Licence Sciences et Techniques

L1 MATH PC SI

M11

Mathématiques

Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire.

Gloria Faccanoni

http://faccanoni.univ-tln.fr/enseignements.html

Année 2016 – 2017

Dernière mise-à-jour : Lundi 19 septembre 2016

UNIVERSITÉ DE TOULON

Table des matières

Ce cours s'adresse à des étudiants de la première année d'une Licence Scientifique. Il a pour objectif de donner les bases en calcul différentiel pour des fonctions réelles d'une variable réelle indispensables à toute formation scientifique. Les notions supposées connues correspondent au programme du lycée.

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. De nombreux livres, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants au lycée et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Ce polycopiée ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Ce polycopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais **ce n'est pas un livre auto-suffisant (il est loin d'être exhaustif) !** De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs. Malgré de très nombreuses relectures, il restera toujours des fautes, ce polycopié est donc fournit sans garanties ! N'hésitez pas à me signaler les erreurs que vous remarquez.

On a inclus dans ce texte nombreux exercices corrigés. Ceux-ci, de difficulté variée, répondent à une double nécessitée. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines (physique, économie, etc.), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence du calcul différentiel. Cependant, veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limitez à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraitre incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon. La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifier que les hypothèses sont bien satisfaite. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide (voir le début de la correction, en parler à un autre étudiant, interroger les tuteurs).

M11		
CM	30h	20 séances de 1h30
TD	45h	30 séances de 1h30

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment M-117
Université de Toulon
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 83 16 66 72

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
🛈 http://faccanoni.univ-tln.fr

Notations

Ensembles usuels en mathématiques

On désigne généralement les ensemble les plus usuels par une lettre à double barre :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls)

$\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\left(\frac{p}{q} \text{ tel que } \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right)$

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels

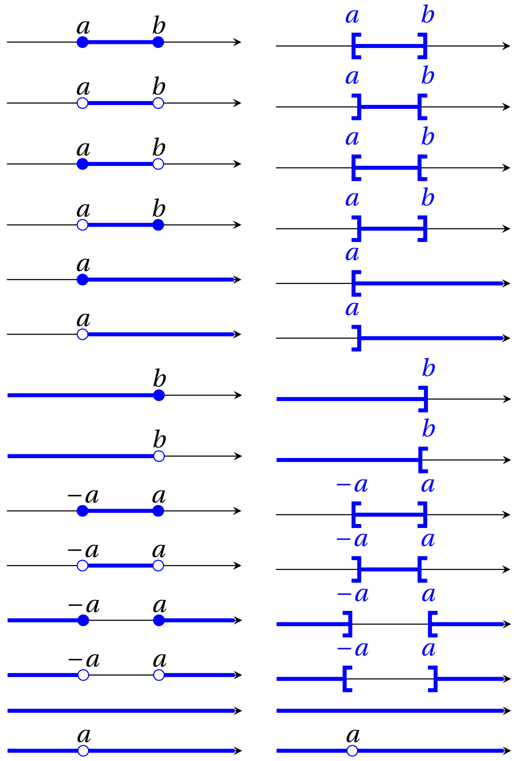
$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels autres que 0

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes

Intervalles

Inégalité(s)	Ensemble
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a < x < b$	$]a, b[$
$a \leq x < b$	$[a, b[$
$a < x \leq b$	$]a, b]$
$x \geq a$	$[a, +\infty[$
$x > a$	$]a, +\infty[$
$x \leq b$	$]-\infty, b]$
$x < b$	$]-\infty, b[$
$\|x\| \leq a$ avec $a \geq 0$	$[-a, a]$
$\|x\| < a$ avec $a \geq 0$	$]-a, a[$
$\|x\| \geq a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$
$\|x\| > a$ avec $a \geq 0$	$]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$
$\forall x \in \mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$
$x \neq a$	$]-\infty, a[\cup]a, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{a\}$

Représentations graphique



Symboles utilisés dans le document

définition, théorème, corollaire, proposition, propriété(s)

astuce

attention

remarque

méthode, algorithme, cas particulier

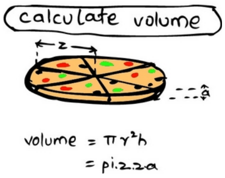
exercice de base

exercice

exemple

curiosité

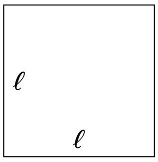
$>$	strictement supérieur
$<$	strictement inférieur
$\geq$	supérieur ou égal
$\leq$	inférieur ou égal
$\neq$	différent
$\equiv$	équivaut (équivalence logique)
$\{\quad\}$	ensemble
$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	ensemble $\mathbb{A}$ privé de l'ensemble $\mathbb{B}$, *i.e.* $C_{\mathbb{A}}(\mathbb{B})$ le complémentaire de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{A}$
$\emptyset$	ensemble vide
$\vert$	tel que
$\in$	appartient
$\notin$	n'appartient pas
$\forall$	pour tout (quantificateur universel)
$\exists$	il existe (quantificateur universel)
$\nexists$	il n'existe pas
$\exists!$	il existe un et un seul
$\subset$	est sous-ensemble (est contenu)
$\cup$	union d'ensembles
$\cap$	intersection d'ensembles
$\vee$	ou
$\wedge$	et
$\neg$	non
$\implies$	si … alors ; implique
$\iff$	si et seulement si
ssi	si et seulement si
$\ln$	logarithme de base e
$\log_a$	logarithme de base a
∞	infini
$\int$	symbole d'intégrale
$\sum_{i=0}^n a_i$	somme par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0+a_1+\dots+a_n$
$\prod_{i=0}^n a_i$	produit par rapport à l'indice i, équivaut à $a_0\times a_1\times\dots\times a_n$
$n!$	n factoriel, équivaut à $1\times 2\times\dots\times n$
$g\circ f$	composé de f par g (on dit «g rond f» ou encore «f puis g»)
f', $\frac{df}{dx}$	symboles de dérivée
$\stackrel{(H)}{=}$	utilisation de la règle de l'Hôpital
$\stackrel{(P.P.)}{=}$	intégration par parties



1

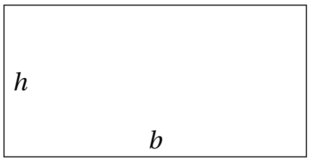
Formulaires de géométrie

1.1 Formulaire de géométrie plane



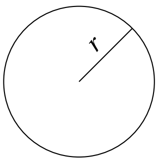
Périmètre $p = 4\ell$

Aire $A = \ell^2$



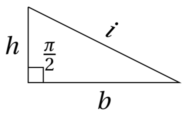
Périmètre $p = 2(b+h)$

Aire $A = bh$



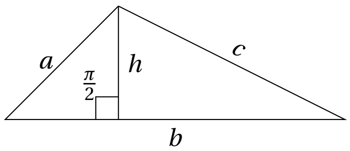
Périmètre $p = 2\pi r$

Aire $A = \pi r^2$



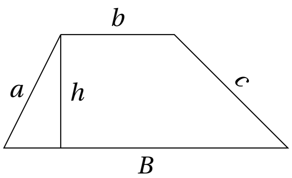
Périmètre $p = b+h+i$

Aire $A = \frac{bh}{2}$



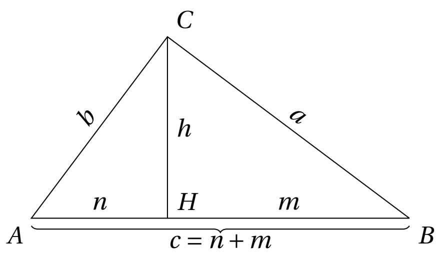
Périmètre $p = a+b+c$

Aire $A = \frac{bh}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}$



Périmètre $p = a+B+c+b$

Aire $A = \frac{(B+b)h}{2}$



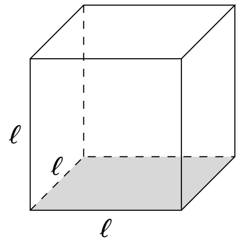
Triangle rectangle en C : $\widehat{ACB} = \pi/2$

Théorème de Pitagore $\left[\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2, \\ b^2 = h^2 + n^2, \\ a^2 = h^2 + m^2 \end{array}\right.$

Premier théorème d'Euclide $\left[\begin{array}{l} b^2 = cn \\ a^2 = cm \end{array}\right.$

Deuxième théorème d'Euclide $h^2 = nm$

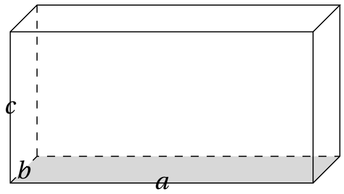
1.2 Formulaire de géométrie solide



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 4\ell^2$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 6\ell^2$

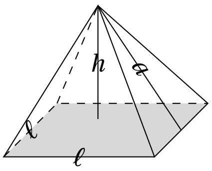
Volume $V = \ell^3$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2c(a+b)$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2(ab+ac+bc)$

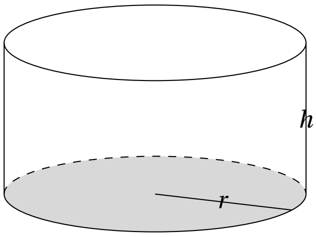
Volume $V = abc$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\ell a$

Surface totale $S_{\text{tot}} = 2\ell a + \ell^2$

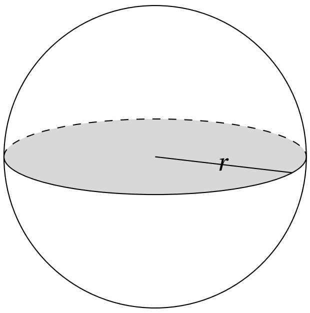
Volume $V = \frac{\ell^2 h}{3}$



Surface latérale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h$

Surface totale $S_{\text{lat}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Volume $V = \pi r^2 h$



Surface totale $S_{\text{tot}} = 4\pi r^2$

Volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2
Méthodologie disciplinaire

2.1 Pourcentages

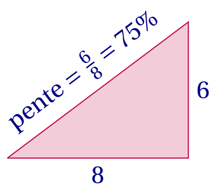
2.1 Définition (Pourcentage)
Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

EXEMPLE
- ⋆ $1\% = 1/100 = 0.01$
- ⋆ 20% de $3\,\text{kg}$ correspond à $0.2 \times 3\,\text{kg} = 0.6\,\text{kg}$

2.2 Définition (Pente)
Sur les panneaux de signalisation routière ou sur les pistes de skis, l'inclinaison des pentes est généralement exprimée sous la forme d'un pourcentage plutôt que celle d'un angle. On aurait tort de croire que cette valeur correspond directement à une valeur d'angle. En réalité, la pente est définie comme une distance verticale (un dénivelé) divisée par la distance horizontale correspondante :

$$\text{Pente (en \%)} = \frac{\text{Distance parcourue verticalement}}{\text{Distance parcourue horizontalement}}$$

Dans le cas d'une pente à 100%, chaque mètre parcouru horizontalement correspond à une montée d'un mètre verticalement. L'angle entre la route et l'horizontale est alors de 45°, et non davantage comme on le croit parfois.



On verra plus tard, lorsqu'on aura abordé les fonctions trigonométriques, que le passage entre un angle α et la pente correspondante p se fait grâce à la fonction tangente : $\tan(\alpha) = p$. Ainsi, si $\alpha < 45°$ alors $p < 100\%$ tandis que si $\alpha > 45°$ alors $p > 100\%$. Réciproquement, on peut obtenir la pente à partir de l'angle correspondant grâce à la fonction inverse, l'arc-tangente : $\arctan(p) = \alpha$. Il est clair alors que $\lim_{\alpha \to 90°} p = +\infty$.

2.3 Définition (Taux)
Le taux d'augmentation (ou de diminution) est le rapport de la partie augmentée (ou diminuée) à la valeur initiale. Il est exprimé en pourcentage.

EXEMPLE
Lorsqu'on augmente une quantité a de 20% on obtient la quantité $a + 0.2 \times a = (1 + 0.2)a = 1.2a$.

EXEMPLE

1. Dans un zoo, il y a 2 000 animaux. Parmi eux, 1 200 sont des mammifères. Quel est le pourcentage de mammifères dans le zoo ?

   Réponse : $\frac{1200}{2000} \times 100\% = 0.6 \times 100\% = 60\%$.

2. Dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux les reptiles constituent 5%. Combien y a-t-il de reptiles ?

   Réponse : $2000 \times 5\% = 2000 \times \frac{5}{100} = 100$. On peut également imaginer ce problème en tant que proportionnalité : si 2 000 animaux correspondent à 100%, combien d'animaux correspondent à 5% ? Ainsi on crée une proportion : $\frac{2000}{100} = \frac{5}{x}$ d'où $x = 100$.

3. Toujours dans le même zoo, parmi les 2 000 animaux, 25% sont des oiseaux. 3% des oiseaux sont des aigles. Combien y a-t-il d'aigles dans le zoo ?

   Réponse : $2000 \times 25\% \times 3\% = 2000 \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = 15$.

4. Une année s'est écoulée dans le zoo, et le nombre d'animaux est devenu 2 030. Quel est le taux de croissance du nombre d'animaux ?

   Réponse : $\frac{2030-2000}{2000} \times 100\% = \frac{30}{2000} \times 100\% = 1.5\%$.

5. Le nombre de reptiles dans le zoo, comme on l'a vu, est de 100. Après un an, leur nombre a augmenté de 15%, mais l'année suivante il a diminué de 11%. Quel est le nombre de reptiles à la fin de la deuxième année ?

   Réponse : Le réflexe presque naturel serait d'ajouter 15%, en déduire 11% et ainsi obtenir 104 reptiles, mais c'est faux. Souvenez-vous bien de la définition d'un taux. La solution correcte se présente de cette façon :

   ⋆ 1ère année : $100 \times (1 + 15\%) = 100 \times \frac{115}{100} = 115$,

   ⋆ 2ème année : $115 \times (1 - 11\%) = 115 \times \frac{89}{100} = 102$.

   La réponse est 102.

EXEMPLE

Un prix subit trois augmentations annuelles successives : 10%*,* 50% *et* 90%*.*

⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation global durant ces trois ans ?*

  Réponse : le prix est multiplié par $1.1 \times 1.5 \times 1.9 = 3.135$. Cela correspond à une augmentation global de 213.5%.

⋆ *Quel est le pourcentage d'augmentation annuel moyen ?*

  Réponse : on cherche q tel que $q^3 = 3.135$; on obtient $q = \sqrt[3]{3.135} \simeq 1.464$. Donc l'augmentation annuelle moyenne est environ 46.4%. On remarque que si on avait pris la moyenne arithmétique de 10%, 50% et 90%, on aurait obtenu un résultat trop grand, à savoir 50%.

EXEMPLE

On vous propose de diminuer votre salaire de 50% *et ensuite de l'augmenter de* 80%*. Seriez-vous d'accord ?*
Réponse : Le salaire est multiplié par $(1 - 0.5) \times (1 + 0.8) = 0.9$. Cela correspond à une diminution global de 10%.

TVA La taxe sur la valeur ajoutée (TVA) s'applique sur le coût «initial» d'un produit, dit «hors taxe» (HT). En France, quand la TVA est applicable, son taux atteint le plus souvent soit 19.6%, soit 5.5%. Le montant de la TVA égale alors le prix HT multiplié par le taux de TVA. Le prix «toutes taxes comprises» sous-entend le prix HT majoré du montant de la TVA.

EXEMPLE

⋆ Si le prix HT d'un repas pour une girafe est 20 € et si le taux de TVA applicable à la nourriture est de 5.5%, quel est le prix TTC que le zoo paye pour ce repas ?

  Réponse : on trouve d'abord le montant de la TVA applicable : $20\,€ \times 5.5\% = 1.10\,€$. Ensuite, on additionne le prix HT et le montant de la TVA : $20\,€ + 1.10\,€ = 21.10\,€$. Pour accélérer le calcul du prix TTC, on peut multiplier le prix HT directement par 1.055 si le taux de TVA est 5.5% (*i.e.* $1 + 5.5\%$), ou par 1.196 si le taux de TVA est 19.6% (*i.e.* $1 + 19.6\%$).

⋆ La direction du zoo décide d'acheter une nouvelle grille pour la cage d'un des lions. Le prix TTC de la grille est 1000 €. Quel est son prix HT, si le taux de TVA applicable à ce type de produits est de 19.6% ?

  Réponse : pour trouver le prix HT à partir du prix TTC, il suffit de diviser soit par 1.055 si le taux de TVA est 5.5%, soit par 1.196 si le taux de TVA est 19.6%. Ainsi $1000\,€/1.196 = 836.12\,€$.

Astuce (Pourcentages)

⋆ Pour appliquer un taux de pourcentage $p\%$ à un nombre x on le multiplie par $\frac{p}{100}$.

⋆ Le taux de pourcentage de x par rapport à y est égale à $\frac{x}{y} \times 100$.

- ⋆ Pour augmenter un nombre x de p%, on le multiplie par $1+\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour diminuer un nombre x de p%, on le multiplie par $1-\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une augmentation de p%, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1+\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour une diminution de p%, la valeur initiale est égale à la valeur finale divisée par $1-\frac{p}{100}$.
- ⋆ Pour composer (enchaîner) les pourcentages, il ne faut pas les ajouter.

2.2 Proportionnalité et règle de trois

La règle de trois est une recette utilisée pour calculer dans des situations de proportionnalité. Son symbole, une croix, n'est pas très intuitif pour décrire une situation que les mathématiciens qualifient de linéaire et qu'ils représentent par une droite. C'est une notion subtile qui se rapproche de celle de fraction.
Une situation est proportionnelle lorsque des parts égales contribuent au tout de la même façon.

EXEMPLE
Supposons que pour faire des crêpes pour 8 personnes, il faille 250 g de farine, 4 œufs, un demi-litre de lait et 50 g de beurre. En divisant en deux parts égales tous les ingrédients, on pourra faire des crêpes pour 4 personnes. Si l'on n'était que 2, on pourrait à nouveau diviser ces quantités en 2, c'est-à-dire : 62.5 g de farine, 1 œuf, 125 mL de lait et 12.5 g de beurre. Si nous faisons 4 tas comportant chacun cette liste d'ingrédients, nous pouvons faire, avec chacun d'eux, des crêpes pour 2 personnes. Avec deux tas, nous retrouvons nos quantités pour 4 personnes et avec 4 tas, nos quantités pour 8 personnes. Et ainsi, si nous étions 6 personnes, il suffirait de prendre 3 de ces tas.
Comme l'œuf n'est pas divisible en deux parties, avec cette idée, on peut trouver la quantité d'ingrédients pour faire des crêpes pour un nombre pair de convives en prenant autant de tas qu'il y a de couples de convives. Si nous étions un nombre impair, il faudrait soit en prévoir un peu moins, soit un peu plus que la quantité prévue par la recette.
Cette situation peut se résumer par un tableau de proportionnalité

Nombre de convives	2	4	6	8
Farine	62.5 g	125 g	187.5 g	250 g
Œufs	1	2	3	4
Lait	0.125 L	0.25 L	0.375 L	0.5 L
Beurre	12.5 g	25 g	37.5 g	50 g

2.4 Définition (Grandeurs proportionnelles)
On peut dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre m tel que $y = mx$ (le nombre m est le coefficient de proportionnalité).

Remarque
Une proportion représente une égalité de deux fractions :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

La qualité notable de la proportion est le fait que les produits des membres «en croix» sont égaux entre eux. Pour la proportion ci-dessus

$$ad = bc.$$

Ceci signifie également qu'on peut échanger les places des membres «en croix» de la proportion, sans que l'égalité perde son sens :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \iff \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \iff \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

EXEMPLE
Johann gagne de l'argent en été en tondant les gazons de ses voisins. Il est payé pour ses services par mètre carré de gazon tondu. S'il a tondu les $25\,\text{m}^2$ du gazon de Mme DUPONT pour 10 €, combien Mme DUBOIS devra-t-elle payer pour les services de Johann si son gazon mesure $35\,\text{m}^2$?
Réponse : notons x le prix que devra payer Mme DUBOIS. On a alors la proportion $\frac{25\,\text{m}^2}{10\,€}=\frac{35\,\text{m}^2}{x\,€}$ ce qui donne $x\,€ = 35\,\text{m}^2\times\frac{10\,€}{25\,\text{m}^2} = 14\,€$.

EXEMPLE (PARTAGES PROPORTIONNELS)
Partager une somme de 2400€ en deux parties x et y proportionnelles à 7 et 5, ceci signifie que $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ avec $x + y = 2400$:

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5}, \\ x + y = 2400, \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{7} = 480 - \frac{x}{5}, \\ y = 2400 - x, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1400, \\ y = 1000. \end{cases}$$

Échelle La proportionnalité est également utilisée dans la notion de l'échelle. L'échelle d'une carte ou d'un plan est notée normalement en format «$1 \div a$», où a indique le taux de réduction du plan par rapport au terrain réel :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

EXEMPLE
Une carte est dessinée à l'échelle $1 \div 250000$ signifie que chaque kilomètre sur le terrain a été réduit 250000 fois pour être représenté sur la carte : soit 1 km du terrain correspond à 4 mm sur la carte. Soit, inversement, chaque unité sur la carte représente 250000 unités sur le terrain : par exemple, 1 cm sur la carte représente 250 000 cm sur le terrain soit 2.5 km.

EXEMPLE
Sur un plan dessiné à l'échelle $1 \div 1500$, la distance entre deux arbres est 16 cm. Quelle est la distance entre ces arbres en réalité ?
Réponse : on crée une proportion : $\frac{1}{1500} = \frac{16\,\text{cm}}{x\,\text{cm}}$ d'où $x = 240\,\text{m}$.

ATTENTION
Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

EXEMPLE
Il existe en fait toute sorte de variation d'une quantité en fonction d'une autre et la situation de proportionnalité est la plus simple, aussi essaye-t-on toujours, quand c'est possible, de s'y ramener.

- La distance de freinage ne se relie pas simplement au temps de réaction du conducteur. Si il ou elle met deux fois plus de temps à réagir, la voiture parcourra très certainement bien plus que deux fois plus de distance avant de s'arrêter.
- Le temps mis par un athlète n'est pas non plus proportionnel à la distance qu'il parcourt. Le record du monde du 400 m est supérieur à deux fois le record du monde du 200 m. Au cours d'un 10 000 m les premiers tours sont parcourus à des vitesses différentes des derniers tours.
- Le coût d'une course en taxi comporte une prise en charge à laquelle s'ajoute une somme proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus.
- Certains phénomènes sont quadratiques. Le poids d'un disque (homogène) de métal n'est pas proportionnel à son rayon, mais au carré de son rayon.

2.3 Géométrie analytique

2.5 **Définition (Droite)**
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. Les points (x, y) du plan qui vérifient l'équation

$$ax + by + c = 0$$

appartiennent à une droite. Si $b \neq 0$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$y = mx + q$$

avec $m = -\frac{a}{b}$ la pente de la droite et $q = -\frac{c}{b}$ l'interception de la droite avec l'axe des ordonnées.

2.6 **Propriété**
Soient m_1 et m_2 la pente de r_1 et r_2 deux droites, alors

- ★ $r_1 \parallel r_2$ si et seulement si $m_1 = m_2$,
- ★ $r_1 \perp r_2$ si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

Intersection de deux droites Si deux droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ne sont pas parallèles, elles se croisent en un point qui est solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

En particulier, pour calculer les intersections d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec les axes, il suffit de résoudre deux systèmes linéaires :

- ★ intersection avec l'axe des abscisses :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$
- ★ intersection avec l'axe des ordonnées :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Droite passant par deux points L'équation de la droite passant par les deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$\begin{aligned} &x = x_1 && \text{si } x_1 = x_2, \\ &y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 && \text{si } x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

2.7 Définition (Cercle)
L'équation du cercle de centre (x_c, y_c) et rayon r est

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma \geq 0,$$

avec $x_0 = -\frac{\alpha}{2}$, $y_0 = -\frac{\beta}{2}$ et $r = \sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma}$.

2.4 Puissances

2.8 Propriété

① $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

② $a^b : a^c = a^{b-c}$

③ $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$

④ $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

⑤ $(a : b)^c = a^c : b^c$

⑥ $(a)^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$

⑦ $\sqrt[c]{a} = a^{1/c}$

Produits à apprendre par cœur

① $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

② $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

③ $(A \pm B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 \pm 2AB + 2AC \pm 2BC$

④ $(A - B - C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC + 2BC$

⑤ $(A^2 - B^2) = (A - B) \cdot (A + B)$

⑥ $(A^3 - B^3) = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$

⑦ $(A^3 + B^3) = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$

Divisibilité d'un binôme

- ★ le binôme $x^n + a^n$

  - ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x+a$ et on a

$$x^n + a^n = (x+a)\cdot(x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

  - ⋆ avec n pair n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$;
- ⋆ $x^n - a^n$
  - ⋆ avec n impair n'est divisible que par $x-a$ et on a

$$x^n - a^n = (x-a)\cdot(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}),$$

  - ⋆ avec n pair est divisible par $x-a$ et par $x+a$. Pour le factoriser, il convient de considérer le binôme comme la différence de deux carrés :

$$x^n - a^n = \left(x^{n/2} + a^{n/2}\right)\cdot\left(x^{n/2} - a^{n/2}\right).$$

    On vérifie ensuite si les deux binômes ainsi obtenus sont encore factorisables sur $\mathbb{R}$.

2.5 Équations et inégalités de degré 1

	Solutions de l'équation $ax=b$	Solutions de l'inégalité $ax>b$	Solutions de l'inégalité $ax<b$
Si $a>0$	$x = {}^b/_a$	$x > {}^b/_a$	$x < {}^b/_a$
Si $a<0$	$x = {}^b/_a$	$x < {}^b/_a$	$x > {}^b/_a$

2.6 Équations et inégalités de degré 2

On ne considère ici que le cas $a>0$ auquel on peut toujours se ramener

Soit $\Delta := b^2-4ac$ $(a>0)$	Solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$	Solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$
Si $\Delta>0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	$x<x_1$ ou $x>x_2$	$x_1<x<x_2$
Si $\Delta=0$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$x \neq -\dfrac{b}{2a}$	$\nexists$ solution
Si $\Delta<0$	$\nexists$ solution réelle	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists$ solution

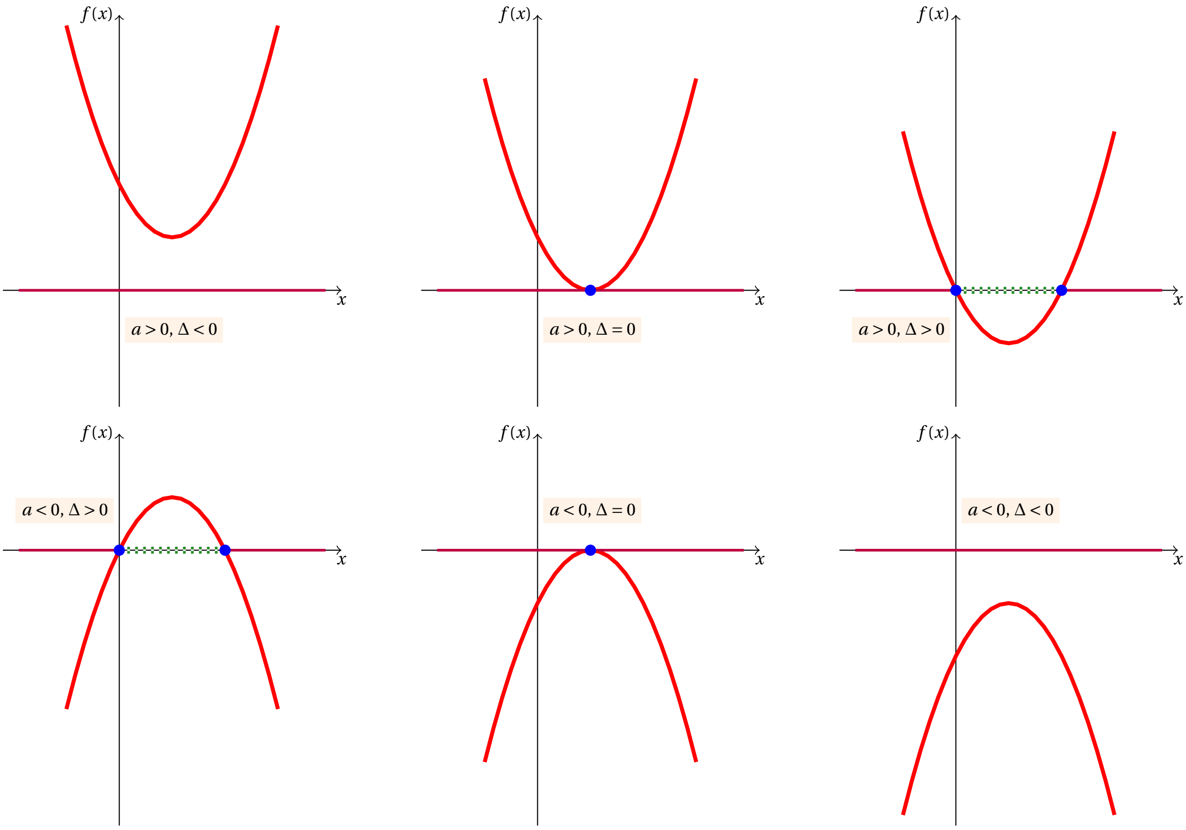
Rappelons que

- ⋆ $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
- ⋆ $\begin{cases} x_1+x_2 = -{}^b/_a \\ x_1\cdot x_2 = {}^c/_a \end{cases}$

Le tableau ci-dessus a une interprétation géométrique : si on associe au trinôme ax^2+bx+c la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$, on peut interpréter les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ comme les intersections de la courbe représentative de la parabole avec l'axe des x. Ci-dessous, les figures du haut représentent les trois positions possibles de la parabole lorsque $a>0$: de gauche vers la droite on a aucune intersection, une intersection et deux intersections (respectivement, $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$). En bas les trois cas lorsque $a<0$: de gauche vers la droite on a deux intersections, une intersection et aucune intersection (respectivement, $\Delta<0$, $\Delta=0$, $\Delta>0$). Pour résoudre les inégalités $ax^2+bx+c>0$ ou $ax^2+bx+c<0$ il suffit d'étudier la position de la parabole $y=ax^2+bx+c$ par rapport à l'axe des x :

- ⋆ les cercles représentent les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$;

- ⋆ en bleu on a les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c>0$;
- ⋆ en vert pointillé les solutions de l'inégalité $ax^2+bx+c<0$.



2.7 Équations et inégalités de degré supérieur à 2

Équations et inégalités binomiales. On ne considère ici que le cas $a>0$ auquel on peut toujours se ramener.

$(a>0)$		Solutions de l'équation $ax^n+b=0$	Solutions de l'inégalité $ax^n+b>0$	Solutions de l'inégalité $ax^n+b<0$
n impair,		$x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x>\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x<\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
	$b>0$	$\nexists x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
n pair,	$b=0$	$x=0$	$x\neq 0$	$\nexists x\in\mathbb{R}$
	$b<0$	$x_{1,2}=\pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$x<-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ ou $x>\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$	$-\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}<x<\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Équations et inégalités trinômes. Les équations (inégalités) trinômes ont pour forme normale

$$ax^{2n}+bx^n+c \gtreqless 0.$$

La stratégie résolutive consiste à poser $x^n=t$. On est ainsi reconduit à une équation (inégalité) de degré 2 en t : $at^2+bt+c\gtreqless 0$. On obtient ainsi deux solutions t_1 et t_2 et on obtient deux équations (inégalités) binomiales $x^n \lesseqgtr t_1$ et $x^n \gtreqless t_2$.

2.8 Équations et inégalités fractionnelles

- ⋆ L'équation $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x)\neq 0$ et $f(x)=0$;

- ⋆ l'inégalité $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;
- ⋆ l'inégalité $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) \neq 0$ et $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

Remarque

- ⋆ l'équation $f(x) \cdot g(x) = 0$ est satisfaite pour les x tels que $g(x) = 0$ ou $f(x) = 0$;
- ⋆ l'inégalité $f(x) \cdot g(x) > 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe ;
- ⋆ l'inégalité $f(x) \cdot g(x) < 0$ est satisfaite pour les x tels que $f(x)$ et $g(x)$ sont de signes différents.

2.9 Systèmes d'inégalités

Deux (ou plus) inégalités constituent un système d'inégalités si elles doivent être satisfaites simultanément. Résoudre un système signifie donc calculer les solutions COMMUNES à toutes les inégalités qui le composent. Bien évidemment, les solutions des inégalités étant des intervalles, il faudra "superposer" ces intervalles pour trouver un intervalle dans lequel toutes les inégalités sont satisfaites.

2.10 Équations et inégalités qui contiennent des valeurs absolus

2.9 Définition (Valeur absolue)

La valeur absolue d'un réel x est le plus grand des deux nombres x et $-x$. On la note $|x|$ et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \max\{x, -x\}.$$

2.10 Propriété

① $|a| = 0 \iff a = 0$

② $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

③ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

④ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

⑤ $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

⑥ $|a| \le b \iff -b \le a \le b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \ge 0$

⑦ $|a| \ge b \iff a \le -b$ ou $a \ge b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \ge 0$

⑧ $|a| \le |b| \iff a^2 \le b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

⑨ $\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

⑩ $\big||a| - |b|\big| \le |a + b| \le |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2.11 Définition

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une application. Alors

$$\left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

EXEMPLE

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \ge -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

2.12 Propriété

- ⋆ $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $|f(x)| = g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

★ $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'inégalité $|f(x)| > g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$

★ $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'inégalité $|f(x)| < g(x)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$$

EXEMPLE

1. $|2x-5| = |x^2-4|$ équivaut à l'union des deux systèmes

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5 = x^2-4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -(2x-5) = x^2-4 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x^2-2x+1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x^2+2x-9 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x = -1 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

d'où $x = -1 \pm \sqrt{10}$.

2. $|x+12| \geq |x^2-8|$ équivaut à l'union des deux systèmes

$$\begin{cases} x+12 \geq 0 \\ x+12 > x^2-8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+12 < 0 \\ -(x+12) > x^2-8 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x \geq -12 \\ x^2-x-20 < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < -12 \\ x^2+x+4 < 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x \geq -12 \\ -4 < x < 5 \end{cases}$$

donc $x \in]-4;5[$.

3. $|2x-4| \leq |x+2|$ équivaut au système

$$\begin{cases} 2x-4 < x+2 \\ -(2x-4) \leq x+2 \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{cases} x < 6 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad x \in \left[\frac{2}{3};6\right[.$$

Remarque (Cas particulier : $g(x) = k$)
Pour $k \in \mathbb{R}$ on a le tableau suivant :

	Solutions de l'équation $|f(x)| = k$	Solutions de l'inégalité $|f(x)| > k$	Solutions de l'inégalité $|f(x)| < k$
Si $k < 0$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$	$\forall x \in \mathscr{D}_f$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$
Si $k = 0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = 0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \neq 0$	$\nexists x \in \mathscr{D}_f$
Si $k > 0$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = \pm k$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > k \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > k \end{cases}$	$x \in \mathscr{D}_f$ tel que $\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$

EXEMPLE

1. $|x+3|=5$ équivaut à l'union des deux systèmes linéaires
$$\begin{cases} x+3\ge 0\\ x+3=5\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases} x+3<0\\ -(x+3)=5\end{cases}$$
qu'on résout facilement
$$\begin{cases} x\ge -3\\ x=2\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases} x<-3\\ x=8\end{cases}$$
d'où $x=2$ ou $x=8$.
2. $|x+3|>5$ équivaut à l'union des deux systèmes linéaires
$$\begin{cases} x+3\ge 0\\ x+3>5\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases} x+3<0\\ -(x+3)>5\end{cases}$$
i.e.
$$\begin{cases} x\ge -3\\ x>2\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases} x<-3\\ x<8\end{cases}$$
donc $x<-3$ ou $x>2$.
3. $|x+3|\le 5$ équivaut au système
$$\begin{cases} x+3\le 0\\ x+3>-5\end{cases} \qquad \textit{i.e.} \qquad \begin{cases} x\le -3\\ x>-8\end{cases} \qquad \text{donc} \qquad x\in]-8;-3].$$

2.11 Équations et inégalités irrationnelles

	Solutions de l'équation $A(x)=\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)>\sqrt[n]{B(x)}$	Solutions de l'inégalité $A(x)<\sqrt[n]{B(x)}$
Si n est impaire	$(A(x))^n=B(x)$	$(A(x))^n>B(x)$	$(A(x))^n<B(x)$
Si n est paire	$\begin{cases} A(x)\ge 0\\ (A(x))^n=B(x)\end{cases}$	$\begin{cases} B(x)\ge 0\\ A(x)>0\\ (A(x))^n>B(x)\end{cases}$	$\begin{cases} A(x)<0\\ B(x)\ge 0\end{cases}$ ou $\begin{cases} A(x)\ge 0\\ (A(x))^n<B(x)\end{cases}$

2.12 Équations exponentielles

Une équation est exponentielle si l'inconnue apparait en exposante.

