et tracer à main levée la courbe représentative :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 1 - x^2$
3. $f(x) = -2(x+1)^2$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = 3\sqrt{x-1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x} - 1$
7. $f(x) = \ln(x)$
8. $f(x) = \ln(-x)$
9. $f(x) = \ln(x-1)$
10. $f(x) = e^x$
11. $f(x) = e^{x-1}$
12. $f(x) = e^{-x}$
13. $f(x) = \cos(x)$
14. $f(x) = \cos(2x)$
15. $f(x) = 1 + \cos(2x)$

Exercice 3.9
Soit $f : x \mapsto |x-3| - |2x+1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Simplifier en fonction d'intervalles de valeurs pour x l'expression de $f(x)$ puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3.10
On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(x)$$

Tracer à main levée les courbes représentatives des fonctions :

1. $x \mapsto f(x)$,
2. $x \mapsto -f(x)$,
3. $x \mapsto f(x)+2$,
4. $x \mapsto f(2x)$,
5. $x \mapsto f(x-1)$,
6. $x \mapsto f(|x|)$,
7. $x \mapsto |f(x)|$.

Exercice 3.11

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition respectifs (ne pas faire de tracé point par point!) :

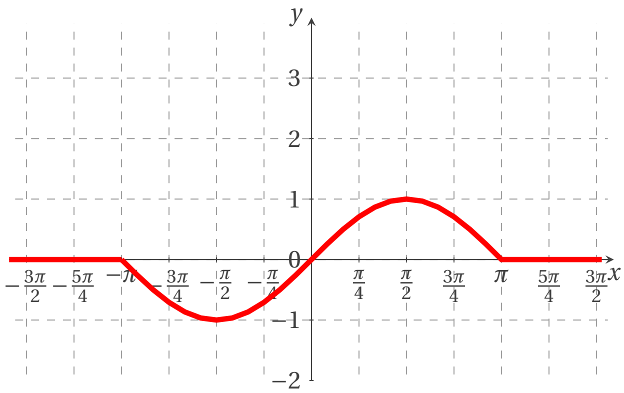
$$f\colon x \mapsto x, \qquad g\colon x \mapsto \sqrt{x}, \qquad h\colon x \mapsto x^2, \qquad u\colon x \mapsto \frac{1}{x} \qquad w\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 3.12

Dans la figure ci-dessous on a représenté la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

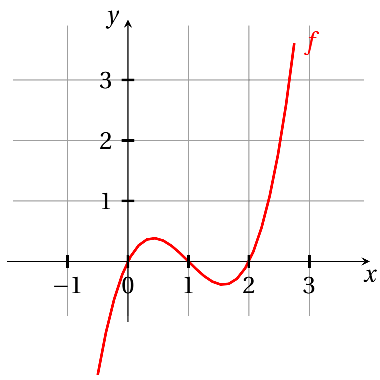
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [-\pi;\pi], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tracer dans la même figure le graphe de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 + 2f\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.



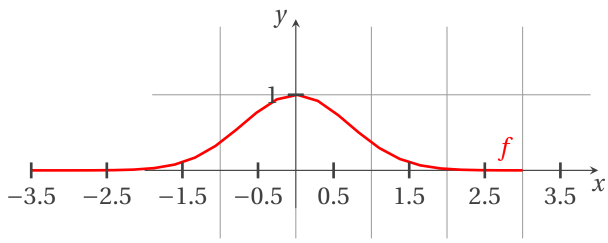
Exercice 3.13

Pour la fonction dont le graphe est reproduit ci-contre, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.14

Pour la fonction dont le graphe est reproduit plus bas, tracer, sans faire de calcul, une esquisse des graphes des fonctions $f(x)+3$, $f(x)-3$, $f(x+3)$, $f(x-3)$, $3f(x)$, $f(3x)$, $f(x/3)$ $f(x)/3$.



Exercice 3.15

Tracer dans un même plan cartésien le graphe des fonctions définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 5$, $k(x) = x^2 + 6x + 10$.

Exercice 3.16

Tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \cos(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 3.17

Discuter graphiquement suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre et la position des solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour :

1. $f(x) = x^3 - x - m$,
2. $f(x) = \cos(5x) - m$.

Exercice 3.18 (Échelles de température)

Une température de 32 °F correspondent à 0 °C tandis que 100 °C correspondent à 212 °F. Les échelles de température sont linéaires. Donner les équations de conversion de Celsius en Fahrenheit et vice-versa. Comment évolue la température exprimée en degrés Celsius lorsqu'elle augmente d'un degré Fahrenheit ? Que vaut le zéro absolu (−273.15 °C) en degré Fahrenheit ?

