

Contrôle Continu 1-15 octobre 2024

Calculatrices et téléphones interdits. Justifier toutes les réponses avec des explications claires et concises. Toute réponse sans justification comptera pour 0 point même si le résultat est correct.

Le barème est indicatif. Pour avoir plus de 18, d'autres critères que la somme des points pourraient être pris en compte.

Vous pouvez résoudre les exercices dans l'ordre que vous voulez. Indiquez clairement quel exercice / question vous abordez.

Il y a 2 pages, 3 questions et 6 exercices.

Questions de cours [6 points]

Question 1 Soient P, Q deux propositions.

1. Rappeler la table de vérité de la proposition $P \Rightarrow Q$.
2. la proposition $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ est-elle équivalente à la proposition $(\text{non}P \text{ et } Q)$? Est-elle équivalente à la proposition $\text{non}(P) \Rightarrow \text{non}(Q)$? (justifier la réponse avec de courtes explications).

Question 2 Soient E et F les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et $F = \{2, 4, 6, 8\}$.

1. Donner un exemple d'une application f de E dans F qui soit surjective mais non injective.
2. Peut-on construire une application bijective entre E et F ? (Si oui donner un exemple, sinon donner une justification)

Question 3 Soient E et F les ensembles $E = \mathbb{N}$ et $F = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } n \text{ est pair} \}$.

1. Donner un exemple d'une application g de E dans F qui soit surjective mais non injective.
2. Peut-on construire une application bijective entre E et F ? (Si oui donner un exemple, sinon donner une justification).

Exercices [14 points +2 points bonus]

Exercice 1 (2 points) Déterminer le nombre de solutions du système suivant

$$\begin{cases} x + 2y + z = 11 \\ 2x + 4y + 2z = 22 \\ 3x + 5y + 6z = 39 \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points) Soit r la droite du plan qui passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$ et s_3 la droite d'équation $y = 3x + 1$

1. écrire l'équation de la droite r ;
2. écrire le système linéaire qui permet de déterminer les points d'intersection des deux droites r et s_3 ;
3. trouver les points d'intersection
4. Soit s_a la droite d'équation $y = ax + 1$; trouver ces points d'intersection entre r et s_a ; en fonction des valeurs de a .

Exercice 3 (2 points) écrire la négation de la proposition
" $\forall a \geq 1, a^2 + a > 0$ ".

Exercice 4 (4 points) On considère les deux propositions

$$P : "x < -3", \quad Q : "x^2 - 9 \geq 0"$$

1. écrire la négation de $P \Rightarrow Q$;
2. écrire la contraposée de $P \Rightarrow Q$;
3. l'implication $P \Rightarrow Q$ est-elle vraie ?
4. l'implication $Q \Rightarrow P$ est-elle vraie ?

Exercice 5 (3 points) Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. déterminer le domaine de définition de f ;
2. tracer le graphe de f ;
3. tracer le graphe de $f(3x)$, $f(x - 3)$ et de $f(x) + 3$;

Exercice 6 (2 points bonus) Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \cos(5x)$.

1. déterminer l'ensemble image $g([0; 1])$;
2. déterminer l'ensemble $g^{-1}([0; 1])$