

I Logique Booleene

I.1 Definitions et props

Définition 1: Commutatif les variables peuvent etre inverses

Définition 2: L'arbre de Derivation C'est un format de pour
representer une proposition

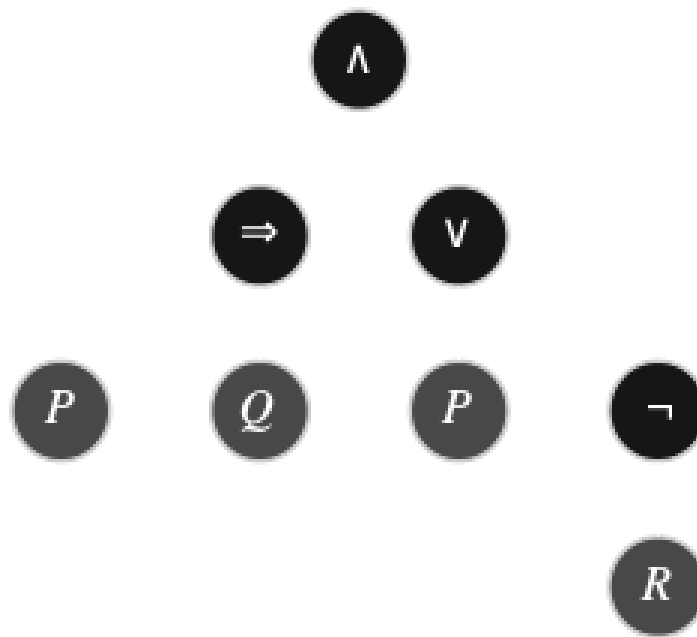


Figure 1: $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg R)$

Définition 3: Loi de De Morgan Soit P et Q deux assertions,
alors
 $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
 $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

I.2 Tables de verite

il est assume qu'un connecteur est commutatif sauf mentionne
autrement

I.2.1 table de \wedge , dit conjonction, lu "et": q binaire

| | | |
|---------|---------|---------|
| \perp | \perp | \perp |
| \top | \perp | \perp |
| \perp | \top | \perp |
| \top | \top | \top |

I.2.2 table de \vee dit disjonction, lu "ou": q binaire

| | | |
|---------|---------|---------|
| \perp | \perp | \perp |
| \perp | \top | \top |

| | | |
|---|---|---|
| T | ⊥ | T |
| T | T | T |

Définition 4: Clause on dit clause conjonctive (ou respectivement disjunctive) toute formule composé de conjonction (respectivement disjonction)

I.2.3 table de \oplus : q binaire

| | | |
|---|---|---|
| ⊥ | ⊥ | ⊥ |
| ⊥ | T | T |
| T | ⊥ | T |
| T | T | ⊥ |

I.2.4 table de \Rightarrow : q binaire dit non commutatif

| | | |
|---|---|---|
| ⊥ | ⊥ | T |
| ⊥ | T | T |
| T | ⊥ | ⊥ |
| T | T | T |

autrement dit, vrai sauf si p est vrai et q est faux

I.2.5 table de \Leftrightarrow : q binaire

| | | |
|---|---|---|
| ⊥ | ⊥ | T |
| ⊥ | T | ⊥ |
| T | ⊥ | ⊥ |
| T | T | T |

vrai si les deux variables ont la meme valeur

I.2.6 Propriétés

- comutativite de \wedge et \vee

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

- associativite de \wedge et \vee

$$((P \wedge Q) \wedge R) \equiv ((Q \wedge R) \wedge P) \quad ((P \vee Q) \vee R) \equiv ((Q \vee R) \vee P)$$

- idempotence de \wedge et \vee

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

I.3 Modus{ponens, tollens}

Définition 5: modus ponens Soit P et Q deux propositions, si P est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors Q est vrai.

$$P, P \Rightarrow Q \vdash Q$$

car $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$

Définition 6: modus tollens Soit P et Q deux propositions, si $\neg Q$ est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors la proposition $\neg P$ est vrai.

$$\neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \neg P$$

I.4 TPs

I.4.1 Question 1: Ecrire une fonction `interpretations(nbVar)` qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles

la technique que j'ai opte est de calculer tous les nombre possible en binaire jusqu'a 2^{nbvar} , puis de les retranscrire en tuple de vrai/faux. Voici le code (on assume une fonction translate to tuple defini comme le suit)