Exercice 3.19

Un réseau de téléphonie mobile annonce ses tarifs :

Tarif A : une redevance fixe de 15 € par mois et 1 € par minute.
Tarif B : une redevance fixe de 30 € par mois et 0.5 € par minute.
Tarif C : une redevance fixe de 40 € par mois et 0.25 € par minute.

Quelle formule choisir lorsque l'on téléphone m minutes par mois en moyenne ?

Exercice 3.20 (Gaz parfait)

D'après la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz parfaits, la pression P, le volume V et la température T d'un gaz obéissent à la loi $PV = nRT$ où R est une constante et n représente le nombre de moles du gaz. Représenter l'évolution de la pression en fonction du volume lorsque la température et le nombre de moles sont maintenus constants. Recommencer pour différentes valeurs de température.

Exercice 3.21

D'après Michaelis et Menten, la vitesse V de réaction enzymatique dépend de la concentration en substrat $[S]$ selon la loi

$$V([S]) = V_0 \frac{[S]}{[S] + K_m}$$

où $[S]$ est la concentration en substrat, $V_0 > 0$ est une constante propre à la réaction et $K_m > 0$ est la constante de Michaelis-Menten spécifique de l'enzyme. Vérifier que K_m est la concentration en substrat pour laquelle la vitesse de la réaction est égale à $V_0/2$ et tracer une esquisse de l'évolution de V en fonction de $[S]$. Tracer ensuite le graphe de $1/V$ en fonction de $1/[S]$.

Exercice 3.22

La température T d'ébullition de l'eau est liée à la pression P qui règne au-dessus du liquide par la relation $\ln(P) = a + b/T$ où a et b sont des constantes. Tracer une esquisse de l'évolution de $\ln(P)$ en fonction de T. Exprimer P en fonction de T.

Exercice 3.23

Une montgolfière s'élève du sol à la verticale à une vitesse de $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Exprimer la distance entre la montgolfière et un observateur initialement situé à 200 m.

Exercice 3.24

Une approximation de l'angle ϑ qu'un pendule fait avec la verticale au temps t est donnée par

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right)$$

où ϑ_0 est l'angle de départ, ℓ est la longueur du pendule en mètres, g est la constante de gravité (=9.81 $\mathrm{m\,s^{-1}}$). Tracer le graphe de $t \mapsto \vartheta(t)$. Combien d'oscillations le pendule fait-il par seconde ? Combien de secondes faut-il au pendule pour faire une oscillation complète ?

Exercice 3.25

L'évolution de la température T d'une bille de température initiale T_b plongée dans un liquide de température T_l est décrite par

$$T(t) = T_l + (T_b - T_l)e^{-kt}$$

où k est une constante propre au liquide. Tracer le graphe de cette fonction pour différentes valeurs de k.

Injectivité, surjectivité...

Exercice 3.26

Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **injective** si..."

- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

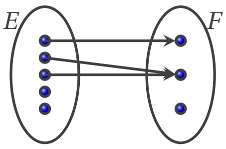
Exercice 3.27

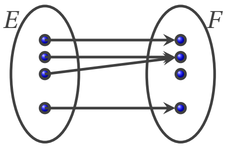
Comment doit-on compléter la définition suivante : " Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** si..."

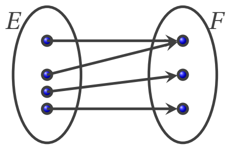
- ☐ tout élément x de E n'a qu'une image par f
- ☐ tout élément y de F a au moins un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a au plus un antécédent par f
- ☐ tout élément y de F a exactement un antécédent par f
- ☐ pour tous x et y de E, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$

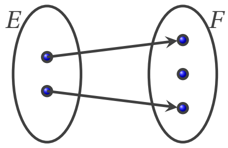
Exercice 3.28

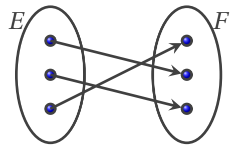
Soit E et F deux ensembles. Pour chaque fonction de E dans F représentée ci-dessous, déterminer le domaine de définition, et si elle est injective et/ou surjective.

1. 

2. 

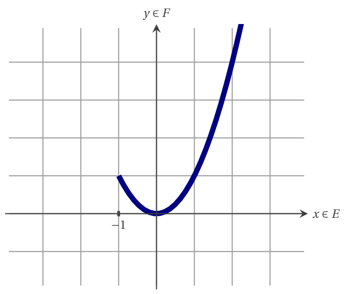
3. 

4. 

5. 

