Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 1. Raisonnement, logique propositionnelle [1]

EXERCICE 1. Un mathématicien discute avec un ami logicien dont l'épouse vient d'accoucher. Il lui demande *"Avez-vous eu un garçon ou une fille ?"* et le logicien lui répond *"Oui"*. Expliquez la réponse du logicien.

EXERCICE 2. Trouvez des propositions en langue naturelle dans lesquelles le connecteur logique *ou* est inclusif.

EXERCICE 3. Chacun des énoncés suivant contient une erreur, indiquez s'il s'agit d'une erreur lexicale, syntaxique ou sémantique ?

(a) *"La saucisse a mangé le chien."*

(b) *"Je n'ai rien compris à cet algorythme."*

(c) *"Moi Tarzan, toi bonjour ?"*

(d) *"La leçon que j'ai appris."*

(e) *"La nuit il fait plus froid que dehors."*

EXERCICE 4. Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Dessinez l'arbre de dérivation de chacune des formules ci-dessous en rajoutant les parenthèses omises si nécessaire :

(a) $(P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)$ (b) $P \vee Q \vee \neg R$.

(c) $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$ (d) $(P \Rightarrow \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$.

EXERCICE 5. Soit P et Q deux propositions. On considère la formule $P \Rightarrow Q$. Que pouvez-vous déduire sur la valeur de vérité de Q si la formule est vraie ? Que pouvez déduire sur la valeur de vérité de P (resp. Q) si la formule et Q (resp. P) sont vraies ?

EXERCICE 6. On qualifie de *jumeau/jumelle* toute personne qui a un ou plusieurs frères ou sœurs du même accouchement. Pourquoi la phrase *"Donald et Vladimir sont des jumeaux"* ne peut pas être considérée comme une proposition mathématique alors même que l'on peut lui attribuer une valeur de vérité ?

1. Version du 18 septembre 2023, 13 : 17

EXERCICE 7. Rappelez les deux lois de De Morgan et démontrez les.

EXERCICE 8. Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Démontrez que le connecteur logique d'implication est *transitif* (cf. formule ($\mathscr{F}$)) en construisant des tables de vérité.

$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{$\mathscr{F}$}$$

EXERCICE 9. † Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Construisez la table de vérité du connecteur logique ternaire $\Rrightarrow$ (*"si/alors/sinon"*) et démontrez que

$$\Rrightarrow(P, Q, R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

EXERCICE 10. Démontrez que le connecteur $\oplus$ est commutatif. Parmi les autres connecteurs binaires, lesquels sont commutatifs ?

EXERCICE 11. Soit P et Q deux propositions. Démontrez que

$$(P \oplus Q) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

EXERCICE 12. Un connecteur logique binaire $\diamond$ est dit associatif si pour toutes propositions P, Q et R on a

$$(P \diamond Q) \diamond R \equiv P \diamond (Q \diamond R) \tag{1}$$

Montrez que la conjonction, la disjonction et l'équivalence sont des connecteurs associatifs, mais pas l'implication.

EXERCICE 13. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrez les deux équivalences logiques suivantes :

$$\big((P \wedge Q) \Rightarrow R\big) \equiv \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \tag{2}$$

$$\big(P \Leftrightarrow Q\big) \equiv \big((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big) \tag{3}$$

EXERCICE 14. Soit P, Q et R trois propositions. Exprimez la négation des trois propositions suivantes :

(1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ (2) $\neg P \Rightarrow Q$ (3) $(P \wedge Q) \vee R$

EXERCICE 15. † Soit P, Q et R trois variables propositionnelles et notons $\mathscr{F}$ la formule

$$\big((P \vee Q) \vee R\big) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

(1) Donnez l'interprétation logique de la formule $\mathscr{F}$ si les variables P et Q sont fixées à V (resp. F) et R à F (resp. V).

(2) Montrez que $\mathscr{F}$ est logiquement équivalente à

$$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$$

EXERCICE 16. Soit P, Q, R et S des variables propositionnelles. Vérifiez que

$$\neg\big(((P \wedge Q) \vee P) \vee R) \vee S\big) \equiv \big((\neg P \wedge \neg R) \wedge \neg S\big) \tag{4}$$

Indication : construisez la table de vérité de $(P \wedge Q) \vee P$, que remarquez-vous ?

EXERCICE 17. Formalisez les énoncés suivants en logique propositionnelle :

(1) Bob a déchiffré le message d'Alice ou Alice est inquiète.