Équation	Solution
$a^x=c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$x=\log_a c$
$ma^{f(x)}=nb^{g(x)}$ (avec $a,b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$)	$\ln m+f(x)\ln a=\ln n+g(x)\ln b$
$f(a^x)=c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	On pose $t:=a^x$

2.13 Inégalités exponentielles

Inégalité	Paramètres		Solution
$a^x > c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$c \le 0$		$\forall\, x \in \mathbb{R}$
	$c>0$	$0<a<1$	$x < \log_a c$
		$a>1$	$x > \log_a c$
$a^x < c$ (avec $a>0$, $a\neq 1$)	$c \le 0$		$\nexists\, x \in \mathbb{R}$
	$c>0$	$0<a<1$	$x > \log_a c$
		$a>1$	$x < \log_a c$

Puisque, pour $a>0$ on peut écrire $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

	$0<a<1$	$a>1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ avec $a>0$ et $a\neq 1$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$
$m\,a^{f(x)} > n\,b^{g(x)}$ avec $a,b>0$ et $a\neq 1$, $b\neq 1$	$\ln m + f(x)\ln a > \ln n + g(x)\ln b$	

2.14 Propriétés des logarithmes

2.13 Propriété

Soit $a>0$, $a\neq 1$.

① Si $b_1>0$ et $b_2>0$ alors $\log_a(b_1\cdot b_2) = \log_a(b_1)+\log_a(b_2)$.

② Si $b_1>0$ et $b_2>0$ alors $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a(b_1)-\log_a(b_2)$.

③ Si $b>0$ alors $\log_a(b^k) = k\log_a(b)$.

④ $\log_a(1)=0$.

⑤ $\log_a(a)=1$.

⑥ $\log_a(a^c)=c$.

⑦ Si $c>0$ alors $a^{\log_a(c)}=c$.

⑧ Si $b>0$ alors $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ avec $c>0$ et $c\neq 1$ (Règle du changement de la base).

Notamment, on rappelle la chaîne d'égalités suivante :

$$\log_a x = -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{1/a} x = \log_{1/a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\log_x a}$$

2.15 Équations logarithmiques

Une équation est logarithmique si l'inconnue apparait sous le symbole de logarithme. Puisqu'on a $\log_x a = \log_x e \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln x}$, on peut toujours se ramener au cas où l'inconnue n'apparait qu'en argument du logarithme.

Équation	Solution
$\log_a f(x) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^c \end{cases}$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
$f\left(\log_a g(x)\right) = c$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$)	Il faut $g(x) > 0$ On pose $t := \log_a g(x)$

2.16 Inégalités logarithmiques

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$0 < f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x) > 0$

Puisque, pour $a > 0$ et $a \neq 1$ on peut écrire $\log_a x = -\log_{1/a} x$, on peut toujours se ramener à des inégalités de base plus grande que 1.

2.17 Systèmes linéaires

2.14 Définition (Système linéaire)
Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- ⋆ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$.
- ⋆ Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
- ⋆ Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ⋆ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution.
  Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ⋆ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.
- ⋆ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ⋆ Un système est CARRÉ si $n = p$.

Équilibrage de réactions chimiques Du point de vue mathématique, équilibrer une réaction chimique signifie trouver des coefficients (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}$), appelés coefficients stœchiométriques, qui satisfont certaines contraintes comme la conservation du nombre d'atomes, ou la conservation du nombre d'électrons (pour les réactions red-ox), ou la conservation de la charge (pour les réactions écrites sous forme ionique). Toutes ces contraintes dépendent linéairement des coefficients stœchiométriques, ce qui amène tout naturellement à l'écriture d'un système linéaire.
Par exemple, considérons la réaction

$$H_2 + O_2 \to H_2O.$$

Notons x_1, x_2 et x_3 les coefficients stœchiométriques

$$x_1 H_2 + x_2 O_2 \to x_3 H_2O.$$

Les contraintes sont :

1. la conservation du nombre d'atomes d'hydrogène : $2x_1 = 2x_3$,
2. la conservation du nombre d'atomes d'oxygène : $2x_2 = x_3$.

On note qu'on a 3 inconnues mais seulement 2 équations linéairement indépendantes ; en effet, les coefficients stœchiométriques ne définissent pas des quantités absolues mais seulement les rapports entre les différents éléments. Par conséquent, si (x_1, x_2, x_3) équilibre la réaction, alors tous les multiples entiers de (x_1, x_2, x_3) équilibrent aussi la réaction.
Pour résoudre le problème sans paramètres, fixons arbitrairement un des coefficients, par exemple $x_3 = 1$. On doit alors résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors $x_1 = 1$ et $x_2 = 1/2$. Si nous voulons des coefficients stœchiométriques entiers, il suffit de multiplier tous les coefficients par 2 et on a ainsi

$$2H_2 + 1O_2 \to 2H_2O.$$

2.15 Définition (Système échelonné)

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcl} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right. \qquad (S)$$

Réduction Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

- ⋆ si $b \neq 0$ le système est impossible,
- ⋆ si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Méthode du pivot de GAUSS Soit $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ la matrice des coefficients du système (S).
La méthode du pivot de GAUSS comporte $n-1$ étapes : par des opérations élémentaires sur les lignes à chaque étape j on élimine l'inconnue x_j dans les lignes L_i pour $i > j$.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i > j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j,$$

on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i du système linéaire pour $i > j$.

En réitérant le procédé pour i de 1 à $n-1$, on aboutit à un système échelonné.

EXEMPLE
On résout par la méthode de GAUSS le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{Étape } k=2]{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0\end{cases} \xrightarrow[\text{Étape } k=3]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 40x_4=0\end{cases}$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

Méthode de Gauss-Jordan Dans cette variante de la méthode du pivot de Gauss, à chaque étape on fait apparaître des zéros à la fois au-dessus et en-dessous du pivot.
Étape j : en permutant éventuellement deux lignes (*i.e.* deux équations) du système linéaire, on peut supposer $a_{jj}\neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme alors toutes les lignes L_i avec $i\neq j$ selon la règle :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

ainsi on élimine l'inconnue x_j dans toutes les lignes L_i. En réitérant le procédé pour i de 1 à n, on aboutit à un système diagonal.

Exemple
On résout par la méthode de Gauss-Jordan le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+2L_2\\ L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}} \begin{cases} x_1-x_3-10x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3/4\\ L_2\leftarrow L_2-L_3/2\\ L_4\leftarrow L_4+L_3}} \begin{cases} x_1+4x_4=1\\ -x_2-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ +40x_4=0\end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1\leftarrow L_1+11L_4/40\\ L_2\leftarrow L_2+9L_4/40\\ L_3\leftarrow L_3+4L_4/40}} \begin{cases} x_1=1\\ -x_2=0\\ -4x_3=0\\ 40x_4=0\end{cases}$$

donc

$$x_1=1,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad x_4=0.$$

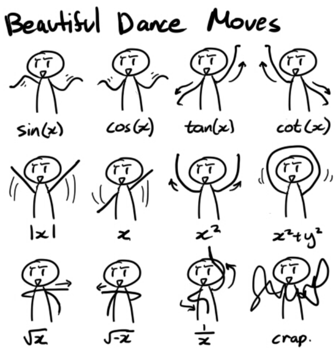
Remarque (Systèmes mal conditionnés)
Considérons le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3.218613x_1+6.327917x_2=10.546530,\\ 3.141592x_1+4.712390x_2=7.853982.\end{cases}$$

Sa solution est donnée par $x_1=x_2=1$. Considérons maintenant un système d'équations "voisin" (le carré indique un changement de décimale) :

$$\begin{cases} 3.21861\boxed{1}x_1+6.327917x_2=10.546530,\\ 3.14159\boxed{4}x_1+4.712390x_2=7.85398\boxed{0}.\end{cases}$$

Sa solution est donnée par $x_1=-5$, $x_2=5$. On voit donc que, bien que ces deux systèmes soient voisins, leurs solutions sont très différentes. On parle dans ce cas de systèmes mal conditionnés. Résoudre un système mal conditionné avec un ordinateur peut être une affaire délicate si l'ordinateur calcule avec trop peu de chiffres significatifs. Dans l'exemple précédent nous observons que, si l'ordinateur ne retient que 6 chiffres significatifs, il est complètement inespéré d'obtenir une solution raisonnablement proche de la solution !



3

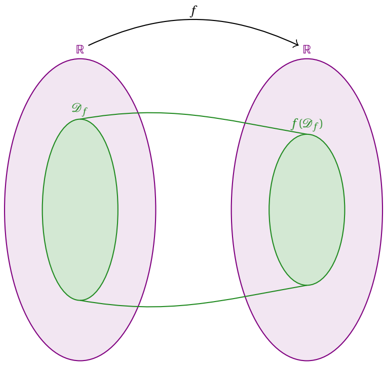
Fonctions d'une variable réelle

3.1 Définition (Fonction)

Une fonction est un procédé qui à tout nombre réel x d'un ensemble $\mathscr{D}_f$ de $\mathbb{R}$ associe (au plus) un unique nombre réel noté $f(x)$. On la note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

où $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de définition de la fonction f, x la variable et $f(x)$ l'image de x par la fonction f.



Remarque

1. Lorsque l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas donné, il faut le préciser : c'est le plus grand ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.
2. Attention : ne pas confondre la fonction f et le réel $f(x)$.
3. La variable x est muette, on pourrait très bien écrire $t \mapsto f(t)$ ou encore $\heartsuit \mapsto f(\heartsuit)$.

EXEMPLE

On peut définir une fonction de différentes manières :

1. à l'aide d'une expression : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ avec $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
2. à l'aide de plusieurs expressions : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$ avec $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$;
3. à l'aide de certaines courbes, par exemple un électrocardiogramme.

3.2 Définition (Ensemble image d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$, on appelle ensemble image, noté $f(\mathscr{D}_f)$, l'ensemble des images de tous les réels de l'ensemble de départ $\mathscr{D}_f$:

$$f(\mathscr{D}_f) = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in \mathscr{D}_f \right\}.$$

EXEMPLE

Pour les fonctions de l'exemple précédent, on trouve $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = \mathbb{R}^*$ et $g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3.3 Définition (Antécédent)

Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et y un réel. On appelle antécédent de y par f tout réel x de $\mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = y$.

Remarque
Un réel peut avoir un ou plusieurs antécédents ou n'en avoir aucun !

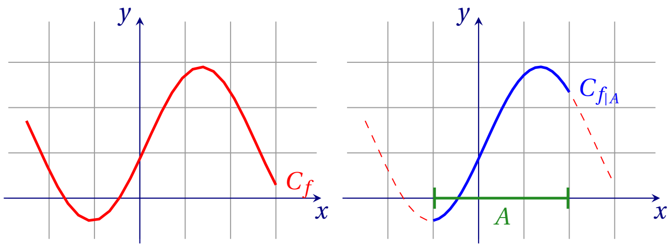
3.4 Définition (Graphe d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$, on appelle graphe de f sur $\mathscr{D}_f$ l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$, où x appartient à $\mathscr{D}_f$:

$$C_f = \left\{ (x, f(x)) \;\middle|\; x \in \mathscr{D}_f \right\}.$$

L'équation $y = f(x)$ est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f.

3.5 Définition (Restriction d'une fonction)
Soient f une fonction et $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. Soit A une partie de $\mathscr{D}_f$, la fonction f est bien définie sur A et on appelle restriction de f à A, la fonction notée $f_{|A}$ définie par

$$\begin{aligned} f_{|A} \colon A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$



Exemple
En considérant la fonction g du premier exemple on a $g_{|[0;+\infty[} = \cos$.

Remarque
Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, il arrive que l'on utilise la notation f pour désigner $f_{|A}$. Par exemple, $\cos\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

3.6 Définition (Composée de fonctions)
Soient $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. On appelle composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ définie sur $\mathscr{D}_f$ par

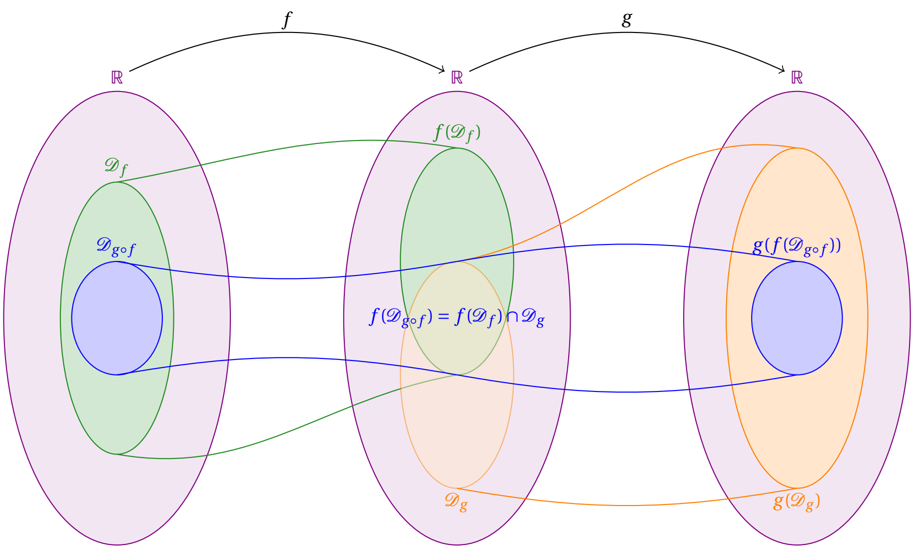
$$g \circ f \colon x \mapsto g(f(x)).$$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & f(\mathscr{D}_f) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple
La fonction $u\colon t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ s'écrit sous la forme composée $u = g \circ f$ avec $f\colon t \mapsto \omega t + \varphi$ et $g\colon x \mapsto \cos(x)$.

Remarque
En général on n'a pas nécessairement $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. Dans ce cas, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des points x de l'ensemble de définition de f dont l'image par f appartient à l'ensemble de définition de g :

$$\mathscr{D}_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathscr{D}_f \;\middle|\; f(x) \in \mathscr{D}_g \right\}.$$



EXEMPLE

La fonction $h\colon x\mapsto\sqrt{1-x}$ s'écrit sous la forme composée $h = g\circ f$ avec

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1-x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

On a d'autre part

$$\mathscr{D}_h = \{\, x\in\mathbb{R} \mid 1-x\in\mathbb{R}_+ \,\} = \{\, x\in\mathbb{R} \mid x\le 0 \,\} =]-\infty,1].$$

Une fonction f fait correspondre au plus une (et une seule) valeur y à chaque valeur $x\in\mathscr{D}_f$. Dans certaines situations, il est intéressant d'inverser ce processus et de retrouver la ou les valeurs de x qui ont conduit à une valeur y particulière.

3.7 Définition (Fonction réciproque)

Soit $f\colon\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ une fonction et notons $B = f(\mathscr{D}_f)$ l'ensemble image. Si à chaque élément $y\in B$ correspond une et une seule antécédent $x\in\mathscr{D}_f$, alors la loi qui à y associe son unique antécédent x définit une fonction $f^{-1}\colon B\to\mathscr{D}_f$ que l'on appelle fonction réciproque ou fonction inverse de f.

Les fonctions qui possèdent une réciproque sont dites inversibles. Lorsque $f\colon\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ est inversible, on a $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x\in\mathscr{D}_f$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y\in B$.

EXEMPLE

L'ensemble image de la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est $B = f(\mathscr{D}_f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Cette fonction n'est pas inversible car les valeurs positives de y possèdes deux antécédents. L'ensemble image de la fonction $g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ est encore $\mathbb{R}_+$ mais cette fonction est bien inversible car à chaque valeur de $y\in B$ correspond une et une seule valeur $x\in\mathbb{R}_+$ telle que $x^2 = y$.

ATTENTION

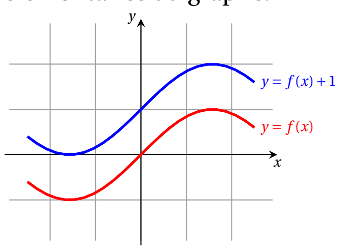
Ne pas confondre $f^{-1}(x)$ avec $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

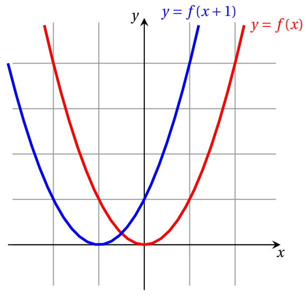
3.1 Graphes

L'ensemble des points (x,y) du plan dont les coordonnées satisfont $y = f(x)$ forme le graphe de la fonction f. Puisqu'une fonction f associe une et une seule valeur $f(x)$ à chacun des points x de son domaine, une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point. Lorsque l'on modifie la formule définissant une fonction, le graphe de la fonction se transforme. Certaines modifications de la formule induisent des transformations élémentaires du graphe.

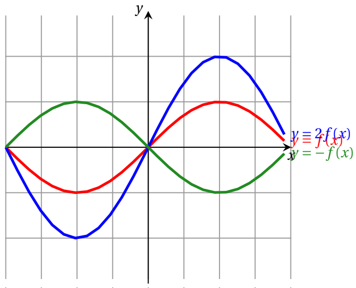
3.8 Définition (Translation verticale)

Soit $g(x) = f(x)+c$. Lorsque c est positif, le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f vers le haut de c unités. Lorsque c est négatif, la translation se fait vers le bas.

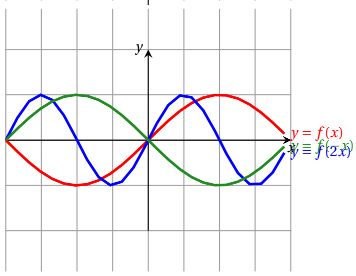




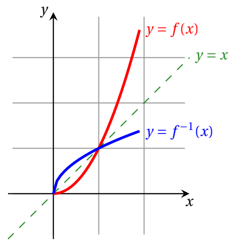
3.9 Définition (Translation horizontale)
Considérons la fonction $g(x) = f(x+c)$ pour un certain $c \geq 0$. La valeur de g en 0 est égale à la valeur de f en c. Le graphe de g s'obtient en translatant le graphe de f vers la gauche de c unités. Lorsque c est négatif, la translation se fait vers la droite.



3.10 Définition (Dilatation ou contraction verticale)
Soit $g(x) = cf(x)$ pour un certain c. La valeur prise par g en 1 est égale à la valeur prise par f en 1. Lorsque $c \geq 1$, le graphe de g s'obtient par dilatation du graphe de f suivant l'axe y d'un facteur c. Lorsque $0 < c \leq 1$, le graphe de g s'obtient par contraction de celui de f. Lorsque c est négatif, la transformation obtenue est une symétrie par rapport à l'axe x, suivie d'une dilatation ou d'une contraction d'un facteur $|c|$.



3.11 Définition (Dilatation ou contraction horizontale)
Soit $g(x) = f(cx)$ pour un certain c. La valeur prise par g en 1 est égale à la valeur prise par f en 1. Lorsque $c \geq 1$, le graphe de g s'obtient par contraction du graphe de f suivant l'axe x d'un facteur c. Lorsque $0 < c \leq 1$, le graphe de g s'obtient par dilatation de celui de f. Lorsque c est négatif, la transformation obtenue est une symétrie par rapport à l'axe y, suivie d'une dilatation ou d'une contraction d'un facteur $|c|$.



3.12 Définition (Graphe fonction réciproque)
Si f est bijective (donc inversible), le graphe de la réciproque de f est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple
Considérons la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour $a \neq 0$. La fonction se décompose en

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Le graphe de la fonction $g(x) = x^2$ est une parabole pointée vers le bas. Le graphe de la fonction f s'obtient au départ de celui de g en procédant aux transformations successives suivantes : translation horizontale de $b/(2a)$ unités, dilatation ou contraction horizontale d'un facteur a, translation verticale de $-(b^2 - 4ac)/(4a)$ unités.

3.13 Définition (Parité et périodicité d'une fonction)
Soit $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que

- ⋆ f est une fonction paire si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$-x \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = f(x);$$

- ⋆ f est une fonction impaire si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$-x \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(-x) = -f(x);$$

- ⋆ f est une fonction périodique de période $p > 0$ (ou p-périodique) si pour tout réel x de $\mathscr{D}_f$ on a

$$x + p \in \mathscr{D}_f \qquad \text{et} \qquad f(x+p) = f(x).$$

Si p est une période de f, tout multiple de p en est une. On considérera toujours la plus petite période strictement positive.

EXEMPLE

Les fonctions cos et $x \mapsto x^2$ sont paires. Les fonctions sin, $x \mapsto ax$ et $x \mapsto x^3$ sont impaires. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π, la fonction tan est périodique de période π. La fonction $x \mapsto x - E(x)$ est périodique de période 1.

Remarque

- ⋆ Les définitions de parité/imparité imposent que l'ensemble de définition de f soit «symétrique par rapport à 0».
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction paire, alors le point $(-x, y)$ appartient également au graphe. Les points (x, y) et $(-x, y)$ sont disposés de manière symétrique par rapport à l'axe y.
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction paire, alors le point $(-x, -y)$ appartient également au graphe. Les points (x, y) et $(-x, -y)$ sont disposés de manière symétrique par rapport à l'origine.
- ⋆ L'unique fonction $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ qui est à la fois paire et impaire est la fonction identiquement nulle.
- ⋆ La courbe représentative d'une fonction p-périodique est invariante par translation horizontale de p-unités, autrement dit, si (x, y) est un point du graphe d'une fonction p-périodique, alors le point $(x + p, y)$ appartient également au graphe.

3.14 Théorème

Si $f : x \mapsto f(x)$ est p-périodique, $g : x \mapsto f(mx)$ est $\frac{p}{m}$-périodique.

Remarque

La majorité des fonctions ne sont ni paires ni impaires. Elles peuvent toutefois être décomposées de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

On définit les deux fonctions f_p et f_i de $\mathscr{D}_f$ à valeur dans $\mathbb{R}$ définies par $f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On vérifie sans difficulté que f_p est paire et que f_i est impaire et qu'on a bien $f = f_p + f_i$.

EXEMPLE

La fonction $f(x) = (1 - x)/(2 + x)$ que l'on considère sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ n'est ni paire ni impaire. Sa décomposition donne

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2+x} + \frac{1+x}{2-x}\right)}_{f_p(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{2+x} - \frac{1+x}{2-x}\right)}_{f_i(x)} = \underbrace{\frac{2+x^2}{4-x^2}}_{f_p(x)} + \underbrace{\frac{-3x}{4-x^2}}_{f_i(x)}.$$

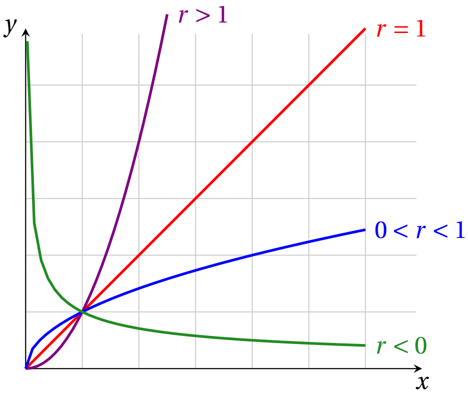
3.2 Fonctions puissances.

On appelle *fonction puissance* $r \in \mathbb{R}$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \mapsto x^r.$$

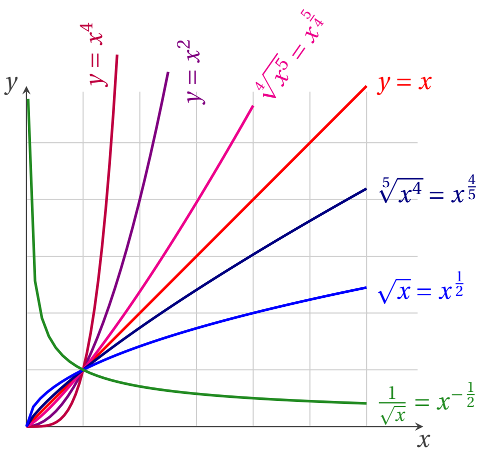
- **Dérivées** Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^r)' = rx^{r-1}$, $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}\dots$

  Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.
- **Monotonie**
  - ⋆ Pour $r < 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est décroissante de $+\infty$ à 0.
  - ⋆ Pour $r > 0$, la fonction $x \mapsto x^r$ est croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en 0 ; la fonction prolongée est dérivable en 0 si $r > 1$.
- **Limites**
  - ⋆ Pour $b > 0$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^b} = 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0.$$
  - ⋆ Pour $a > 1$ et $b \in \mathbb{R}$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.$$
  - ⋆ Pour $a > 1$ on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{a^x} = 0.$$
- **Représentation graphique**



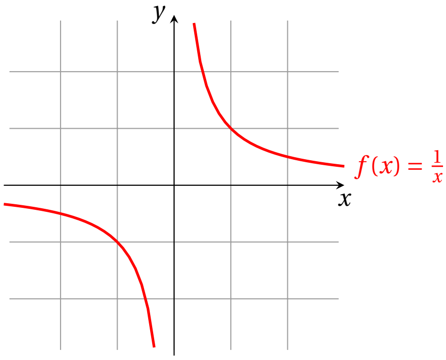
Propriété $x^r = e^{r\ln(x)}$.

EXEMPLE



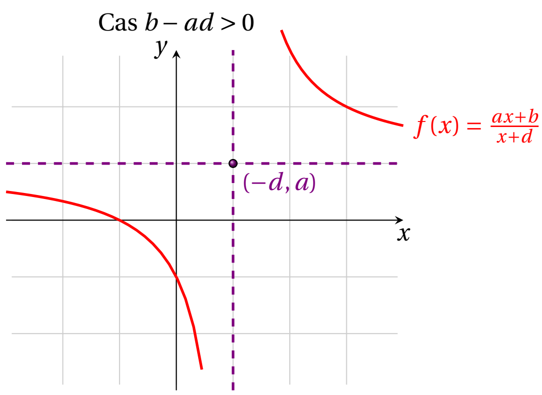
3.3 Fonctions homographiques.

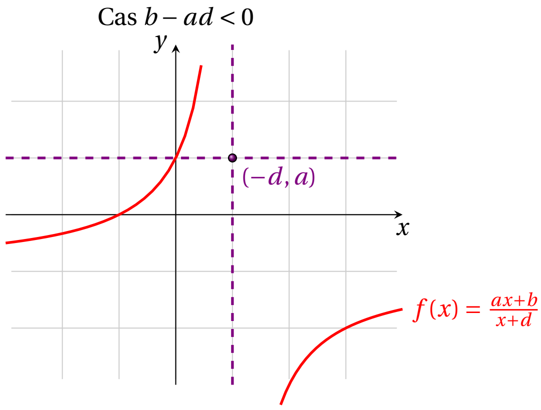
- **Cas particulier** La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie à l'origine. Son graphe est une hyperbole équilatère ayant les axes pour asymptotes :



- **Cas général** Les fonctions homographiques sont les fonctions définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-d\}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{-b/a\}$ par $x \mapsto \frac{ax+b}{x+d}$. On peut obtenir le graphe d'une *fonction homographique* au départ de celui de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en procédant à des transformations élémentaires car
$$\frac{ax+b}{x+d} = a + (b-ad)\frac{1}{x+d}.$$
  1. On part du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$,
  2. en translatant ce graphe vers la gauche de d unités on obtient le graphe de $x \mapsto \frac{1}{x+d}$,
  3. en dilatant le graphe ainsi obtenu suivant l'axe y par un facteur $(b-ad)$ on obtient le graphe de $x \mapsto (b-ad)\frac{1}{x+d}$,
  4. en translatant le graphe obtenu vers le haut de a unités on obtient le graphe de $x \mapsto a+(b-ad)\frac{1}{x+d}$

  - **Représentation graphique** Le graphe final est celui d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et se coupent en $(-d, a)$.





  - **Limites**
    - ⋆ Si $b-ad>0$ alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^- \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^+ \qquad \lim_{x\to-d^-}\frac{ax+b}{x+d} = -\infty \qquad \lim_{x\to-d^+}\frac{ax+b}{x+d} = +\infty$$
    - ⋆ Si $b-ad<0$ alors
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^+ \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{x+d} = a^- \qquad \lim_{x\to-d^-}\frac{ax+b}{x+d} = +\infty \qquad \lim_{x\to-d^+}\frac{ax+b}{x+d} = -\infty$$

  - **Dérivées** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ème est $\left(\frac{ax+b}{x+d}\right)^{(n)} = (b-ad)\frac{(-1)^n n!}{(x+d)^{n+1}}$

3.4 Fonction logarithme népérien.

La fonction “ln” est définie pour $x>0$ par

$$\begin{cases} \ln(1)=0 \\ (\ln(x))'=\frac{1}{x} \quad \forall x>0. \end{cases}$$

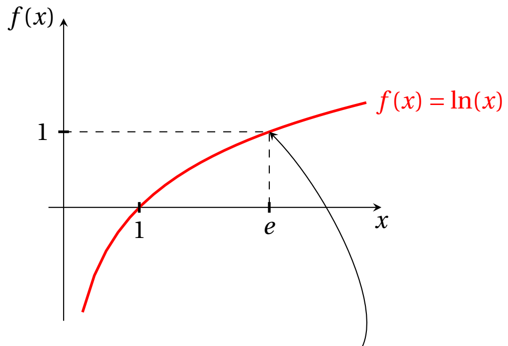
- **Propriétés algébriques** $\forall a>0$, $\forall b>0$, $\forall r\in\mathbb{Q}$

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b); \qquad \ln(a^r)=r\ln a; \qquad \ln(a/b)=\ln(a)-\ln(b).$$

- **Limites** $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
- **Monotonie et dérivées**
  - ⋆ Elle est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
  - ⋆ $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et la dérivée n-ème est $(\ln(x))^{(n)}=(-1)^{n+1}x^{-n}$.
  - ⋆ La dérivée en $x=1$ étant égale à 1, on a aussi $\ln(1+x)=x+o(x^2)$ au voisinage de 0.
- **Convexité** La fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ ce qui entraîne

$$\forall x>-1, \qquad \ln(1+x)\le x.$$

- **Représentation graphique**



L'unique solution de l'équation $\ln(x)=1$ est notée e ($e\approx 2{,}718$).

3.5 Fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction ln ; elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$; elle est notée exp ou $x\mapsto e^x$:

$$y=e^x \iff x=\ln(y).$$

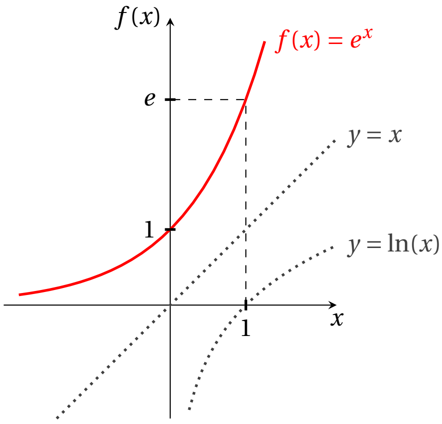
- **Propriétés algébriques** $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall b\in\mathbb{R}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$

$$e^{a+b}=e^a\cdot e^b; \qquad e^{ra}=(e^a)^r; \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a}; \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}.$$

- **Limites** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$,
- **Monotonie et dérivées**
  - ⋆ Elle est strictement croissante
  - ⋆ Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et la dérivée n-ème est égale à elle même : $(e^x)^{(n)}=e^x$.
  - ⋆ La dérivée en $x=0$ étant égale à 1, on a aussi $e^x-1=x+o(x^2)$ au voisinage de 0.
- **Convexité** La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui entraîne

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad 1+x\le e^x.$$

- **Représentation graphique**



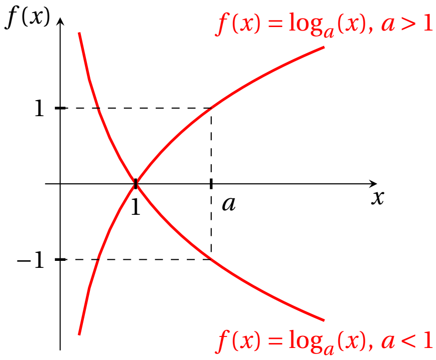
L'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$.

3.6 Fonction logarithme de base a.

La fonction logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) est la fonction définie par

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

- **Propriétés algébriques** Ses propriété algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.
- **Dérivées** $(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$.
- **Représentation graphique**



3.7 Fonction exponentielle de base a.

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$) est la fonction définie par

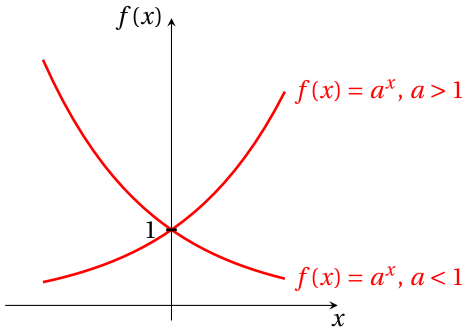
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a^x := e^{x\ln(a)}.$$

Remarquez bien qu'ici la variable est en exposant. Pour $a \neq 1$ c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$:

$$y = a^x \iff x = \log_a(y).$$

- **Dérivées** Sa dérivée est $(a^x)' = a^x \ln a$.

- **Représentation graphique**



Échelle logarithmique et repères (semi)-logarithmiques

Échelle logarithmique L'échelle logarithmique est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs car elle espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.

L'échelle logarithmique n'est définie que pour des valeurs strictement positives. Une base logarithmique b est choisie, correspondant à un type de logarithme, les plus courants étant le logarithme népérien ln (en mathématiques), le logarithme décimal $\log_{10}$ (en biologie) et le logarithme de base 2 $\log_2$ (en informatique). Toutes les autres bases restent possibles, elles sont seulement plus rarement utilisées. Les échelles obtenues sont identiques à un rapport près, seuls les calculs de pente seront différents.

L'origine (le zéro) de l'échelle correspond à la valeur $b^0 = 1$; vers la droite (ou vers le haut), le nombre b est placé à une unité de l'origine, b^2 à deux unités, b^3 à trois unités, etc. Vers la gauche (ou vers le bas), on trouve les puissances négatives de b : $b^{-1} = 1/b$ à une unité, $b^{-2} = 1/b^2$ à deux unités, etc. Plus généralement, un nombre x est placé sur l'échelle à une distance $\log_b(x)$: c'est sa coordonnée logarithmique.

Par exemple, si on utilise le logarithme décimal, la distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0.1 de 1 car $\log_{10}(100) - \log_{10}(10) = \log_{10}(10) - \log_{10}(1) = \log_{10}(1) - \log_{10}(0.1)$. En revanche, la distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car $\log_{10}(2) - \log_{10}(1) = \log_{10}(20) - \log_{10}(10) = \log_{10}(4) - \log_{10}(2) > \log_{10}(3) - \log_{10}(2)$. Pour l'échelle linéaire, deux graduations dont la *différence* vaut 10 sont à distance constante.

Sur ce type d'échelle, les grands nombres sont comprimés très proches de l'origine et facilement représentés (en base 10 par exemple, un nombre dix fois plus grand est seulement une unité plus loin), en revanche les nombres entre 0 et 1 sont dilatés et très vite renvoyés vers l'infini négatif. Pour l'échelle logarithmique de base b, deux graduations dont le *rapport* vaut b sont à distance constante.

