I Logique Booleene

I.1 Definitions et props

Définition 1: Commutatif les variables peuvent etre inverses

Définition 2: L'arbre de Derivation C'est un format de pour representer une proposition

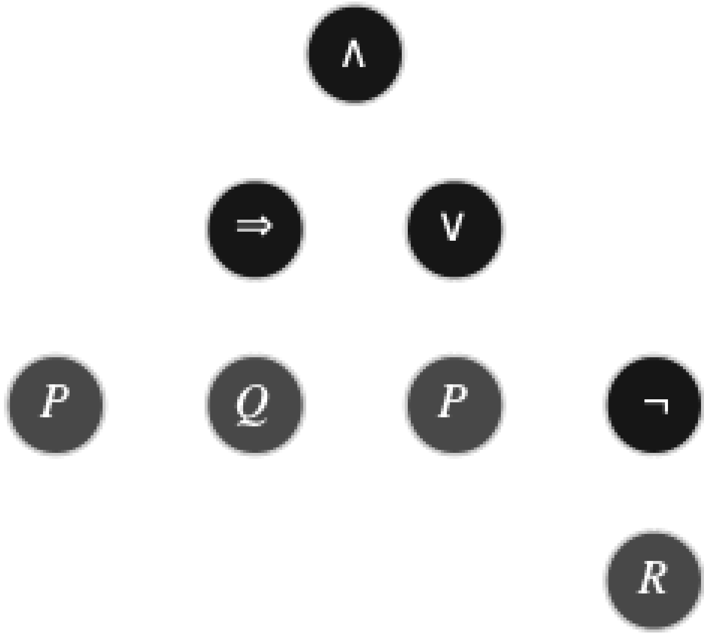

Figure 1: $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg R)$

Définition 3: Loi de De Morgan Soit P et Q deux assertions, alors
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

I.2 Tables de verite

il est assume qu'un connecteur est commutatif sauf mentione autrement

I.2.1 table de $\wedge$, dit conjonction, lu "et": q binaire

$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

I.2.2 table de $\vee$ dit disjonction, lu "ou": q binaire

$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$

$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Définition 4: Clause on dit clause conjonctive (ou respectivement disjontive) toute formule composé de conjonction (respectivement disjonction)

I.2.3 table de $\oplus$: q binaire

$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$

I.2.4 table de $\Rightarrow$: q binaire dit non commutatif

$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

autrement dit, vrai sauf si p est vrai et q est faux

I.2.5 table de $\Leftrightarrow$: q binaire

$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

vrai si les deux variables ont la meme valeur

I.2.6 Proprietes

- comutativite de $\wedge$ et $\vee$

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

- associativite de $\wedge$ et $\vee$

$((P \wedge Q) \wedge R) \equiv ((q \wedge R) \wedge P)$ $((P \vee Q) \vee R) \equiv ((Q \vee R) \vee P)$

- idempotence de $\wedge$ et $\vee$

$(p \wedge p) \equiv p$
$(p \vee p) \equiv p$

I.3 Modus{ponens, tollens}

Définition 5: modus ponen Soit P et Q deux propositions, si P est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors Q est vrai.

$$P, P \Rightarrow Q \dashv Q$$

car $P \Rightarrow q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$

Définition 6: modus ponen Soit P et Q deux propositions, si $\neg Q$ est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai, alors la proposition $\neg P$ est vrai.

$$\neg Q, P \Rightarrow Q \dashv \neg P$$

I.4 TPs

I.4.1 Question 1: Ecrire une fonction `interpretations(nbVar)` qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles

la technique que j'ai opte est de calculer tous les nombre possible en binaire jusqu'a 2^{nbvar}, puis de les retranscrire en tuple de vrai/faux. Voici le code (on assume une fonction translate to tuple defini comme le suit)

```python
# Q1: ecrire une fonction Inter(nbvar) qui renvoie le tuple constitue de toutes les interpretations possible de nbvar variables propositionnelles
def translatetotuple(binary: str):
    result = []
    for i in binary:
        if i == '1':
            result.append(True)
        else:
            result.append(False)

    return tuple(result)

def inter(nbvar):
    finalresult = ()
    for i in range(nbvar**2):
        result = bin(i)
        result = result[2:]
        while len(result)<nbvar:
            result = '0'+result
        result = translatetotuple(result)
        finalresult += result,
    return finalresult
```