(2) Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice n'est pas inquiète.

(3) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète.

(4) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète.

(5) Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète.

(6) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice si Alice est inquiète.

EXERCICE 18. † Dans une brasserie vous commandez un *sandwich au jambon* ou un *sandwich au pâté* et un *verre de bière*. Le garçon vous écoute distraitement car il est occupé.

(1) Dans un premier temps il est sûr de la place du *ou* et du *et* mais il hésite sur la place des parenthèses.

- (a) Écrire pour chacune des commandes possibles la formule propositionnelle correspondante.
- (b) Pour être sûr de contenter le client, il doit satisfaire à la fois les deux commandes possibles. Écrire la formule correspondante.
- (c) Montrez à l'aide d'une table de vérité que cette dernière est logiquement équivalente à apporter *(un sandwich au jambon ou un sandwich au pâté) et un verre de bière*.

(2) Dans un second temps le garçon hésite également sur la place de *et* et *ou*.

- (a) Reprendre les questions (1a) et (1b).
- (b) Montrez qu'il peut alors se contenter d'apporter *un sandwich au jambon et (un sandwich au pâté ou un verre de bière)*.

(3) Que doit-il apporter au minimum pour satisfaire le client et répondre à *toutes* ses hésitations ?

EXERCICE 19. † Soit X, Y, Z des variables propositionnelles.

(1) Démontrez que la proposition suivante est une tautologie :

$$((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)) \Rightarrow (Y \vee Z) \tag{$\mathscr{T}$}$$

On définit trois variables propositionnelles E, R et S dont la valeur de vérité est associées à celle des énoncés suivants :

- (E) Il y a un examen.
- (R) Alexis révise ses cours.
- (S) Alexis échoue.

On définit alors les trois propositions P, Q, T formalisant les énoncés suivants :

- (P) S'il y a un examen, alors Alexis révise ses cours.
- (Q) Si Alexis révise ses cours, alors Alexis n'échoue pas.
- (T) S'il n'y a pas d'examen, alors Alexis n'échoue pas.

Répondez aux questions suivantes :

(2) Écrivez les formules P, Q et T en fonction des variables propositionnelles E, R et S.

(3) Transformez P, Q, T en propositions P', Q', T' ne contenant que des disjonctions $(\vee)$ et des négations $(\neg)$.

(4) En utilisant $(\mathscr{T})$, trouver une proposition U telle que la proposition $((P' \wedge Q') \Rightarrow U)$ soit une tautologie.

(5) En utilisant $(\mathscr{T})$, trouver une proposition V telle que la proposition $((T' \wedge U) \Rightarrow V)$ soit une tautologie.

(6) Que peut-on déduire sur la réussite d'Alexis à l'examen ?

EXERCICE 20. † Trois suspects ont été arrêtés à la suite du cambriolage de la villa de Monsieur Futay, ce sont *Bradacié*, *Piedplat* et *Nécassé*. Ils déclarent respectivement à l'inspecteur *Lafrite* qui les interroge :

(P_B) « *Piedplat* est coupable et *Nécassé* est innocent. »

(P_P) « Si *Bradacié* est coupable, alors *Nécassé* l'est aussi. »

(P_N) « Je suis innocent mais l'un au moins des deux autres est coupable. »

C'est une nécessité pour *Lafrite* d'envisager plusieurs possibilités, c'est ce qu'il fait avant de se mettre au lit :

(1) Est-il possible que mes trois lascars aient dit la vérité ? Alors qui serait coupable ?

(2) Ils auraient pu mentir tous les trois, je suppose ! ?

(3) Il me semble que certains témoignages se déduisent des autres. Lesquels au juste ?

(4) Si je suppose que tous sont innocents, qui a menti ? Et si je les suppose tous coupables, qui a menti ?

(5) Est-il possible qu'il n'y ait qu'un seul faux témoignage ? Dans ce cas, qui a menti et qui est coupable ?

(6) Et je garde le meilleur pour la fin... Après ceci je dormirai comme un loir : si je suppose que l'innocent dit la vérité et que le coupable ment, alors qui est innocent et qui est coupable ?

Pouvez-vous aider l'inspecteur Lafrite à répondre à ces questions ?

Indication : utilisez les variables B, P et N dont la valeur de vérité est associée à l'innocence du suspect correspondant. Exprimez leurs déclarations à l'aide de formules propositionnelles et construisez leurs tables de vérité.