Algebre de boole

soit $\mathbb{B}$ un enssemble munit d'une structure algebrique, on l'appelle algebre de boole.

Définition 1: on appelle booleen toute variable defini sur un ensemble a deux elements

Pour simplifier l'ecriture des expressions logique, l'operande $\neg$ peut etre ecrit de cette facon: $\bar{x}$. et on a

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

dans le cadre de l'algebre de Boole, un litterale designe la aussi une variable x (litteral positif) ou sa negation $\bar{x}$ (litteral negatif)

Proprietes de calcul

on dispose des nombreuses proprietess suivantes heritees du calcul propositionnel:

1. associativite: $(a + b) + C = a + (b + c) = a + b + c$
2. commutativite $a + b = b + a$
3. distributivite $a(b + c) = ab + (ac)$
4. idempotence: $a + a + a + a... = a$ et $aaa.... = a$
5. element neutre: $a + 0 = 0 + a = a$ et $a1 = 1a = a$
6. absorption $0a = a$ et $1 + a = 1$
7. simplifcication: $a + \bar{a}b = a + b$ et $a(\bar{a} + b) = ab$
8. redondance: $ab + \bar{a}c = ab + \bar{a}c + bc$ et $(a + b)(\bar{a} + c) = (a + b)(\tilde{a} + c)(b + c)$
9. DeMorgan: $\bar{ab} = \bar{a} + \bar{b}$
10. Involution: $\bar{\bar{a}} = a$
11. tiers exclu: $\bar{a} + a = 1$
12. non contradiction: $a\bar{a} = 0$

on retrouve les cinq autres operateur binaire, implication, equifvvalence, disjonction exclusive, non conjenction et non disjonction:

$$a \Rightarrow b = \tilde{a} + b,$$

$$a \Leftrightarrow b = (\tilde{a} + b)\left(a + \tilde{b}\right)$$

$$a \oplus b = (a + b)\left(\tilde{a} + \tilde{b}\right)$$

$$a \uparrow b = \widetilde{ab}$$

$$a \downarrow b = \widetilde{a + b}$$

qui ont les tables de verite:

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1

0	1	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0