Exercice 3.29

Soit E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ et f une fonction de E dans F dont le graphe est tracé ci-dessous :

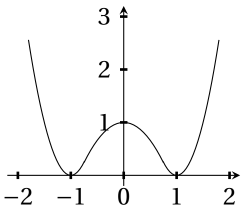


Pour chaque choix de E et de F déterminer si la fonction est une application et si elle est injective et/ou surjective :

1. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$
2. $E = [-1; +\infty[$ et $F = \mathbb{R}$
3. $E = [-1; +\infty[$ et $F = [0; +\infty[$
4. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; +\infty[$
5. $E = [-1; 0]$ et $F = [0; 1]$

Exercice 3.30

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Quelle est l'image de 0 par f ?
2. Donner, en fonction de y, le nombre d'antécédents de y par f.
3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 3.31

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
4. Montrer que la restriction $g\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 3.32

Soit $f\colon [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 3.33

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = 2n$,
2. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = -n$,
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
5. $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$,
6. $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$,
7. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n + 1$,
8. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $f(n) = n + 1$,
9. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f(n) = n + 1$,
10. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Exercice 3.34

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Montrer que la restriction $g\colon [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ avec $g(x) = f(x)$ est une bijection et calculer la fonction réciproque h.

Attention : on peut s'aider en traçant le graphe de f et en considérant les intersections de ce graphe avec des droites horizontales, mais cela ne constitue pas une preuve !

Exercice 3.35

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3.36 (composition, réciprocité)

Soient f, g les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 7x^2 - 2$. Montrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera), puis que g n'en admet pas. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3.37 (réciprocité)

1. Soit l'application f de $E = \mathbb{R}^2$ dans $F = \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
2. Soit l'application f de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$. Démontrer que f admet une application réciproque (que l'on calculera).
3. L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x + x^2$ admet-elle une application réciproque ?

Exercice 3.38

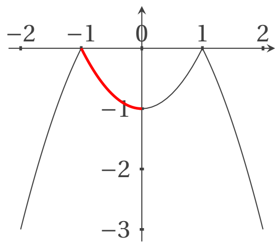
Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x^2 - 1|$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1. Soit g l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0]$ par $g(x) = f(x)$.

   g est-elle injective ? g est-elle surjective ?

2. Soit h l'application définie de $]-1;0]$ dans $[-1;0[$ par $h(x) = f(x)$.

   Montrer que h est bijective et trouver l'application h^{-1} réciproque inverse de h.



Exercice 3.39

Pour chacune des parties $A_i \subset \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si A_i est majorée, minorée, bornée, si elle admet une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum, un minimum (justifier chaque réponse).

$A_1 = \{1,2,3,5,12\}$	$A_4 = \{3+7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$	$A_7 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}^*\}$
$A_2 = \mathbb{N}$	$A_5 = \{3-7q \,:\, q \in \mathbb{N}\}$	$A_8 = \mathbb{R}$
$A_3 = \mathbb{Z}$	$A_6 = \{p/3^n \,:\, p,n \in \mathbb{N}\}$	$A_9 =]5,6]$

Exercice 3.40

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x^2$. Déterminer l'image directe et réciproque par f des ensembles suivants

$A = [0,1]$ $\qquad B =]-1,4[$ $\qquad C = [0,+\infty[$ $\qquad D =]-\infty,5]$

Exercice 3.41

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soient $A := [-2,1]$ et $B := [-1,4]$.

1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.
3. Calculer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(A)\big)$ puis comparer ces deux ensembles et A.

Exercice 3.42

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, $\qquad$ b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\qquad$ c) $\sup_A f$, $\qquad$ d) $\inf_A f$.

Exercice 3.43

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 1 - 2x^2$. Soit $A = [-2,1]$. Trouver

a) $f(A)$, $\qquad$ b) $f^{-1}\big(f(A)\big)$, $\qquad$ c) $\sup_A f$, $\qquad$ d) $\inf_A f$.

Avancé

Exercice 3.44

Soit E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de E. Montrer que

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{et} \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

2. Soit $\{B_j\}_{j\in J}$ une famille de parties de F. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 3.45

Soient E, F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer que

1. $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
2. $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$;
3. f est injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$;
4. f est surjective ssi $\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

4

Suites numériques et limites

Suites arithmétiques et géométriques

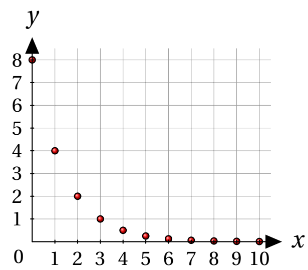
Exercice 4.1

Le prix de vente d'une voiture commercialisée initialement en 1995 diminue tous les ans de la même valeur. En 2002, elle est affichée au prix de 13200 €. On relève en 2006 un prix de vente de 11600 €. On note v_n le prix de vente de ce modèle l'année $(1995+n)$ et on considère la suite (v_n).