Q1: ecrire une fonction `Inter(nbvar)` qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles

```
def translate_totuple(binary: str):
    result = []
    for i in binary:
        if i == '1':
            result.append(True)
        else:
            result.append(False)

    return tuple(result)

def inter(nbvar):
    finalresult = ()
    for i in range(nbvar**2):
        result = bin(i)
        result = result[2:]
        while len(result) < nbvar:
            result = '0'+result
        result = translate_totuple(result)
        finalresult += result,
    return finalresult
```

II Axiomes et predicats

II.1 Ensembles

Définition 7: ensemble Un ensemble est une collection X d'objets definis et unique. un objet appartenant a l'ensemble est dit membre de X et on dit que l'objet est membre. un membre est unique dans un ensemble, il ne peut pas y avoir deux fois le meme element

exemple:

$$\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$$

sur python, un type ensemble existe qui est appele `set`

Définition 8: Difference Soit X et Y deux ensembles. la difference entre les ensembles X et Y est l'ensemble $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, qui est l'ensembles qui contiens les elements de X mais pas les elements de Y . on note aussi $X \setminus Y$ l'ensemble qui contient seulement les differences d'un ensemble $X \cap Y$ est $X \Delta Y$

Définition 9: Cardinal On appelle le cardinal d'un ensemble sa taille. Lorsqu'un ensemble est fini, le cardinal est la longueur de cette ensemble

II.2 Predicats

Définition 10: Predicat enonce contenant des variables tel qu'en substituant chaque variables par une valeur choisi, on obtient une proposition

exemple: $x|P(x)$ (se lit x tel que $P(x)$) est un predicat dans lesquelles la proposition $P(x)$ est vraie pour x la theorie de ZF distingue deux tyupes de predicats:

- 1. predicat collectivisant: un predicat $P(X)$ tel que les valeurs de x pour lesquelles la proposition $P(x)$ est vrai constituent un enssemble note $(x|P(x))$
- 2. predicat non collectivisant: un predicat $P(x)$ tel que les valeurss x pour lesquelles la prop $P(X)$ est vraie ne constituent pas un ensemble

considerant le predicat $P(x, y)$ defini sur deux variables reelles x et y suivant:

$$x^2 - y = 1$$

on peut definir le predicat $Q(x)$ de la variable suivante:

$$\exists y \in \mathbb{R} x^2 - y = 1$$

II.3 Quantificateurs

Définition 11: quantificateur Il existe 3 quantificateurs:

- \forall qui se lit "pour tout" (appele forall en latex et typst)
- \exists qui se lit "il existe"
- $\exists!$ qui est un "il existe" unique

le quantificateur $\exists!$ est lui meme une proposition qui est: $(\exists x \in XP(X)) \wedge (\forall x \in X \forall y \in XP(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$ le terme de gauche code l'existence et le terme droit l'unicite en exprimant sous forme contraposee que deux elements distincts x et y de l'ensemble X ne peuvent simultanement satisfaire le predicat $P(x): x \neq \Rightarrow \neg(P(x) \wedge P(y))$.

II.4 Axiomes

Définition 12: axiome de l'inclusion Soit X et Y deux ensembles. on dit que X est inclus dans Y ou que X est une partie de Y ou encore que X est un sousensemble de Y , ce que l'ont note $X \subseteq Y$ ou $Y \supseteq X$ seulement si $\forall x x \in X \Rightarrow x \in Y$

Définition 13: axiome d'extension

Soit X et Y deux ensembles, alors $X = Y$ si et seulement si

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$$

Définition 14: axiome de la paire soit a, b deux objet. le predicat $(x = a) \vee (x = b)$ est collectivisant en x . l'ensemble definit est $\{a, b\}$

$$\{x \mid (x = a) \vee (x = b)\}$$

III Caclul Booleen

III.1 Algebre de boole

soit \mathbb{B} un ensemble munit d'une structure algebrique, on l'appelle algebre de boole.

Définition 15: on appelle booleen toute variable defini sur un ensemble a deux elements

Pour simplifier l'ecriture des expressions logique, l'operande \neg peut etre ecrit de cette facon: \bar{x} . et on a

| | | |
|-----------|---|---|
| x | 0 | 1 |
| \bar{x} | 1 | 0 |

dans le cadre de l'algebre de Boole, un litterale designe la aussi une variable x (litteral positif) ou sa negation \bar{x} (litteral negatif)

III.1.1 Propriétés de calcul

on dispose des nombreuses propriétés suivantes héritées du calcul propositionnel:

1. associativité: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
2. commutativité $a + b = b + a$
3. distributivité $a(b + c) = ab + (ac)$
4. idempotence: $a + a + a + a \dots = a$ et $aaa \dots = a$
5. élément neutre: $a + 0 = 0 + a = a$ et $a1 = 1a = a$
6. absorption $0a = a$ et $1 + a = 1$
7. simplification: $a + \bar{a}b = a + b$ et $a(\bar{a} + b) = ab$
8. redondance: $ab + \bar{a}c = ab + \bar{a}c + bc$ et $(a + b)(\bar{a} + c) = (a + b)(\bar{a} + c)(b + c)$
9. DeMorgan: $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$
10. Involution: $\bar{\bar{a}} = a$
11. tiers exclu: $\bar{a} + a = 1$
12. non contradiction: $a\bar{a} = 0$

on retrouve les cinq autres opérateurs binaires, implication, équivalence, disjonction exclusive, non conjonction et non disjonction:

$$\begin{aligned}
 a \Rightarrow b &= \bar{a} + b, \\
 a \Leftrightarrow b &= (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) \\
 a \oplus b &= (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) \\
 a \uparrow b &= \bar{a}\bar{b} \\
 a \downarrow b &= \overline{a + b}
 \end{aligned}$$

qui ont les tables de vérité:

| | | |
|---------------|---|---|
| \Rightarrow | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| | | |
|-------------------|---|---|
| \Leftrightarrow | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | | |
|----------|---|---|
| \oplus | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| | | |
|------------|---|---|
| \uparrow | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| | | |
|--------------|---|---|
| \downarrow | 0 | 1 |
|--------------|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

III.2 Definitions:

Définition 16: antilogie L'antilogie est le cas ou une formule répond toujours faux, a l'inverse de la tautologie qui répond toujours vrai

III.3 Code Gray

Définition 17: Code Gray

III.4 Minterme, maxterme

Définition 18: Minterme, Maxterme on appelle Minterme toute fonction d'ordre n , prenant une seule fois la valeur 1

IV Relations et applications

IV.1 Definitions

Définition 19: Relation Une relation designe une sorte de lien entre 2 ensembles. soit une relation R , et deux ensembles X, Y , XRY veut dire que X est en relation avec Y

analyse combinatoire

IV.2 Ensembles naturel

Définition 20: Ensemble Naturel On appelle ensemble naturel (N, \preccurlyeq) tout ensemble ordonne qui satisfait les trois proprietes suivantes:

- Toute partie non vide admet un plus petit element
- Toute partie non vide et majoree admet un plus grand element
- L'ensemble n'admet pas de plus grand element

l'existence d'un ensemble naturel est acquise grace a l'axiome de l'infini (consulter wikipedia) Pour demontrer qu'un ensemble naturel est ordonne, on peut emettre la proposition suivante:

$$\exists m \in \{a, b\} (m \preccurlyeq a) \wedge (m \preccurlyeq b)$$

deux element a, b dans l'ensemble N . D'apres l'axiome de la paire, l'ensemble $\{a, b\}$ existe, n'est pas vide et admet donc un plus petit element (un ensemble naturel est toujours minore mais jamais majore) Comme $m \in N$ on a $(m = a) \wedge (m = b)$ et on deduit que $(a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ la demi droite $]n, \rightarrow[$ n'est pas vide, sinon n serait le plus grand element, ce qui va a l'encontre de la 3eme propriete. $]n, \rightarrow[$ admet un plus petit element appele $\text{succ}(n)$, le successeur de n

IV.3 recurrence

Définition 21: Theoreme principe de recurrence Toute partie de \mathbb{N} qui contient 0 et stable pour l'application successeur est egale a \mathbb{N}

Définition 22: theoreme recurrence simple Soit $P(n)$ un predicat sur \mathbb{N} et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:

- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$ heredite

alors $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq n \Rightarrow P(n)$

Définition 23: theoreme recurrence forte Soit $P(n)$ un predicat sur \mathbb{N} et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:

- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} (\forall k \in \mathbb{N}, a \leq k \leq n P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ heredite forte

alors $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq n \Rightarrow P(n)$

Définition 24: theoreme recurrence multiple Soit $P(n)$ un predicat sur \mathbb{N} et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:

- $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1 P(a+i)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+k)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq n \Rightarrow P(n)$

Définition 25: theoreme recurrence finie Soit $P(n)$ un predicat sur \mathbb{N} et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:

- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq n \leq m-1 P(n) \Rightarrow P(n+1)$

alors $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq n \leq m \Rightarrow P(n)$