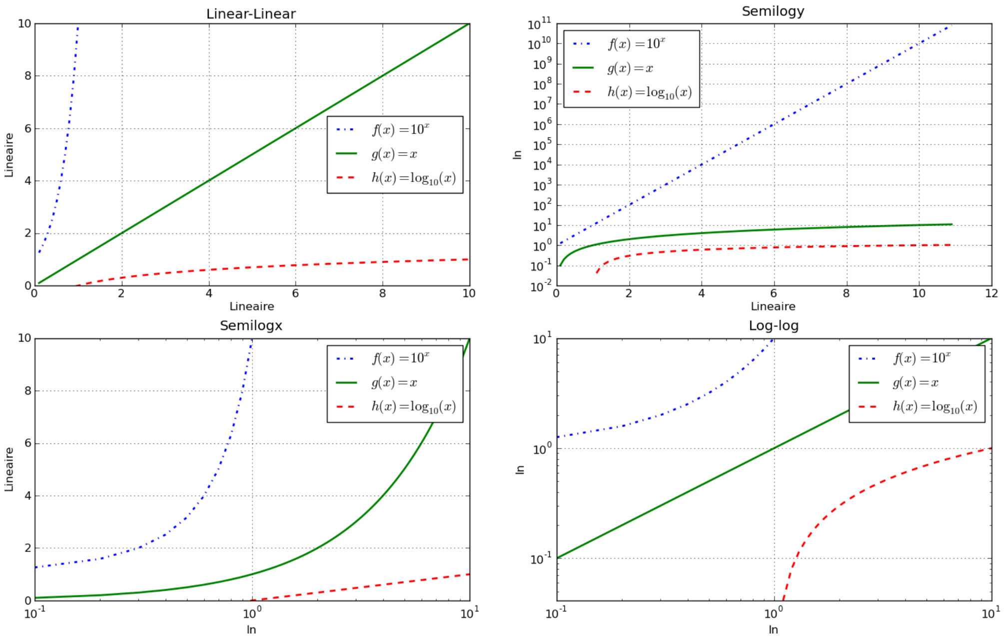
Repères semi-logarithmiques Un repère semi-logarithmique est un repère dans lequel l'un des axes, par exemple celui des abscisses (x), est gradué selon une échelle linéaire, comme les graduations d'un mètre courant, alors que l'autre axe, ici celui des ordonnées (y), est gradué selon une échelle logarithmique. Le repère semi-logarithmique en y permet de représenter des phénomènes exponentiels ou, plus généralement, des mesures s'étalant sur plusieurs ordres de grandeurs comme prenant des valeurs proches de 1 ou proches de 10^5. Ce type de repère permet aussi d'évaluer les taux de croissance d'une variable évoluant avec le temps. Quel que soit le niveau de la variable, des taux de croissance identiques seront représentés par des segments ayant la même pente. On peut ainsi comparer des taux de croissance en faisant abstraction des effets d'échelle.

Repère logarithmique Un repère log-log est un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.

EXEMPLE

Représentation graphique des fonctions $f(x) = 10^x$, $g(x) = x$ et $h(x) = \log_{10}(x)$ dans un repère

- ⋆ linéaire en x et en y (en haut à gauche)
- ⋆ linéaire en x et logarithmique de base 10 en y (en haut à droite)
- ⋆ logarithmique de base 10 en x et linéaire en y (en bas à gauche)
- ⋆ logarithmique de base 10 en x et y (en bas à droite)



Acidité d'une solution En chimie, on mesure l'acidité d'une solution par son pH. Le pH d'une solution est défini par

$$pH = -\log_{10}([H^+])$$

où $[H^+]$ désigne la concentration molaire en ions H^+ de la solution. Plus le pH d'une solution est faible, plus sa concentration en ions est élevée et plus la solution est acide.

EXEMPLE (ACIDITÉ DE QUELQUES ALIMENTS)

Aliment	pH
Banane	$4.5 - 4.7$
Raisin	$3.0 - 3.3$
Orange	$3.0 - 4.0$
Citron	$1.8 - 2.0$
Lait	$6.3 - 6.6$
Épinards	$5.1 - 5.7$

Intensité d'un son En acoustique, on mesure l'intensité d'un son en décibels :

$$I = 10\log_{10}\left(\frac{J}{J_0}\right)$$

où J est la puissance acoustique du son (en $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) et J_0 est la plus faible puissance audible par un humain à une fréquence de 1 kHz ($J_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). Cette définition est telle que la plus faible puissance audible par un être humain est égale à 0 dB. La gamme d'intensité perceptible à l'oreille humaine va de 0 dB à 120 dB qui correspond au seuil de douleur. Voici l'intensité de quelques sons :

Origine du son	Intensité
Limite de perception	0 dB
Bruissement de feuilles	10 dB
Chuchotement	20 dB
Automobile	50 dB
Conversation ordinaire	65 dB
Marteau piqueur à 3 m	90 dB
Limite de la douleur	120 dB

EXEMPLE
Un haut-parleur d'une puissance de Q watts disposé à une distance de R mètres d'un observateur développe une puissance acoustique de $J = Q/(4\pi J_0 R^2) \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. L'intensité du son est (en décibels)

$$I = 10 \log_{10}\left(\frac{Q}{4\pi J_0 R^2}\right) = 10\left(\log_{10}(Q) - \log_{10}(4\pi) - 2\log_{10}(R) - \log_{10}(J_0)\right).$$

Si $Q = 100\,\mathrm{W}$ on obtient $I \simeq 129 - 20 log_{10}(R)$: un observateur situé à une distance de 1 m d'une source de 100 W perçoit une intensité de $I = 129\,\mathrm{dB}$, qui dépasse la seul de la douleur. À une distance de 10 m l'intensité n'est plus que de 109 dB.

Intensité d'un tremblement de terre En géologie, on utilise l'échelle de RICHTER pour mesurer la vigueur des tremblements de terre. L'amplitude d'un tremblement de terre est donnée par

$$R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

où a désigne l'amplitude (mesurée en microns) des oscillations à la station de réception, T désigne la période (en secondes) et B est un facteur empirique qui est fonction de la distance entre la station de réception et de l'épicentre du tremblement de terre. Pour une distance de 10000 km on a typiquement $B = 6.8$.

EXEMPLE
Si, lors de secousses successives, la période des oscillations générées par un tremblement de terre reste inchangée mais l'amplitude est multipliée par 10, l'intensité du tremblement de terre sur l'échelle de RICHTER augmente d'une unité.

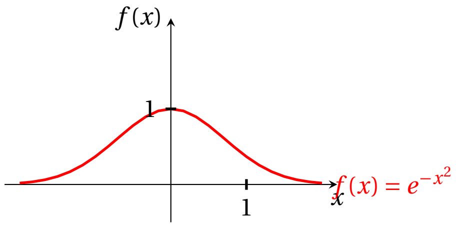
3.8 Fonctions gaussienne.

La fonction gaussienne est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ par $x \mapsto e^{-x^2}$.

- **Limites** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0^+$.
- **Monotonie** La fonction gaussienne est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, croissante pour $x < 0$, décroissante pour $x > 0$ et

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}, \qquad (e^{-x^2})'' = -2xe^{-x^2}(1-2x^2).$$

- **Représentation graphique**



3.9 Fonction logistique (ou sigmoïde).

La fonction logistique est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$.

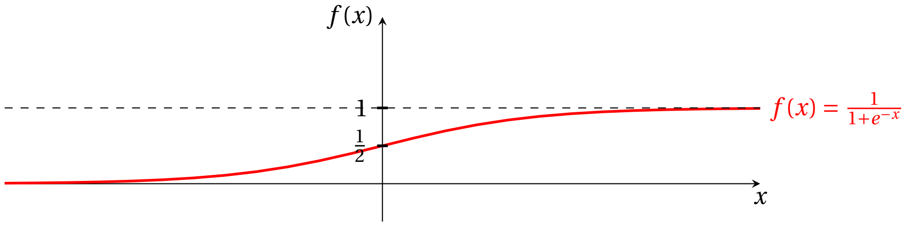
- **Limites** On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1^-.$$

- **Monotonie et dérivées** La fonction logistique est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, croissante et l'on a

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \qquad \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)'' = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}.$$

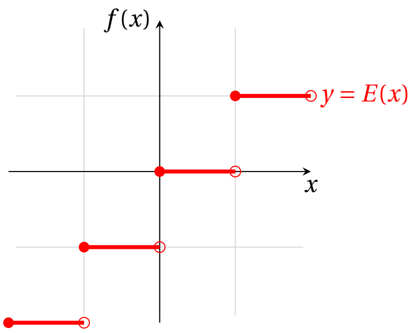
- **Représentation graphique**



3.10 Fonction «partie entière».

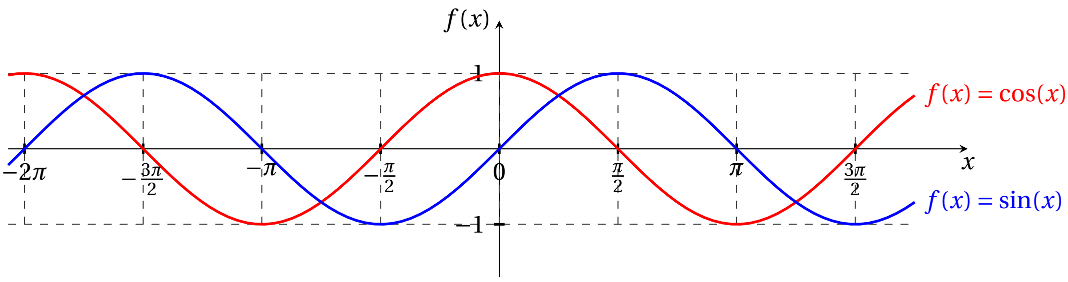
La fonction «partie entière» est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par $x \mapsto E(x) = n$ où n est l'unique entier relatif (positif, négatif ou nul) tel que $n \le x < n+1$.

- **Monotonie et dérivées** La fonction E est non continue et croissante.
- **Représentation graphique**

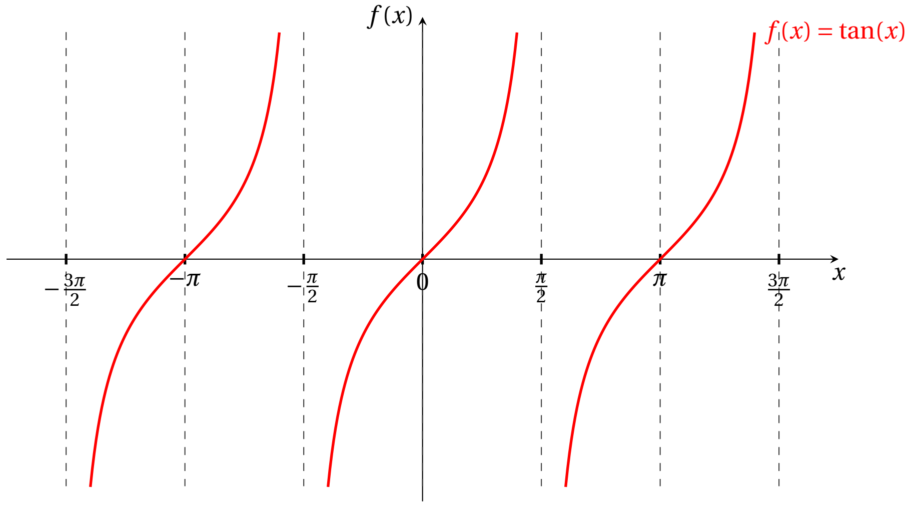


3.11 Fonctions circulaires et trigonométriques.

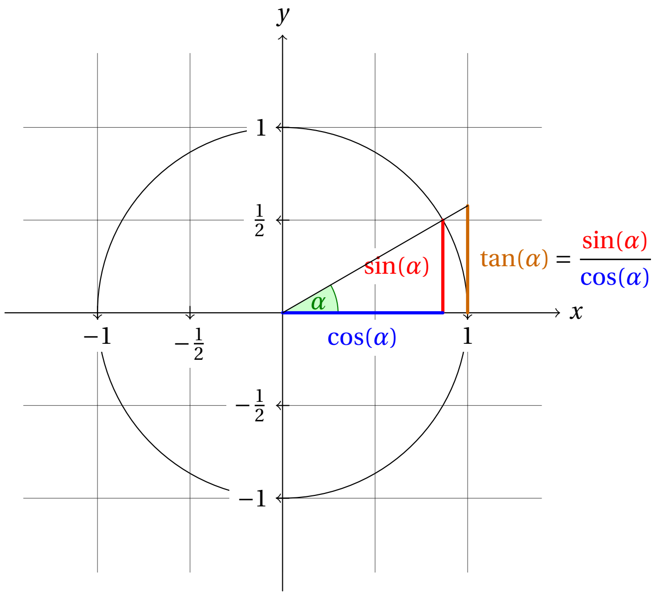
- **Fonctions sinus et cosinus**
  - **Domaine de définition** Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$.
  - **Périodicité, parité** Elles sont 2π-périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.
  - **Dérivées** $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(\sin(x))' = -\cos(x)$.
    Si $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle, ces expressions des dérivées ne sont correctes que si x est exprimé en radians.
  - **Limites remarquables** $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
  - **Représentation graphique**

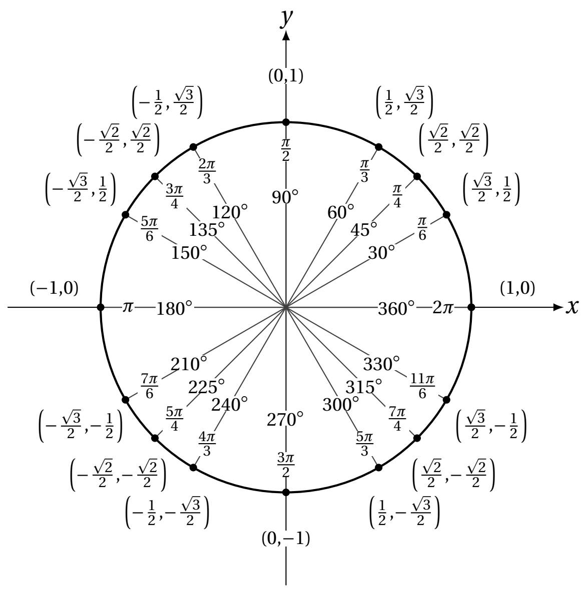


- **Fonction tangente**
  - **Domaine de définition** Elle est définie sur $D := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
  - **Périodicité, parité** Elle est π-périodique et impaire.
  - **Dérivée** $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour tout $x \in D$.
  - **Limites** $\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.
  - **Représentation graphique**



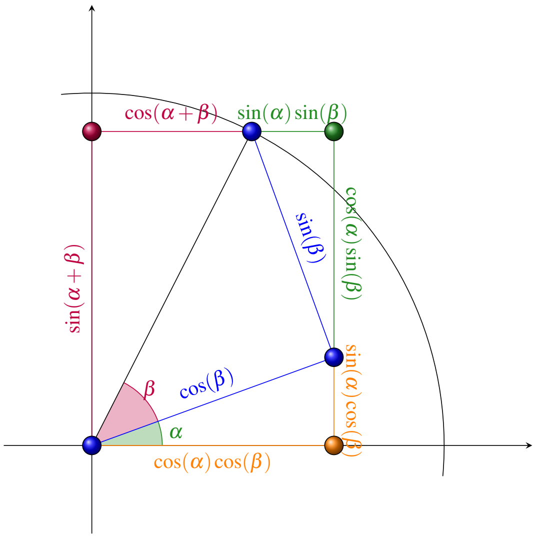
- **Propriétés**





$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x) \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$
$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x) \qquad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x) \qquad \tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$$
$$\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x) \qquad \sin(\pi/2 + x) = \cos(x) \qquad \tan(\pi/2 + x) = -1/\tan(x)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$



$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)\\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}
\end{aligned}$$

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\\
\sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\\
\sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}
\end{aligned}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(a)} = \frac{\tan(a)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(a)}},\\
\cos(a) &= \pm\sqrt{1-\sin^2(a)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(a)}},\\
\tan(a) &= \frac{\sin(a)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(a)}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(a)}}{\cos(a)}.
\end{aligned}$$

Soit $t := \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

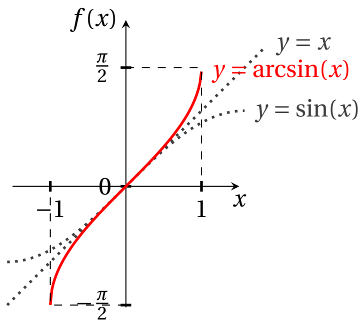
3.12 Fonctions circulaires réciproques.

- **Fonction arc-sinus** C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus :

$$\left.\begin{array}{c} y = \arcsin(x) \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \sin(y) \\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

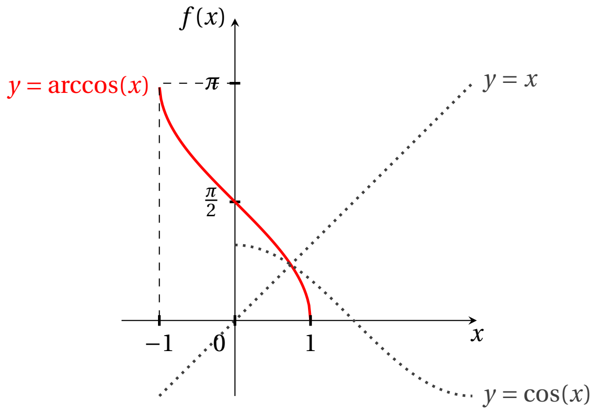


- **Fonction arc-cosinus** C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus :

$$\left.\begin{array}{c} y = \arccos(x) \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \cos(y) \\ 0 \le y \le \pi \end{array}\right.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$ on a

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

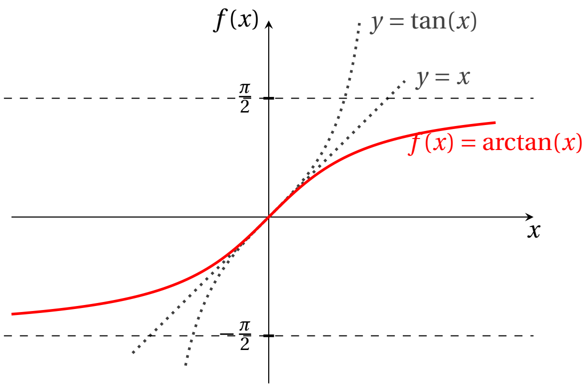


- **Fonction arc-tangente** C'est la bijection réciproque de la restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente :

$$\left.\begin{array}{c} y = \arctan(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \tan(y) \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Elle est impaire et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$



- **Propriétés**

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin(x))$$

$$\forall x > 0 \qquad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0 \qquad \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$$

3.13 Fonctions hyperboliques.

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique pour tout $x \in \mathbb{R}$ respectivement par

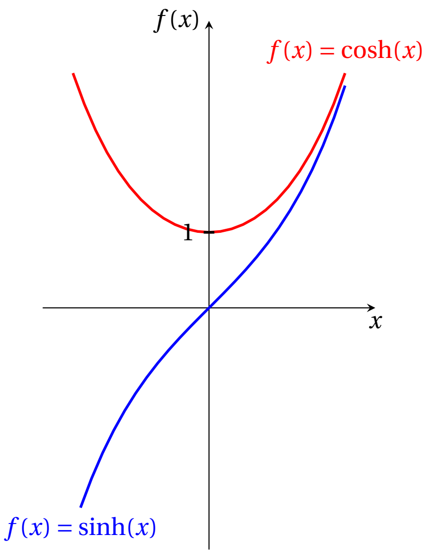
$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{1+e^{2x}}.$$

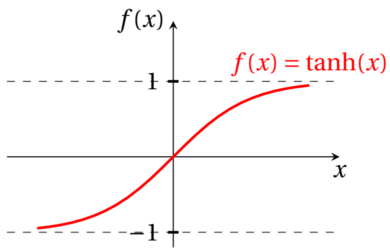
Propriétés : cosh est paire ; sinh et tanh sont impaires et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x; \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1; \qquad 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Dérivées : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x); \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x); \qquad (\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$





3.14 Fonctions hyperboliques réciproques.

Fonction argument sinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction sinh. Elle est impaire et on a

$$(\operatorname{argsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fonction argument cosinus hyperbolique C'est la bijection réciproque de la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction $\cosh(x)$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$(\operatorname{argcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Fonction argument tangente hyperbolique C'est la bijection réciproque de la fonction tanh. Elle est impaire et pour tout $x \in]-1,1[$ on a

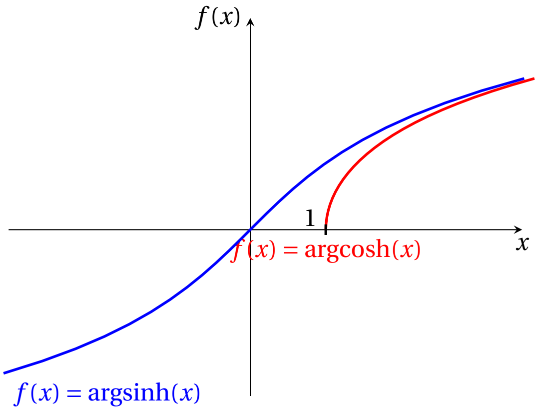
$$(\operatorname{argtanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

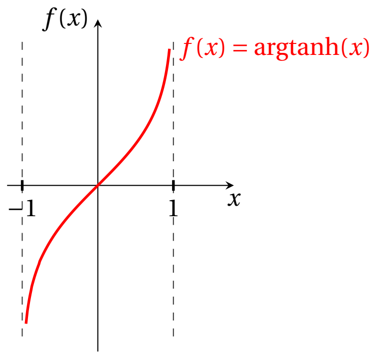
Propriétés

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$





Caténaire ou chaînette Lorsqu'un câble (ou une chaîne) est suspendu par ses extrémités entre deux points d'attache de même hauteur et est soumis à une force gravitationnelle uniforme (son propre poids), le câble adopte un profil donné par le graphe d'un cosinus hyperbolique et la courbe ainsi définie est appelée caténaire ou chaînette. On lui donne parfois le nom de vélaire. La chaînette est presque verticale près des points de suspension, car c'est là que le poids le plus important tire le plus la chaîne vers le bas. En revanche, vers le bas de la courbe, l'inclinaison diminue peu à peu puisque la chaîne supporte de moins en moins de poids. C'est d'ailleurs une des différences entre la chaînette et la parabole : pour une longueur égale, la parabole est plus «pointue» dans sa partie inférieure. Plus généralement, aucune courbe dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance de l'abscisse ne monte aussi vite qu'une chaînette.
La chaînette n'apparaît pas seulement dans la forme d'une chaîne ou d'un câble suspendu. On la trouve aussi,

- ⋆ renversée, pour un arc tenant par son propre poids. Relèvent de cette technique les essais architecturaux de GAUDI, l'arche du Jefferson National Expansion Memorial à Saint Louis et le hangar à dirigeables d'Écausseville ;
- ⋆ verticale, dans le profil d'une voile rectangulaire attachée à 2 barres horizontales, enflée par un vent soufflant perpendiculairement à ces barres, en négligeant le poids propre de la voile par rapport à la force du vent. C'est cette propriété qui justifie le nom de «vélaire» (voile) donné par Jacques BERNOULLI.

4

Éléments de logique et notions fondamentales de la théorie des ensembles

Des êtres, aussi bien physique (élève, chat, chaise...), qu'objets de notre pensée (nombre, fonction...), seront représentés par des lettres a, b, E, μ ... et considérés comme bien définis si nous disposons d'un critère permettant d'affirmer que deux de ces objets (représentés par a et b) sont, ou bien identiques, ou bien distincts :

$$a = b \qquad \text{ou bien} \qquad a \neq b.$$

4.1 Logique et quantificateurs

4.1 Définition (Assertion)
Une ASSERTION est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

EXEMPLE
"$1 < 2$" est une assertion vraie, "$4 < 3$" est une assertion fausse.

4.2 Définition (Proposition ou Prédicat)
Une PROPOSITION (ou prédicat) est un énoncé contenant des variables, qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables, faux pour toutes les autres.

EXEMPLE
- ⋆ "$x < 2$" est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement inférieurs à 2, fausse pour tous les autres.
- ⋆ L'énoncé «Mon pays se situe en Europe» sera vrai ou faux en fonction de la valeur de la variable «Mon pays». Si le lecteur est français, on obtiendra la proposition «La France se situe en Europe», qui est vraie ; si le lecteur est canadien, on obtiendra la proposition «Le Canada se situe en Europe» qui est fausse

4.3 Définition (Négation d'une proposition)
La NÉGATION d'une proposition "P", notée "non(P)" ou "$\neg(P)$", est une proposition qui est vraie lorsque P est fausse et qui est fausse lorsque P est vraie. Par conséquent, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes.

EXEMPLE
La proposition "$x < 2$" est la négation de la proposition "$x \geq 2$" .

4.4 Définition (Conjonction de deux propositions)
La CONJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P et Q" ou "$P \wedge Q$", est une proposition vraie si les deux propositions sont vraies, fausse dans tous les autres cas.

EXEMPLE
La conjonction des propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 2$" est "$x = 2$".

4.5 Définition (Incompatibilité de deux propositions)
Deux propositions P, Q sont incompatibles si la conjonction "P et Q" est toujours fausse.

EXEMPLE
Les propositions "$x \le 2$" et "$x \ge 5$" sont incompatibles.

4.6 Définition (Disjonction de deux propositions)
La DISJONCTION de deux propositions P, Q, notée "P ou Q" ou "$P \vee Q$', est une proposition vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse dans tous les autres cas (le "ou" est inclusif).

EXEMPLE
La disjonction "$x > 2$ ou $x < 2$" est "$x \neq 2$".

4.7 Définition (Implication de deux propositions)
L'IMPLICATION de deux propositions P, Q, notée "$P \implies Q$", est la proposition "(non(P)) ou Q".
Sa contraposée (qui est logiquement équivalente) est la proposition "(non(non(Q))) ou (non$P$)", notée "(non(Q)) $\implies$ (non(P))".
Sa négation est la proposition "P et (non(Q))".
Sa réciproque est la proposition "(non(Q)) ou P", notée "$Q \implies P$".

Remarque
L'implication "$P \implies Q$" se lit "P implique Q" ou "P entraine Q" ou "P est une condition suffisante de Q" ou "Q est une condition nécessaire de P". Le fait que "$P \implies Q$" soit vraie signifie que pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie, ou encore, que pour que P soit fausse il suffit que Q soit fausse.
L'implication "$P \implies Q$" équivaut à l'implication "non(Q) $\implies$ non(P)" (sa contraposée) et on écrit

$$\text{“}P \implies Q\text{”} \qquad \equiv \qquad \text{“non}(Q) \implies \text{non}(P)\text{”}$$

4.8 Définition (Théorème)
P et Q étant deux assertions, si l'implication "$P \implies Q$" est vraie on dit que c'est un THÉORÈME (c'est-à-dire une assertion démontrée dont P est l'HYPOTHÈSE et Q la CONCLUSION).

ATTENTION
Soit P ="Jour férié" et Q ="le facteur ne passe pas". La phrase «Les jours fériés le facteur ne passe pas» signifie que "$P \implies Q$". Il ne viendrait à l'esprit de personne d'inverser le raisonnement en «Le facteur ne passe pas aujourd'hui donc c'est forcément un jour férié», autrement dit, si on sait juste que "$P \implies Q$", alors à partir de "$\neg P$" il n'est pas possible de déduire quoi que ce soit.

4.9 Définition (Équivalence de deux propositions)
L'ÉQUIVALENCE de deux propositions P, Q, notée "$P \iff Q$", est la proposition "($P \implies Q$) et ($Q \implies P$)".
Sa négation est la proposition "(P et non(Q)) ou (Q et non(P))" qui signifie "ou bien P, ou bien Q".

Tables de vérité La méthode des tables de vérité est une méthode élémentaire pour tester la validité d'une formule du calcul propositionnel. Les énoncés étant composés à partir des connecteurs «non», «et», «ou», «si..., alors», «si et seulement si», notés respectivement $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$, les fonctions de vérités du calcul propositionnel classique sont données par la table de vérité suivante :

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V	V	V	V

En logique classique, la double négation correspond à une affirmation ; autrement dit, les propositions P et $\neg(\neg(P))$ sont logiquement équivalentes (*i.e.* même table de vérité). Voici quelques règles d'utilisation des négations en logique classique :

- ⋆ "$\neg(P \vee Q)$" ≡ "$(\neg(P)) \wedge (\neg(Q))$"
- ⋆ "$\neg(P \wedge Q)$" ≡ "$(\neg(P)) \vee (\neg(Q))$"
- ⋆ "$\neg(P \implies Q)$" ≡ "$P \wedge (\neg(Q))$"

En effet

P	Q	$\neg(P)$	$\neg(Q)$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg(P \implies Q)$	$(\neg(P)) \wedge (\neg(Q))$	$(\neg(P)) \vee (\neg(Q))$	$P \wedge (\neg(Q))$
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F

Implication		Proposition
$P \implies Q$	≡	$(\neg P) \vee Q$
≡		≡
Contraposée		Proposition
$(\neg Q) \implies (\neg P)$	≡	$(\neg(\neg Q)) \vee (\neg P)$

Négation		Proposition
$\neg(P \implies Q)$	≡	$P \wedge (\neg Q)$

Réciproque		Proposition
$Q \implies P$	≡	$(\neg Q) \vee P$
≡		≡
Contraposée de la réciproque		Proposition
$(\neg P) \implies (\neg Q)$	≡	$(\neg(\neg P)) \vee (\neg Q)$

Équivalence		
$P \iff Q$	≡	$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$

4.2 Différents types de raisonnement

Prouver une implication "$P \implies Q$" Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'implication "$P \implies Q$" est vraie il existe différents types de raisonnements.

Raisonnement direct : on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Raisonnement par contraposée : on sait que "$P \implies Q$" et "non$(Q) \implies$ non(P)" ont même véracité. Pour montrer "$P \implies Q$" on peut donc montrer que l'implication "non$(Q) \implies$ non(P)" est vraie, *i.e.* on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.

Raisonnement par l'absurde : on suppose que "$P \implies Q$" est fausse (ou, ce qui est équivalent, que "P et (non(Q))" est vraie) et on montre que l'on obtient une contradiction.

Remarque

P et Q étant deux assertions, on veut prouver que l'implication "$P \implies Q$" est fausse. On peut utiliser le

Raisonnement par négation (ou contre-exemple) : on montre que sa négation, qui est la proposition "P et (non(Q))", est vraie.

Exemple

On veut montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- ⋆ Montrons d'abord que p^2 pair $\implies$ p pair pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
  On note $A =$"p^2 pair" et $B =$"p pair". Pour montrer que $A \implies B$ on va utiliser un raisonnement «par contraposée» et montrer l'énoncé équivalent $\neg B \implies \neg A$:

$$\begin{aligned}\neg B \text{ vrai} &\implies B \text{ faux}\\ &\implies p \text{ impair}\\ &\implies p = 2k+1 \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N}\\ &\implies p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1\\ &\implies p^2 \text{ impair}\\ &\implies A \text{ faux}\\ &\implies \neg A \text{ vrai}\end{aligned}$$

- ⋆ Montrons maintenant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
  On va utiliser une démonstration «par l'absurde». Si l'on pouvait écrire $\sqrt{2} = p/q$, une fraction irréductible (*i.e.* qu'on ne peut pas simplifier), alors, en élevant au carré, on aurait $2 = p^2/q^2$, donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 serait un nombre pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, p aussi serait un nombre pair, alors p^2 serait divisible par 4, donc q^2 serait pair et, par ce qu'on a montré au point précédent, q aussi serait pair, ce qui est contradictoire avec le fait que la fraction était irréductible.

Prouver une équivalence "$P \iff Q$" Soient P et Q deux assertions, pour prouver que l'équivalence "$P \iff Q$" est vraie on peut

1. soit montrer les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$ avec l'une des méthodes du paragraphe précédent,
2. soit procéder directement par équivalences : $P \iff P_1 \iff \dots \iff Q$.

Raisonnement par récurrence Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel $n \ge n_0$, on considère une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n. Alors, si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et si pour tout entier $n \ge n_0$, l'implication $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, alors pour tout entier $n \ge n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Le raisonnement par récurrence est une manière de démontrer qu'un résultat portant sur une infinité de nombres naturels est vrai. Mais avant de commencer la preuve par récurrence, il faut d'abord connaître le résultat à prouver ! C'est la partie créative des mathématiques ☺

EXEMPLE
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \ge 4^{n+2} + 3^{n+2}$.
Raisonnons par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $5^{n+2} \ge 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Hérédité : Prouvons que pour tout $n \ge 0$, $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Soit un entier $n \ge 0$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors

$$5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \overset{\mathscr{P}(n)}{\ge} 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) \ge 4 \times 4^{n+2} + 3 \times 3^{n+2}) = 4^{n+3} + 3^{n+3}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE
On trace n droites dans le plan. On veut montrer que les régions ainsi formées par les n droites peuvent toujours être coloriées avec deux couleurs, de manière à ce qu'aucune région ait la même couleur que sa ou ses régions voisines, c'est-à-dire les régions qui partagent avec elle un segment de droite comme frontière.
Raisonnons par récurrence :

Initialisation : on peut certainement colorier le plan avec deux couleurs, disons noir et blanc, lorsqu'il n'y a qu'une seule droite.

Hérédité : Notre hypothèse d'induction est qu'on peut colorier les régions d'un plan contenant n droites. On considère un plan avec $n+1$ droites. On enlève une droite parmi les $n+1$: il en reste seulement n et par l'hypothèse, il est possible de colorier les régions du plan formées par les n droites. On réintroduit la$(n+1)$-ième droite. Cette droite sépare le plan en deux demi-plans. On choisit un de ces deux demi-plans et on change systématiquement les couleurs dans chacune des régions de ce demi-plan : les régions noires deviennent blanches et les régions blanches deviennent noires. On laisse l'autre demi-plan (de l'autre côté de la droite) intact. Le plan est maintenant adéquatement colorié. En effet,

- ⋆ si deux régions du plan séparé par les $n+1$ droites ont une frontière composée d'un segment appartenant à une des premières n droites, alors ces régions avaient déjà des couleurs différentes avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on laisse ces couleurs déjà différentes telles quelles ou on les changes toutes les deux ;
- ⋆ si deux régions ont une frontière composée d'un segment appartenant à la $(n+1)$-ième droite, alors avant l'introduction de la $(n+1)$-ième droite, elles faisaient partie de la même région et donc étaient coloriées de la même couleur. En introduisant la $(n+1)$-ième droite, on change les couleurs d'une des deux régions, d'un côté de la droite, mais pas de l'autre. Ces régions nouvellement voisines ont donc maintenant des couleurs différentes.

Source : `http://www.thedudeminds.net/`

EXEMPLE

Le nombre d'or est noté φ et vaut $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On veut montrer par récurrence que toute puissance de φ s'écrit comme $a\varphi+b$ avec a et b deux constantes indépendantes de φ.
Pour cela on va d'abord démontrer une formule portant sur le nombre d'or :

$$\varphi^2=\varphi+1. \tag{4.1}$$

Preuve : $\varphi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{2+2\sqrt{5}+4}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\varphi+1$. On peut alors énoncer le théorème : "pour tout $n\ge 0$, $P(n)$ est vraie" avec

$$P(n)=\text{“}\exists a_n,b_n\in\mathbb{N} \text{ tels que } \varphi^n=a_n\varphi+b_n\text{”}.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n :

Initialisation Pour $n=$, $\varphi^0=1$ donc $a_0=0$ et $b_0=1$.

Hérédité Prouvons que pour $n\in\mathbb{N}$ fixé on a l'implication $P(n)\implies P(n+1)$. Soit $P(n)$ vraie, alors

$$\varphi^{n+1}=\varphi^n\varphi\overset{P(n)}{=}(a_n\varphi+b_n)\varphi=a_n\varphi^2+b_n\varphi\overset{(4.1)}{=}a_n(\varphi+1)+b_n\varphi=(a_n+b_n)\varphi+a_n$$

ainsi si on note $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=a_n$ on a bien $\varphi^{n+1}=a_{n+1}\varphi+b_{n+1}$, *i.e.* $P(n+1)$ est vraie.

Si on note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de FIBONACCI :

$$\begin{cases} F_0=1,\\ F_1=1,;\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

on remarque que $a_n=F_n$ et $b_n=F_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4.3 Théorie des ensembles et quantificateurs

4.10 **Définition (Ensemble, élément)**
Un ensemble E est constitué d'éléments. Il est bien défini si l'on possède un critère permettant d'affirmer pour tout objet a, s'il appartient à l'ensemble E ou non :

$$a\in E \qquad \text{ou bien} \qquad a\notin E.$$

Remarque
On dit aussi "a est élément de E" ou bien "a n'est pas élément de E" ou encore "E contient a" ou bien "E ne contient pas a". Si un ensemble E est constitué des éléments a,b,c, on écrira : $E=\{a,b,c\}$. L'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'importe pas, ainsi $\{a,b,c\}=\{c,a,b\}$. Un même être mathématique ne peut pas être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble, c'est-à-dire qu'il est interdit d'écrire $a\in a$.

4.11 **Définition (Inclusion)**
Un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à E, ce que l'on note : $F\subset E$.

Remarque
On dit aussi "F est une partie de E" ou encore "F est un sous-ensemble de E".

4.12 Définition (Complémentaire)
Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $C_E A := E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

4.13 Définition (Égalité)
Un ensemble F est égal à un ensemble E si $F \subset E$ et $E \subset F$, ce que l'on note : $F = E$.