II Axiomes et predicats

II.1 Ensembles

Définition 7: ensemble Un ensemble est une collection X d'objets definis et unique. un objet appartenant a l'ensemble est dit membre de X et on dit que l'objet et membre. un membre est unique dans un ensemble, il ne peut pas y avoir deux fois le meme element

exemple:

$$\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$$

sur python, un type ensemble existe qui est appele `set`

Définition 8: Difference Soit X et Y deux enembles. la difference entre les ensembles X et Y est l'ensemble $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, qui est l'ensembles qui contients les elements de X mais pas les elements de Y. on note aussi XY l'ensemble qui contient seulement les differences d'un ensemble $X \cap Y$ est $X \Delta Y$

Définition 9: Cardinal On appelle le cardinal d'un ensemble sa taille. Lorsqu'un ensemble est fini, le cardinal est la longueur de cette ensemble

II.2 Predicats

Définition 10: Predicat enonce contenant des variables tel qu'en substituant chaque variables par une valeure choisi, on obtient une proposition

exemple: $x|P(x)$ (se lit x tel que P(x)) est un predicat dans lesquelles la proposition P(x) est vraie pour x la theorie de ZF distingue deux tyupes de predicats:

- 1. predicat collectivisant: un predicat $P(X)$ tel que les valeurs de x pour lesquelles la proposition P(x) est vrai constituent un enssemble note $(x|P(x))$
- 2. predicat non collectivisant: un predicat P(x) tel que les valeurss x pour lesquelles la prop P(X) est vraie ne constituent pas un ensemble

considerant le predicat $P(x, y)$ defini sur deux variables reelles x et y suivant:

$$x^2 - y = 1$$

on peut definir le predicat $Q(x)$ de la variable suivante:

$$\exists y \in \mathbb{R} x^2 - y = 1$$

II.3 Quantificateurs

Définition 11: quantificateur Il existe 3 quantificateurs:
- $\forall$ qui se lit “pour tout” (appele forall en latex et typst
- $\exists$ qui se lit “il existe”
- $\exists!$ qui est un “il existe” unique

le quantificateur $\exists!$ est lui meme une proposition qui est: $(\exists x \in XP(X)) \wedge (\forall x \in X \forall y \in XP(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$ le terme de gauche codel’existence et le terme droit l’unicite en exprimant sous forme contraposee que deux elements distincts x et y de l’ensemble X ne peuvent simultanement satisfaire le predicat $P(x) : x \neq\Rightarrow \neg(P(x) \wedge P(y))$.

II.4 Axiomes

Définition 12: axiome de l'inclusion Soit X et Y deux ensembles. on dit que X est inclus dans Y ou que X est une partie de Y ou encore que X est un sousensemble de Y, ce que l’ont note $X \subseteq Y$ ou $Y \supseteq X$ seulement si $\forall x x \in X \Rightarrow x \in Y$

Définition 13: axiome d'extension

Soit X et Y deux ensembles, alors $X = Y$ si et seulement si

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$$

Définition 14: axiome de la paire soit a, b deux objet. le predicat $(x = a) \vee (x = b)$ est collectivisant en x. l’ensemble definit est $\{a, b\}$

$$\{x \mid (x = a) \vee (x = b)\}$$

III Caclul Booleen

III.1 Algebre de boole

soit $\mathbb{B}$ un enssemble munit d’une structure algebrique, on l’appelle algebre de boole.

Définition 15: on appelle booleen toute variable defini sur un ensemble a deux elements

Pour simplifier l’ecriture des expressions logique, l’operande $\neg$ peut etre ecrit de cette facon: $\bar{x}$. et on a

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

dans le cadre de l’algebre de Boole, un litterale designe la aussi une variable x (litteral positif) ou sa negation $\bar{x}$ (litteral negatif)

III.1.1 Proprietes de calcul

on dispose des nombreuses proprietess suivantes heritees du calcul propositionnel:

1. associativite: $(a+b)+C = a+(b+c) = a+b+c$
2. commutativite $a+b = b+a$
3. distributivite $a(b+c) = ab+(ac)$
4. idempotence: $a+a+a+a... = a$ et $aaa.... = a$
5. element neutre: $a+0 = 0+a = a$ et $a1 = 1a = a$
6. absorption $0a = a$ et $1+a = 1$
7. simplifcication: $a+\bar{a}b = a+b$ et $a(\bar{a}+b) = ab$
8. redondance: $ab+\bar{a}c = ab+\bar{a}c+bc$ et $(a+b)(\bar{a}+c) = (a+b)(\tilde{a}+c)(b+c)$
9. DeMorgan: $\bar{ab} = \bar{a}+\bar{b}$
10. Involution: $\bar{\bar{a}} = a$
11. tiers exclu: $\bar{a}+a = 1$
12. non contradiction: $a\bar{a} = 0$

on retrouve les cinq autres operateur binaire, implication, equifvvalence, disjonction exclusive, non conjenction et non disjonction:

$$a \Rightarrow b = \tilde{a}+b,$$

$$a \Leftrightarrow b = (\tilde{a}+b)\left(a+\tilde{b}\right)$$

$$a \oplus b = (a+b)\left(\tilde{a}+\tilde{b}\right)$$

$$a \uparrow b = \tilde{ab}$$

$$a \downarrow b = \widetilde{a+b}$$

qui ont les tables de verite:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1

0	1	0
1	0	0

III.2 Definitions:

Définition 16: antilogie L'antilogie est le cas ou une formule repond toujours faux, a l'inverse de la tautologie qui répond toujours vrai

III.3 Code Gray

Définition 17: Code Gray

III.4 Minterme, maxterme

Définition 18: Minterme, Maxterme on appelle Minterme toute fonction d'ordre n, prenant une seule fois la valeur 1

IV Relations et applications

IV.1 Definitions

Définition 19: Relation Une relation designe une sorte de lien entre 2 ensembles. soit une relation R, et deux ensembles X,Y, XRY veut dire que X est en relation avec Y

analyse combinatoire

IV.2 Ensembles naturel

Définition 20: Ensemble Naturel On appelle ensemble naturel $(N,\preccurlyeq)$ tout ensemble ordonne qui satisfait les trois proprietes suivantes:
- Toute partie non vide admet un plus petit element
- Toute partie non vide et majoree admet un plus grand element
- L'ensemble n'admet pas de plus grand element

l'existance d'un ensemble naturel est acquise grace a l'axiome de l'infini (consulter wikipedia) Pour demontrer qu'un ensemble naturel est ordonne, on peut emettre la proposition suivante:

$$\exists m \in \{a,b\}(m \preccurlyeq a) \wedge (m \preccurlyeq b)$$

deux element a,b dans l'enemble N. D'apres l'axiome de la paire, l'ensemble $\{a,b\}$ existe, n'est pas vide et admet donc un plus petit element (un ensemble naturel est toujours minore mais jamais majore) Comme $m \in N$ on a $(m = a) \wedge (m = b)$ et on deduit que $(a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ la demi droite $\rrbracket n, \to \llbracket$ n'est pas vide, sinon n serait le plus grand element, ce qui va a l'encontre de la 3eme propriete. $\rrbracket n, \to \llbracket$ admet un plus petit element appele $succ(n)$, le successeur de n

IV.3 recurrence

Définition 21: Theoreme principe de recurrence Toute partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et stable pour l'application successeur est egale a $\mathbb{N}$

Définition 22: theoreme recurrence simple Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)$ heredite

alors $\forall n \in [\![a, \rightarrow [\![P(n)$

Définition 23: theoreme recurrence forte Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} (\forall k \in [\![a, n]\!] P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ heredite forte

alors $\forall n \in [\![a, \rightarrow [\![P(n)$

Définition 24: theoreme recurrence multiple Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $\forall i \in [\![0, k-1]\!] P(a+i)$ init
- $\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+k)$

alors $\forall n \in [\![a, \rightarrow [\![P(n)$

Définition 25: theoreme recurrence finie Soit $P(n)$ un predicat sur $\mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions sont satisfaites:
- $P(a)$ init
- $\forall n \in [\![a, m-1]\!] P(n) \Rightarrow P(n+1)$

alors $\forall n \in [\![a, m]\!] P(n)$