

## Algebre de boole

soit  $\mathbb{B}$  un ensemble munit d'une structure algebrique, on l'appelle algebre de boole.

**Définition 1:** on appelle booleen toute variable defini sur un ensemble a deux elements

Pour simplifier l'écriture des expressions logiques, l'opérateur  $\neg$  peut être écrit de cette façon:  $\bar{x}$ . et on a

$x$	0	1
$\bar{x}$	1	0

dans le cadre de l'algebre de Boole, un litterale designe la aussi une variable  $x$  (litteral positif) ou sa negation  $\bar{x}$  (litteral negatif)

## Proprietes de calcul

on dispose des nombreuses proprietess suivantes heritees du calcul propositionnel:

1. associativite:  $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
2. commutativite  $a + b = b + a$
3. distributivite  $a(b + c) = ab + (ac)$
4. idempotence:  $a + a + a + a \dots = a$  et  $aaa \dots = a$
5. element neutre:  $a + 0 = 0 + a = a$  et  $a1 = 1a = a$
6. absorption  $0a = a$  et  $1 + a = 1$
7. simplification:  $a + \bar{a}b = a + b$  et  $a(\bar{a} + b) = ab$
8. redondance:  $ab + \bar{a}c = ab + \bar{a}c + bc$  et  $(a + b)(\bar{a} + c) = (a + b)(\bar{a} + c)(b + c)$
9. DeMorgan:  $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$
10. Involution:  $\bar{\bar{a}} = a$
11. tiers exclu:  $\bar{a} + a = 1$
12. non contradiction:  $a\bar{a} = 0$

on retrouve les cinq autres operateur binaire, implication, equivalence, disjonction exclusive, non conjonction et non disjonction:

$$\begin{aligned}
 a \Rightarrow b &= \bar{a} + b, \\
 a \Leftrightarrow b &= (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) \\
 a \oplus b &= (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) \\
 a \uparrow b &= \bar{a}\bar{b} \\
 a \downarrow b &= \overline{a + b}
 \end{aligned}$$

qui ont les tables de verite:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
-------------------	---	---

0	1	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0