4.14 Définition (Utilisation des quantificateurs)
Les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ concernent les éléments d'un ensemble déterminé E.

Notation “Il existe x élément de E” s'écrit “$\exists x \in E$”.
“Pour tout x de E” ou “Quel que soit un élément x de E” s'écrit “$\forall x \in E$”.

Ordre Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance ; on peut donc permuter les quantificateurs dans des écritures du type

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad p(x, y),$$
$$\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important :

- ⋆ dans l'écriture
$$\forall x \in E \quad \exists y \in F \quad p(x, y)$$
y dépend de x,
- ⋆ dans l'écriture
$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$$
y est indépendant de x.

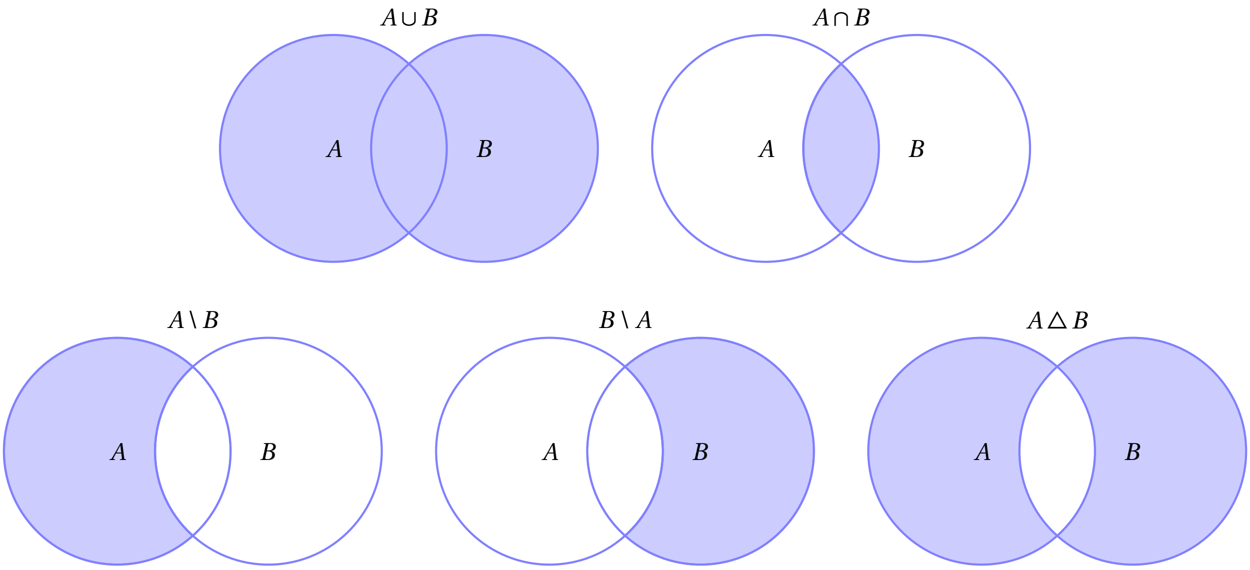
Négation La négation de “$\forall x \in E$, x vérifie p” est “$\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p”. La négation de “$\exists x \in E$, x vérifie p” est “$\forall x \in E$ tel que x ne vérifie pas p”.

Remarque
Soit A une partie de E.

- ⋆ L'énoncé “A est la partie *vide*” (on note $A = \emptyset$) et sa négation “A est *non vide*” (on note $A \neq \emptyset$) correspondent respectivement à “quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A” et “il existe au moins un élément de E qui est élément de A” et s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \notin A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \in A$.
- ⋆ L'énoncé “A est la partie *pleine*” (on note $A = E$) et sa négation “A n'est pas la partie *pleine*” (on note $A \neq E$) s'écrivent respectivement :
  - ⋆ $\forall x \in E \quad x \in A$,
  - ⋆ $\exists x \in E \quad x \notin A$.
- ⋆ Les propositions “$x \in A$” et “$x \notin A$” sont souvent remplacées respectivement par “x vérifie la propriété p” et “x ne vérifie pas la propriété p” où p est une propriété caractéristique des éléments de A, c'est à dire un critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$, $x \notin A$.

4.15 Définition (Opérations booléennes)
Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$. Les quatre éléments $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

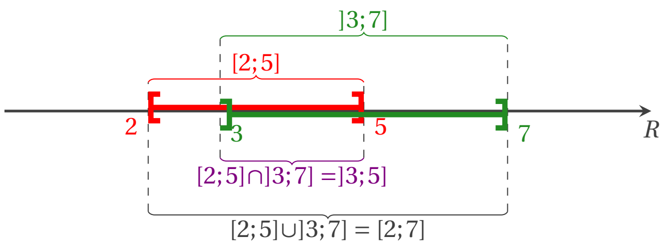
- ⋆ $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$, [réunion des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$, [intersection des ensembles A et B]
- ⋆ $x \in A \setminus B \iff x \in A$ et $x \notin B$,
- ⋆ $x \in A \triangle B \iff x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$.



4.16 Définition (Réunion et intersection d'une famille de parties de E)
Soit E, I deux ensembles et $\{A_i\}_{i\in I}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Les deux éléments $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ de $\mathscr{P}(E)$ sont définies de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

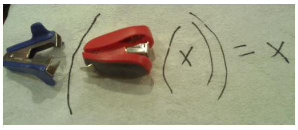
$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \quad x \in A_i, \qquad\qquad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I \quad x \in A_i.$$

EXEMPLE



Exemple

A_n	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$	$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$[2;4]$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]1;5[$	$]2;4]$
$\left[1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$[2;4[$
$\left]1+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]1;5[$	$]2;4[$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$[0;5[$	$[1;4]$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right]$	$]0;5[$	$[1;4]$
$\left[1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$[0;5[$	$[1;4[$
$\left]1-\frac{1}{n};5-\frac{1}{n}\right[$	$]0;5[$	$[1;4[$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]1;6]$	$]2;5]$
$\left[1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$[2;5]$
$\left]1+\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]1;6[$	$]2;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$[0;6]$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right]$	$]0;6]$	$[1;5]$
$\left[1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$[0;6[$	$[1;5]$
$\left]1-\frac{1}{n};5+\frac{1}{n}\right[$	$]0;6[$	$[1;5]$



5 Relations, fonctions, applications

Soient E et F deux ensembles.

5.1 Définition (Produit cartésien)
$E\times F$ est l'ensemble des couples (x,y) où x est un élément de E et y un élément de F. L'égalité dans $E\times F$ est définie par : $(x,y)=(x',y') \iff x=x'$ et $y=y'$.

5.2 Définition (Relation binaire)
Une RELATION binaire (ou correspondance) de E dans (ou vers) F est un triplet $\mathscr{R}=(E,F;G)$ où G une partie de $E\times F$. L'ensemble E est appelé *ensemble de départ de* $\mathscr{R}$, l'ensemble F est appelé *ensemble d'arrivée de* $\mathscr{R}$. L'ensemble G est appelé *graphe* de $\mathscr{R}$.

Notation Pour tout $(x,y)\in E\times F$, on écrit "$x\mathscr{R}y$" et on dit "x est en relation avec y" ssi "$(x,y)\in G$".

5.3 Définition (Fonction)
Une FONCTION f de E dans F est une relation de E dans F vérifiant : pour tout $x\in E$, il existe au plus un élément $y\in F$ satisfaisant xfy.

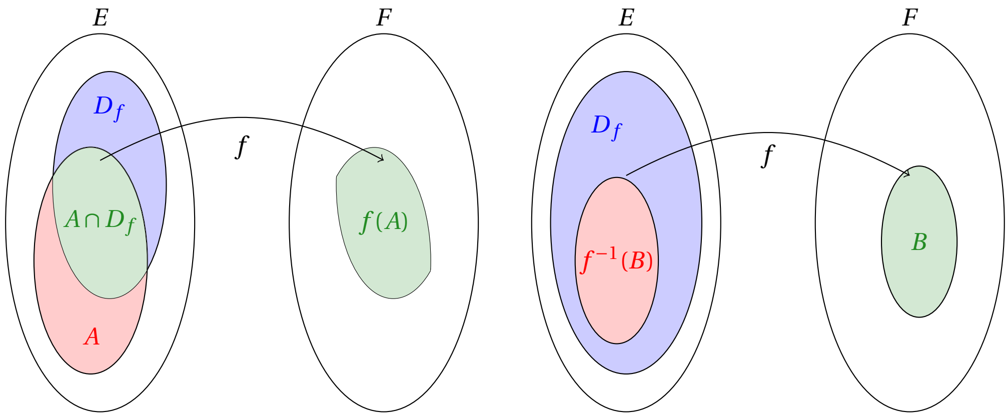
5.4 Définition (Domaine de définition)
Le DOMAINE DE DÉFINITION D_f d'une fonction f de E dans F est l'ensemble des $x\in E$ satisfaisant : il existe un et un seul $y\in F$ tel que xfy.

Notation Pour tout $x\in D_f$, on note $f(x)$ le seul point $y\in F$ satisfaisant xfy. Donc pour tout $(x,y)\in D_f\times F$, $xfy \iff y=f(x)$. Si $x\in D_f$ alors $f(x)$ est appelé "l'image de x par f". Si $y\in F$ alors tout point $x\in D_f$ satisfaisant $y=f(x)$ est appelé "un antécédent de x par f".

5.5 Définition (Image directe)
Soit f une fonction de E dans F et A une partie de E. L'IMAGE DIRECTE de A par f est la partie de F définie par $f(A):=\{y\in F\ :\ \exists x\in A\cap D_f\quad y=f(x)\}$.

5.6 Définition (Image réciproque)
Soit f une fonction de E dans F et B une partie de F. L'IMAGE RÉCIPROQUE de B par f est la partie de E définie par $f^{-1}(B):=\{x\in D_f\ :\ f(x)\in B\}$.

ATTENTION
Ne pas confondre l'image réciproque de B, qui existe toujours, avec l'image de B par f^{-1}, qui n'existe que si f est une bijection. Ici on ne suppose rien sur f.



5.7 Définition (Application)
Une application f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

5.8 Définition (Injection)
Une injection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

$$\forall (x,x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Attention
Ne pas confondre :

- la définition d'une application qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x = x' \implies f(x) = f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) \neq f(x') \implies x \neq x', \end{aligned}$$

- la définition d'application injective qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),\\ &\forall x \in E \quad \forall x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'. \end{aligned}$$

5.9 Définition (Surjection)
Une surjection f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

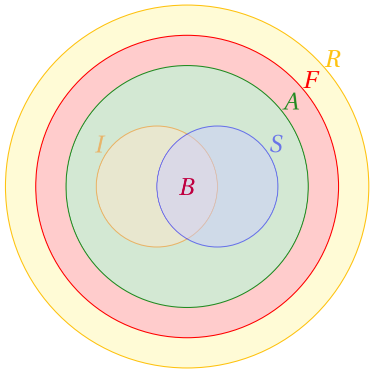
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

5.10 Définition (Bijection)
Une bijection f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

Remarque
Soient

- R l'ensemble des relations
- F l'ensemble des fonctions
- A l'ensemble des applications
- I l'ensemble des applications injectives
- S l'ensemble des applications surjectives
- B l'ensemble des applications bijectives

Le dessin ci-contre se lit comme suit : "toute fonction est une relation mais il existe des relations qui ne sont pas des fonctions, de même toute application est une fonction mais il existe des fonctions qui ne sont pas des applications. Il existe des applications qui ne sont ni injectives ni surjectives, il existe des applications qui sont injectives mais qui ne sont pas surjectives, il existe des applications qui ne sont pas injectives mais qui sont surjectives et il existe des applications qui sont injectives et surjectives et sont appelées bijections."



Astuce (Les droites)
Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Alors

- ⋆ Une relation de E dans F est une **fonction** si toute droite **vertical** d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f **au plus une fois**.
- ⋆ Une fonction $f : E \to F$ est une **application** si toute droite **vertical** d'équation $x = k \in E$ intersecte le graphe de f **exactement une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **injective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **au plus une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **surjective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **au moins une fois**.
- ⋆ Une application $f : E \to F$ est une application **bijective** si toute droite **horizontale** d'équation $y = k \in F$ intersecte le graphe de f **exactement une fois**.

5.1 Composition, réciprocité

Soit E, F, G et H quatre ensembles.

5.11 Définition (Composition)
Si f est une application de E dans F et g une application de F dans G alors $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

5.12 Théorème (Associativité)
Si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H alors $h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f$.

5.13 Définition (Application réciproque)
Soit f une application de E dans F. On dit que f admet une réciproque (ou inverse) ssi il existe une application g de F dans E telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad y = f(x) \iff g(y) = x.$$

Si une telle application g existe, elle est unique et notée f^{-1}.

5.14 Théorème (Réciprocité)
Soit f une application de E dans F. Alors f admet une réciproque ssi f est bijective.

5.2 Maximum, minimum

Soit X un ensemble ordonné (par exemple $\mathbb{R}$) et soit Y une partie de X.

5.15 Définition (Majorant)
Un élément $a \in X$ est appelé majorant de Y si $a \geq y$ pour tout $y \in Y$.

5.16 Définition (Minorant)
Un élément $a \in X$ est appelé minorant de Y si $a \leq y$ pour tout $y \in Y$.

5.17 Définition (Ensemble majoré, minoré, borné)

- ⋆ Si Y admet des majorants, on dit que Y est majoré.
- ⋆ Si Y admet des minorants, on dit que Y est minoré.
- ⋆ Si Y est majoré et minoré, on dit que Y est borné.

5.18 Définition (Supremum)
$a \in X$ est appelé borne supérieure de Y si c'est le plus petit des majorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\sup Y$.

5.19 Définition (Infimum)
$a \in X$ est appelé borne inférieure de Y si c'est le plus grand des minorants de Y. Si elle existe, elle est unique et est notée $\inf Y$.

5.20 Définition (Maximum)
$a \in X$ est appelé plus grand élément de Y ou élément maximale de Y ou max de Y si $a \in Y$ et a est majorant de Y.

5.21 Définition (Minimum)
$a \in X$ est appelé plus petit élément de Y ou élément minimale de Y ou min de Y si $a \in Y$ et a est minorant de Y.

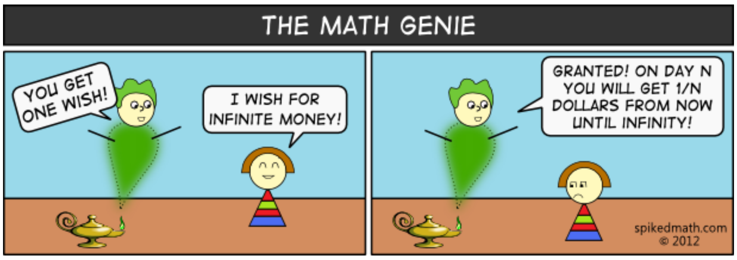
Attention
On a les implications suivantes

1. "a est le max de Y" $\implies$ "a est le sup de Y" $\implies$ "a est majorant de Y";
2. "a est le min de Y" $\implies$ "a est le inf de Y" $\implies$ "a est minorant de Y".

Les réciproques sont fausses.

5.22 Définition (Supremum, infimum, maximum et minimum d'une fonction)
Soient E un ensemble et $f\colon E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On appelle borne supérieure de f dans E la borne supérieure de l'image directe de E par f, c'est-à-dire $\sup f(E)$. De la même manière on définit la borne inférieure de f dans E, ainsi que le maximum et le minimum et on les note

$$\sup_E f(x) \qquad \inf_E f(x) \qquad \max_E f(x) \qquad \min_E f(x).$$



6

Suites numériques et limites

6.1 Définition (Suites)
Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La notation traditionnelle est $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque
En pratique, on dispose essentiellement de deux méthodes pour définir une suite :

1. on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ directement en fonction de n, par exemple
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1}{n^2},$$
2. on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, par exemple
$$u_0 = 10 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

6.2 Définition (Vocabulaire)
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- ⋆ **croissante** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \leq x_{n+1}$;
- ⋆ **décroissante** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \geq x_{n+1}$;
- ⋆ **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante ;
- ⋆ **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite ;
- ⋆ **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $x_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite ;
- ⋆ **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout n.

6.3 Définition (Limite d'une suite.)
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ (on écrit $\lim_n x_n = x$ ou $x_n \to x$) si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon.$$
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini (on écrit $\lim_n x_n = +\infty$) si
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n > M.$$
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers moins l'infini (on écrit $\lim_n x_n = -\infty$)
$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \implies x_n < m.$$

6.4 Théorème (Unicité)
Si une suite converge, sa limite est unique.

Remarque

1. Une suite peut n'être ni convergente ni divergente vers $-\infty$ ni divergente vers $+\infty$. Par exemple, la suite $x_n = (-1)^n$ est la suite dont les termes d'indice pair valent 1 et ceux d'indice impair -1 : elle ne converge pas et ne diverge vers moins l'infini ni vers $+\infty$.
2. La suppression d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

6.5 Propriété (Opérations)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergent respectivement vers x et y, alors

- ⋆ la suite $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + y$;
- ⋆ la suite $(x_n \times y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \times y$;
- ⋆ la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λx, $(\lambda \in \mathbb{R})$;
- ⋆ la suite $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/x$ (si $x \neq 0$) ;
- ⋆ la suite $(x_n/y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x/y (si $y \neq 0$).

6.6 Propriété (Limites de la somme de deux suites)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$x_n \to x \in \mathbb{R}$	$x_n \to +\infty$	$x_n \to -\infty$
$y_n \to y \in \mathbb{R}$	$x_n + y_n \to x + y$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to -\infty$
$y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to +\infty$	$x_n + y_n \to ?$
$y_n \to -\infty$	$x_n + y_n \to -\infty$	$x_n + y_n \to ?$	$x_n + y_n \to -\infty$

6.7 Propriété (Limites du produit de deux suites)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$x_n \to x > 0$	$x_n \to 0$	$x_n \to x < 0$	$x_n \to +\infty$	$x_n \to -\infty$
$y_n \to y > 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$
$y_n \to y = 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to ?$
$y_n \to y < 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to 0$	$x_n y_n \to xy$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$
$y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$
$y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to ?$	$x_n y_n \to +\infty$	$x_n y_n \to -\infty$	$x_n y_n \to +\infty$

6.8 Définition (Suite de Cauchy)

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p,q > N \implies |x_q - x_p| < \varepsilon.$$

6.9 Théorème (de complétude)

Une suite est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

6.10 Théorème ((condition suffisante))

Tout suite convergente est bornée.

Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

6.11 Théorème (de la convergence monotone (conditions suffisantes))

- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et majorée est convergente et $\lim_n x_n = \sup_n x_n$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et minorée est convergente et $\lim_n x_n = \inf_n x_n$.
- ⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

6.12 Théorème (d'encadrement ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau (condition suffisante))
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. S'il existe deux suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une même limite $x\in\mathbb{R}$ et satisfaisant

$$\exists N\in\mathbb{N}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad n>N \implies u_n\le x_n\le v_n,$$

alors $\lim_n x_n = x$.

EXEMPLE
$\lim_n \frac{\sin(n)}{n} = 0$ car $\frac{-1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$ et $\lim_n \frac{-1}{n} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$.

6.13 Définition (Suite extraite ou sous-suite)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

EXEMPLE
$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6.14 Définition (Valeur d'adhérence)
On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si et seulement si il existe une sous-suite extraite qui converge vers ℓ.

6.15 Théorème
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si (x_n) converge vers ℓ, toute sous-suite converge aussi vers ℓ.
Si une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ou si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si deux suites extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ et si x_n est un terme d'une de ces suites extraites, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ. Par exemple, si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (x_n) converge vers ℓ.

EXEMPLE
1. Soit $x_n = 1/n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $x_n = (-1)^n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence, -1 et 1 (elle ne converge pas). En effet, si $n=2k$ alors $(-1)^n = ((-1)^k)^2 = 1$ pour tout k et si $n=2k+1$ alors $(-1)^n = ((-1)^k)^2(-1) = -1$ pour tout k.
3. Soit $x_n = (-1)^n/n$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En effet, si $n=2k$ alors $(-1)^n/n = 1/n \to 0$ et si $n=2k+1$ alors $(-1)^n = -1/n \to 0$.

6.16 Définition (Suites adjacentes)
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- ⋆ (u_n) est croissante,
- ⋆ (v_n) est décroissante,
- ⋆ $\lim_n (u_n - v_n) = 0$.

6.17 Théorème
Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

EXEMPLE
Considérons les deux suites de terme générale $u_n = 1-1/n$ et $v_n = 1+1/n^2$. (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $u_n - v_n = -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$, donc elles sont adjacentes et, d'après ce théorème, $\lim_n u_n = \lim_n v_n$. En effet, $\lim_n u_n = 1$ et $\lim_n v_n = 1$.

EXEMPLE

On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$ où la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme des inverses des carrés de 1 à n, *i.e.*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

Pour prouver ce résultat on introduit deux suites et on prouve qu'elle sont adjacentes. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = s_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = s_n + \frac{1}{n}$.

- ⋆ La suite (u_n) est croissante : en effet, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ⋆ La suite (v_n) est décroissante : en effet, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$
- ⋆ $\lim_n (u_n - v_n) = \lim_n -\frac{1}{n} = 0$.

Par conséquent, les deux suites sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

ATTENTION (LIMITES FONDAMENTALES)

$$\lim_n \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a = b, \\ \infty & \text{si } a > b, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} P(n) &= p_0 + p_1 n + \cdots + p_a n^a, \\ Q(n) &= q_0 + q_1 n + \cdots + q_b n^b. \end{aligned}$$

$\lim_n n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ (n en radiant) $\quad \lim_n n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$ (n en radiant)

$\lim_n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) $\quad \lim_n n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1$

$\lim_n n\left(a^{1/n} - 1\right) = \ln a$ ($a > 0$) $\quad \lim_n n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

EXEMPLE

a) $1^n \to 1$ car $1^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$,

c) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} \to 1/e$,

d) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \to e^0 = 1$,

e) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to +\infty$.

Taux d'intérêt La somme placée dans une institution financière s'appelle le capital ; l'argent que le capital rapporte à son propriétaire suite à un tel placement s'appelle les intérêts ; les intérêts sont calculés en fonction du pourcentage du capital initial, ce pourcentage s'appelant le taux d'intérêt. Dans l'exemple ci-dessous on s'intéresse au calcul des taux d'intérêt simples, fixes et annuels. On s'intéresse aussi aux intérêts composés : il s'agit du taux d'intérêt applicable au capital et aux intérêts gagnés au cours des périodes de placement précédentes.

EXEMPLE (INTÉRÊT CONTINUS)

1. Un capital de 5000 € a été placé dans une banque sous 5%, taux annuel. Quelle somme sera disponible à l'investisseur au bout d'un an ?

   Réponse : calculons d'abord le montant des intérêts : 5000 € × 5% = 250 €. Ensuite, pour calculer la somme disponible, il faut ajouter ce montant à la somme placée : 5000 € + 250 € = 5250 €.

2. Un compte d'épargne donne 5% d'intérêts par an. Le premier janvier on met 10 000 € sur ce compte. La banquier nous laisse le choix entre plusieurs modes de virement des intérêts : soit 5% à la fin d'année (taux 5%), soit à la fin de chaque mois (taux 5%/12), soit tous les jours (taux 5%/365), soit toutes les heures (taux 5%/(365 × 24)), etc. Quel choix est le plus avantageux pour nous ? Est-ce que le montant augmente infiniment si le temps d'intervalle approche zéro ?

   Réponse : notons S la somme au bout d'un an.

   - ⋆ Virement annuel : $S = (1 + 0.05) \times 10\,000$ € = 10 500 €.
   - ⋆ Virement mensuel : $S = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} \times 10\,000$ € = 10 511.62 €.
   - ⋆ Virement quotidien : $S = \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365} \times 10\,000$ € = 10 512.67 €.

Ainsi, plus petit est intervalle de temps entre deux virements d'intérêts plus on touche d'intérêts.
Le montant n'augmente pas infiniment si le temps d'intervalle approche zéro. En effet, on a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En reprenant notre exemple on trouve $S = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n \times 10000\,€ = e^{0.05} \times 10000\,€ \simeq 10512.71\,€$

Remarque (Limites connues)
Soit $q \in \mathbb{R}$, $k > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$\lim_n \frac{k^n}{n!} = 0, \qquad \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0, \qquad \lim_n \frac{n^\alpha}{k^n} = 0, \qquad \lim_n \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0, \qquad \lim_n \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_n n^q = \begin{cases} 0, & \text{si } q < 0, \\ 1, & \text{si } q = 0, \\ +\infty, & \text{si } q > 0. \end{cases}.$$

6.18 Proposition (Critère du rapport (ou de D'Alembert))
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$,
- ⋆ si $0 \le \ell < 1$ alors $u_n \to 0$,
- ⋆ si $1 < \ell \le +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- ⋆ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

6.19 Proposition (Critère de la racine (ou de Cauchy))
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$,
- ⋆ si $0 \le \ell < 1$ alors $u_n \to 0$,
- ⋆ si $1 < \ell \le +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- ⋆ si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.

6.20 Proposition
Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 0 \implies \sqrt[n]{u_n} \to \ell.$$

6.21 Définition (Suite arithmétique)
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = v_n + r.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$.

Exemple
- ⋆ Les suites constantes sont des suites arithmétiques de raison 0.
- ⋆ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.22 Définition (Suite géométrique)
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = q v_n.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$.

Exemple
- ⋆ Les suites constantes sont des suites géométriques de raison 1.
- ⋆ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique définie par : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.23 Proposition
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, *i.e.* $v_n = v_{n-1} q = v_0 q^n$.
- ⋆ Si $q < -1$, la suite (v_n) diverge et ne possède pas de limite ;

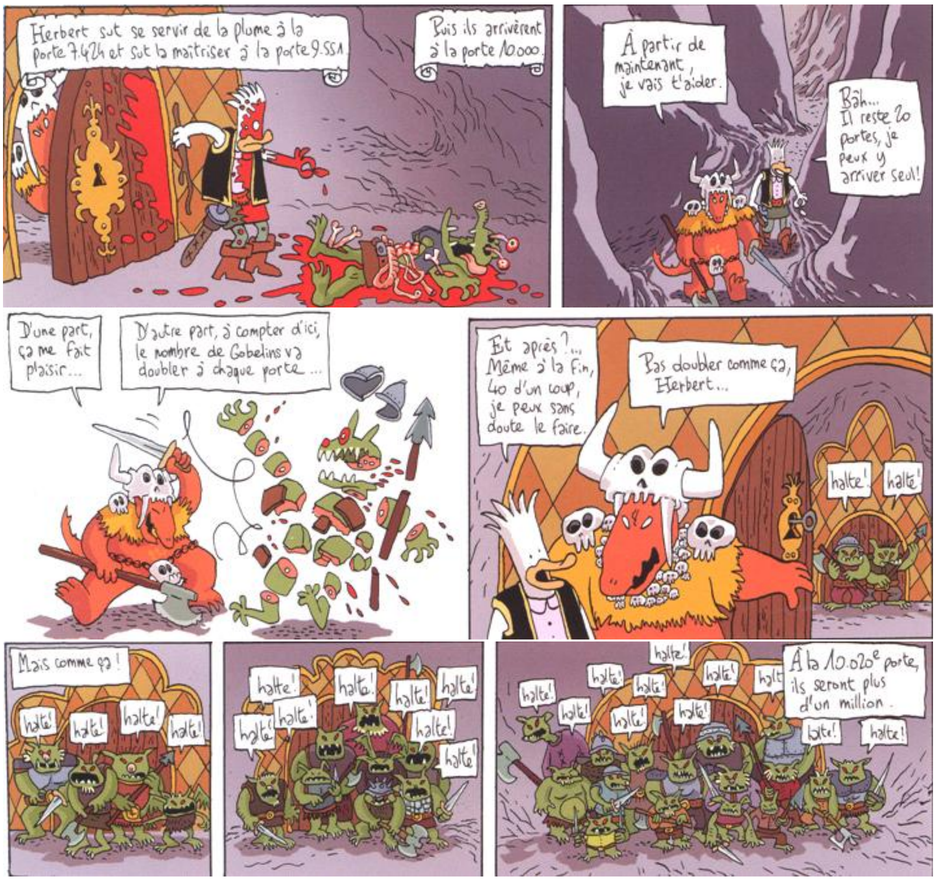


FIGURE 6.1 – Depuis “DONJON ZENITH tome 2”, éditions Delcourt, de Joann SFAR et Lewis TRONDHEIM.
Le nombre de Gobelins suit une progression géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$ à la porte 10000 ; à la 10020$^{\text{ème}}$ porte, *i.e.* après 20 portes, il y aura donc $2^{20} = 1048576$ gobelins.

- ⋆ si $q = -1$, la suite (v_n) diverge et possède deux valeurs d'adhérence 1 et −1 ;
- ⋆ si $|q| < 1$, la suite (v_n) converge vers 0 ;
- ⋆ si $q = 1$, la suite (v_n) est constante et converge vers 1 ;
- ⋆ si $q > 1$, la suite (v_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.

6.24 Définition (Suite arithmético-géométrique)

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique de premier terme v_0 si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = q v_n + r$$

avec $q, r \in \mathbb{R}$. On remarque que

- ⋆ si $q = 1$, la suite (v_n) est arithmétique de raison r,
- ⋆ si $r = 0$, la suite (v_n) est géométrique de raison q.
- ⋆ si $q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 q^n + \frac{q^n-1}{q-1} r = q^n \left(v_0 + \frac{r}{q-1} \right) - \frac{r}{q-1}$.

EXEMPLE

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 3$. On a $v_n = -4\frac{1}{2^n} + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.25 Proposition

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de premier terme v_0, *i.e.* $v_n = q^n \left(v_0 + \frac{r}{q-1} \right) - \frac{r}{q-1}$. Elle converge si et seulement si $|q| < 1$ et la limite vaut $\frac{r}{1-q}$.

6.26 Définition (Sommes et Produits)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$. On définit les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

Remarque
L'indice i est muet : $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\kappa=1}^n a_\kappa$ et $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{\kappa=1}^n a_\kappa$.

EXEMPLE

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n, \qquad \prod_{i=1}^{n} i = 1\times 2\times\cdots\times n = n!$$

6.27 Propriété
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

Linéarité de la somme : soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

Relation de Chasles : pour tout entier r tel que $1 \le r \le n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i;$$

Changement d'indice :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1};$$

Inégalités :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}\ a_i \le b_i \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

EXEMPLE (SOMMES CLASSIQUES)

Somme des entiers de 1 à n :

$$1+2+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2};$$

Somme des termes d'une suite arithmétique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, on a

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = (n+1)v_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des puissance d'un réel : soit $q \in \mathbb{R}$, on a

$$1+q+\cdots+q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{1+q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \ne 1,\\ n+1 & \text{si } q = 1;\end{cases}$$

Somme des termes d'une suite géométrique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme v_0, on a

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \begin{cases} v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \ne 1\\ (n+1)v_0 & \text{si } q = 1\end{cases}$$

Soit la suite $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$, alors

- ⋆ si $q < -1$, la suite (s_n) est divergente et ne possède pas de limite ;

- ⋆ si $q=-1$, la suite (s_n) est divergente et possède deux valeurs d'adhérence 0 et 1 ;
- ⋆ si $|q|<1$, la suite (s_n) converge vers $\frac{1}{1-q}$;
- ⋆ si $q=1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$;
- ⋆ si $q>1$, la suite (s_n) est divergente mais possède une limite égale à $+\infty$.

Somme des termes d'une suite arithmético-géométrique : soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de premier terme v_0, on a

$$v_0+v_1+\dots+v_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=\begin{cases}\left(v_0-\frac{r}{1-q}\right)\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{r}{1-q}n & \text{si } q\neq 1\\ (n+1)v_0+r\frac{n(n+1)}{2} & \text{si } q=1\end{cases}$$

Somme des carrés des entiers de 1 à n :

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Somme des cubes des entiers de 1 à n :

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2.$$

6.28 Définition (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{cases} u_0=A, & (6.1a)\\ u_1=B, & (6.1b)\\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n & (6.1c)\end{cases}$$

avec A, B, a et b fixés, b de préférence non nul.
Supposons a et b positifs. Le terme général de cette suite s'écrit $u_n=r^n$ avec $r^{n+2}-ar^{n+1}-br^n=0$, *i.e.* $r^2-ar-b=0$. Le discriminant de ce polynôme en r est a^2+4b, positif, donc nos deux racines sont distinctes et réelles :

$$r_1=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}, \qquad r_2=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

On peut remarquer que si deux suites v_n et w_n vérifient la relation (6.1c), toute combinaisons linéaires $\lambda v_n+\mu w_n$ de ces deux suites aussi. Donc, une suite correspondant à la relation (6.1c) et de type $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$. Maintenant, il n'y a plus qu'à trouver les coefficients λ et μ, que l'on peut trouver quand on connait les deux premiers termes de la suite qui nous intéresse.

$$\begin{cases}\lambda+\mu=A,\\ \lambda r_1+\mu r_2=B,\end{cases} \implies \begin{cases}\lambda=\frac{A\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}},\\ \mu=\frac{A\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}.\end{cases}$$

En conclusion

$$u_n=\frac{A\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n+\frac{A\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}-B}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n.$$

Exemple (Suite de Fibonacci)

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1). Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci, un mathématicien italien du XIII^e siècle qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrit la croissance d'une population de lapins :

> «Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?»

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- ⋆ au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- ⋆ les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;

- ⋆ chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux;
- ⋆ les lapins ne meurent jamais (donc la suite de FIBONACCI est strictement croissante).

Notons F_n le nombre de couples de lapins au début du mois n. Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple (ce qu'on note $F_1 = F_2 = 1$). Dès le début du troisième mois, le couple de lapins a deux mois et il engendre un autre couple de lapins; on note alors $F_3 = 2$. Plaçons-nous maintenant au mois n et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois $n+2$: F_{n+2} désigne la somme des couples de lapins au mois $n+1$ et des couples nouvellement engendrés. Or, n'engendrent au mois $(n+2)$ que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existent deux mois auparavant. On a donc, pour tout entier n strictement positif, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On choisit alors de poser $F_0 = 0$, de manière que cette équation soit encore vérifiée pour $n = 0$. On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de FIBONACCI : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

On souhaite maintenant établir une expression fonctionnelle de la suite de FIBONACCI, c'est-à-dire une expression telle que le calcul du nombre de couples pour une valeur de n donnée ne présuppose la connaissance d'aucun nombre de couples pour une quelconque autre valeur de n, ce que ne permet pas la formule de récurrence. Comme la suite de FIBONACCI est linéaire d'ordre deux, on peut écrire son équation caractéristique. On obtient une équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ qui a pour solutions $x_1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $x_2 = 1-\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il en résulte que $F_n = \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n$ où α et β sont deux constantes à déterminer à partir de F_0 et F_1. On a $\alpha + \beta = 0$ et $(\alpha - \beta)\varphi + \beta = 1$ ce qui donne $\alpha = -\beta = 1/\sqrt{5}$. On trouve alors l'expression générale de la suite de FIBONACCI (appelée formule de BINET) :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (1-\varphi)^n\right).$$

Si on calcule la limite du rapport de deux nombres consécutifs de la suite de FIBONACCI on trouve le nombre d'or :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n - (1-\varphi)^n} = \varphi\frac{1 - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\varphi}{\varphi}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$$

car $1 < \varphi < 2$ et donc $-1 < \frac{1-\varphi}{\varphi} < 1$.

Le jeu d'échecs Selon la légende, le jeu d'échecs fut inventé en Inde par un savant. Le roi, séduit par ce nouveau loisir, le convoqua au palais : "Ton jeu m'a redonné la joie de vivre! Je t'offre ce que tu désires!" lui dit-il. Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva : "Parle donc, insolent! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits?" Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger : "J'accepte votre présent. Vous ferez déposer un grain de riz sur la première case de l'échiquier. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la deuxième case, 4 sur la troisième et ainsi de suite..." Le roi s'énerva pour de bon : "Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t-en! Ton sac de riz te sera porté demain et ne me dérange plus!" Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé : "Sire, c'est une catastrophe! Nous ne pouvons pas livrer le blé! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit : il n'y a pas assez de riz dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant!" Pourquoi une telle affirmation?