1. Donner la nature de la suite (v_n) et en déterminer la raison.
2. Quel était le prix initial de vente en 1995 ?
3. À partir de quel année sera-t-il possible d'acquérir la voiture pour moins de 10000 € ?
4. De début 1999 à fin 2010, un concessionnaire achète chaque année dix de ces modèles. Déterminer la somme totale dépensée pour acheter l'ensemble de ces véhicules.

Exercice 4.2 (Lecture graphique, suite géométrique)

Soit (u_n) la suite représentée sur la figure ci-contre.



1. Déterminer graphiquement u_0, u_1, et u_2.
2. En supposant que la nature de la suite est géométrique, en préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire la valeur de u_{10}.
5. Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 4.3

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique est de 1013 hPa (hectopascals). On admet que la pression atmosphérique diminue de 1.25% à chaque élévation de 100 m. On note pour les besoins de l'exercice P_n la pression en hectopascal à $100n$ mètres d'altitude et on considère la suite numérique (P_n).

1. Déterminer les pressions P_0, P_1, et P_2 aux altitudes respectivement 0 m, 100 m et 200 m.
2. Exprimer la pression P_{n+1} à l'altitude $100n+100$ mètres en fonction de la pression P_n à l'altitude $100n$ mètres. En déduire la nature de la suite et sa raison.
3. Donner le terme général de la suite (P_n).
4. Calculer la pression atmosphérique à 3200 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hPa. Justifier par un encadrement.

Calculs de limites

Exercice 4.4 (Suite géométrique)

Étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.5

Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

a) $\dfrac{1}{n}+n^2+1$ b) $\dfrac{2n}{n^3+1}$ c) $\dfrac{n^2-1}{n+1}$ d) $\dfrac{n-(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

e) $\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ f) $\sqrt{n^5+3n}-n$ g) $n-\sqrt{n^3-3n}$ h) $n-\sqrt{n^2-3n}$

i) $n^2-\sqrt{n^4-2n}$ j) $n^2-\sqrt{n^4-2n^2}$ k) $\dfrac{\sin(n)+2}{n+3}$ l) $\dfrac{\cos^5(\sqrt{n})}{n^2}$

m) $\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ n) $\dfrac{(-1)^n\arctan(n)}{n}$ o) $\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)^n$ p) $\left(1-\dfrac{e}{n}\right)^n$

Exercice 4.6

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n)}{n},\qquad \lim_{n\to+\infty} n\sin(n).$$

Exercice 4.7

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$, b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$,

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, h) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$,

Exercice 4.8

Calculer, si elles existent, les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes, en supposant que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

a) $u_n>\ln n$ *b)* $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac{1}{n}$ *c)* $u_0<1$, $(u_n)_n\nearrow$ et $u_n<1+\dfrac{1}{n}$ *d)* $u_n=\sqrt[n]{n}$

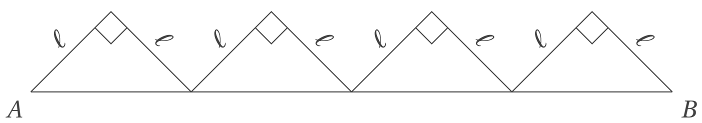
e) $u_n=\ln n+\sin(n)$ *f)* $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$ *g)* $u_n=\dfrac{n}{e}+\dfrac{1}{e^n}$ *h)* $u_n=\dfrac{n}{n+1}\ln n$

i) $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ *j)* $u_n=\dfrac{(2n)!}{n!}$ *k)* $u_n=\dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$ *l)* $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{3n-(-1)^n}$

m) $u_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *n)* $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2}{n^2+1}$ *o)* $u_n=\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+1}$ *p)* $u_n=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

Exercice 4.9

Le segment AB de longueur 1 est subdivisé en n segments égaux et sur chacun d'eux on construit un triangle rectangle isocèle comme indiqué sur la figure ci-dessous. On obtient une ligne de segments de longueur $L=2n\ell$. Montrer que L ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ même si elle tend à se confondre avec le segment AB. Vers quelle valeur tend-elle ?



Suites récurrentes

Exercice 4.10 (Suite récurrente)

Étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & \text{donné,}\\ u_{n+1}=\varphi(u_n) & \forall n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

avec

a) $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$ b) $1 \le u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ c) $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Exercice 4.11 (Suite récurrente)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{a+1+u_n}{a}$. On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s_n := \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}. En déduire qu'il existe une valeur a_0 de a (à préciser) pour laquelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
2. Montrer que pour tout $a \neq a_0$, la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. Calculer $\lim_n s_n$ en fonction des valeurs de a.
4. Montrer que $u_n = 1 + s_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim_n u_n$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 4.12

On sait que $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré vaut a. Cette écriture n'as de sens que si a est positif. Pourtant on peut donner un sens au nombre b qui s'écrit

$$b = \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{1}{4} + \ldots}}}}$$

Lequel et que vaut b ?

