Ensembles naturel

Définition 1: Ensemble Naturel On appelle ensemble naturel $(N, \preccurlyeq)$ tout ensemble ordonne qui satisfait les trois proprietes suivantes:
- Toute partie non vide admet un plus petit element
- Toute partie non vide et majoree admet un plus grand element
- L'ensemble n'admet pas de plus grand element

l'existance d'un ensemble naturel est acquise grace a l'axiome de l'infini (consulter wikipedia) Pour demontrer qu'un ensemble naturel est ordonne, on peut emettre la proposition suivante:

$$\exists m \in \{a, b\}(m \preccurlyeq a) \wedge (m \preccurlyeq b)$$

deux element a, b dans l'enemble N. D'apres l'axiome de la paire, l'ensemble $\{a, b\}$ existe, n'est pas vide et admet donc un plus petit element (un ensemble naturel est toujours minore mais jamais majore) Comme $m \in N$ on a $(m = a) \wedge (m = b)$ et on deduit que $(a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ la demi droite $\rrbracket n, \rightarrow \llbracket$ n'est pas vide, sinon n serait le plus grand element, ce qui va a l'encontre de la 3eme propriete. $\rrbracket n, \rightarrow \llbracket$ admet un plus petit element appele $succ(n)$, le successeur de n

recurrence

Définition 2: Theoreme principe de recurrence Toute partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et stable pour l'application successeur est egale a $\mathbb{N}$

Définition 3: theoreme recurrence simple Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$ heredite

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 4: theoreme recurrence forte Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N}(\forall k \in \llbracket a, n \rrbracket P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ heredite forte

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 5: theoreme recurrence multiple Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket P(a+i)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+k)$

alors $\forall n \in \llbracket a, \rightarrow \llbracket P(n)$

Définition 6: theoreme recurrence finie Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:

- $P(a)$ init
- $\forall n \in [\![a, m-1]\!] P(n) \Rightarrow P(n+1)$

alors $\forall n \in [\![a, m]\!] P(n)$