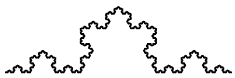
Notons b_n le nombre de grains de blé sur la case n, n allant de 0 à 63. La suite (g_n) est géométrique de raison 2 car $g_{n+1} = 2g_n$ donc $g_n = 2^n g_0 = 2^n$. Ainsi la somme totale des grains de blé sera

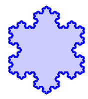
$$\sum_{n=0}^{63} g_n = \sum_{n=0}^{63} 2^n = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \simeq 18\cdot 10^{18}.$$

Pour des nombres aussi grands, notre intuition nous fait défaut. Essayons de faire ne serait-ce qu'une approximation. Un grain de riz est, grosso modo, un cylindre de diamètre 1 mm et de hauteur 5 mm. Ainsi on pourrait faire tenir 200 grains de riz dans un centimètre cube (= 1000 mm^3). On peut commencer nos calculs. Si l'on peut faire tenir 200 grains de riz dans un centimètre cube, alors il nous en faut $200\cdot 100^3$ pour un mètre cube et $200\cdot 100^3\cdot 1000^3$ pour un kilomètre cube. Si on divise cette quantité de grains par $2\cdot 10^{17}$ on obtient le volume de total de notre montagne rizière : 92 kilomètres cubes. Ce volume est tout aussi difficile à imaginer. En remarquant que la France a une superficie d'environ 375 000 km^2, on peut se représenter la quantité de riz demandée par l'inventeur du jeu d'échecs de la manière suivante : avec elle on pourrait couvrir toute la France d'une couche de riz de 13 centimètres de haut (car 13 centimètres correspondent à peu près à 7.5 millièmes de kilomètre et $675000/7500 = 90$).

Combien de fois peut-on plier une feuille ? Combien de fois peut-on plier une feuille de papier en son milieu ? La plupart de gens surestiment largement la réponse. Lors du pliage il faut considérer deux aspects du problème. Primo, l'épaisseur du papier plié croît de manière exponentielle, puisqu'elle double à chaque pliage. Après sept opérations on a déjà atteint 128 fois l'épaisseur standard de la feuille (environ 0.01 mm). Cela fait déjà plus d'un centimètre, et si on faisait cela encore cinq fois, on atteindrait une épaisseur de 41 centimètres. Or cela est impossible : quand on superpose plusieurs couches de papier, d'épaisseur totale d, alors la situation pour la couche supérieure – qui devient inférieure lors du pliage – est différente de celle de la couche inférieure. La couche inférieure doit se dilater d'une quantité égale à la longueur d'un demi-cercle de rayon d. Le périmètre de ce cercle étant $2\pi d$, la feuille doit se dilater d'une longueur égale à πd. Un exemple : prenons une liasse d'épaisseur 1 cm, plions-la cinq fois, lors du sixième pliage elle devra se dilater d'environ 3.14 cm. On voit donc que le processus s'arrête très vite, pour des raisons d'extensibilité du matériau papier. L'expérience nous dit que le nombre de pliages possibles se situe autour de huit. En revanche, si on utilise du papier toilette… `http://www.newscientist.com/blogs/nstv/2012/01/paper-folding-limits-pushed.html`

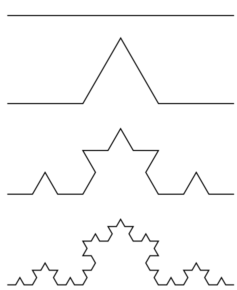
Courbe et flocon de von Koch





La courbe de von Koch se construit de manière itérative : à partir d'un segment donné, on le divise en 3 segments de même longueur et on remplace le segment central par les 2 côtés d'un triangle équilatéral construit extérieurement à partir de ce segment central.

1. Prenons un segment initial de longueur ℓ_0 :
2. Après la première itération, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)\ell_0$:
3. Après la seconde, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)^2\ell_0$:
4. Après la troisième, la longueur de la courbe est égale à $(4/3)^3\ell_0$:



On continue la construction ainsi de suite jusqu'à l'itération i qui produit une courbe de longueur $(4/3)^i\ell_0$. À la limite on obtient une courbe de longueur infinie (car $\lim_{n\to+\infty}(4/3)^n=+\infty$) entièrement contenue dans un espace fini.

Le flocon de von Koch est obtenu en appliquant cet algorithme aux côtés d'un triangle équilatéral. Notons n_i le nombre de côté de la figure à l'étape i, ℓ_i la longueur de chaque côtés, p_i le périmètre et S_i la surface. On a

$$
\begin{aligned}
&n_0=3, && n_i=4^i n_0,\\
&\ell_0 \text{ donné}, && \ell_i=\frac{\ell_0}{3^i},\\
&p_0=n_0\ell_0, && p_i=n_i\ell_i,\\
&S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2, && S_i=S_0+\sum_{k=0}^{i-1}n_k\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_i^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2\left(1+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell_0^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^i}{1-\frac{4}{9}}\right).
\end{aligned}
$$

À la limite on obtient une figure de périmètre infini (car $\lim_{n\to+\infty}p_n=+\infty$) mais de surface finie (car $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{5\sqrt{3}}{32}\ell_0^2$).

Remarque (Conversion de nombres décimaux périodiques vers des fractions rationnelles)

Un nombre périodique est un nombre à décimales ayant une tranche de décimales qui se répètent. Pour matérialiser sans ambiguïté les chiffres qui se répètent, les décimales récurrentes, on les surmonte d'une barre sur le bloc de chiffres répétés. Par exemple : $78/17=4,\overline{5882352941176470}$, $111/90=1,2\overline{3}=1,233333\dots$.

- ⋆ Montrons tous d'abord que $0,\overline{9}=1$: on a

$$0,\overline{9}=0.9+0.09+0.009+\dots=9\times\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{10^i}=\frac{9}{10}\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{10^i}=\frac{9}{10}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1.$$

  Cette idée se généralise à n'importe quel nombre à écriture décimale infinie périodique.

- ⋆ Comme tous les nombres périodiques sont rationnels, on va illustrer une méthode pour convertir un nombre périodique en fraction ordinaire. Soit α la partie entière du nombre, β la partie décimale sans la période et p le nombre de chiffres de β, γ la période et q le nombre de chiffres de γ, alors on a

$$\alpha,\beta\overline{\gamma} = \alpha + 10^{-p}\beta + \gamma 10^{-p}\left(10^{-q} + 10^{-2q} + 10^{-3q} + \dots\right) = \alpha + 10^{-p}\beta + \gamma 10^{-p}\sum_{i=1}^{\infty}(10^{-q})^i.$$

Comme

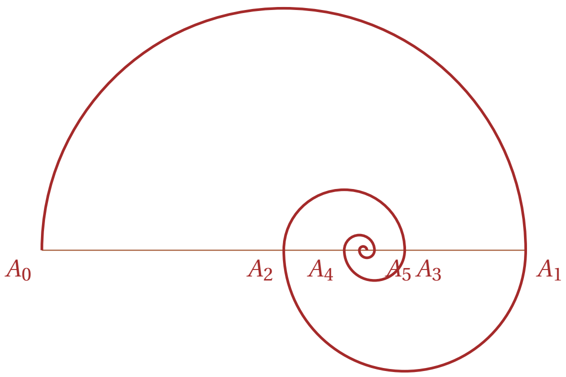
$$\alpha + 10^{-p}\beta + \gamma 10^{-p}\sum_{i=1}^{\infty}(10^{-q})^i = \alpha + 10^{-p}\beta + \gamma 10^{-p}\frac{1}{10^q - 1} = \frac{\left(\alpha 10^{p+q} + \beta 10^q + \gamma\right) - \left(\alpha 10^p + \beta\right)}{(10^q - 1)10^p} = \frac{\alpha\beta\gamma - \alpha\beta}{\underbrace{9\dots9}_{q}\underbrace{0\dots0}_{p}},$$

pour convertir un nombre périodique $x = \alpha,\beta\overline{\gamma}$ en fraction ordinaire y/z on peut utiliser la méthode suivante :

- on prend comme numérateur y la différence entre le nombre constitué par toutes les chiffres de x moins le nombre constitué par toutes les chiffres qui n'appartiennent pas à la période : $y = \alpha\beta\gamma - \alpha\beta$
- on prend comme dénominateur z le nombre formé d'autant de 9 que de chiffres de la période et de 0 que de chiffres entre la virgule et la période : $z = \underbrace{9\dots9}_{q}\underbrace{0\dots0}_{p}$.

Par exemple : $0,5\overline{12} = \frac{512-5}{990}$.

Spirale Les points A_0 et A_1 sont fixés. Pour i supérieur ou égal à 2, A_i est le milieu du segment d'extrémités A_{i-2} et A_{i-1}. On construit une spirale avec des demis arcs de cercle de diamètre A_iA_{i+1}. Autour de quel point la spirale s'enroule-t-elle ?



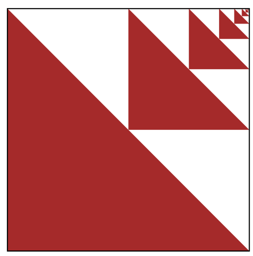
Les points A_i sont alignés, sans perte de généralité on peut supposer qu'ils se trouvent tous sur la droite d'équation $y = 0$. Notons x_i l'abscisse du point A_i et prenons $x_0 = 0$ et $x_1 = \ell$. Alors $x_i = \frac{(-1)^{i-1}}{2}x_{i-1}$ pour tout $i \le 2$, ce qui donne

$$x_i = \ell\sum_{k=0}^{i}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \ell\frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\ell\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1}\right)$$

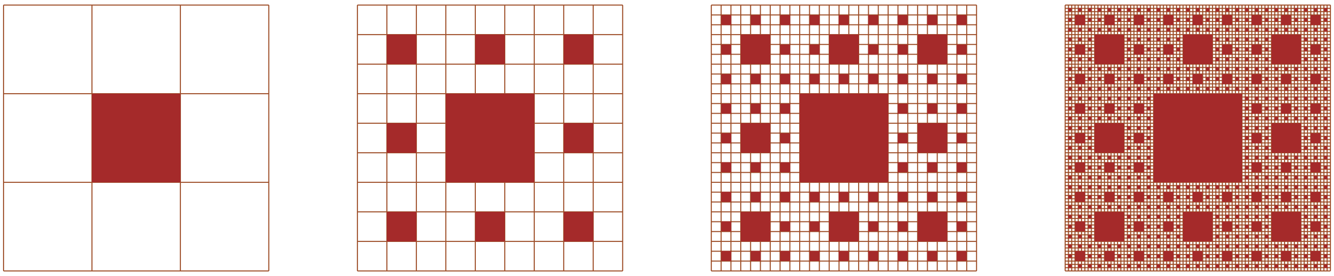
À la limite on trouve $x_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} \frac{2}{3}\ell$.

Mise en abîme Un carré unité est colorié comme dans la figure ci-contre. Sachant qu'il y a une infinité de triangles coloriés, on veut calculer l'aire de la surface totale qu'ils occupent. Le premier triangle à pour côté 1, donc son aire est égale à $\frac{1}{2}$. Le deuxième triangle à pour côté $\frac{1}{2}$, donc son aire est égale à $\frac{1}{8}$. Le troisième triangle à pour côté $\frac{1}{4}$, donc son aire est égale à $\frac{1}{32}$. Ainsi, la surface totale aura une aire égale à

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$



Le crible de Sierpinsky Un carré unité est divisé en 9 carrés identiques, le carré central étant colorié (Étape 1). Chacun des huit carrés restants est divisé selon le même principe, et nous réitérons ce procédé à l'infini. Quelle sera l'aire de la surface coloriée ?



Notons s_n l'aire de la surface coloriée à l'étape n, $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $s_1 = \frac{1}{9}$. Pour calculer l'aire du domaine colorié à l'étape n, il suffit d'ajouter à celle du domaine de l'étape précédente un neuvième de l'aire de la surface qu'il reste. On obtient alors la relation suivante :

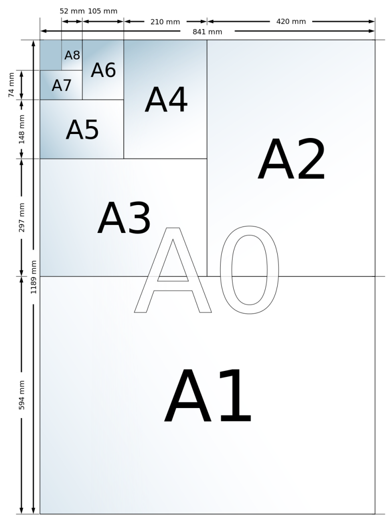
$$s_{n+1} = s_n + \frac{1 - s_n}{9} = \frac{8}{9} s_n + \frac{1}{9}.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique ; à la limite l'aire du domaine colorié est donc égal à $\lim_n s_n = 1$.

Format d'une feuille de papier Le format d'une feuille de papier rectangulaire est le couple formé par sa largeur et sa longueur. Ce format varie en fonction de l'usage de la feuille, de l'époque et de la zone géographique. Pour les usages courants, notamment en bureautique, le format A4 est aujourd'hui très largement répandu dans le monde, à l'exception de l'Amérique du Nord, où le format US Letter reste le plus utilisé. Le format A suivi d'un chiffre est conçu pour que les proportions de la feuille soient conservées lorsqu'on la plie ou coupe en deux dans sa longueur, permettant ainsi le massicotage sans perte, la confection de livres par pliage, ainsi que l'assemblage, l'agrandissement et la réduction par facteur de deux. Ce chiffre indique le nombre de fois où le format de base a été divisé en deux : une division en moitiés d'une feuille A0 donne deux feuilles A1, dont la division en deux donne deux fois deux feuilles A2, etc.
Prenons donc une feuille de papier A4, elle mesure 21 cm × 29.7 cm dans le sens normal d'écriture. Si on la retourne dans le sens de la largeur (format dit *à l'italienne*) et on en met une autre au-dessus (au-dessus, pas par-dessus) on obtient du A3 (29.7 cm × 42 cm). Si on continue ainsi de suite on construit deux suites L_n (longueur) et l_n (largeur) avec deux caractéristiques amusantes : la longueur d'une feuille devient la largeur de la suivante ($L_n = l_{n-1}$) et la longueur et la largeur sont toujours dans le même rapport $L_n = \sqrt{2} l_n$. Les suites sont définies par leurs conditions initiales : le format A0 fait 1 m^2, ce qui donne l'unique solution $L_0 \times l_0 = 1$ soit $l_0^2 \times \sqrt{2} = 1$, d'où l'on tire $l_0 = 84.1$ cm et $L_0 = 118.9$ cm.

On obtient (au millimètre près) :

Format A0 : 84.1 cm × 118.9 cm
Format A1 : $84.1/\sqrt{2} = 59.4$ cm × 84.1 cm
Format A2 : $59.4/\sqrt{2} = 42.0$ cm × 59.4 cm
Format A3 : $42.0/\sqrt{2} = 29.7$ cm × 42.0 cm
Format A4 : $29.7/\sqrt{2} = 21.0$ cm × 29.7 cm
Format A5 : $21.0/\sqrt{2} = 14.8$ cm × 21.0 cm
Format A6 : $14.8/\sqrt{2} = 10.5$ cm × 14.8 cm
Format A7 : $10.5/\sqrt{2} = 7.4$ cm × 10.5 cm
Format A8 : $7.4/\sqrt{2} = 5.2$ cm × 7.4 cm



7

Limites et continuité

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

7.1 Définition (Limite en un point (définition intuitive))
On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de x_0.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est suffisamment proche de x_0.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est suffisamment proche de x_0.

7.2 Définition (Limite en un point (définition rigoureuse))
On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0.
On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) si

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m.$$

Remarque
Dans la définition précédente, il est important de noter que pour calculer la limite de f on ne considère que les valeurs de $f(x)$ pour x proche de x_0 et différent de x_0. Par exemple, si on considère la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ mais $f(0) = 2$. On verra plus loin que les fonctions qui satisfont à la condition $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ sont appelées fonction continue en x_0.

7.3 Définition (Limite en plus l'infini (définition intuitive))
On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est de plus en plus grand.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus grand dès que x est de plus en plus grand.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus petit dès que x est de plus en plus grand.

7.4 Définition (Limite en plus l'infini (définition rigoureuse))
On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\ell \in \mathbb{R}$ (et on écrit $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ (et on écrit $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$) si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad x > \delta \implies f(x) > M.$$

On dit que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ (et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$) si

$$\forall m\in\mathbb{R}\quad \exists\delta\in\mathbb{R}\quad \forall x\in D_f\quad x>\delta \implies f(x)<m.$$

7.5 Définition (Limite en moins l'infini (définition rigoureuse))

Les définitions sont du même type que ci-dessus. Il faut simplement remplacer $x>\delta$ par $x<\delta$.

7.6 Théorème (Unicité)

Si une fonction admet une limite ℓ en x_0, cette limite est unique.

7.7 Théorème (d'encadrement (ou des gendarmes ou sandwich ou de l'étau))

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f\le g\le h$ au voisinage de x_0. Si f et h ont la même limite ℓ (finie ou infinie) en x_0 alors g a pour limite ℓ en x_0.

7.8 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ de la somme de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\ell_1+\ell_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=?$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$

7.9 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ du produit de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=?$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\ell_1\ell_2$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=+\infty$

7.10 Propriété (Limites en $x_0\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ du quotient de f et g)

On remplace par un point d'interrogation les cas où on ne peut pas conclure, appelés cas d'indétermination.

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_+^*$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ et $g>0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ et $g<0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2\in\mathbb{R}_-^*$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=0$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=?$

ATTENTION (LIMITES FONDAMENTALES)

Soit deux polynômes $P(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_ax^a$ et $Q(x)=q_0+q_1x+\cdots+q_bx^b$. Alors

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si } a<b,\\ \frac{p_a}{q_b} & \text{si } a=b,\\ \infty & \text{si } a>b,\end{cases}\qquad\qquad \lim_{x\to0^\pm}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p_0}{q_0}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad (x \text{ en radiant})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1-\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)=\tfrac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad (x \text{ en radiant})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\tfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}(1+\alpha x)^{1/x}=e^\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(a^{1/x}-1\right)=\ln a \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left(\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^\alpha-1\right)=\alpha \qquad\qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Exemple

On veut montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

L'observation des aires des triangles $O\overset{\triangle}{A}P$, $O\overset{\triangle}{A}T$ et du secteur OAP lorsque $0<x<\frac{\pi}{2}$ conduit aux inégalités

$$\text{Aire } O\overset{\triangle}{A}P < \text{Aire secteur } OAP < \text{Aire } O\overset{\triangle}{A}T.$$

Soit $|OA|=1$, alors l'aire du triangle $O\overset{\triangle}{A}P$ est $\sin(x)/2$, l'aire du secteur OAP est égale à $x/2$ et l'aire du triangle $O\overset{\triangle}{A}T$ est $\tan(x)/2$, donc

$$\frac{\sin(x)}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\tan(x)}{2}.$$

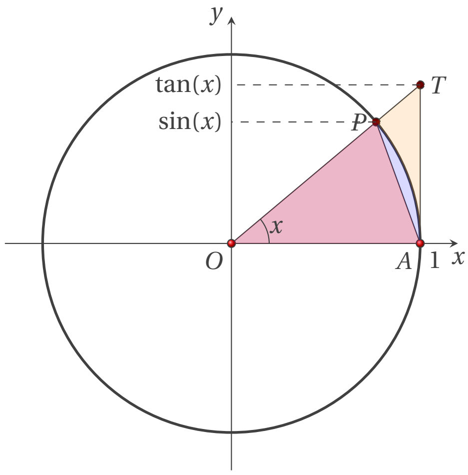
Lorsque $0<x<\frac{\pi}{2}$ on peut multiplier par $2/\sin(x)$ en conservant le sens des inégalités

$$1<\frac{x}{\sin(x)}<\frac{1}{\cos(x)}$$

soit encore

$$1>\frac{\sin(x)}{x}>\cos(x).$$

Les fonctions $\sin(x)/x$ et $\cos(x)$ étant paires, les mêmes inégalités restent satisfaites lorsque $-\frac{\pi}{2}<x<0$. En prenant la limite de ces inégalités lorsque $x\to 0$ on conclut que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.



7.11 Définition (Équivalence)

Soit f et g deux applications de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{R}$ et soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une fonction $\varphi\colon\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x\in\mathcal{V}\cap\mathcal{D},\quad f(x)=g(x)[1+\varphi(x)],\qquad \text{et}\qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$$

On note alors $f\underset{x_0}{\sim}g$.

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, cette définition est équivalente à

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Exemple

★ Soit $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $(a_n\neq 0)$ une fonction polynomiale, alors

$$P(x)\underset{+\infty}{\sim}a_nx^n,\qquad P(x)\underset{-\infty}{\sim}a_nx^n,\qquad P(x)\underset{0}{\sim}a_0 \text{ si } a_0\neq 0.$$

★ Soit $F(x)=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_px^p}$, $(a_n\neq 0$ et $b_p\neq 0)$ une fonction rationnelle, alors

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a_nx^n}{b_px^p},\qquad F(x)\underset{-\infty}{\sim}\frac{a_nx^n}{b_px^p},\qquad F(x)\underset{0}{\sim}\frac{a_0}{b_0} \text{ si } a_0,b_0\neq 0.$$

- ⋆ Fonctions trigonométriques :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad \tan(x) \underset{0}{\sim} x, \qquad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

- ⋆ Fonctions logarithmes, exponentielles, puissance :

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \qquad a^x - 1 \underset{0}{\sim} x\ln(a)\ (a>0), \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x\ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

7.12 Théorème
Soit f et g deux applications de $\mathscr{D}$ vers $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Ce résultat est fondamentale car il permet de remplacer une limite par une limite plus simple.

Attention
Si deux fonctions ont même limite, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple, $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} x^2$ mais $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

7.13 Propriété
- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies fg \sim f_1 g_1$
- ⋆ $f \sim f_1 \implies \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1}$ si f et f_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \implies \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$ si g et g_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- ⋆ $f \sim f_1 \implies f^n \sim f_1^n$, $n \in \mathbb{N}$
- ⋆ $f \sim f_1 \implies f^\alpha \sim f_1^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si f et f_1 sont strictement positives au voisinage de x_0

Attention
- ⋆ $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \not\Rightarrow f+g \sim f_1 + g_1$
- ⋆ $f \sim f_1 \not\Rightarrow e^f \sim e^{f_1}$
- ⋆ $f \sim f_1 \not\Rightarrow \ln(f) \sim \ln(f_1)$

7.14 Définition (Continuité en un point)
On dit que f est continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

7.15 Définition (Continuité)
On dit que f est continue si elle est continue dans tout point de son ensemble de définition.

L'idée intuitive de se dire qu'une fonction est continue si et seulement si on peut tracer son graphe sans jamais soulever le crayon n'est valable que si l'ensemble de définition est constitué d'un seul et unique morceau ! Lorsque l'ensemble de définition est constitué de deux ou plusieurs morceaux, on a le droit de soulever le crayon. Ainsi par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue car son domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est constitué des deux morceaux $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty$ et f est continue dans tout point de son ensemble de définition.

7.16 Définition (Prolongement par continuité)
Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \notin I$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = \ell$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à x_0.

Par conséquent la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

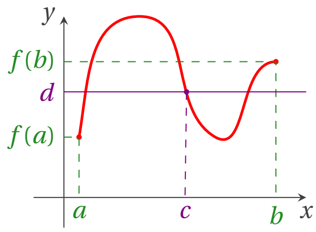
7.17 Théorème (Fonctions composées)
Si $(x_0, f(x_0)) \in D_f \times D_g$ et f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $x_0 \in D_{g\circ f}$ et $g \circ f$ est continue en x_0.

7.18 Théorème (de Bolzano ou des Valeurs intermédiaires)
Formulation 1 L'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Formulation 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient a, $b \in I$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors f atteint toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. Autrement dit :

$$\forall d \in [f(a), f(b)],\ \exists c \text{ compris entre } a \text{ et } b \text{ tel que } f(c) = d.$$

On n'a pas forcement $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ *ou* $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ *:*



EXEMPLE
Ce théorème permet d'affirmer par exemple que si un marcheur parcourt 12 km en une heure alors il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km. En effet, soit $f\colon [0;1] \to [0;12]$ l'application telle que $f(t)$ soit le nombre de kilomètres parcourus par le marcheur en t heures (on suppose que f est continue). On se demande s'il existe $T \in [0;0.5]$ tel que $f(T+0.5) - f(T) = 6$. Posons alors $g\colon [0;0.5] \mapsto [0;12]$ l'application définie par $g(t) = f(t+0.5) - f(t)$ Comme $6 \in [0;12]$ et g est continue, alors il existe au moins un $T \in [0;0.5]$ tel que $g(T) = 6$: pendant la demi-heure $[T, T+6]$ le marcheur a parcourus 6 km.

Ce théorème donne alors le corollaire immédiat suivant.

7.19 Corollaire (des zéros d'une fonction continue)

Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe (au moins un) $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ce théorème garantit juste l'existence d'un zéro. Pour l'unicité on a besoin d'autres hypothèses, comme par exemple la bijectivité.

7.20 Théorème (de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f induit une bijection de I dans $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est continue sur I, monotone sur I et de même sens de variation que f.

7.21 Théorème (de WEIERSTRASS ou des Valeurs extrêmes)

Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors elle admet un maximum et un minimum (appelés «valeurs extrêmes») .

7.22 Définition (Asymptotes)

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.
Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)(f(x) - (ax+b)) = 0$), la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f.

Méthodes numériques de recherche de zéros - partie ① : méthode de bissection Un des problèmes classiques en mathématiques appliquées est celui de la recherche des valeurs pour lesquelles une fonction donnée s'annule. Dans certains cas bien particuliers, comme pour les fonctions $x \mapsto x+1$, $x \mapsto \cos(2x)$ ou $x \mapsto x^2 - 2x + 1$, le problème est simple car il existe pour ces fonctions des formules qui donnent les zéros explicitement. Toutefois, pour la plupart des fonctions il n'est pas possible de résoudre l'équation $f(x) = 0$ explicitement et il faut recourir à des méthodes numériques. Ainsi par exemple une brève étude de la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ montre qu'elle possède un zéro à proximité de 0.7 mais ce zéro ne s'exprime pas au moyen de fonctions usuelles et pour en obtenir une valeur approchée il faut recourir à des méthodes numériques.
Plusieurs méthodes existent et elles différent pas leur vitesse de convergence et par leur robustesse. Lorsqu'il s'agit de calculer les zéros d'une seule fonction, la vitesse de la méthode utilisée n'est souvent pas cruciale. Cependant, dans certains applications il est nécessaire de calculer les zéros de plusieurs milliers de fonctions et la vitesse devient alors un élément stratégique. Par exemple, si on veut représenter graphiquement l'ensemble de points (x, y) du plan pour lequel

$x^2 \sin(y) + e^{x+y} - 7 = 0$, on peut procéder comme suit : pour une valeur donnée de x, on cherche l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles $x^2 \sin(y) + e^{x+y} - 7 = 0$, *i.e.* l'ensemble des zéros de la fonction $f(y) = x^2 \sin(y) + e^{x+y} - 7 = 0$, et on représente tous les couples obtenus. On choisit une nouvelle valeur pour x et on répète l'opération. Pour obtenir une courbe suffisamment précise, il faut procéder à la recherche des zéros d'un très grand nombre de fonction et il est alors préférable de disposer d'une méthode rapide.
Nous allons voir deux méthodes de recherche de zéros d'une fonction : la méthode de la bissection (décrite ci-dessous) et la méthode de NEWTON (décrite au prochain chapitre à la page 186).

La **méthode de la bissection** est la méthode la plus ancienne, la plus simple et la plus naturelle. La méthode ne s'applique que lorsque la fonction dont on cherche les zéros est continue. Supposons que la fonction $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue, monotone et que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Par les théorèmes de BOLZANO et de la bijection, la fonction possède alors exactement un zéro quelque part dans l'intervalle $]a;b[$. Pour approcher ce zéro nous allons construire une suite d'intervalles emboîtés de plus en plus petits dans lesquels ce zéro s'enferme. L'intervalle initiale $[a;b]$ est divisé en deux sous-intervalles d'égales longueurs au moyen du point milieu $(a+b)/2$. On détermine ensuite, au moyen du signe de la fonction f évaluée au point milieu, lequel de ces deux sous-intervalles contient le zéro. La méthode se poursuit jusqu'à ce qu'une précision suffisante ait été atteinte.

Require: a et $b > a$ les bornes de l'intervalle, ε la précision souhaitée, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction dont on cherche le zéro
  $x \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[a;b]$
  while $b - a > \varepsilon$ **do**
    if $f(a)f(x) > 0$ (*i.e.* si le zéro est contenu dans le sous-intervalle de droite) **then**
      $a \leftarrow x$
    else
      $b \leftarrow x$
    end if
    $x \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[a;b]$
  end while

L'avantage majeur de la méthode est qu'elle fonctionne toujours. De plus, on peut connaître dès le départ le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée puisque le sous-intervalle obtenu après n itérations est de taille $(b-a)/2^n$.
Un désavantage de cette méthode est qu'il faut disposer d'un intervalle $[a;b]$ pour lequel les signes de $f(a)$ et $f(b)$ sont différents. Or, de tels intervalles ne sont pas toujours disponibles (par exemple, on ne peut pas utiliser la méthode de la bissection pour calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 1$).

EXEMPLE (CALCUL APPROCHÉ DE $\sqrt{2}$)
On veut calculer le zéro de la fonction

$$f(x) = x^2 - 2$$

dans l'intervalle $[0;2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$	$\lvert x_k - \sqrt{2}\rvert$
0	0.00000	1.00000	2.00000	–	–	+	0.41421
1	1.00000	1.50000	2.00000	–	+	+	0.08578
2	1.00000	1.25000	1.50000	–	–	+	0.01642
3	1.25000	1.37500	1.50000	–	–	+	0.03921

8 Dérivabilité

Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

8.1 Définition (Dérivabilité en un point)
On dit que f est dérivable en x_0 si f est définie en tout point d'un intervalle ouvert contenant x_0 et si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{R}$. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de f en x_0*.
Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé *quotient différentiel*.

8.2 Définition (Dérivées successives)
Soit f dérivable sur E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$ puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur E, et on écrit $f \in \mathscr{C}^n(E)$, lorsque f est n fois dérivable sur E et $f^{(n)}$ est continue sur E.

8.3 Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivées)
Soient λ un réel, f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont dérivables sur I et on a

$$(f+g)' = f'+g', \qquad (\lambda f)' = \lambda f', \qquad (fg)' = f'g+fg'.$$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que g ne s'annule pas sur I. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

8.4 Théorème (Fonctions composées)
Soient $f\colon \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. Alors $g\circ f$ est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et on a

$$(g\circ f)' = f' \times g'\circ f$$

c'est-à-dire

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)) \qquad \forall x \in \mathscr{D}_f.$$

EXEMPLE
On considère la fonction $h\colon x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty,1[$. On sait que :

* la fonction $f\colon x\mapsto 1-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty,1[$,
* la fonction $g\colon x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
* $f(]-\infty,1[) =]1,+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi la fonction h est dérivable sur $]-\infty,1[$ et on a

$$h'(x) = (-1)\times\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

8.5 Théorème (Fonctions réciproques)
Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f(x_0))}.$$

ATTENTION (TABLEAUX DES DÉRIVÉES FONDAMENTALES ET COMPOSITION)

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left([f(x)]^n\right)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$	pour $n \neq -1$
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$	
$(a^x)' = a^x \ln(a)$	$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln(a) f'(x)$	pour $a > 0$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	
$(\sin(x))' = \cos(x)$	$\left(\sin(f(x))\right)' = f'(x)\cos(f(x))$	
$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$\left(\cos(f(x))\right)' = -f'(x)\sin(f(x))$	
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\left(\tan(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = 1 + \tan^2(f(x))$	
$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	
$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos(f(x))\right)' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	
$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\arctan(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	
$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$\left(\sinh(f(x))\right)' = f'(x)\cosh(f(x))$	
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$\left(\cosh(f(x))\right)' = f'(x)\sinh(f(x))$	

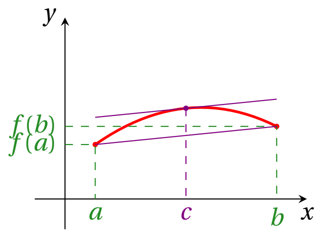
8.6 Théorème
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

ATTENTION
La réciproque est fausse : par exemple, les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

8.7 Théorème (de LAGRANGE ou de la Valeur moyenne ou des Accroissements finis)
Si f est continue en tout point d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) et dérivable en tout point de $]a,b[$ alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

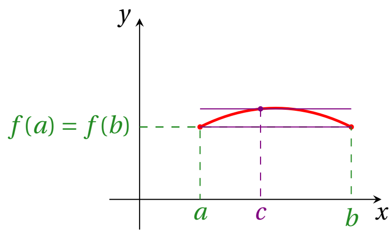
Il est simple de donner une interprétation géométrique de ce théorème : le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$ et $f'(c)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(c, f(c))$. Le théorème affirme donc qu'il existe au moins un point c tel que la droite tangente au graphe de f en ce point est parallèle à la droite qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(b, f(b))$.



8.8 Théorème (de ROLLE)
1. Si f est continue sur $[a,b]$ (avec $a < b$), dérivable sur $]a,b[$ et si elle vérifie $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Si f est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to+\infty} = f(a)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. Si f est continue sur $]-\infty,b]$, dérivable sur $]-\infty,b[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to-\infty} = f(b)$ alors il existe au moins un point $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. Si f est continue et dérivable sur $]-\infty,+\infty[$ et si elle vérifie $\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty}$ alors il existe au moins un point $c \in]-\infty,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le premier point de ce théorème est un cas particulier du théorème des accroissements finis, *i.e.* le cas où $f(b) = f(a)$ et donc $f(b) - f(a) = 0$.



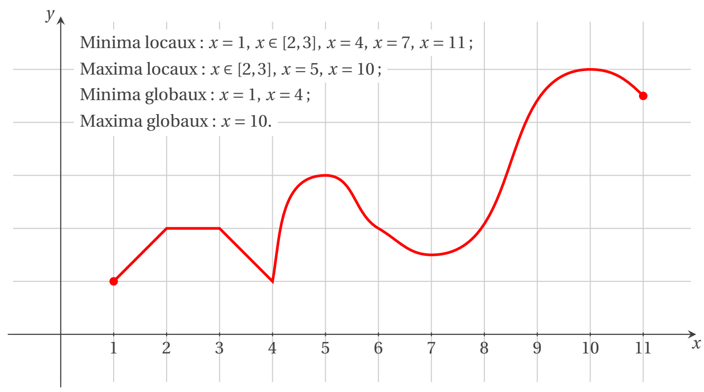
8.1 Localisation et nature des extrema

8.9 Définition

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- ⋆ f est bornée dans $[a,b]$ s'il existe un nombre réel $M \ge 0$ tel que
$$\text{pour tout } x \in [a,b],\ |f(x)| \le M;$$
- ⋆ f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $c \in [a,b]$ si
$$\text{pour tout } x \in [a,b],\ f(x) \le f(c) \text{ (resp. } f(x) \ge f(c)\text{)};$$
- ⋆ f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $c \in [a,b]$ s'il existe un intervalle $\varepsilon > 0$ telle que
$$\text{pour tout } x \in [a,b] \cap [c-\varepsilon, c+\varepsilon],\ f(x) \le f(c) \qquad \text{(resp. } f(x) \ge f(c)\text{)}.$$

EXEMPLE



On sait par le théorème des valeurs intermédiaires qu'une fonction continue sur un intervalle fermé y admet un maximum global et un minimum global. La dérivée de la fonction est d'une aide précieuse pour en localiser les minima et les maxima locaux.

8.10 Définition (Point stationnaire (ou critique))

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $c \in]a,b[$. Si $f'(c) = 0$, on dit que c est un point stationnaire (ou critique.)

8.11 Proposition
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $c \in]a,b[$. Si f admet un extremum local en c, alors c est un point stationnaire.

ATTENTION
La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : une fonction dérivable peut posséder une dérivée nulle en un point sans pour autant y admettre un extremum. C'est le cas de la fonction $f\colon x \mapsto x^3$ pour laquelle $f'(0) = 0$ et pour laquelle l'origine n'est pas un extrémum (il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale).

Remarque
On déduit de cette proposition que si c est un extremum de $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ alors

- ⋆ soit f est dérivable en c et $f'(c) = 0$,
- ⋆ soit f n'est pas dérivable en c,
- ⋆ soit c est un point frontière de l'intervalle, c'est-à-dire $c = a$ ou $c = b$.

8.12 Définition (Tangente)
f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

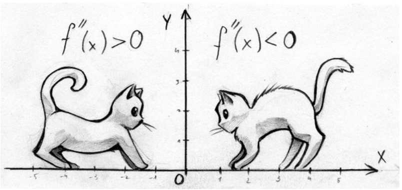
8.13 Proposition (Sens de variation : dérivée première)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.

1. Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I ;
2. si $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I ;
3. si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
4. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I ;
5. si $\forall x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

La dérivée première d'une fonction f donne le taux instantané de variation de la variable y par rapport à la variable x lorsque $y = f(x)$. La dérivée seconde de f donne le taux instantané de variation par rapport à x du taux instantané de variation de y par rapport x. Donc, si la dérivée seconde d'une fonction est positive, c'est que le taux instantané de variation de la pente de la tangente est positif et donc la pente de la tangente augmente (*la fonction est convexe*). Si la dérivée seconde est négative, la pente de la tangente diminue (*la fonction est concave*). Enfin, il se peut que la dérivée de f soit nulle en un point c. Dans ce cas, si la dérivée seconde change de signe au point c, nous disons que c est un point d'inflexion de f. La dérivée seconde d'une fonction permet alors de déterminer la nature de ses points stationnaires.

8.14 Proposition (Classification des extrema : dérivée seconde)
Soient $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en un point stationnaire $c \in]a,b[$. Alors

1. si $f''(c) < 0$, la fonction admet un maximum local en c,
2. si $f''(c) > 0$, la fonction admet un minimum local en c.



Remarque
Le théorème ne dit rien du cas $f''(c) = 0$. Un tel point peut être un point de maximum, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto -x^4$, un point de minimum, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto x^4$, ou encore un point d'inflexion, comme dans le cas de l'origine pour la fonction $x \mapsto x^3$.

8.2 Approximations : polynômes de Taylor

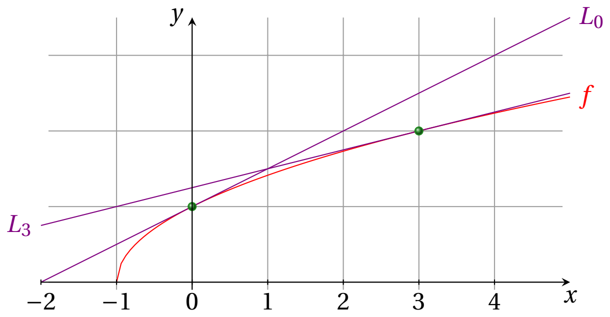
Il est souvent plus avantageux de remplacer des fonctions compliquées par des fonctions plus simples qui les approchent.

8.15 Définition (Linéarisation)
Si on approche une fonction f au voisinage d'un point x_0 au moyen d'une fonction affine $L(x) = q + mx$, il est naturel de choisir la fonction L dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en x_0 :

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

C'est ce qu'on appelle la linéarisation de f en x_0. Dans certains cas on mentionne explicitement le point auquel la linéarisation est obtenue et on note la linéarisation de f en x_0 par L_{x_0}.

Attention
La linéarisation d'une fonction dépend du point auquel on linéarise la fonction. Par exemple, la linéarisation de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ en 0 donne $L_0(x) = 1 + x/2$ (car $f'(x) = 1/(2\sqrt{1+x})$ et $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x/2$) tandis que la linéarisation en 3 donne $L_3(x) = (5+x)/4$. La linéarisation L_0 fournit une meilleure approximation de f tant que $x < 1$, la linéarisation L_3 devient meilleure lorsque $x > 1$. En $x = 1$, les deux linéarisations fournissent la même valeur.



8.16 Définition (Notation)
Lorsqu'elle est évaluée en x_0, la linéarisation de la fonction f en x_0 coïncide avec la fonction f. Lorsque x reste proche de x_0, la linéarisation de L_{x_0} fournit une approximation de f. On note

$$f(x) \simeq L(x) \qquad \text{lorsque } x \simeq x_0.$$

Le signe $\simeq$ signifie "*est approximativement égal à*" sans que l'on attache ici de sens plus précis à cette notation.

Exemple
La dérivée de $f(x) = (1+x)^n$ est égale à $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. La linéarisation de f à l'origine est donc égale à $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + nx$ est on a

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

Cette formule particulièrement simple à retenir est valable pour des valeurs quelconques de n. Elle permet de calculer rapidement des approximations de racines et de puissances de nombres *proches de l'unité*. Ainsi, par exemple

$$\sqrt[3]{1.2} = (1+0.2)^{0.3} \simeq 1 + \frac{0.2}{3} = 1.0\bar{6}.$$

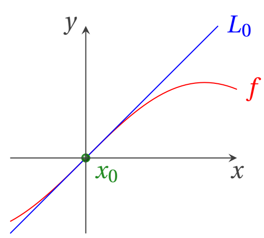
La même formule permet d'évaluer immédiatement 1.002^{100} à 1.2 (la valeur exacte est 1.221...).

Exemple
La linéarisation de la fonction sin à l'origine est $L_0(x) = x$, donc

$$\sin(x) \simeq x \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

C'est la linéarisation que l'on effectue pour résoudre l'équation du pendule en physique.

La qualité de cette approximation peut être également appréciée au moyen de quelques valeurs :



x	−0.2	−0.1	−0.05	0	0.05	0.1	0.2
$f(x) = \sin(x)$	−0.1986	−0.0998	−0.0499	0	0.0499	0.0998	0.1986
$L_0(x) = x$	−0.2	−0.1	−0.05	0	0.05	0.1	0.2

La linéarisation d'une fonction f en un point x_0 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$\begin{cases} L(x_0) = f(x_0), \\ L'(x_0) = f'(x_0). \end{cases}$$

Les polynômes de TAYLOR généralisent cette construction pour des polynômes de degrés quelconques.

8.17 Définition (Polynôme de TAYLOR)

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par f au point x_0 est le (seul) polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui satisfait les conditions

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n,$$

i.e. le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Le graphe du polynôme de TAYLOR d'une fonction f en x_0 est une courbe polynomiale tangente au graphe de f en x_0.

Remarque

Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$. On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(k)}(x) = 0$ lorsque $k \geq 3$. Les polynômes de TAYLOR d'ordre 0, 1 et 2 générés par f à l'origine s'obtiennent par $P_0(x) = P_1(x) = 1$ et $P_2(x) = P_k(x) = f(x)$ lorsque $k \geq 3$: les polynômes de TAYLOR d'ordre ≥ 2 sont tous égaux à $1 + x^2$. C'est la raison pour laquelle on définit un *polynôme de* TAYLOR *d'ordre n et non pas de degré n* : le degré d'un polynôme de TAYLOR peut être inférieur à son ordre.

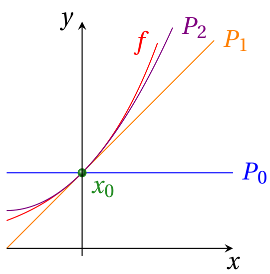
8.18 Proposition

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point x_0 par un polynôme f de degré $m \leq n$ coïncide avec f quel que soit x_0.

EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par la fonction $f(x) = e^x$ est

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \frac{x^n}{n!}.$$

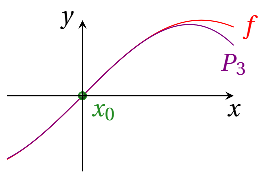


EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre 4 généré au point 0 par le fonction $f(x) = \sin(x)$ est

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

La qualité de l'approximation des fonctions circulaires par leurs polynômes de TAYLOR est excellente.



EXEMPLE

Le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré au point 0 par le fonction $f(x) = (1 - x)^m$, $m > n$ est

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Comme

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1-x)^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!}(1-x)^{m-k} = \binom{m}{k} k!(1-x)^{m-k}$$

on trouve

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k.$$

8.19 Propriété

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables en un point x_0 et P_f et P_g leurs polynômes de TAYLOR d'ordre n en x_0. Alors

1. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par la somme $f+g$ au point x_0 est le polynôme P_f+P_g ;
2. le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par le produit fg au point x_0 est la somme des termes de degré inférieur ou égaux à n du polynôme P_fP_g ;
3. le polynôme de TAYLOR d'ordre nk généré par $f(x^k)$ au point x_0 est le polynôme $P_f(x^k)$;
4. le polynôme de TAYLOR d'ordre $n-1$ généré par f' au point x_0 est le polynôme P'_f.

EXEMPLE (SOMME)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $\sin(x)$ à l'origine est égal à $x-x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $4x+3x^2-\sin(x)$ à l'origine est égal à $4x+3x^2-(x-x^3/6)$, *i.e.* $P_3(x)=3x+3x^2+x^3/6$.

EXEMPLE (PRODUIT)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par e^x à l'origine est égal à $1+x+x^2/2+x^3/6$, on peut conclure que le polynôme de TAYLOR d'ordre 3 généré par $(x+2x^2-x^3)e^x$ à l'origine est donné par le polynôme obtenu par la somme des termes de degré inférieur ou égaux à 3 du produit $(x+2x^2-x^3)(1+x+x^2/2+x^3/6)$, *i.e.* $P_3(x)=x+3x^2+3x^3/2$.

EXEMPLE (COMPOSITION)

Sachant que le polynôme de TAYLOR d'ordre n généré par $1/(1-x)=(1-x)^{-1}$ à l'origine est égal à $1+x+x^2+\cdots+x^n$, on peut conclure que le polynôme de Taylor d'ordre n généré par $1/(1-(-x))=(1-(-x))^{-1}$ à l'origine est égal à $1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^n$, *i.e.* $1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n$ et que le polynôme de Taylor d'ordre n généré par $1/(1+x^2)$ à l'origine est égal à $1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n$, *i.e.* $1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^nx^{2n}$.

EXEMPLE (GRAVITATION ET APPROXIMATION)

À l'altitude z, la norme du champ de gravitation de la Terre est la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+\\ z &\mapsto \frac{GM}{(R+z)^2}\end{aligned}$$

où G est la constante de gravitation, M la masse de la Terre et R le rayon de la Terre.
Posons $u=z/R$. On a $\tilde{g}(u)=(1+u)^{-2}GM/R^2$. Si $z\ll R$ alors $u\simeq 0$. Le polynôme de TAYLOR de $\tilde{g}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est

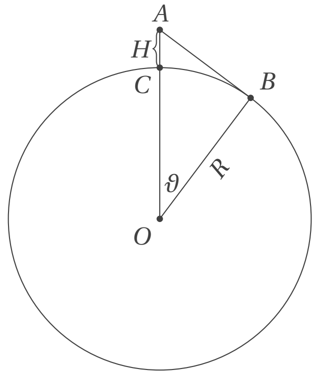
$$\tilde{g}(u)=\frac{GM}{R^2}\left(1-2u+3u^2\right).$$

Une expression approchée de g pour $z\ll R$ est alors

$$g(z)=\frac{GM}{R^4}\left(R^2-2zR+3z^2\right).$$

EXEMPLE

On veut déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude H au-dessus du niveau de la mer. Du point A on voit jusqu'au point B.



L'on a

$$\cos(\vartheta)=\frac{OB}{OA}=\frac{R}{R+H}=\frac{1}{1+\frac{H}{R}}.$$

Pour une altitude «raisonnable», $\frac{H}{R}$ est petit et ϑ également ($R\approx 6371\,\text{km}$). On utilise les deux équivalences

$$\cos(\vartheta)\approx 1-\frac{\vartheta^2}{2},\qquad \frac{1}{1+\frac{H}{R}}=\left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1}\approx 1-\frac{H}{R},$$

qui conduisent à $\vartheta\approx\sqrt{2\frac{H}{R}}$. On conclut que la distance CB

à la surface de la Terre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle, est $\ell = R\vartheta = \sqrt{2RH}$. Par exemple, du sommet de la tour Eiffel ($H = 324$ m) on peut voir à une distance de 66 kilomètres.

L'utilisation d'un polynôme de Taylor d'ordre n d'une fonction f en x_0 pour approcher f à proximité de x_0 induit une erreur qui est d'autant plus élevée que le graphe de la fonction s'écarte du graphe de f. L'erreur commise n'est nulle partout que lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Lorsqu'on dispose d'une borne sur la dérivée $(n+1)$-ème de f, il est possible de borner l'erreur. De plus, lorsque l'on utilise un polynôme de Taylor d'ordre de plus en plus grand pour approcher f, on s'attend à ce que l'approximation s'améliore.

8.20 Théorème (Erreur d'approximation)
Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et soit P_n le polynôme de Taylor d'ordre n généré par f en x_0. Si $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ pour tous les x dans $[a;b]$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

pour tous les x dans $[a;b]$.

Exemple
La linéarisation de $f(x) = \sin(x)$ en $x = 0$ donne $\sin(x) \simeq x$. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $|x| \le 0.5$? Comme $\max_{|x|\le 0.5} |f''(x)| = \max_{|x|\le 0.5} |-\sin(x)| = \sin(0.5)$, une application directe du théorème permet d'écrire

$$|\sin(x) - x| \le \frac{(0.5)^2}{2}\sin(0.5) \le 0.06$$

pour tous les x dans $[-0.5;0.5]$.

Exemple
Le polynôme d'ordre 2 généré par la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ à l'origine est donné par

$$P_2(x) = 1 + x + x^2.$$

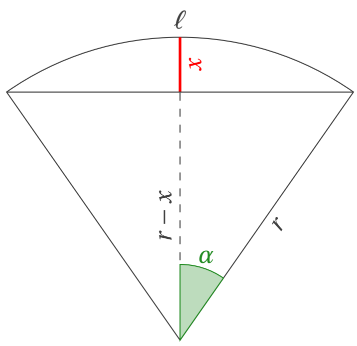
Considérons ces fonctions sur l'intervalle $[0;0.1]$. La fonction f''' est dérivable sur cet intervalle et $\max_{x\in[0;0.1]}|f'''(x)| = \max_{x\in[0;0.1]}|6/(1-x)^4| = 6/(1-0.1)^4 = M$. Par conséquent

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{(0.1-0)^{2+1}}{(2+1)!}6/(1-0.1)^4 \le 0.00152$$

pour tous les x dans $[0;0.1]$.

Exemple
Considérons un secteur circulaire de rayon r et angle 2α, avec α petit.On veut approcher x par un polynôme en α et r. Pour cela, on exprime x en fonction de $\cos(\alpha)$ et on calcule le polynôme de Taylor en 0 à l'ordre 3 de $\cos(\alpha)$:

$$r - x = r\cos(\alpha).$$



Lorsque $\alpha \simeq 0$ on a

$$\cos(\alpha) \simeq \frac{\cos(0)}{0!}(\alpha-0)^0 + \frac{-\sin(0)}{1!}(\alpha-0)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!}(\alpha-0)^2 + \frac{\sin(0)}{3!}(\alpha-0)^3 = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

donc

$$x \simeq \frac{r\alpha^2}{2} \qquad \text{lorsque } \alpha \simeq 0.$$

En approchant la Terre par une sphère de rayon $r = 6360$ km, on peut par exemple estimer de combien un arc de $\ell = 100$ km s'écarte de sa corde (*i.e.* estimer x) : $\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{100}{6360} = \frac{5}{318} \simeq 0$ donc $x \simeq \frac{6360\times 100^2}{2\times 6360^2} = \frac{125}{159} \simeq 0.79$ km.

8.21 Théorème (de l'Hôpital — F.I. $\left[\frac{0}{0}\right]$ ou $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $]a;b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a;b[$. Si

1. il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

alors
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$
Le résultat est valable en remplaçant a^+ par b^- ou par $x_0 \in]a;b[$.

Attention

L'existence de la limite du rapport des dérivées est une condition suffisante mais non nécessaire pour l'existence de la limite du rapport des deux fonctions. Considérons par exemple les deux fonctions $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g(x) = e^x - 1$. On a
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{e^x-1}{x}} = 0.$$
Cependant
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x}$$
qui n'existe pas.

Remarque (F.I. $[0\cdot\infty]$)

Lorsqu'on doit calculer $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ il suffit de réécrire le produit comme
$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{ou} \qquad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$
et on pourra essayer d'appliquer le théorème de l'Hôpital.

Remarque (F.I. $[\infty - \infty]$)

Lorsqu'on doit calculer $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ avec $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ il suffit de réécrire la différence comme
$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$
et on pourra essayer d'appliquer le théorème de l'Hôpital.

Exemple

1. Calculons la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. Calculons la limite $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 4$ et $g(x) = x^2 - 4$.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{D} =]0; +\infty[$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{2x}$ qui est encore une forme indéterminée.
   On applique le théorème de l'Hôpital aux deux nouvelles fonctions f' et g' définies et dérivables sur $\mathscr{D}$. On a $g''(x) = 2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\lim_{x\to 2} f'(x) = \lim_{x\to 2} g'(x) = 0$ et $\lim_{x\to 2} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. Calculons la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$. On peut utiliser la règle de l'Hôpital car
   $$n(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \qquad \lim_{x\to 0} n(x) = 0; \qquad d(x) = x - \sin(x), \qquad \lim_{x\to 0} d(x) = 0.$$
   On a
   $$\begin{aligned} &n'(x) = e^x + e^{-x} - 2, && \lim_{x\to 0} n'(x) = 0; && d'(x) = 1 - \cos(x), && \lim_{x\to 0} d'(x) = 0 \\ &n''(x) = e^x - e^{-x}, && \lim_{x\to 0} n''(x) = 0; && d''(x) = \sin(x), && \lim_{x\to 0} d''(x) = 0; \end{aligned}$$

9

Plan d'étude d'une fonction numérique

❶ Domaine de définition.

- ⋆ Détermination du domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
- ⋆ Réduction éventuelle du domaine d'étude grâce à la parité, l'imparité, la périodicité.

❷ Valeurs aux bornes du domaine d'étude.

- ⋆ Calcul des limites éventuelles aux bornes du domaine d'étude.
- ⋆ Étude des branches infinies (recherche d'asymptotes).

❸ Continuité, dérivabilité (régularité).

❹ Sens de variation

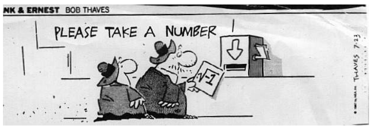
- ⋆ Calcul de la dérivée première (et seconde).
- ⋆ Signe de la dérivée première (et seconde).
- ⋆ Sens de variation et convexité.

❺ Points remarquables.

- ⋆ Maxima, minima.
- ⋆ Points anguleux.
- ⋆ Points d'inflexion.
- ⋆ Points d'intersection avec les axes.

❻ Tableau de variation.

❼ Représentation graphique.



10
Nombres complexes

10.1 Définition (Forme algébrique)
Tout nombre $z \in \mathbb{C}$ s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$. Le réel x s'appelle "partie réelle de z" et se note $\Re(z)$. Le réel y s'appelle "partie imaginaire de z" et se note $\Im(Z)$. Si $y = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors z est un imaginaire pur.

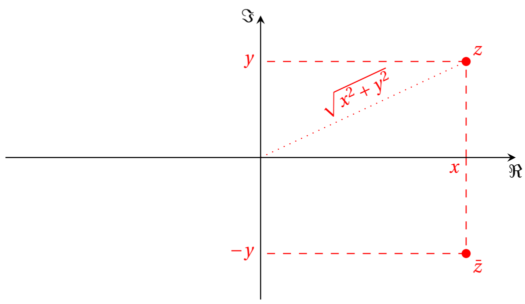
10.2 Propriété
Égalité Deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi $(x, y) = (x', y')$.
Attention : il n'y a pas d'inégalités en $\mathbb{C}$.

Opérations Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le numéro complexe $\bar{z} = x + i(-y)$ et on a

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \qquad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \qquad z + \bar{z} = 2\Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2\Im(z).$$



10.3 Définition (Forme trigonométrique et exponentielle)
Forme trigonométrique Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme trigonométrique $z = \varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$ avec $\varrho > 0$ le module de z et ϑ un argument de z.

Module Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. On le note $|z|$ ou ϱ ou r. On a

$$|z| = 0 \iff z = 0; \qquad |\Re(z)| \le |z|; \qquad |\Im(z)| \le |z|;$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|; \qquad |z^n| = |z|^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}; \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|};$$

$$\Big||z| - |z'|\Big| \le |z - z'| \le |z| + |z'|.$$

Argument On le note $\arg(z)$ et il est défini, modulo 2π, par $\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}$ et $\sin\vartheta = \frac{y}{\varrho}$. On a (à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z'); \qquad \arg(1/z) = -\arg(z);$$
$$\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z'); \qquad \arg(z^n) = n\arg(z), \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

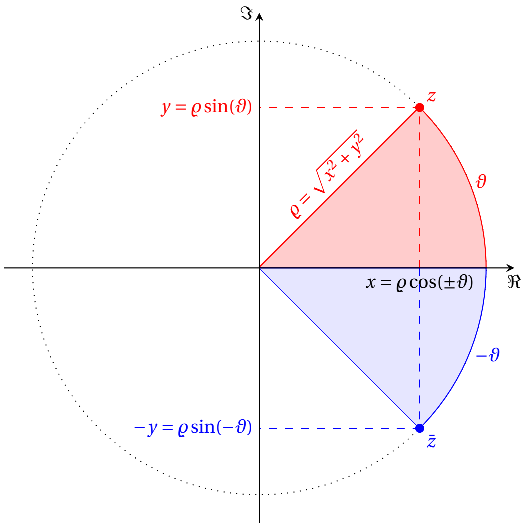
Forme exponentielle Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous forme exponentielle $z = \varrho e^{i\vartheta}$.

- ⋆ Formule de Moivre : pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\varrho(\cos\vartheta + \sin\vartheta))^n = \varrho^n(\cos(n\vartheta) + \sin(n\vartheta)) = \varrho^n e^{in\vartheta}.$$

- ⋆ Formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

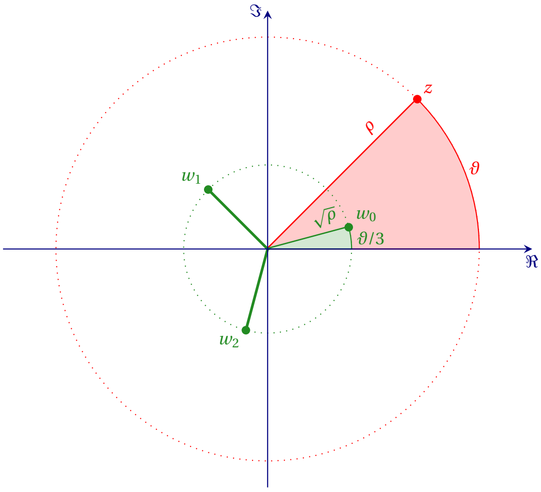


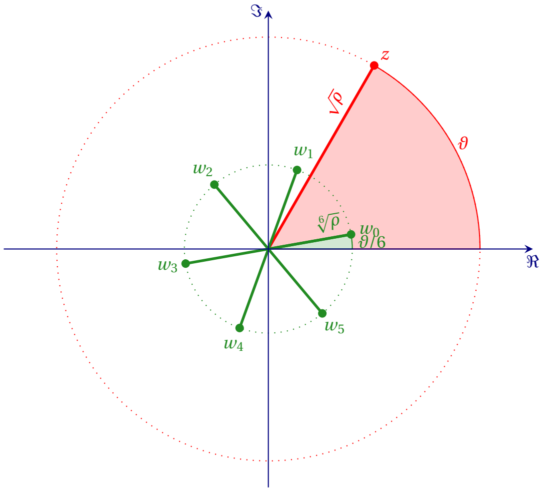
Nombres complexes	Forme algébrique	Module	Argument (modulo 2π) (complexe non nul)	Forme trigonométrique (complexe non nul)	Forme exponentielle (complexe non nul)
z	$x+iy$	$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos(\vartheta)=\frac{x}{\varrho}$, $\sin(\vartheta)=\frac{y}{\varrho}$	$\varrho\left(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\right)$	$\varrho e^{i\vartheta}$
z'	$x'+iy'$	$\varrho'=\sqrt{(x')^2+(y')^2}$	$\cos(\vartheta')=\frac{x'}{\varrho'}$, $\sin(\vartheta')=\frac{y'}{\varrho'}$	$\varrho'\left(\cos(\vartheta')+i\sin(\vartheta')\right)$	$\varrho' e^{i\vartheta'}$
$\bar{z}$	$x-iy$	ϱ	$-\vartheta$	$\varrho\left(\cos(\vartheta)-i\sin(\vartheta)\right)$	$\varrho e^{-i\vartheta}$
$z+z'$	$(x+x')+i(y+y')$				
zz'	$(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$	$\varrho\varrho'$	$\vartheta+\vartheta'$	$\varrho\varrho'\left(\cos(\vartheta+\vartheta')+i\sin(\vartheta+\vartheta')\right)$	$\varrho\varrho' e^{i\vartheta\vartheta'}$
z^n $(n\in\mathbb{N})$		ϱ^n	$n\vartheta$	$\varrho^n\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$	$\varrho^n e^{in\vartheta}$
$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}$ $(z\neq 0)$	$\frac{x-iy}{x^2+y^2}$	$\frac{1}{\varrho}$	$-\vartheta$	$\frac{1}{\varrho}\left(\cos(\vartheta)-i\sin(\vartheta)\right)$	$\frac{1}{\varrho}e^{-i\vartheta}$
$\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z'}}{\lvert z'\rvert^2}$ $(z'\neq 0)$	$\frac{(xx'+yy')+i(yx'-xy')}{(x')^2+(y')^2}$	$\frac{\varrho}{\varrho'}$	$\vartheta-\vartheta'$	$\frac{\varrho}{\varrho'}\left(\cos(\vartheta-\vartheta')-i\sin(\vartheta-\vartheta')\right)$	$\frac{\varrho}{\varrho'}e^{i(\vartheta-\vartheta')}$

10.4 Proposition (Racines n-ièmes)

Tout nombre complexe non nul $z=\varrho e^{i\vartheta}$ possède n racines n-ièmes

$$w_k=\sqrt[n]{\varrho}e^{i\frac{\vartheta+2k\pi}{n}} \text{ avec } k\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$





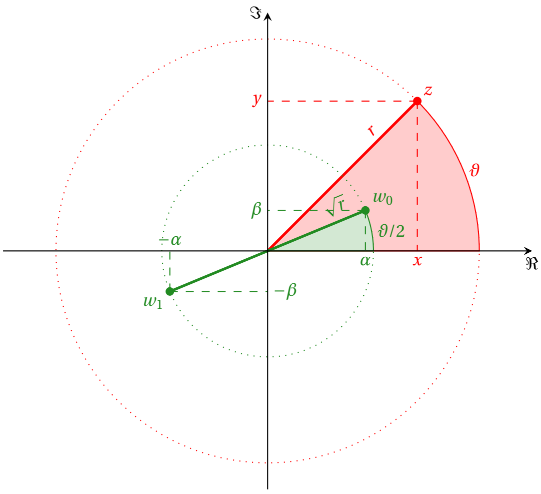
Astuce

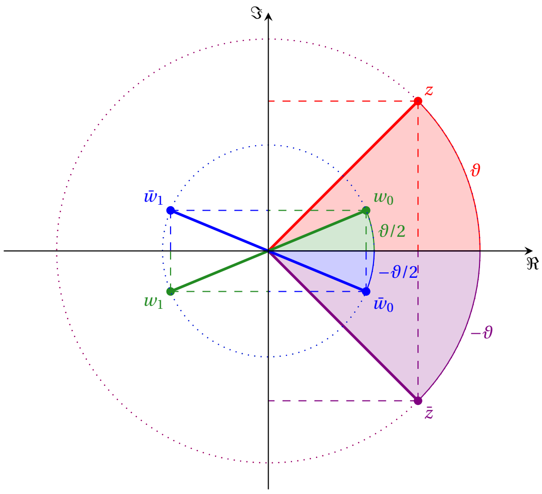
Soit $z=x+iy$ un nombre complexe. Pour déterminer les deux racines carrées $w_1=\alpha+i\beta$ et $w_2=-w_1$ de z il est parfois plus simple de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(x+iy)=(\alpha+i\beta)^2$; on obtient les relations

$$\alpha^2-\beta^2=x, \qquad 2\alpha\beta=y, \qquad \alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Autrement dit, en choisissant $\alpha\ge 0$,

$$\alpha=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}, \qquad \beta=\text{signe}(y)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}.$$





10.5 Proposition

L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, b et c appartiennent à $\mathbb{C}$, admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_2=\frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ et $-\delta$ sont les deux racines carrées de $\Delta=b^2-4ac$.

11 Primitives et Intégrales

11.1 Primitives

11.1 Définition (Primitive)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *intégrable* s'il existe une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. Une telle fonction F est une *primitive* (ou *intégrale indéfinie*) de f.

11.2 Proposition (Existence des primitives)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable.

11.3 Propriété

- ⋆ Si F est une primitive de f alors, pour tout réel c, la fonction $F + c$ est aussi une primitive de f.
- ⋆ Toute primitive de f est nécessairement de la forme $F + c$ pour une certaine constante c.

Notation L'ensemble des primitives d'une fonction f est noté $\int f$ ou encore $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque
Si $a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive qui s'annule en a.

11.4 Proposition (Linéarité)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int k f(x)\,\mathrm{d}x = k \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.1.1 Calcul des primitives

11.5 Définition (Intégration directe et composition)
Dans le tableau qui suit on sous-entend que l'intégration est réalisée sur un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de la fonction à intégrer.

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ pour } n \neq -1 & \displaystyle\implies \int [f(x)]^n f'(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ pour } n \neq -1 \\
\displaystyle\int \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + c & \displaystyle\implies \int \tfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c \\
\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c & \displaystyle\implies \int e^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c \\
\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = (\log_a e) a^x + c & \displaystyle\implies \int a^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = (\log_a e) a^{f(x)} + c
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)+c &&\Longrightarrow \int \sin(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(f(x))+c\\
&\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)+c &&\Longrightarrow \int \cos(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \sin(f(x))+c\\
&\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tan(x)+c &&\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,\mathrm{d}x = \tan(f(x))+c\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)+c = -\arccos(x)+c &&\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(f(x))+c = -\arccos(f(x)+c\\
&\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)+c &&\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(f(x))+c\\
&\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x)+c &&\Longrightarrow \int \cosh(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(f(x))+c\\
&\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x)+c &&\Longrightarrow \int \sinh(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(f(x))+c\\
&\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \tanh(x)+c &&\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))}\,\mathrm{d}x = \tanh(f(x))+c
\end{aligned}
$$

Remarque mnémotechnique : pour passer de la colonne de gauche à celle de droite il suffit de remplacer x par $f(x)$ et $\mathrm{d}x$ par $f'(x)\,\mathrm{d}x$.

11.6 Proposition (Intégration par changement de variable)
Soit F une primitive de f et g une fonction dérivable. Alors la fonction $f(g(x))g'(x)$ est intégrable et l'on a

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))+c.$$

Autrement dit, en posant $u=g(x)$ on obtient $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g'(x)$, soit encore $\mathrm{d}u=g'(x)\,\mathrm{d}x$ et donc

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+c.$$

11.7 Proposition (Intégration par parties)
Soit f et g deux fonctions dérivables. Alors

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXEMPLE
Calculer une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}$ avec les trois méthodes décrites ci-dessus.

Intégration directe :
comme $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x)=\ln(x)$ et comme $\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^2}{2}$ on conclut que $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2(x)}{2}+c$.

Intégration par changement de variable :
on pose $u=\ln(x)$ donc $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ et $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}+c = \frac{\ln^2(x)}{2}+c$.

Intégration par parties :
si on pose $g(x)=\ln(x)$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$ alors $g'(x)=\frac{1}{x}$ et $f(x)=\ln(x)$ donc $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2(x) - \int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, *i.e.* $2\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2(x)+c$ et finalement $\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2(x)}{2}+k$.

11.1.2 Fonctions rationnelles

11.8 Définition (Fonction rationnelle)
Soit $N(x)$ et $D(x)$ deux polynômes de degré respectivement ν et δ. Toute fonction du type $P(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ est dite *fraction rationnelle*.

- ⋆ Si $\nu \ge \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle impropre*.
- ⋆ Si $\nu < \delta$ on dit que P est une *fraction rationnelle propre*.

11.9 Propriété

Soit N et D deux polynômes de degré respectivement ν et δ et $P(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ une fraction rationnelle impropre (*i.e.* $\nu\ge\delta$). Alors, en effectuant la division euclidienne de N par D, on peut réécrire P comme

$$P(x)=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

où Q est un polynôme de degré $\nu-\delta$ et R un polynôme de degré au plus $\delta-1$, ainsi $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre.

On en déduit que

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x=\int Q(x)\,\mathrm{d}x+\int\frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégration de Q étant triviale, on conclut que la difficulté de l'intégration d'une fraction rationnelle se réduit à l'intégration d'une fraction rationnelle propre.

11.10 Propriété

Si $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction rationnelle propre et si D possède

- ⋆ k racines réelles a_k chacune de multiplicité m_k et
- ⋆ h couples de racines complexes conjuguées qui sont racines du polynôme $x^2+b_hx+d_h$ chacune de multiplicité n_h (ainsi $\Delta=b_h^2-4d_h<0$ pour tout h),

alors D s'écrit

$$D(x)=c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}\dots(x^2+b_hx+d_h)^{n_h}$$

et $\frac{R(x)}{D(x)}$ se décompose en *fractions simples* sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{D(x)}=&\frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2}+\dots+\frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}\\
&+\frac{A_{2,1}}{x-a_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2}+\dots+\frac{A_{2,m_1}}{(x-a_2)^{m_2}}\\
&+\dots+\\
&+\frac{A_{k,1}}{x-a_k}+\frac{A_{k,2}}{(x-a_k)^2}+\dots+\frac{A_{k,m_k}}{(x-a_k)^{m_k}}\\
&+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+d_1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+d_1)^2}+\dots+\frac{B_{1,n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+d_1)^{n_1}}\\
&+\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+d_2}+\frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+d_2)^2}+\dots+\frac{B_{2,n_2}x+C_{2,n_2}}{(x^2+b_2x+d_2)^{n_2}}\\
&+\dots+\\
&+\frac{B_{h,1}x+C_{h,1}}{x^2+b_hx+d_h}+\frac{B_{h,2}x+C_{h,2}}{(x^2+b_hx+d_h)^2}+\dots+\frac{B_{h,n_h}x+C_{h,n_h}}{(x^2+b_hx+d_h)^{n_k}}\end{aligned}$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes.