Avancé

Exercice 4.13

Donner l'exemple

1. d'une suite bornée et sans limite ;
2. d'une suite non bornée ayant une limite ;
3. d'une suite non bornée et sans limite ;
4. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ diverge ;
5. de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge et (v_n) diverge et $(u_n v_n)$ converge ;
6. de deux suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) ne converge pas, (v_n) ne converge pas, mais $(u_n v_n)$ converge.

Exercice 4.14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour chacune des assertions (1) à (4) suivantes, associer celle des phrases (a) à (d) qui signifie la même chose (On donnera les correspondances sans justifier).

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \ge M$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge M$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathbb{R}, u_n \ge M$

(4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \ge M$

(a) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend (au moins) une fois la valeur $+\infty$.”

(b) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend jamais la valeur $-\infty$.”

(c) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée supérieurement”

(d) “La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par M.”

5
Limites et continuité

Exercice 5.1
Lorsqu'un objet de température initiale T_0 est plongé dans un milieu de température constante T_m, l'évolution de sa température est donnée par $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$ où k est une constante positive qui dépend de l'objet et du milieu dans lequel il est plongé. Qu'elle est la limite de cette fonction lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 5.2
En l'absence de frottement, une masse soumise à la pesanteur possède une accélération constante de $g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Sa vitesse $v(t)$ évolue suivant $v(t) = v_0 + gt$. En présence d'un frottement, la masse $m > 0$ subit une résistance à sa progression dans l'air qui est d'autant plus élevée que sa vitesse est élevée. Dans le modèle d'un fluide très visqueux (par exemple le miel), la force de frottement $\mu > 0$ est directement proportionnelle à la vitesse de la masse. Dans ce cas, la vitesse est donnée par

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t} + \frac{mg}{\mu}(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}).$$

Quelle est la limite de cette fonction pour $t \to +\infty$?

Exercice 5.3
Dans le modèle de croissance de population de VERHULST la taille de la population est donnée par

$$P(t) = P_m \frac{e^{rP_m t}}{K + e^{rP_m t}}$$

où K, r et P_m désignent des constantes positives. Trouver la limite de $P(t)$ pour $t \to +\infty$.

Exercice 5.4 (F.I.)
Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$, h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

Exercice 5.5
Compléter le tableau suivant :

	$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim_{x\to 0} f(x)$				
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$				
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$				

Exercice 5.6 (Fonction prolongeable par continuité)
Soit f l'application de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f(x) := x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.7

Étudier la continuité en 0 de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.8

1. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.
2. Dire si l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ se prolonge par continuité en -1 et en 1. Donner le prolongement par continuité le cas échéant.

Exercice 5.9

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I dans les cas suivants (sans résoudre l'équation) :

a) $f(x) = x^2 - 16$, $I =]0, +\infty[$,

b) $f(x) = x^2 - 160$, $I =]-\infty, 0[$,

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$, $I =]-\infty, 0[$,

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{\pi}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 5.10

Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\arctan(x) = \pi/8$, puis qu'il est unique. Déterminer x par dichotomie avec une précision de $1/8$.

Avancé

Exercice 5.11 (Discontinuité de première espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.12 (Discontinuité de seconde espèce)

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5.13

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (un tel point est appelé *point fixe* de f).

Exercice 5.14

Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 5.15

Soit f une fonction continue et injective de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f est strictement monotone.

Exercice 5.16 (Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

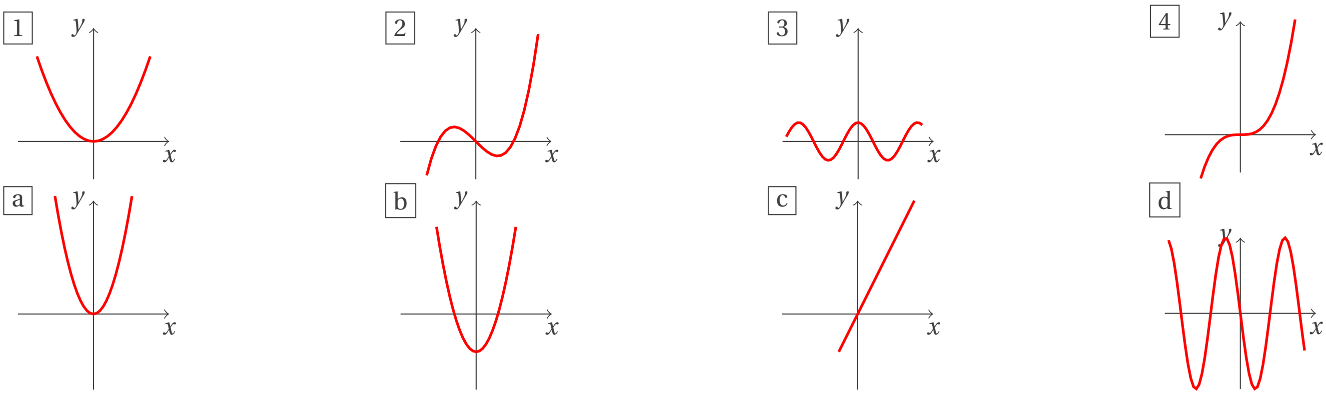
Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair possède au moins un zéro réel.

