Axiomes et predicats

Ensembles

Définition 1: ensemble Un ensemble est une collection X d'objets *definis* et *unique*. un objet appartenant a l'ensemble est dit membre de *X* et on dit que l'objet et membre. un membre est unique dans un ensemble, il ne peut pas y avoir deux fois le meme element

exemple:

$$\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$$

sur python, un type ensemble existe qui est appele `set`

Définition 2: Difference Soit X et Y deux enembles. la difference entre les ensembles X et Y est l'ensemble $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, qui est l'ensembles qui contients les elements de X mais pas les elements de Y. on note aussi XY l'ensemble qui contient seulement les differences d'un ensemble $X \cap Y$ est $X \Delta Y$

Définition 3: Cardinal On appelle le cardinal d'un ensemble sa taille. Lorsqu'un ensemble est fini, le cardinal est la longueur de cette ensemble

Predicats

Définition 4: Predicat enonce contenant des variables tel qu'en substituant chaque variables par une valeure choisi, on obtient une proposition

exemple: $x|P(x)$ (se lit x tel que P(x)) est un predicat dans lesquelles la proposition P(x) est vraie pour x la theorie de ZF distingue deux tyupes de predicats:

- 1. predicat collectivisant: un predicat $P(X)$ tel que les valeurs de x pour lesquelles la proposition P(x) est vrai constituent un enssemble note $(x|P(x))$
- 2. predicat non collectivisant: un predicat P(x) tel que les valeurss x pour lesquelles la prop P(X) est vraie ne constituent pas un ensemble

considerant le predicat $P(x, y)$ defini sur deux variables reelles x et y suivant:

$$x^2 - y = 1$$

on peut definir le predicat $Q(x)$ de la variable suivante:

$$\exists y \in \mathbb{R} x^2 - y = 1$$

Quantificateurs

Définition 5: quantificateur Il existe 3 quantificateurs:
- $\forall$ qui se lit "pour tout" (appele forall en latex et typst
- $\exists$ qui se lit "il existe"
- $\exists!$ qui est un "il existe" unique

le quantificateur $\exists!$ est lui meme une proposition qui est: $(\exists x \in X P(X)) \wedge (\forall x \in X \forall y \in X P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$ le terme de gauche codel'existence et le terme droit l'unicite en exprimant sous forme contraposee que deux elements distincts x et y de l'ensemble X ne peuvent simultanement satisfaire le predicat $P(x) : x \neq\Rightarrow \neg(P(x) \wedge P(y))$.

Axiomes

Définition 6: axiome de l'inclusion Soit X et Y deux ensembles. on dit que X est inclus dans Y ou que X est une partie de Y ou encore que X est un sousensemble de Y, ce que l'ont note $X \subseteq Y$ ou $Y \supseteq X$ seulement si $\forall x x \in X \Rightarrow x \in Y$

Définition 7: axiome d'extension

Soit X et Y deux ensembles, alors $X = Y$ si et seulement si

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$$

Définition 8: axiome de la paire soit a, b deux objet. le predicat $(x = a) \vee (x = b)$ est collectivisant en x. l'ensemble definit est $\{a, b\}$

$$\{x \mid (x = a) \vee (x = b)\}$$