Pour intégrer une fraction rationnelle il suffit alors de connaître les primitives des quatre fractions simples suivantes :

$$f_1(x)=\frac{A}{x-a},\qquad f_2(x)=\frac{A}{(x-a)^n},\qquad f_3(x)=\frac{Bx+C}{x^2+bx+d},\qquad f_4(x)=\frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}.$$

11.11 Propriété (Intégration des fractions simples)

Supposons

- ⋆ $A,B,C,a,b,d\in\mathbb{R}$
- ⋆ $n\in\mathbb{N}$, $n>1$
- ⋆ $\Delta=b^2-4d<0$

alors

1. la primitive de $f_1(x)=\frac{A}{x-a}$ est
$$\int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+\text{cnst};$$

2. la primitive de $f_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$ est
$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \text{cnst};$$

3. la primitive de $f_3(x) = \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}$ est
$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(d-\frac{b^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{d-\frac{b^2}{2}}}\int \frac{B\left(\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}t-\frac{b}{2}\right)+C}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{B}{2}\ln|1+t^2| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan(t)+\text{cnst} \\
&= \frac{B}{2}\ln\left|1+\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{d-\frac{b^2}{4}}\right| + \frac{C-B\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{d-\frac{b^2}{4}}}\right)+\text{cnst};
\end{aligned}$$
$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$

4. la primitive de $f_4(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}$ est
$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \left(C-\frac{Bb}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x}_{I_2}$$
avec
$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+d)^{n-1}} \\
I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+bx+d)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(d-\frac{b^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t}_{I_n}
\end{aligned}$$
$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,t \qquad \mathrm{d}x = \sqrt{d-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}t$$
et l'intégrale I_n se calcule par récurrence
$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}.$$

EXEMPLE

1. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+5}$. Comme $\Delta = 4^2-4\times 5 < 0$ il s'agit d'une intégrale du type $\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$. Le dénominateur se décompose comme $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$ et l'intégrale s'écrit
$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x-3}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t+2)-3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan(t) + \text{cnst} = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - \arctan(x-2) + \text{cnst}
\end{aligned}$$

2. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-4x}$. On doit d'abord la décomposer en fractions simples; comme $x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ la fonction admet la décomposition
$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2}$$

Pour calculer les constantes A_i on peut utiliser le principe d'identité des polynômes :

$$\frac{3x+1}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A_1(x-2)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \iff \begin{cases} -4A_1 = 1 \\ 7 = 8A_2 \\ -5 = 8A_3 \end{cases}$$

ainsi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{7}{8}\int \frac{A_2}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{5}{8}\int \frac{A_3}{x+2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{7}{8}\ln|x-2| - \frac{5}{8}\ln|x+2| + c.$$

3. On veut intégrer la fraction rationnelle impropre $f(x) = \frac{3x^3+2x-5}{3x^2-5x-2}$. On effectue d'abord la division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & & +2x & -5 & 3x^2-5x-2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +5x^2 & +2x & & x+\frac{5}{3} \\ \cline{1-4} & 5x^2 & +4x & -5 & \\ & -5x^2 & +\frac{25}{3}x & +\frac{10}{3} & \\ \cline{2-4} & & \frac{37}{3}x & -\frac{5}{3} & \end{array}$$

ainsi $f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$. Maintenant on décompose le terme $\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2}$ en fractions simples : on a $3x^2-5x-2 = (x+\frac{1}{3})(x-2)$ et on doit chercher les deux constantes A_1 et A_2 telles que

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2} = \frac{A_1}{x+\frac{1}{3}} + \frac{A_2}{x-2}$$

En utilisant le principe d'identité des polynômes on a

$$\frac{\frac{37}{3}x-\frac{5}{3}}{3x^2-5x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+\frac{1}{3})}{3x^2-5x-2} \iff \begin{cases} \frac{69}{3} = \frac{7}{3}A_2 \\ -\frac{52}{9} = -\frac{7}{3}A_1 \end{cases}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{5}{3} + \frac{52/21}{x+\frac{1}{3}} + \frac{69/7}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{52}{21}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right| + \frac{69}{7}\ln|x-2| + c.$$

4. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3}$. On doit d'abord la décomposer en fraction simples ; comme $x^3-x^2-5x-3 = (x-3)(x+1)^2$ la fonction f admet la décomposition

$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{x-3} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{x-4}{x^3-x^2-5x-3} = \frac{A_{1,1}(x+1)^2 + A_{2,1}(x-3)(x+1) + A_{2,2}(x-3)}{x^3-x^2-5x-3} \iff \begin{cases} A_{1,1} = -1/16 \\ A_{2,1} = 1/16 \\ A_{2,2} = 5/4 \end{cases}$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{-1/16}{x-3} + \frac{1/16}{x+1} + \frac{5/4}{(x+1)^2}$$

et

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\ln|x-3| + \frac{1}{16}\ln|x+1| + \frac{5}{4(x+1)} + c.$$

5. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}$. Comme $\Delta = 4-20 < 0$, la fonction f se décompose comme

$$f(x) = \frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2-2x+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2-2x+5)^2}$$
$$=\frac{B_1x^3+(C_1-2B_1)x^2+(5B_1-2C_1+B_2)x+5C_1+C_2}{(x^2-2x+5)^2}\iff\begin{cases}B_1=0\\C_1-2B_1=1\\5B_1-2C_1+B_2=0\\5C_1+C_2=2\end{cases}$$

On obtient alors que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2}.$$

- ⋆ On calcule I_1 :

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x &\quad x-1=2t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &\quad \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan(t)+c=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c;\end{aligned}$$

- ⋆ On calcule I_2 :

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\int\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\int\frac{1}{((x-1)^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{16}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan(t)\right)\\&=-\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)+c=-\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)}-\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{x+7}{8(x^2-2x+5)}+c.$$

6. On veut intégrer la fraction rationnelle propre $f(x)=\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}$ qui se décompose comme

$$f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_1}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

On détermine les constantes en utilisant le principe d'identité des polynômes

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}\iff\begin{cases}A_3=1\\A_2=0\\A_1=-2\\C_1+C_2=0\\B_1+B_2=3\\B_1=2\\C_1=0\end{cases}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=-2\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+\ln|x^2+1|-\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\&=-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+\ln|x^2+1|-\frac{2x}{(x^2+1)}+c.\end{aligned}$$

11.2 Intégrales définies

11.12 Théorème (fondamentale du calcul différentiel et intégral)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors

1. la dérivée de $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est égale à $f(x)$;
2. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

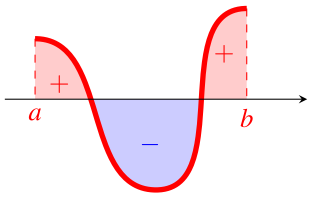
L'expression $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(x)]_a^b$ ou encore $F(x)|_a^b$.

Remarque

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ alors $g(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

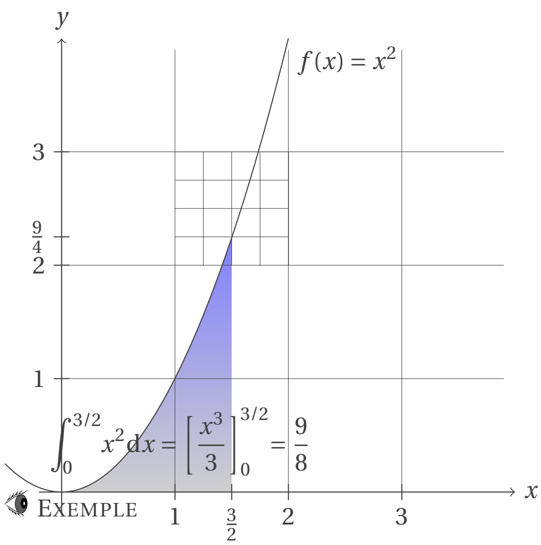
11.13 Définition (Interprétation géométrique)

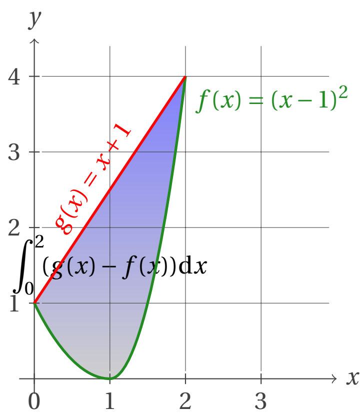
L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, compté positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement pour la partie située en dessous.



11.14 Définition (Calcul d'aires)

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a;b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$. L'aire de la surface comprise entre les graphes de f et g entre a et b est définie par l'intégrale $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.





11.15 Propriété

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, f et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $c \in [a;b]$.

Relation d'ordre : si $f(x) \leq g(x)$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Nullité : si f est continue sur $[a;b]$ et $f(x) \geq 0$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $f(x) \equiv 0$.

Parité : si f est paire sur $[-a;a]$ avec $a \geq 0$ alors $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$; si f est impaire sur $[-a;a]$ avec $a \geq 0$ alors $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Valeur absolue : $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Moyenne : si $m \leq f(x) \leq M$ pour toute $x \in [a;b]$ alors $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leq M$. Le nombre $\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ est la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

12 Équations différentielles ordinaires (EDO)

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).
Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(p)}(t)) = g(t)$$

- ⋆ dont les inconnues sont une **fonction** $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et son **intervalle de définition** I
- ⋆ dans laquelle cohabitent à la fois y et ses dérivées y', y'', $\dots$, $y^{(p)}$ (p est appelé l'**ordre** de l'équation).

Si la fonction g, appelée «second membre» de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est **homogène**.
Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = -y(t)$ signifie chercher toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y\colon I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y = f(t) \end{aligned}$$

telles que $f'(t) = -f(t)$ pour tout $t \in I$. On peut vérifier que $y(t) = ce^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (où c est constante réelle quelconque) est une solution de l'EDO (en particulier, pour $c = 0$ on trouve la solution nulle).

12.1 Définition (Solution générale, solution particulière)
Par le terme *solution générale* d'une EDO on désigne un représentant de l'ensemble des solutions. L'une des solutions de l'EDO sera appelée *solution particulière*. On appelle *courbes intégrales* d'une EDO les courbes représentatives des solutions de l'équation.

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir, entre les différentes solutions, celle qui décrit le problème physique, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple la valeur prise par la solution et/ou éventuellement ses dérivées en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

Exemple (Dynamique des populations)
Considérons une population de bactéries dans un environnement confiné dans lequel pas plus de B individus ne peuvent coexister. On suppose qu'au temps initial le nombre d'individus est égal à $y_0 \ll B$ et que le taux de croissance des bactéries est une constante positive C. Alors, la vitesse de croissance de la population est proportionnelle au nombre de bactéries, sous la contrainte que ce nombre ne peut dépasser B. Ceci se traduit par l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = Cy(t)\left(1 - \frac{y(t)}{B}\right) \tag{12.1}$$

dont la solution $y = y(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t.

L'équation (12.1) admet la famille de solutions

$$y(t) = B\frac{e^{Ct+K}}{1+e^{Ct+K}}$$

K étant une constante arbitraire. Si on impose la condition $y(0) = 1$, on sélectionne l'unique solution correspondant à la valeur $K = -\ln(B-1)$.

EXEMPLE (MODÈLES DE CROISSANCE)

Hypothèse Malthusienne : à chaque instant, la croissance de la population est proportionnelle à son effectif :

$$q'(t) = \alpha q(t).$$

La désintégration atomique est un cas de décroissance régi par la même équation mais avec $\alpha < 0$.

Hypothèse de Verhulst : à chaque instant, la croissance de la population est «proportionnelle» à son effectif, mais inhibée par des ressources limitées :

$$q'(t) = \alpha q(t)(m - q(t)).$$

Il est clair que m sera un point d'équilibre, car la dérivée de q est nulle quand $q = m$.

Hypothèse de Gompertz : à chaque instant, la croissance de la population est «proportionnelle» à son effectif, mais inhibée par des ressources limitées :

$$q'(t) = \alpha q(t)(\ln(k) - \ln(q(t)).$$

Il est clair que k sera un point d'équilibre, car la dérivée de q est nulle quand $q = k$.

12.2 Définition (Condition initiale)

Soit une EDO d'ordre p. Une condition initiale (CI) est un ensemble de relations du type $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$, ..., $y^{(p-1)}(t_0) = y_0^{(p-1)}$ qui imposent en t_0 les valeurs y_0, y'_0, ..., $y_0^{(p-1)}$ respectivement de la fonction inconnue et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$.

En pratique, se donner une CI revient à se donner le point (t_0, y_0) par lequel doit passer le graphe de la fonction solution et la valeur de ses dérivées en ce même point.

Le couple EDO-CI porte le nom de *problème de* CAUCHY ou de *problème aux valeurs initiales* :

12.3 Définition (Problème de CAUCHY)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, t_0 un point de I, $\varphi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée continue par rapport aux deux variables et y' la dérivée de y par rapport à t. On appelle *problème de* CAUCHY le problème

trouver une fonction réelle $y \in \mathscr{C}^1(I)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = \varphi(t, y(t)), & \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{12.2}$$

avec y_0 une valeur donnée appelée *donnée initiale*.

Si φ ne dépend pas explicitement de t (*i.e.* si $\varphi(t, y(t)) = \varphi(y(t))$), l'EDO est dite *autonome*.

L'essentiel de notre analyse concernera le cas où l'on a qu'une seule EDO, c'est-à-dire le cas scalaire. L'extension aux systèmes sera faite au prochaine semestre.

Résoudre un problème de CAUCHY, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont l'équation et qui vérifient la condition initiale. On aura donc des questions naturelles telles

- ⋆ trouver toutes les fonctions solutions de l'EDO,
- ⋆ parmi toutes ces fonctions, choisir celles qui vérifient la CI (existence ? unicité ?),
- ⋆ parmi toutes ces fonctions, étudier le domaine de définition (pour chaque fonction trouvée, quel est le plus grande domaine de définition qui contient le point t_0 ?)

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $\mathbb{R}$ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)

On se donne $\varphi(t, y(t)) = 3t - 3y(t)$ et $y_0 = \alpha$ (un nombre quelconque). On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = 3t - 3y(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Sa solution, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par $y(t) = (\alpha + 1/3)e^{-3t} + t - 1/3$. En effet on a bien

$$y(0) = (\alpha + 1/3)e^0 + 0 - 1/3 = \alpha, \qquad y'(t) = -3(\alpha + 1/3)e^{-3t} + 1 = -3(\alpha + 1/3)e^{-3t} + 1 - 3t + 3t = -3y(t) + 3t.$$

Cet exemple montre le cas où il existe une et une seule solution du problème de CAUCHY définie sur $\mathbb{R}$. Les choses ne se passent pas toujours si bien. Les exemples ci-dessous montrent que l'étude mathématique de l'existence et de l'unicité des solutions d'un problème de CAUCHY peut être une affaire délicate.

EXEMPLE (NON UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)
On se donne $\varphi(t, y(t)) = \sqrt[3]{y(t)}$ et $y_0 = 0$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & \forall t > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On vérifie que les fonctions $y_1(t) = 0$ et $y_{2,3}(t) = \pm\sqrt{8t^3/27}$, pour tout $t \geq 0$, sont toutes les trois solution du problème de CAUCHY donné. Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas nécessairement de solution unique*.

EXEMPLE (EXISTENCE ET UNICITÉ SUR $I \subset \mathbb{R}$ (MAIS NON EXISTENCE SUR $\mathbb{R}$) DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY)
On se donne $\varphi(t, y(t)) = (y(t))^3$ et $y_0 = 1$. On cherche une fonction $y\colon t \in \mathbb{R}^+ \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^3, & \forall t > 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On vérifie que la solution y est donnée par $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$ qui n'est définie que pour $t \in [0;1/2[$. Cet exemple montre qu'*un problème de* CAUCHY *n'a pas toujours une solution pour tout* $t \in [0;+\infty[$ puisqu'ici la solution explose lorsque t tend vars la valeur $1/2$ (en effet, nous avons $\lim\limits_{t\to(1/2)^-} y(t) = +\infty$) : le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = 1/2$. On parle d'*explosion de la solution en temps fini* ou encore de *barrière*.

On verra que ceci est un phénomène général : pour une solution d'une EDO, la seule façon de ne pas être définie sur $\mathbb{R}$ est d'avoir un asymptote verticale.
De façon générale, lorsqu'on se donne une équation différentielle et une condition initiale $y(t_0) = y_0$, on cherche un intervalle I, contenant t_0, sur lequel une solution existe, et qui soit «le plus grand possible» : il n'existe pas d'intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle ait une solution. Cet intervalle s'appelle *intervalle de vie* de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus grand possible s'appelle *solution maximale*.

12.4 Définition (Solution maximale)
On se donne une équation différentielle $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ avec une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Une *solution maximale* pour ce problème est une fonction $y = f(t)$, définie sur un intervalle I appelé intervalle de vie, telle que

- ⋆ f est solution de l'équation différentielle et vérifie la condition initiale ;
- ⋆ il n'existe pas de solution $\tilde{f}$ de la même équation, vérifiant la même condition initiale et définie sur un intervalle J contenant I et plus grand que I.

Il y a un résultat qui garantit que, sous certaines hypothèses très générales, deux graphes de fonctions qui sont des solutions de la même EDO ne se rencontrent jamais. Le théorème garantit aussi l'existence des solutions. Dans ce cours, nous nous contentons de rappeler un résultat d'existence et d'unicité global, au sens où on peut intégrer le problème de CAUCHY jusqu'à $t = \infty$, pour des EDO linéaires.

12.5 Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz — cas linéaire)
Soient a et g deux fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et considérons l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x).$$

Si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$.

12.6 Théorème
Soit $y = f(t)$ une solution maximale définie sur un intervalle de vie $I =]a;b[$. Si $b \neq +\infty$ alors $\lim\limits_{t\to b-} y(t) = \infty$, *i.e.* le graphe de la solution a une asymptote verticale en $t = b$. Même chose si $a \neq -\infty$.

On utilise souvent le théorème sous forme contraposée : si les solutions ne peuvent pas «exploser», alors elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

Remarque
D'un point de vue pratique, cet énoncé nous aidera à faire des dessins, en garantissant que les graphes des solutions ne se rencontrent jamais. On peut en déduire quelques remarques plus subtiles :

- ⋆ si l'EDO admet comme solution la solution nulle mais $y_0 \neq 0$, alors la solution du problème de CAUCHY est du signe de y_0 pour tout $t \in I$;
- ⋆ si l'EDO admet deux solutions constantes $y(t) = \kappa_1$ et $y(t) = \kappa_2$ pour tout $t \in I$ et $y_0 \in]\kappa_1; \kappa_2[$, alors la solution du problème de CAUCHY vérifie $y(t) \in]\kappa_1; \kappa_2[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

12.1 Équations différentielles du premier ordre

Nous allons voir trois formules qui permettent d'écrire la solution générale de trois types d'équations différentielles du premier ordre.

12.1.1 Type "variables séparables"

Lorsque l'équation est de la forme
$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$
où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a
$$F(y(x)) = G(x) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R},$$
et si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en déduit
$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C),$$
relation qui donne toutes les solutions de l'équation. Cette solution générale dépend de la constante d'intégration C.

Astuce (Astuce mnémotechnique)
En pratique, étant donné que $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, on peut écrire l'équation $f(y(x))y'(x) = g(x)$ sous la forme
$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x,$$
puis intégrer formellement les deux membres
$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
pour obtenir $F(y) = G(x) + C$ et exprimer y en fonction de x.

EXEMPLE
On veut résoudre l'équation différentielle $y'(x) = xy(x)$. Il s'agit d'une EDO du premier ordre à variables séparables :

- ⋆ *Recherche des solutions constantes.* Si $y(x) = A$ pour tout x alors $y'(x) = 0$ pour tout x et l'EDO devient $0 = xA$ pour tout x. Par conséquent $A = 0$: la fonction $y(x) = 0$ pour tout x est l'unique solution constante de l'EDO.
- ⋆ *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $y(x) = 0$ pour tout x étant solution, toute autre solution $x \mapsto y(x)$ sera donc non nulle. On peut alors diviser l'EDO par y et procéder formellement comme suit :
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, toute solution non nulle est de la forme
$$y(x) = De^{x^2/2} \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}^*.$$

EXEMPLE (LOI DE NEWTON ☕)
Considérons une tasse de café à la température de 75°C dans une salle à 25°C. Après 5 minutes le café est à 50°C. Si on suppose que la vitesse de refroidissement du café est proportionnelle à la différence des températures (*i.e.* que la

température du café suit la loi de NEWTON), cela signifie qu'il existe une constante $K<0$ telle que la température vérifie l'EDO du premier ordre

$$T'(t)=K(T(t)-25)$$

avec la CI

$$T(5)=50,$$

ayant convenu qu'une unité de temps correspond à une minute et la température est mesuré en degré Celsius.

1. On commence par calculer toutes les solutions de l'EDO. Étant une équation différentielle du premier ordre, la famille de solutions dépendra d'une constante qu'on fixera en utilisant la CI. Il s'agit d'une EDO à variables séparables.
   - *Recherche des solutions constantes.* Si $T(t)=A$ pour tout $t>0$ alors $T'(t)=0$ pour tout $t>0$ et l'EDO devient $0=K(A-25)$ pour tout $t>0$. Par conséquent $A=25$: la fonction $T(t)=25$ pour tout $t>0$ est l'unique solution constante de l'EDO.
   - *Recherche des solutions non constantes.* La fonction $T(x)=25$ pour tout $t>0$ étant solution, toute autre solution $t\mapsto T(t)$ sera donc soit strictement supérieure à 25 soit strictement inférieure à 25. On peut alors diviser l'EDO par $T(t)-25$ et procéder formellement comme suit :

   $$T'(t)=K(T(t)-25)\implies\frac{T'(t)}{T(t)-25}=K\implies\frac{\mathrm{d}T}{T-25}=K\,\mathrm{d}t\implies\int\frac{1}{T-25}\,\mathrm{d}T=\int K\,\mathrm{d}t$$
   $$\implies\ln|T-25|=Kt+c\implies T-25=De^{Kt}\implies T(t)=25+De^{Kt}$$

   avec $D\in\mathbb{R}^*$.
2. La valeur numérique de la constante d'intégration D est obtenue grâce à la CI :

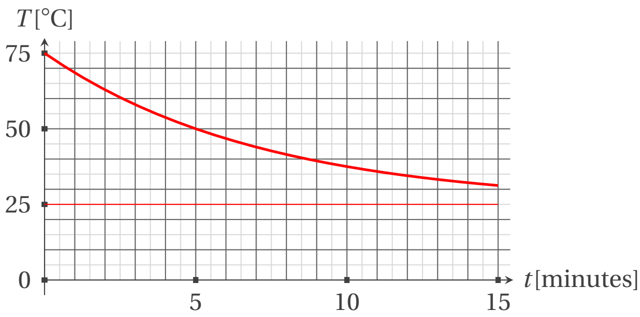
$$75=T(0)=25+De^{K\cdot0}\qquad\implies\qquad D=50\qquad\implies\qquad T(t)=25+50e^{Kt}.$$

3. Il ne reste qu'à établir la valeur numérique de la constante de refroidissement K grâce à l'«indice» :

$$50=T(5)=25+50e^{Kt}\qquad\implies\qquad K=-\frac{\ln(2)}{5}\qquad\implies\qquad T(t)=25+50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}$$

On peut donc conclure que la température du café évolue selon la fonction

$$T(t)=25+50e^{-\frac{\ln(2)}{5}t}.$$



12.1.2 Type "linéaire"

Elles sont de la forme

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$$

où a, b et g sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J\subset I$ tel que la fonction a ne s'annule pas sur J.
Pour $x\in\mathscr{D}_b\cap\mathscr{D}_g\cap\{\,x\in\mathscr{D}_a\mid a(x)\neq0\,\}$, toute solution $y(x)$ de cette EDO peut être écrite soit comme somme de deux fonctions soit comme produit de deux fonctions :

$$y(x)=\underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)}+\underbrace{K(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}=\underbrace{(C+K(x))}_{u(x,C)}\underbrace{e^{-A(x)}}_{v(x)}$$

avec

★ $A(x)$ une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$,

★ $K(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$.

On peut montrer que

★ y_H est la solution générale de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$ (qui est à variables séparables) ;

★ y_P est une solution particulière [1] de l'EDO $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$;

★ u est la solution générale de l'EDO $a(x)u'(x)v(x)=g(x)$;

★ v est une solution particulière non nulle de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire de l'EDO $a(x)v'(x)+b(x)v(x)=0$.

EXEMPLE

Considérons l'EDO

$$y'(x)-y(x)=x.$$

On a $a(x)=1$, $b(x)=-1$ et $g(x)=e^x$, donc pour $x\in\mathbb{R}$ on a

★ $A(x)=\int -1\,\mathrm{d}x=-x$,

★ $K(x)=\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x=-(1+x)e^{-x}$,

ce qui donne

$$y(x)=\underbrace{Ce^x}_{y_H}\underbrace{-(1+x)}_{y_P}=\underbrace{\left(C-(1+x)e^{-x}\right)}_{u}\underbrace{e^x}_{v}.$$

12.1.3 Type "Bernoulli"

Elles sont du premier ordre et de la forme

$$u(x)y'(x)+v(x)y(x)=w(x)(y(x))^\alpha,\qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$$

où u, v et w sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J\subset I$ tel que la fonction u ne s'annule pas sur J et on définit une nouvelle fonction $x\mapsto z(x)=(y(x))^{1-\alpha}$. L'EDO initiale est alors équivalente à l'EDO linéaire du premier ordre suivante : [2]

$$\underbrace{u(x)}_{a(x)}z'(x)+\underbrace{(1-\alpha)v(x)}_{b(x)}z(x)=\underbrace{(1-\alpha)w(x)}_{g(x)}.$$

Par conséquent, pour $x\in\mathscr{D}_v\cap\mathscr{D}_w\cap\{x\in\mathscr{D}_u \mid u(x)\neq 0\}$, toute solution y s'écrit comme $y(x)=[z(x)]^{1/(1-\alpha)}$ avec

★ $z(x)=\underbrace{Ce^{-A(x)}}_{y_H(x)}+\underbrace{K(x)e^{-A(x)}}_{y_P(x)}=\underbrace{(C+K(x))}_{u(x,C)}\underbrace{e^{-A(x)}}_{v(x)}$,

★ $A(x)$ une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$ *i.e.* une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{v}{u}$,

★ $K(x)$ une primitive de $\dfrac{g(x)}{a(x)}e^{A(x)}$ *i.e.* une primitive de $(1-\alpha)\dfrac{w}{u}e^{A(x)}$.

EXEMPLE

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y'(x)+\frac{1}{2}y(x)=\frac{1}{2}(x-1)y^3(x).$$

Il s'agit d'une équation différentielle de BERNOULLI. Comme $u(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on cherche sa solution générale sur $\mathbb{R}$.

★ $A(x)=(1-\alpha)\displaystyle\int\frac{v(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{1/2}{1}\,\mathrm{d}x=-x$,

1. Cette solution particulière peut être une solution «évidente». Le résultat suivant peut alors être utile dans la quête d'une solution évidente : Principe de superposition : soient a et b deux réels et $g_1,g_2,\dots,g_n$ n des applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'EDO $ay'(x)+by(x)=g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de l'EDO $ay'(x)+by(x)=\sum_{k=1}^n g_k(x)$.
Si on ne trouve pas de solution particulière on peut en chercher une par la méthode de LAGRANGE ou de variation de la constante. Si $y_1(x)$ est une solution non nulle de l'EDO homogène, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ telle que $y(x)=K(x)y_1(x)$ soit solution de notre EDO. On calcule alors $y'(x)$ et on reporte $y'(x)$ et $y(x)$ dans notre EDO. On observe que $K(x)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification. Il ne reste que $K'(x)$, ce qui permet de calculer $K(x)$ et donc $y_P(x)$.
2. Formellement $z=y^{1-\alpha}$ implique d'une part $y=zy^\alpha$ et d'autre part $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ et donc $y'=(1-\alpha)z'y^\alpha$.

- $K(x) = (1-\alpha)\int \frac{w(x)}{u(x)} e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{(x-1)/2}{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int (1-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = xe^{-x}$,
- $z(x) = (C + K(x))\,e^{-A(x)} = (C + xe^{-x})e^{x} = Ce^{x} + x$,

et on conclut que la solution générale de l'EDO de BERNOULLI assignée est

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x + Ce^{x}}}.$$

Notons que y n'est définie que si $x + Ce^{x} > 0$.

12.2 Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$$

où a, b et c sont des constantes données ($a \neq 0$) et g est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Toute solution y d'un EDO linéaire du second ordre à coefficients constants dépend de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 et est de la forme $y_H(x) + y_P(x)$ où y_P est une solution particulière de l'EDO et y_H est la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$). On doit donc résoudre deux problèmes : chercher d'abord la solution générale de l'équation homogène et ensuite une solution particulière de l'équation complète.

- *Résolution de l'équation homogène associée.*
  On introduit le polynôme caractéristique $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, alors
  - si $\Delta > 0$ on a
  $$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$
  - si $\Delta = 0$ on a
  $$y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{b}{2a};$$
  - si $\Delta < 0$ on a
  $$y_H(x) = e^{\sigma x}(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \sigma = -\frac{b}{2a}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a},$$
  qu'en physique souvent on réécrit comme
  $$y_H(x, A, \varphi) = Ae^{\sigma x}\cos(\omega x - \varphi), \qquad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \cos(\varphi) = \frac{C_1}{A}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{C_2}{A}.$$
- *Recherche d'une solution particulière.*
  Cette solution particulière peut être une solution «évidente». Le Principe de superposition peut alors être utile dans la quête d'une solution évidente : soient a, b, et c trois réels et $g_1, g_2, \dots, g_n$ n applications continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si y_k est une solution particulière de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_k(x)$ alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de l'EDO $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$.
  Si on n'a pas trouvé de solution particulière évidente on peut en chercher une comme suit : si $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\cos(\theta x)$ ou $g(x) = p_n(x)e^{\mu x}\sin(\theta x)$ alors
  $$y_P(x) = x^m e^{\mu x}(q_{1,n}(x)\cos(\theta x) + q_{2,n}(x)\sin(\theta x))$$
  où p_n, $q_{1,n}$ et $q_{2,n}$ sont des polynômes de degré n et on a
  - si $\Delta > 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$ alors $m = 1$;
  - si $\Delta = 0$ et $\theta = 0$ et $\mu = \lambda$ alors $m = 2$;
  - si $\Delta < 0$ et $\theta = \omega$ et $\mu = \sigma$ alors $m = 1$;
  - sinon $m = 0$.

L'intégrale générale est donc
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x).$$

EXEMPLE
Soit m un paramètre qui dépend du polynôme caractéristique.

* Si $g(x) = \cos(5x)$ ou $g(x) = \sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 0$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(A\cos(5x) + B\sin(5x))$.
* Si $g(x) = e^{2x}\sin(5x)$ alors $n = 0$, $\mu = 2$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{2x}(A\cos(5x) + B\sin(5x))$.
* Si $g(x) = x\cos(5x)$ ou $g(x) = x\sin(5x)$ alors $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 5$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m((Ax+B)\cos(5x) + (Cx+D)\sin(5x))$.
* Si $g(x) = x$ alors $n = 1$, $\mu = 0$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m(Ax+B)$.
* Si $g(x) = xe^{3x}$ alors $n = 1$, $\mu = 3$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $y_P(x) = x^m e^{3x}(Ax+B)$.
* Si $g(x) = e^{2x}$ alors $n = 0$, $\mu = 2$ et $\theta = 0$ donc on cherchera y_P sous la forme $Ax^m e^{2x}$.

EXEMPLE
On veut calculer toutes les solutions de l'EDO
$$y''(x) + y(x) = 3\cos(x).$$
Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants.

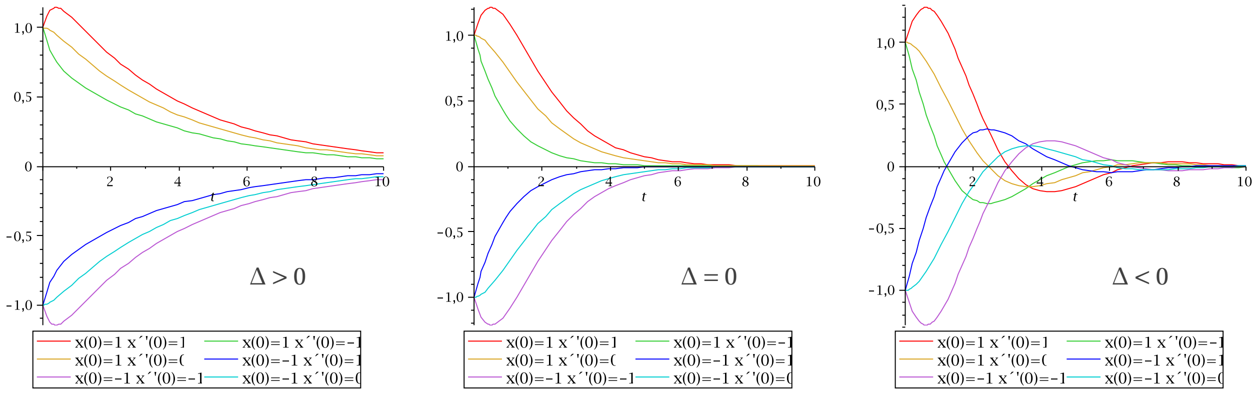
* *Recherche de l'intégrale générale de l'équation homogène.*
  L'équation caractéristique $\lambda^2 + 1 = 0$ a discriminant $\Delta = -4$. On a $\sigma = 0$ et $\omega = 1$. Donc l'intégrale générale de l'équation homogène est
  $$y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
* *Recherche d'un intégrale particulier de l'équation complète.*
  Puisque $\mu = \sigma = 0$, on cherche l'intégrale particulier sous la forme
  $$y_P(x) = x\big(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)\big).$$
  On a alors
  $$\begin{aligned} y_P'(x) &= (\alpha + \beta x)\cos(x) + (\beta - \alpha x)\sin(x), \\ y_P''(x) &= (2\beta - \alpha x)\cos(x) - (2\alpha + \beta x)\sin(x). \end{aligned}$$
  On les remplace dans l'équation :
  $$y_P''(x) + y_P(x) = 3\cos(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (2\beta - \alpha x)\cos(x) - (2\alpha + \beta x)\sin(x) + x(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) = 3\cos(x)$$
  d'où $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{3}{2}$.

L'intégrale générale de l'EDO assignée est donc
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{3}{2}x\cos(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI)
Les oscillateurs harmoniques décrivent des comportements oscillants qu'ils soient dus à une nature intrinsèquement oscillatoire (comme le mouvement d'une masse reliée à un ressort) ou à un mouvement au voisinage d'une position d'équilibre (comme dans le modèle d'une liaison moléculaire). Dans les deux cas, on utilise le même modèle de l'oscillateur harmonique. De plus, on s'intéresse ici au cas où on a un frottement fluide proportionnel à la vitesse.
Éloigné d'une distance x de sa position de repos ($x = 0$), le mouvement en fonction du temps t est décrit par l'équation différentielle
$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t)$$
où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort et $\gamma > 0$ le coefficient de frottement. On cherche la fonction $t \mapsto x$ solution de cette EDO.

On réécrit l'équation sous la forme
$$x''(t)+2\delta x'(t)+\eta^2 x(t)=0$$
où on a noté
$$\delta=\frac{\gamma}{2m}>0 \qquad \text{et} \qquad \eta^2=\frac{k}{m}>0.$$
Le polynôme caractéristique associé à cette équation est
$$p(\lambda)=\lambda^2+2\delta\lambda+\eta^2$$
qui a discriminant
$$\Delta=4\delta^2-4\eta^2$$
et racines
$$\lambda_1=\frac{-2\delta-\sqrt{\Delta}}{2}=-\delta-\sqrt{\delta^2-\eta^2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2=\frac{-2\delta+\sqrt{\Delta}}{2}=-\delta+\sqrt{\delta^2-\eta^2}.$$
Selon le signe de Δ on a trois comportements différentes :

- ⋆ Si $\Delta>0$, c'est-à-dire si $\delta>\eta$ alors λ_1 et λ_2 sont réels et différents et la solution de l'EDO est de la forme
$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$
Comme $\lambda_1<\lambda_2<0$ (car $\sqrt{\delta^2-\eta^2}<\delta$), x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t\to+\infty$. Physiquement cela signifie que si la constante de frottement est grande comparée à la constate d'élasticité du ressort alors la masse n'oscille pas mais va être tirée vers la position d'équilibre.
- ⋆ Si $\Delta=0$, c'est-à-dire si $\delta=\eta$ alors $\lambda_1=\lambda_2=-\delta$ et la solution de l'EDO est de la forme
$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}, \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$
Dans ce cas aussi la solution x tend vers 0 de façon exponentielle quand $t\to+\infty$.
- ⋆ Si $\Delta<0$, c'est-à-dire si $\delta<\eta$ alors λ_1 et λ_2 sont deux nombres complexes conjugués et la solution de l'EDO est de la forme
$$x(t)=C_1e^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t)+C_2e^{-\delta t}\sin(\sqrt{-\Delta}t), \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$
qui se réécrit $x(t)=re^{-\delta t}\cos(\sqrt{-\Delta}t+\varphi)$ avec $r=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\varphi=\arctan(-C_1/C_2)$. Dans cette dernière expression on voit le caractère oscillatoire du mouvement. Dans ce cas le frottement ne suffit pas pour empêcher l'oscillation mais son effet se traduit par une diminution exponentielle de l'ampleur de l'oscillation : le graphe de $x(t)$ est compris entre les courbes d'équation $\pm re^{-\delta t}$.



EXEMPLE (OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ : CAS D'UNE EXCITATION SINUSOÏDALE)

On s'intéresse à l'influence d'une excitation harmonique sur un oscillateur. Outre le fait que ce type d'excitation est important pour lui-même (vibrations d'une machine tournante, mouvement d'un électron dans un champ magnétique...), cette étude revêt un intérêt théorique capital. En effet, la fonction qui décrit cette force excitatrice peut s'écrire comme une superposition de fonctions sinusoïdales (discrète ou continue selon que la force est périodique ou non). Le fait que l'équation différentielle soit linéaire, autrement dit que le principe de superposition puisse s'appliquer, permet d'écrire la solution pour une force quelconque comme la somme des solutions obtenues pour chaque terme de la décomposition. Il est alors nécessaire de déterminer la réponse à chaque terme de la décomposition, à savoir à une excitation sinusoïdale. Ceci donne une importance considérable à l'étude de l'excitation sinusoïdale.

Étudions l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un corps de masse $m > 0$ qui se déplace horizontalement assujetti à une force générée par un ressort de constante élastique $k > 0$ et une force externe d'intensité $f(t) = A\cos(\varphi t)$ avec A et φ deux paramètres réels (on a négligé le frottement).
La position x du corps en fonction du temps suit la loi

$$mx''(t) + kx(t) = A\cos(\varphi t).$$

On la réécrit sous la forme

$$x''(t) + \eta^2 x(t) = a\cos(\varphi t)$$

ayant posé $\eta^2 = k/m > 0$ et $a = A/m$.