6
Dérivabilité

Premiers calculs

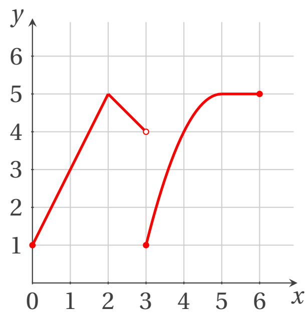
Exercice 6.1

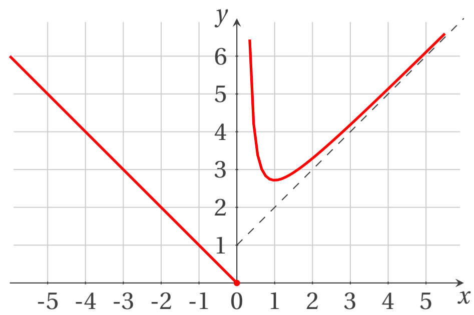
Pour les fonctions représentées en figure, trouver les appariements entre les fonction 1, 2, 3, 4 et les dérivées a, b, c, d.



Exercice 6.2

Pour chacune des fonctions représentées, tracer une esquisse du graphe de leur dérivée.





Exercice 6.3

Calculer les dérivées des fonctions :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ b) $4x^3+2x-1$ c) $\dfrac{x^2+3}{x^3+3x-7}$ d) $x^3\sin(x)$

e) $x^2\tan(x)$ f) $5x^2$ g) $\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$ h) $\sin(x)\cos(x)$

i) $\cos(-2x+1)$ j) $\dfrac{x}{\sin(2x)}$ k) $\ln(x^2+1)$ l) e^{x^2-3}

Exercice 6.4 (Tangentes)

1. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=x^2+1$ en 1.
2. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 0.
3. Trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction définie par $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ en 1.
4. Le graphe de la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+3$ passe par le point $(2,0)$. La tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$. Trouver a et b.

5. Le graphe de f passe par le point $(2,3)$ et la pente de la tangente au graphe de f en $x=a$ est égale à $2a$. Passe-t-il par le point $(3,9)$?
6. La pente de la tangente au graphe de f en $x=1$ est égale à 3. La pente de la tangente au graphe de g en $x=1$ est égale à 7. Calculer la pente de la tangente au graphe de $f+g$ en $x=1$. Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$? Que peut-on dire de la pente de la tangente au graphe de fg en $x=1$ si $f(1)=3$ et $g(1)=2$?

Exercice 6.5

Le volume V et la pression P d'un gaz maintenu à une température constante sont liés par la loi de VAN DER WAALS qui s'écrit $P(V)=nRT/(V-nb)-an^2/V^2$ où a et b sont des constantes propres au gaz, n désigne le nombre de moles, T est la température et R est une constante. Calculer P'.

Exercice 6.6

Trouver la vitesse au temps $t=2$ d'une masse attachée à un ressort et dont la position au temps t est donnée par $x(t)=A\cos(2\pi\omega t)$. Que se passe-t-il avec la vitesse si on double l'amplitude A ?

Règle de L'Hôpital

Exercice 6.7 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x^2-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2-9}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-3x^2+4}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3-3x^2+4}$

Exercice 6.8 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{e^x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln(x^2)}$

Exercice 6.9 (Théorème de l'HÔPITAL)

Calculer les limites suivantes. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de l'HÔPITAL pour les calculer ?

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(x)}{2x-\cos(x)}$.

Exercice 6.10 (Théorème de l'HÔPITAL - F.I. $[0\cdot\infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\ln(x)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan(x)$

Exercice 6.11 (Théorème de l'Hôpital - F.I. $[\infty - \infty]$)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{2\ln(x)}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Exercice 6.12

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$,
2. $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,
4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x-2}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x^2}\right)$,
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

Étude des variations

Exercice 6.13

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2-3x+2)e^x$ admet deux racines réelles $\ell_1 < \ell_2$ de f et les calculer.

Exercice 6.14

Considérons la fonction $f\colon [-\frac{\pi}{2};\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Montrer qu'il existe deux solutions $\ell^- < 0$ et $\ell^+ > 0$ de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2};\pi]$.

Exercice 6.15

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être...

- ☐ 1. $f(x) = |x| + 1$
- ☐ 2. $f(x) = e^x - x$
- ☐ 3. $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$
- ☐ 4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- ☐ 5. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Exercice 6.16

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Établir si f est continue en $x = 0$.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.
3. Établir si f est dérivable en $x = 0$.
4. Établir si f est f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6.17

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

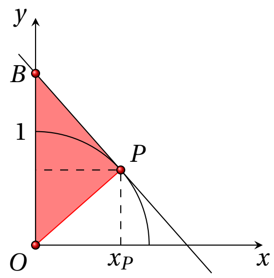
1. f est-elle continue en $x = 0$?
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = 1$.
3. f est-elle dérivable en $x = 0$? Calculer l'équation de la droite tangente à f en $x = 0$ le cas échéant.

Exercice 6.18
Soit $g :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ une application telle que $g(x) = e^x - 1$.

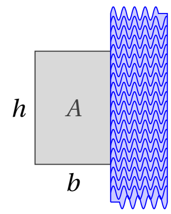
1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_-$.
2. En utilisant le théorème de la bijection démontrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution.
3. Déterminer la fonction inverse g^{-1}. Que sait-on de la continuité de g^{-1} ?
4. Calculer la dérivée de g^{-1} sur $]-1; 0[$.

Recherche d'extrema

Exercice 6.19
On considère le quart de circonférence d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 < x < 1$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du quart de circonférence. On note par B le point d'intersection de la tangente en P avec l'axe y. Exprimer la surface du triangle OBP en fonction de x_P.



Exercice 6.20
Un terrain rectangulaire d'aire A se trouve le long de la rive (rectiligne) d'une rivière. Quelle est la longueur minimale de la clôture nécessaire pour clôturer les trois autres côtés du terrain ?



Exercice 6.21
Trouver le point de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ plus proche au point $(4, 0)$.

Exercice 6.22 (Dérivée d'une fonction composée)
Un glaçon sphérique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de rayon fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ? Rappel : la surface et le volume d'une sphère de rayon r sont respectivement $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Exercice 6.23 (Dérivée d'une fonction composée)
Un glaçon cubique fond en conservant sa forme. Le taux de variation de son volume avec le temps est proportionnel à sa surface. Il faut une heure pour qu'un glaçon de un centimètre de coté fonde totalement. Après combien de temps le glaçon a-t-il diminué de moitié en volume ?

Exercice 6.24
Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle varie avec la distance r entre les deux atomes. L'expression empirique de ce potentiel (appelé potentiel de MORSE) est donnée par

$$V(r) = D(1 - e^{\alpha - \beta r})^2$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des constantes propres à chaque molécule. À l'équilibre une molécule de trouve au niveau de son énergie potentielle la plus basse. Trouver cette position d'équilibre. La différence entre l'énergie potentielle à l'équilibre et celle lorsque r tend vers l'infini est l'énergie de dissociation. Calculer cette énergie.

Exercice 6.25

On dispose d'un compte épargne à un taux d'intérêt annuel de 5%.

1. On place 10 000 €. Calculez les intérêts gagnés au bout d'un an si les intérêts sont versés
   1.1. une fois par an,
   1.2. une fois par mois,
   1.3. en continu.
2. On suppose que les intérêts sont versés une fois par l'an. Après combien d'années le capital aura-t-il triplé ?
3. On suppose que les intérêts sont versés continûment. Quel montant initial doit-on placer pour avoir 25 000 € après dix ans ?

Tous les résultats de cet exercice sont à arrondir au centime le plus proche.

Théorème des accroissements finis

Exercice 6.26 (Application du théorème des accroissements finis)

Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km h^{-1}. Quand il ressort, deux heures plus tard et à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait été jamais matériellement contrôlée. Ont-ils raison ?

Exercice 6.27

Soit $h\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer à h le théorème des accroissements finis ?

Avancé

Exercice 6.28

Calculer la dérivée 100-ème de la fonction $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

Exercice 6.29

On considère une fonction exponentielle $f\colon x \mapsto c^x$. Soit P le point d'intersection du graphe de f avec la tangente à ce graphe passant par l'origine du plan cartésien. Montrer que l'ordonnée de P ne dépend pas du choix de la base de l'exponentielle, *i.e.* la valeur choisie pour c.