- ⋆ Équation homogène : $x''(t) + \eta^2 = 0$. Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^2 + \eta^2$ et a les deux racines complexes conjugués $\lambda_1 = -i\eta$ et $\lambda_2 = i\eta$. La solution est de la forme

$$x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- ⋆ Solution particulière : il faut considérer les deux cas suivantes.
  - ⋆ Si $\varphi \neq \eta$ alors on cherche une solution particulière du type

$$x_P(t) = b\cos(\varphi t) + c\sin(\varphi t).$$

On a $x_P'(t) = -b\varphi\sin(\varphi t) + c\varphi\cos(\varphi t)$ et $x_P''(t) = -b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$-b\varphi^2\cos(\varphi t) - c\varphi^2\sin(\varphi t) + \eta^2 b\cos(\varphi t) + \eta^2 c\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$

ce qui implique

$$b = \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}, \qquad \text{et} \qquad c = 0.$$

  - ⋆ Si $\varphi = \eta$ alors on cherche une solution particulière du type

$$x_P(t) = bt\cos(\varphi t) + ct\sin(\varphi t).$$

On a $x_P'(t) = (b + c\varphi t)\cos(\varphi t) + (c - b\varphi t)\sin(\varphi t)$ et $x_P''(t) = (2c - b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t) - (2b + c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t)$. En remplaçant dans l'EDO on obtient

$$(2c - b\varphi t)\varphi\cos(\varphi t) - (2b + c\varphi t)\varphi\sin(\varphi t) + \varphi^2 bt\cos(\varphi t) + \varphi^2 ct\sin(\varphi t) = a\cos(\varphi t),$$

qui se réécrit

$$((-2 - t)b + (1 - t)c)\varphi\sin(\varphi t) + ((b - a) + 2c(1 + t)\varphi - bt\varphi^2)\cos(\varphi t) = 0$$

ce qui implique

$$b = 0, \qquad \text{et} \qquad c = \frac{a}{2\varphi}.$$

La solution complète est donc

- ⋆ si $\varphi \neq \eta$, $x(t) = C_1\cos(\eta t) + C_2\sin(\eta t) + \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}\cos(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\varphi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient

$$x(t) = r\cos(\eta t + \varphi) + \frac{a}{\eta^2 - \varphi^2}\cos(\varphi t)$$

qui est la superposition de deux mouvements oscillatoires avec deux amplitudes et deux périodes différents.

- ⋆ si $\varphi = \eta$, $x(t) = C_1\cos(\varphi t) + C_2\sin(\varphi t) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; si on pose $r = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\psi = \arctan(-C_1/C_2)$ on obtient

$$x(t) = r\cos(\varphi t + \psi) + \frac{a}{2\varphi}t\sin(\varphi t).$$

On remarque que toute sous-suite (t_n) divergent à $+\infty$ de la forme $t_n = t_0 + \frac{2\pi}{\varphi n}$ pour $t_0 \neq 0$ on a $|x(t_n)| \to +\infty$: les oscillations ont ampleur de plus en plus grande (c'est ce que l'on appelle la résonance).

Annales 2013-2016

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 10 janvier 2013

Calculatrices et tous documents interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Logique *(3 points)*)**.** On effectue une expérience chimique pour laquelle on peut seulement faire varier la température ou ajouter un catalyseur. On connait le principe suivant :

> Si on augmente la température de 10 degrés et si on n'ajoute pas de catalyseur alors la réaction va deux fois plus vite que normalement.

(1) Écrire la contraposée du principe ci-dessus, c'est-à-dire compléter la phrase "Si la réaction ne va pas deux fois plus vite que normalement alors…".

(2) On observe que la température a augmenté de 10 degrés et que la réaction va 3 fois plus vite que normalement, que peut-on en déduire ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

(3) On observe que la réaction va 2 fois plus vite que normalement, peut-on en déduire quelque chose sur la variation de température ? *Justifier en moins de* 5 *lignes*

Exercice 2 (Tracés de courbes *(3 points)*)**.** On considère la fonction gaussienne

$$f\colon x\mapsto f(x)=e^{-x^2}.$$

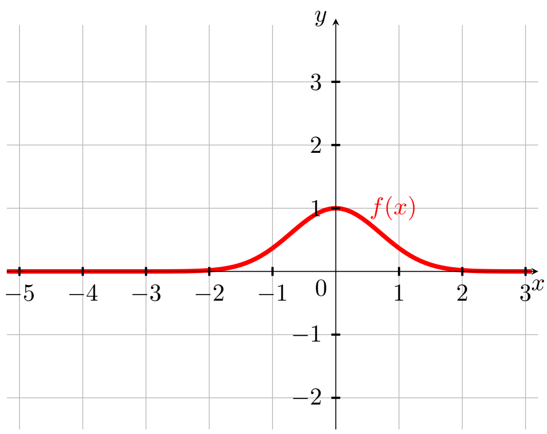
Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

(1) $x\mapsto -f(x)$,

(2) $x\mapsto f(x)+2$,

(3) $x\mapsto f(x+3)$,

(4) $x\mapsto f(2x)-2$.



Exercice 3 (Étude d'une fonction *(8 points)*)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x)=\dfrac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

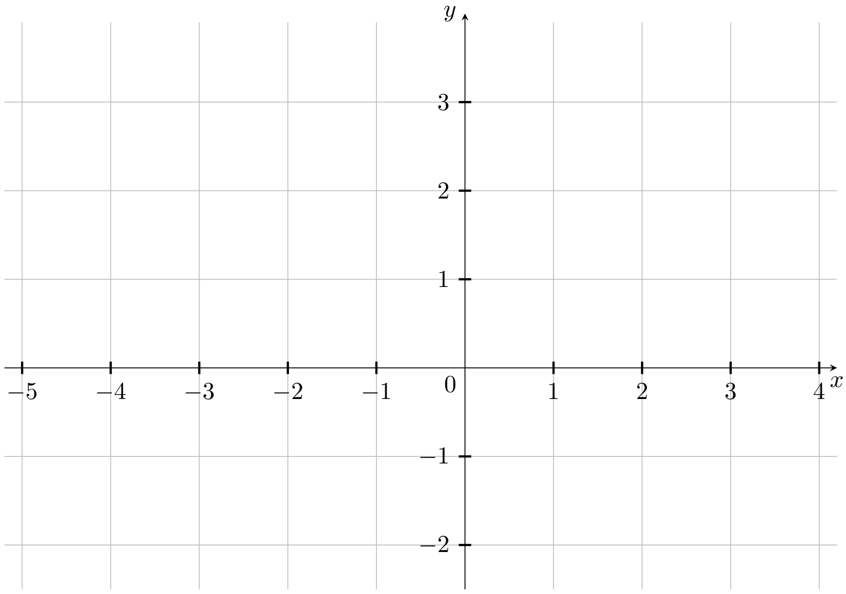
(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses. Même question avec la tangente en $x = 2$.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes en $x = 1$ et $x = 2$.



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire *(3 points)*)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x)$?

(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{2x}$.

(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -3y(x) + xe^{-x}$?

On traitera au choix l'un des deux exercices suivants

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes *(3 points)*)**.** Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

(2) Donner le module de z et l'argument principal de z.

(3) Écrire chacune de ces deux solutions sous forme trigonométrique.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite (3 points))**.** Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = 3u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n + \frac{b}{2}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, dont on précisera la valeur.

(3) En déduire l'expression $u_n = (a + \frac{b}{2})q^n - \frac{b}{2}$ pour tout n.

(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin que $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$?

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1
Mathématiques M11
Examen du mardi 11 juin 2013

Calculatrices et tous documents interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Logique *(2 points)*)**.** On considère la proposition :

Si tous les insectes ont six pattes alors les araignées ne sont pas des insectes.

(1) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.

(2) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.

Exercice 2 (Tracés de courbes *(3 points)*)**.** On considère la fonction gaussienne suivante :

$$f\colon x \mapsto f(x) = e^x.$$

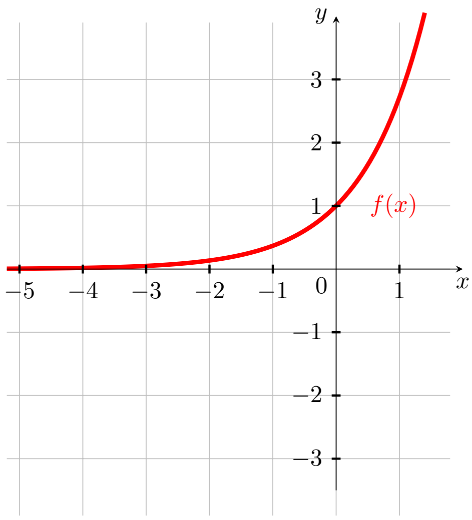
Tracer à main levée, dans le repère ci-contre, les courbes représentatives des fonctions :

(1) $x \mapsto -f(x)$,

(2) $x \mapsto f(x) - 1$,

(3) $x \mapsto f(x-2) - 3$,

(4) $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.



Exercice 3 (Étude d'une fonction *(8 points)*)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \dfrac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition ? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

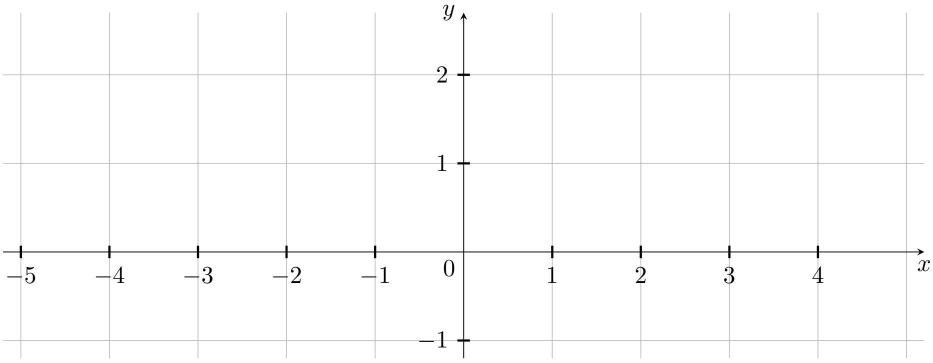
(4) Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(5) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$? Si oui, écrire son équation.

(6) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? *Justifier la réponse.*

(7) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$. En déduire pour quelle valeur elle croise l'axe des abscisses.

(8) Tracer la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $x = 0$.



Exercice 4 (Équation différentielle ordinaire *(3 points)*)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x)$?

(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.

(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2y(x) + xe^{x}$?

<u>*On traitera au choix l'un des deux exercices suivants*</u>

Exercice 5 (Au choix 1 : Nombres complexes *(4 points)*)**.** Racines carrées et forme trigonométrique d'un nombre complexe :

(1) Résoudre dans C l'équation
$$z^2 = 1 + i$$
(2) Donner le module de z^2 et l'argument principal (dans $[0, 2\pi)$) de z^2.
(3) Ecrire chacune de des deux solutions de l'équation sous la forme trigonométrique.
(4) Déduire de (1) et (2) la valeur de $\cos(\pi/8)$.

Exercice 6 (Au choix 2 : Étude de suite *(4 points)*)**.** Soit a et b deux nombres réels, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + b \quad \text{pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

(1) Rappeler la définition d'une suite arithmétique.
(2) Pour tout $n \geq 0$ on pose $v_n = u_n - \frac{2b}{3}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, dont on précisera la valeur.
(3) En déduire l'expression $u_n = (a - \frac{2b}{3})q^n + \frac{2b}{3}$ pour tout n.
(4) Quelles valeurs faut-il prendre pour a et b afin d'avoir à a la fois $u_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$?

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 9 janvier 2014

Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

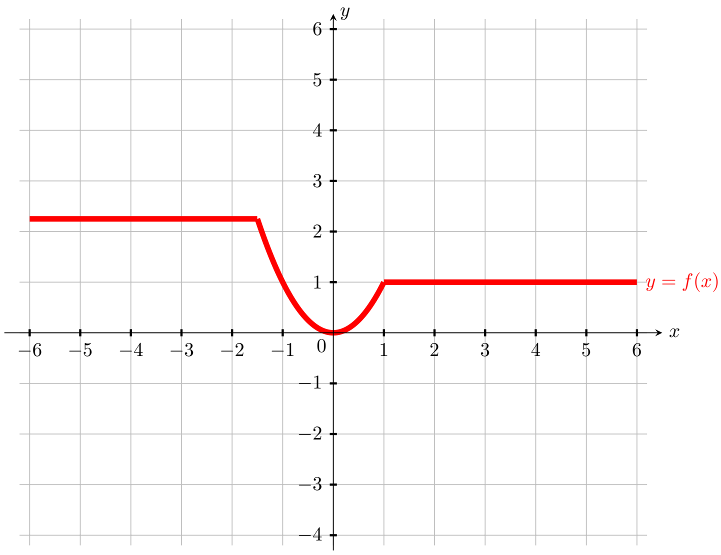
Exercice 1 (Logique)**.** On peut déduire de la loi des gaz parfaits le principe suivant :

Si le volume du gaz est constant, alors la température du gaz est une fonction croissante de la pression.

(1) Ecrire la négation du principe ci-dessus.
(2) Ecrire la contraposée du principe ci-dessus.
(3) On étudie un gaz qui a la propriété suivante : quand son volume est constant et sa température augmente, sa pression diminue. Peut-on dire si c'est un gaz parfait ou non?

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x-1)+1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x)-1$,
(4) $x \mapsto f(-2x)-4$.



Exercice 3 (Suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le premier terme est $u_0 = 1$ et vérifiant

$$u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}u_n^2$$

pour tout n dans $\mathbb{N}$.

(1) En utilisant le fait que

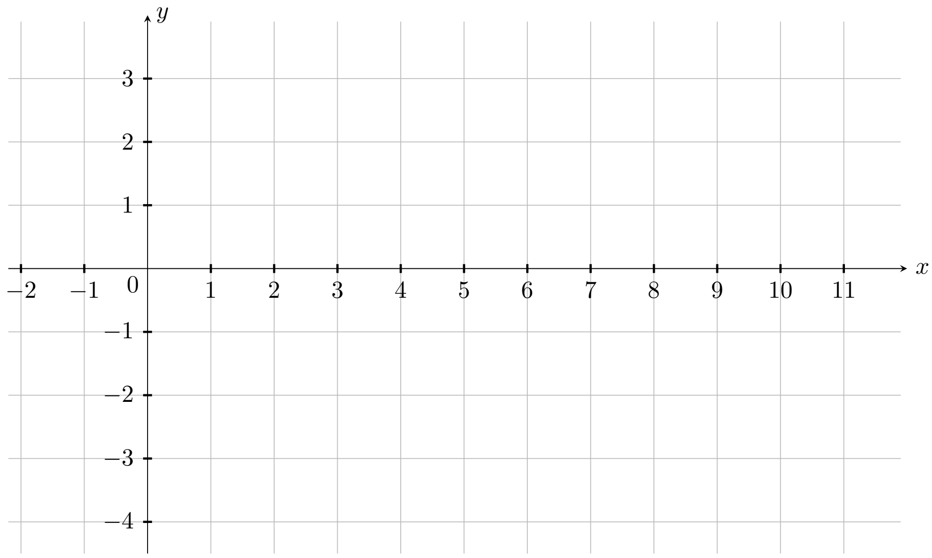
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \le 0$$

montrer par récurrence que $u_n \in [0,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) En supposant que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, quelles valeurs peut-elle prendre ?
(3) En étudiant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et calculer sa limite.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2(\ln(x+1)+1)}{x+1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$? Si oui, écrire son équation.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $e^{1/2}-1$. On prendra comme approximation $e^{1/2} \simeq 1,7$, ainsi que $e \simeq 3$ et $f(e^{1/2}-1) \simeq 1,8$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x)$?
(2) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{x^2}$.
(3) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x) + x$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation
$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0.$$
(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 19 juin 2014

Justifiez vos réponses : la qualité de la rédaction est prise en compte.
Documents manuscrits et distribués en cours autorisés.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** On considère les propositions suivantes :

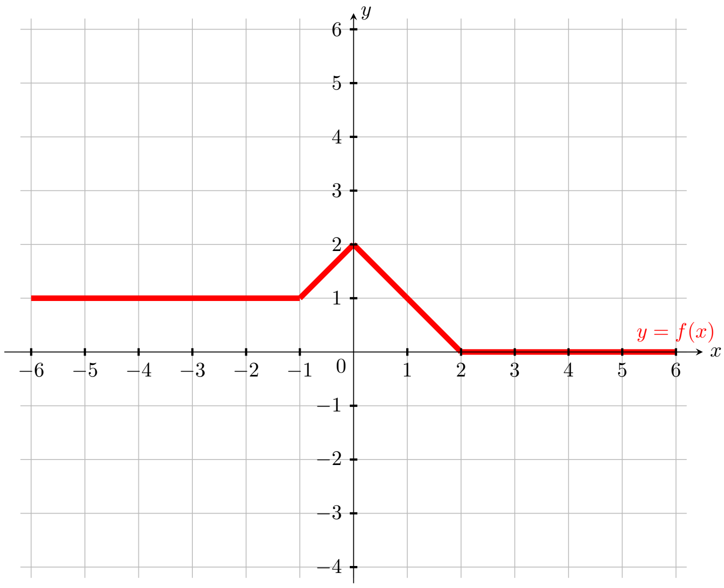
i. les éléphants portent toujours des pantalons courts;
ii. si un animal mange du miel alors il peut jouer de la cornemuse;
iii. si un animal est facile à avaler alors il mange du miel;
iv. si un animal porte des pantalons courts alors il ne peut pas jouer de la cornemuse.

On suppose que ces propositions sont vraies.

(1) Ecrire la contraposée de la proposition iii.
(2) Ecrire la négation de la proposition iv.
(3) Quelqu'un prétend déduire de ces propositions que les éléphants sont faciles à avaler. Cette déduction est-elle correcte ? *Justifier*

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.** On considère la fonction dont le graphe est donné ci-dessous. Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(1) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(2) $x \mapsto f(x+1) + 2$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 2$,
(4) $x \mapsto f(-2x) - 4$.



Exercice 3 (Suite)**.** On considère une suite géométrique décroissante $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on sait que les deux termes u_0 et u_3 sont les solutions de l'équation :

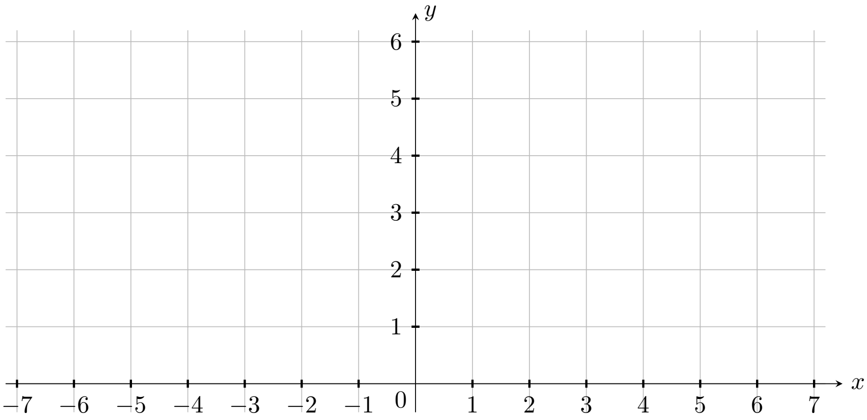
$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

(1) Calculer les deux réels u_0 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
(3) Pour $n \geq 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 + 2)$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote ou une direction asymptotique en $+\infty$?
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1. On prendra comme approximation $\ln(2) \simeq 0,7$.
(6) Tracer la courbe représentative de f.



Exercice 5 (Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x)$?
(2) On pose $z(x) = K(x)e^{(x-1)^2}$. Montrer que

$$z'(x) = 2(x-1)z(x) + x - 1 \quad \text{si et seulement si} \quad K'(x) = (x-1)e^{-(x-1)^2}.$$

(3) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto (x-1)e^{-(x-1)^2}$.
(4) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = 2(x-1)y(x) + x - 1$?

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal (dans $[0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.
(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du jeudi 8 janvier 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1 (Logique)**.** En mathématiques, le principe des tiroirs peut être énoncé ainsi :

> *Si le nombre de tiroirs de rangement est strictement inférieur au nombre de chaussettes et si on range toutes les chaussettes dans les tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.*

(1) Soit P, Q et R trois propositions logiques. Écrire la négation de la proposition

$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq 2$$

(3) Écrire la négation du principe des tiroirs.

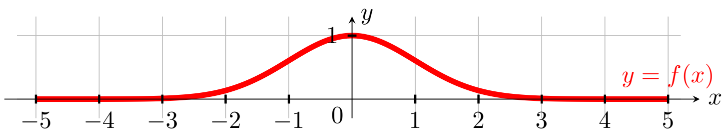
(4) Écrire la contraposée du principe des tiroirs.

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto -f(x) - 1$,

(2) $x \mapsto f(x-3) - 1$,

(3) $x \mapsto 2f(x) - 1$.



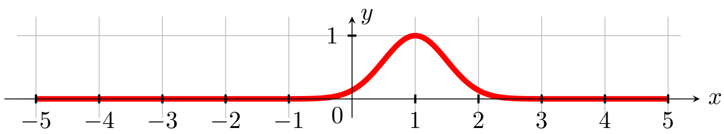
On considère maintenant le graphe suivant, indiquer à quelle transformation du graphe de f il correspond parmi les 4 propositions suivantes :

(a) $x \mapsto f(2(x+1))$,

(b) $x \mapsto f(2(x-1))$,

(c) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x+1))$,

(d) $x \mapsto f(\frac{1}{2}(x-1))$.



Exercice 3 (Suite)**.** Un joueur joue au casino de la manière suivante : il mise toujours tout son argent sur le rouge; si le rouge sort, alors il gagne le double de sa mise, sinon il perd sa mise et mise le double de sa dernière mise sur le rouge. Par exemple au tour numéro 1 il mise 1 euro, si le rouge sort il gagne 2 euros et s'il perd il mise 2 euros au tour numéro 2, et s'il perd à nouveau il mise 4 euros au tour numéro 3...
On note u_n la somme que le joueur mise au tour numéro n (en particulier $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$).

(1) Rappeler la définition d'une suite géométrique.

(2) Pour $n \geq 1$, écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

(3) On suppose que le joueur perd à chaque tour. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, et en déduire une formule pour u_n en fonction de n.
(4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?
(5) On suppose que le joueur perd ses neuf premières mises (du tour 1 au tour 9) : combien a-t-il perdu en tout ? On rappelle que $2^{10} = 1024$.
(6) On suppose maintenant qu'au tour 10 le joueur gagne enfin après avoir perdu aux 9 premiers tours. Le casino lui donne alors deux fois sa mise u_{10}. Combien le joueur a-t-il gagné (ou perdu) sur toute cette partie, en comptant les 9 tours perdants et le dixième tour gagnant ?

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{2x}\right) - x$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+e^{2x}}$. Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f. Indiquer si la fonction f a un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion. Déterminer le(s) intervalle(s) sur lesquels f est convexe ou concave.
(4) Déterminer si la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$. Démontrer que la courbe représentative de f admet la droite $y = x$ comme asymptote en $+\infty$ (on pourra utiliser l'égalité $2x = \ln(e^{2x})$.
(5) Soit a un nombre réel, rappeler l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\ln(2)$. On pourra utiliser les valeurs $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(5) \simeq 1,6$.
(6) Tracer la courbe représentative de f, ainsi que la tangente de la question (5).

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre fixe. Ecrire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = -ay(x).$$

(2) Résoudre le problème de Cauchy

$$y_a'(x) = -ay_a(x), \quad y_a(0) = 1$$

c'est-à-dire trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = -ay(x)$ qui vaut 1 en 0.

(3) On considère la solution trouvée dans la question (2). Déterminer le paramètre a en sachant que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 1/2$.
Existe-t-il un paramètre a tel que $y_a(1) - \lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$? Justifier les réponses.
(4) Trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation non homogène

$$y'(x) = -y(x) + x$$

puis écrire toutes ses solutions.

Exercice 6 (Bonus: Nombres complexes)**.**

(1) Trouver la forme algébrique de toutes les racines complexes de l'équation

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 1 juillet 2015

Tous documents, calculatrices et appareils électroniques interdits.
La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

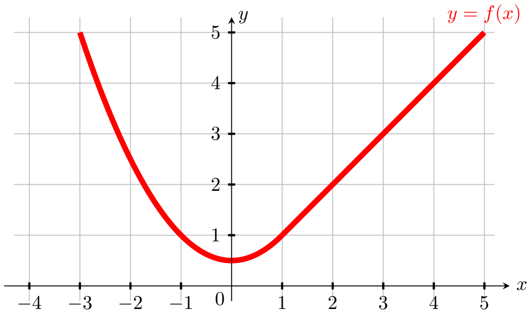
Exercice 1 (Logique). On étudie la proposition suivante :

Si tous les interrupteurs sont éteints, alors l'électricité est coupée.

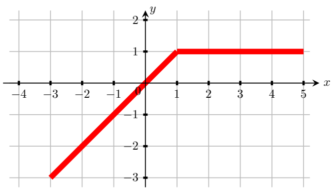
(1) Écrire la négation de cette proposition.
(2) Écrire la contraposée de cette proposition.
(3) Si on suppose que la proposition est vraie et que l'électricité est coupée, peut-on en déduire avec certitude que tous les interrupteurs sont éteints ?

Exercice 2 (Transformations sur le graphe). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

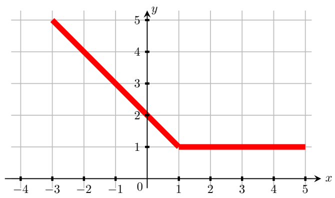
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,
(2) $x \mapsto f(2x) + 1$,
(3) $x \mapsto \frac{1}{2} f(x) - 1$.



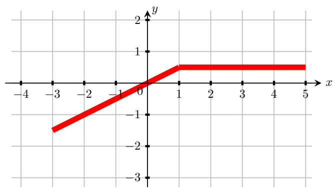
On considère maintenant les trois graphes suivants, lequel correspond au graphe de la dérivée de f ?



(A)



(B)



(C)

Exercice 3 (Suite). On considère la suite récurrente $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ \forall n \geq 0, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n) \end{cases}$$

(1) Calculer p_0.
(2) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(3) Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.
(4) La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f. Montrer que f est impaire. Calculer les limites de f aux extrémités de son domaine de définition.
(2) Calculer la dérivée f' de f.
Étudier le signe de la dérivée f', et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.
(3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x :

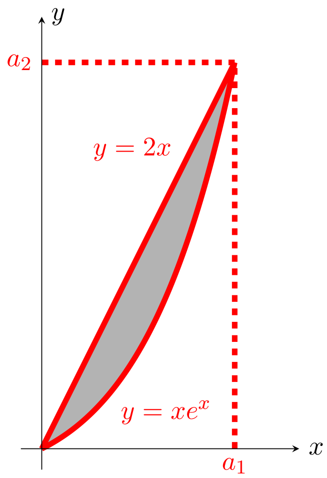
$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 1}.$$

La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$? Si oui, écrire son équation. Dans ce cas, préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote (au-dessus ou au-dessous).
(4) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.
(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Calcul intégral)**.** On considère la région plane P définie par:

$$P = \{(x, y) \mid x \geq 0, xe^x \leq y \leq 2x\}$$

et représentée en gris sur le graphique suivant :



(1) Calculer les coordonnées $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x$ avec la courbe d'équation $y = xe^x$.
(2) Une fois a_1 déterminé, calculer

$$I_1 = \int_0^{a_1} 2x\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{a_1} xe^x\mathrm{d}x.$$

(3) Calculer la surface de la région P.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen du 08 janvier 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.**

Pour étudier la validité d'une hypothèse scientifique H, on la confronte à la théorie déjà admise et on fait plusieurs expériences. On adopte le principe suivant :

Si H ne contredit pas la théorie et si toutes les expériences sont réussies,
alors H est validée.

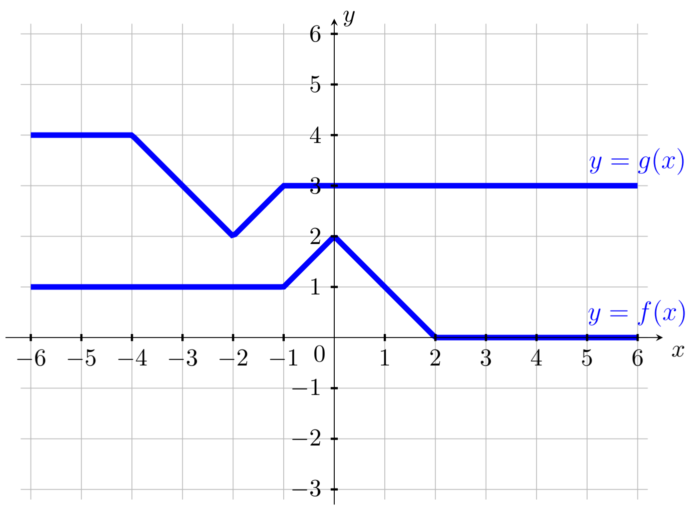
(1) Écrire la négation de la proposition ci-dessus.
(2) Écrire la contraposée de la proposition ci-dessus.
(3) On suppose que toutes les expériences ont réussi et que l'hypothèse H est validée. Peut-on en déduire que H ne contredit pas la théorie ?

Exercice 2 (Tracés de courbes)**.**

Soit les fonctions f et g dont les graphes sont donnés ci-dessous.

(1) Tracer à main levée, sur cette feuille, les courbes représentatives des fonctions:

(a) $x \mapsto 6 - f(x)$,
(b) $x \mapsto f(x-1) + 1$,
(c) $x \mapsto \frac{1}{2}f(x) - 3$,
(d) $x \mapsto f(-2x) - 2$.



(2) Exprimer g sous la forme $g(x) = af(bx + c) + d$ en explicitant les valeurs de a, b, c, d.

Exercice 3 (Suite)**.**

On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\ge0}$ dont on sait que les trois termes u_0, u_2 et u_3 vérifient:

$$\begin{cases} u_0 - 5u_2 + u_3 &= -1 \\ 2u_0 - 7u_2 + 3u_3 &= 5 \\ -u_0 + 2u_2 + 9u_3 &= 5 \end{cases}$$

(1) Calculer les trois réels u_0, u_2 et u_3.
(2) Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\ge0}$?
(3) Pour $n \ge 0$ calculer $z_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Exercice 4 (Étude d'une fonction)**.**

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x + \ln\Big((x+1)^2 - 1\Big).$$

(1) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$, et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f.
Montrer que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $x^2 + 4x + 2$ pour tout $x \in D_f$, et donner le tableau de variations de f. Indiquer si f atteint un minimum ou un maximum local sur son domaine de définition.

(3) Calculer la dérivée seconde f'' de f.
La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe et ceux où f est concave.

(4) La courbe représentative de f admet-elle une droite asymptote en $+\infty$, en $-\infty$, des asymptotes verticales? Si oui, écrire leurs équations.

(5) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$.
Existe-t-il un point (ou plusieurs) sur le graphe de f pour lequel la tangente admet coefficient directeur égal à 2? Si oui, trouver ce(s) point(s).

(6) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 5 (Bonus: Équation différentielle ordinaire)**.**

On considère les équations différentielles

$$(A) \qquad\qquad y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

et

$$(B) \qquad\qquad u'(x) + u(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Ecrire toutes les solutions de l'équation (A).

(2) Déterminer une primitive de xe^{2x}.

(3) Ecrire l'ensemble des solutions de l'équation (B).

(4) Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = xe^x, & x \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (Bonus: nombres complexes)**.**

(1) Trouver toutes les racines complexes de l'équation

$$2z^2 - z + \frac{1}{2} = 0.$$

(2) Calculer l'argument principal ($\in [0, 2\pi[$) et le module de chacune de ces racines.

(3) Trouver la forme trigonométrique de chacune de ces racines.

L1 Sciences et Techniques – Semestre 1

Mathématiques M11

Examen ratrappage Juin 2016

Une feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents interdits.
Calculatrices et tous appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Logique)**.** Soit P, Q et R trois propositions logiques.

(1) Écrire la négation de la proposition
$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

(2) Écrire la contraposée de la proposition
$$(\,P \text{ et } Q\,) \Rightarrow R$$

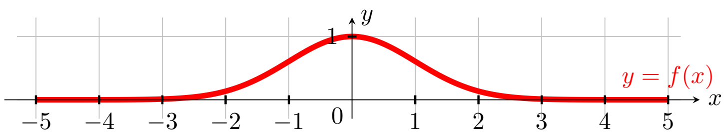
(3) Écrire la négation de la proposition :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad g_n < \varepsilon$$

Exercice 2 (Transformations sur le graphe)**.** On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ dont le graphe est rappelé ci-dessous. Reporter ce graphe *sur votre copie* et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

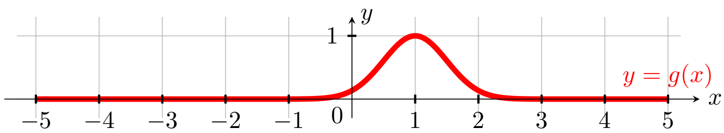
(1) $x \mapsto -f(x) - 2$,

(2) $x \mapsto f(x-1) - 1$,

(3) $x \mapsto 2f(x) + 1$.



On considère maintenant le graphe de la fonction $g(x) = f(ax+b) + c$ représenté ci-dessous. Déterminer les réels a, b, c.



Exercice 3 (Étude d'une fonction)**.** Soit f la fonction d'une variable réelle définie par
$$f(x) = \frac{2}{1+e^{x/2}}$$

(1) Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer les limites en ses extrémités.

(2) Calculer la dérivée f' de f. Vérifier que la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{1}{2}\dfrac{e^{x/2}(e^{x/2}-1)}{(1+e^{x/2})^3}$.

(3) La fonction f a-t-elle un point d'inflexion sur son domaine de définition? Déterminer les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

Bibliographie

[1] Guy AULIAC, Jean AVIGNANT et Elie AZOULAY : *Aide-mémoire de Mathématiques.* EdiScience, 2006.

[2] Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET : *Physique tout-en-un* - 1*re* *année.* Dunod, 2008.

[3] Vivina BARUTELLO, Monica CONTI, Davide L. FERRARIO, Susanna TERRACINI et Gianmaria VERZINI : *Analisi matematica con elementi di geometria e calcolo vettoriale*, volume 2. Apogeo, 2008.

[4] Vincent BLONDEL : *Mathématiques - Analyse.* Dunod, 2000.

[5] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, Thomas LACHAND-ROBERT, François MOULIN et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L1.* Dunod, 2006.

[6] Xavier BUFF, Josselin GARNIER, Emmanuel HALBERTSTADT, François MOULIN, Monique RAMIS et Jacques SAULOY : *Mathématiques tout-en-un pour la licence niveau L2.* Dunod, 2007.

[7] Claudio CANUTO et Anita TABACCO : *Analisi matematica II - Teoria ed esercizi con complementi in rete.* Springer, 2008.

[8] Alexandre CASAMAYOU-BOUCAU, Pascal CHAUVIN et Guillaume CONNAN : *Programmation en Python pour les mathématiques.* Dunod, 2012.

[9] Yadolah DODGE : *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, 2007.

[10] Daniel FREDON, Myriam MAUMY-BERTRAND et Frédéric BERTRAND : *Mathématiques Analyse en 30 fiches.* Dunod, 2009.

[11] François GUÉNARD et Patricia HUG : *QCM de Mathématiques*, volume 1. Dunod, 1993.

[12] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE I - Nombres réels, suites et séries.* EDP Sciences, 2008.

[13] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : *PROBLÈMES D'ANALYSE II - Continuité et dérivabilité.* EDP Sciences, 2008.

[14] Jean-Pierre LECOUTRE et Philippe PILIBOSSIAN : *TD Analyse.* Dunod, 2008.

[15] François LIRET et Charlotte SCRIBOT : *Mini manuel d'Analyse.* Dunod, 2010.

[16] Jean-Marie MONIER : *Les méthodes et exercices de Mathématiques PCSI-PTSI.* Dunod, 2008.

[17] François MOULIN, Jean François RUAUD, Anne MIQUEL et Jean-Claude SIFRE : *Mathématiques tout-en-un* - 1*re* *année.* Dunod, 2003.

[18] Bernard MYERS et Dominique SOUDER : *Logique et Mathématiques.* Dunod, 2009.

[19] James STEWART : *Calculus concepts and contexts.* Brooks/Cole, 2010.

[20] James STEWART : *Calculus : early transcendentals.* Brooks/Cole Pub Co, 2010.

[21] James STEWART, Lothar REDLIN et Saleem WATSON : *Precalculus Mathematics for Calculus.* Brooks/Cole, 2009.