Exercice 6.30

Dans chaque question, on définira une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux propriétés spécifiées :

a) f est injective et non surjective,

b) f est surjective et non injective,

c) f est bijective et non continue au point 1,

d) f est injective, continue dans $\mathbb{R}$ et bornée,

e) f est continue dans $\mathbb{R}$ et non dérivable au point 1,

f) f est dérivable dans $\mathbb{R}$ et f' existe mais est non continue au point 0,

g) f est bornée et $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Nota bene : les domaines de départ et d'arrivée sont donnés ! On ne peut choisir que l'expression de $f(x)$.

Exercice 6.31

Étudier brièvement la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ et en déduire que $e^\pi > \pi^e$.

7
Plan d'étude d'une fonction numérique

Exercice 7.1
Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1) \end{aligned}$$

en précisant les points suivants :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. convexité, concavité,
5. graphe.

Exercice 7.2
Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2) - 1} \end{aligned}$$

en répondant aux questions suivantes :

1. ensemble de définition,
2. comportement aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche d'asymptotes,
3. extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations,
4. graph.

Exercice 7.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis $f'(0)$.
3. Étudier la continuité de f' en 0.
4. Établir si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
5. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition et recherche les asymptotes.
6. Trouver les extrema locaux, sens de variation et tableau des variations.
7. Dresser le graphe de f.

Exercice 7.4
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 2x - 2}.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer les limites de f aux extrémités de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f, son ensemble de définition et étudier son signe.
4. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

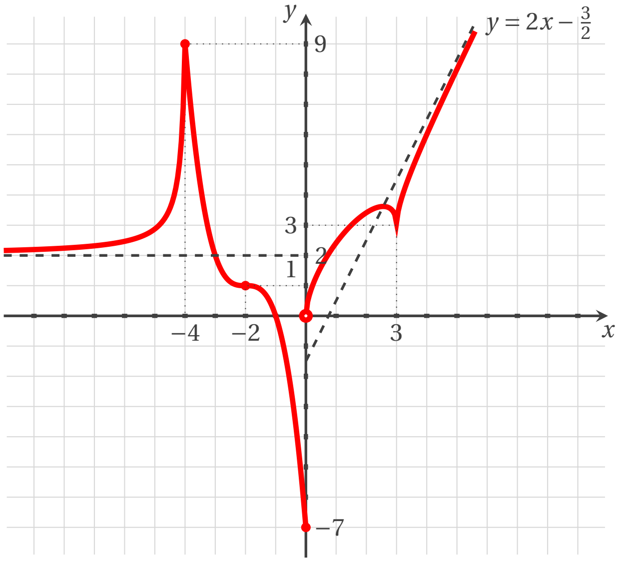
5. Établir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis en $+\infty$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à ces asymptotes.
6. Tracer les asymptotes et l'allure de la courbe de f.

Exercice 7.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{7}{7x+27} & \text{si } x \le -4, \\ 1 - (x+2)^3 & \text{si } -4 < x \le 0, \\ x + \sqrt{|x^2 - 3x|} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

dont le graphe est représenté dans la figure ci-dessous.

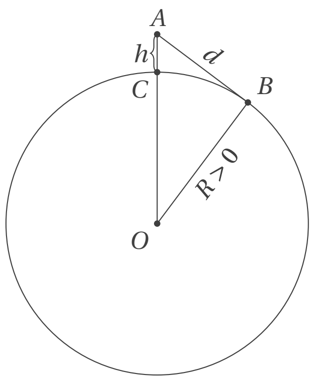


Pour la plupart des questions suivantes, il n'est pas nécessaire de faire des calculs mais il faut justifier la réponse :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -4$, en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 3$. Donner, lorsqu'il est possible, la valeur de f' en chacun de ces points.
3. Quelle est l'équation de la droite tangente au graphe de f en $x = -2$? Et en $x = 4$?
4. Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_{f'}$? Quel est le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_{f''}$?
5. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$.

Exercice 7.6

On veut déterminer la limite de visibilité d depuis un point d'altitude $h \ge 0$ au-dessus du niveau de la mer.



Du point A on voit jusqu'au point B ainsi

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2$$

donc

$$d(h) = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Étudier cette limite de visibilité en fonction de h.
Exemples : Le rayon de la terre est $R \approx 6371$ km. Un adulte de $h = 1.80$ m voit jusqu'à $d(h) \approx 4.8$ km, un enfant de $h = 1$ m verra jusqu'à $d(h) \approx 3.6$ km. Depuis le sommet de la tour Eiffel $h = 273$ m, on voit jusqu'à $d(h) \approx 59$ km.