# UE13 — Architecture des ordinateurs et système d'exploitation

C. Nguyen, J. Razik

Dpt. Informatique — UTLN

2024–2025

# Logique Combinatoire

# Fonction booléenne à plusieurs variables

- $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y \in \{0,1\}$
- Table de vérité

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $f(0)$ |
| 1 | $f(1)$ |

| $x_1$ | $x_0$ | $f(x_0, x_1)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $f(0,0)$ |
| 0 | 1 | $f(1,0)$ |
| 1 | 0 | $f(0,1)$ |
| 1 | 1 | $f(1,1)$ |

# Fonction booléenne à plusieurs variables

- Fonctions à 1 variable : exactement 4 fonctions possibles

| $x$ | $f(x)$ | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $f_1$, fonction *Faux* ou *False* |
| 1 | 0 | |
| 0 | 0 | $f_2$, fonction *Identité* ou *Id* |
| 1 | 1 | |
| 0 | 1 | $f_3$, fonction *Non* ou *Not* |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | $f_4$, fonction *Vrai* ou *True* |
| 1 | 1 | |

# Fonction booléenne à plusieurs variables

- Fonctions à 2 variables booléennes $f(x_1, x_2)$
  - $2^{2^2} = 16$ fonctions différentes
    - « Faux »,
    - « Vrai »,
    - « $x_1$ »,
    - « $x_2$ »,
    - « NON $x_1$ »,
    - « NON $x_2$ »,
    - « ET » (*AND*),
    - « OU » (*OR*),
    - « OU EXCLUSIF » (*XOR*),
    - « NON-ET » (*NAND*),
    - « NON-OU » (*NOR*),
    - etc ...
- Fonctions à $n$ variables booléennes
  - $2^{2^n}$ fonctions,
  - On peut se ramener aux fonctions de bases à 1 ou 2 variables.

# Algèbre de Boole

- $B$ : $(\{0,1\}, OU, ET, NON)$, ou noté $(\{0,1\}, +, ., \overline{\ })$
- Propriétés ensemblistes
  - Lois de composition internes : $ET$ et $OU$ sont internes, c'est-à-dire à valeur dans $\{0,1\}$ ;
  - La loi ET est commutative et associative ;
  - La loi OU est commutative et associative ;
  - Distributivité du $ET$ sur le $OU$ et du $OU$ sur le $ET$ ;
  - Idempotence : $A\ ET\ A = A$, $A\ OU\ A = A$ ;
  - Élément neutre : 1 pour $ET$, 0 pour $OU$ ;
  - Élément absorbant : 0 pour $ET$, 1 pour $OU$ ;
  - $\forall A,\ A + \overline{A} = 1$ ;
  - $\forall A,\ A.\overline{A} = 0$.
- Lois de De Morgan :
  - $\forall (A,B),\ \overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$ ;
  - $\forall (A,B),\ \overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ ;
  - $\overline{A_1 + \cdots + A_n} = \overline{A_1}. \cdots . \overline{A_n}$ ;
  - $\overline{A_1. \cdots . A_n} = \overline{A_1} + \cdots + \overline{A_n}$ ;

# Décomposition en *OU*

- Soit $f(x,y,z)$ telle que $f(0,1,0) = f(1,0,0) = 1$ et $f(x,y,z) = 0$ ailleurs
  - Soit $f_{010}(x,y,z)$ telle que $f_{010}(0,1,0) = 1$ et $f_{010}(x,y,z) = 0$ ailleurs ;
  - Soit $f_{100}(x,y,z)$ telle que $f_{100}(1,0,0) = 1$ et $f_{100}(x,y,z) = 0$ ailleurs ;
  - Soit $g(x,y,z)$ définie par $g(x,y,z) = f_{010}(x,y,z) + f_{100}(x,y,z)$

  $\Rightarrow$ Alors $f = g$

- Généralisation : soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ une fonction booléenne à $N$ variables booléennes $x_i$
  - $\{\underline{a}_i\}$, $q$ multiplets de $N$ bits
  - $f(\underline{x}) = 1 \Leftrightarrow \underline{x} \in \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_q\}$
  - On peut créer $q$ fonctions $f_i(\underline{x})$ telles que $f_i(\underline{x}) = 1$ si et seulement si $\underline{x} = \underline{a}_i$
  - $f(\underline{x}) = f_1(\underline{x}) + \cdots + f_q(\underline{x})$

# Monôme booléen

Produit booléen par l'opérateur *ET* de $N$ variables distinctes, complémentées ou non

- Exemple : $A.B.C$
  - $A.B.C = 1$ si et seulement si $A$, $B$ et $C$ valent 1, 0 sinon
- Exemple : $A.\overline{B}.C$
  - $A.\overline{B}.C = 1$ si et seulement si $A$ et $C$ valent 1 et que $B$ vaut 0

Si $f(x_1, \ldots, x_N) = 1$ pour $(a_1, \ldots, a_N)$, $a_i \in \{0, 1\}$, alors

- $f(\underline{x}) = u_1. \cdots .u_N$, tel que

$$\forall i \in [1, N], \begin{cases} u_i & = x_i \; si \; a_i = 1 \\ u_i & = \overline{x}_i \; si \; a_i = 0 \end{cases}$$

# Forme normale disjonctive ($OU$)

- Forme normale disjonctive
  - disjonction ($OU$) de conjonctions ($ET$)
  - définition des monômes booléens où $f$ vaut 1
  - disjonction entre ces monômes
- Exemple
  - $f(\underline{x}) = 1$ si et seulement si $\underline{x} = (0, 1, 0)$ ou $\underline{x} = (1, 0, 0)$

$$\begin{cases} f_{010}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1.x_2.\overline{x}_3 \\ f_{100}(x_1, x_2, x_3) = x_1.\overline{x}_2.\overline{x}_3 \end{cases}$$

  - $f = f_{010} + f_{100}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{010}(x_1, x_2, x_3) + f_{100}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1.x_2.\overline{x}_3 + x_1.\overline{x}_2.\overline{x}_3$$

- Forme normale conjonctive ($ET$)
  - Autre expression du polynôme booléen : conjonction de disjonctions

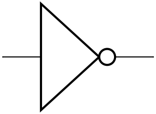
# Polynôme en *NON-ET* (*NAND*) et en *NON-OU* (*NOR*)

- 3 opérateurs logiques générateurs
  - *ET*, *OU*, *NON*
- 1 opérateur pour les générer tous : *NON-ET* (NAND)
  - $NAND(x, y) = \overline{x.y}$
  - $NAND(x, x) = \overline{x}$
  - $NAND(NAND(x, y), NAND(x, y)) = \overline{\overline{x.y}} = x.y$
  - $NAND(NAND(x, x), NAND(y, y)) = \overline{\overline{x}.\overline{y}} = \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}} = x + y$
- Même conclusion avec l'opérateur *NON-OU* (NOR)

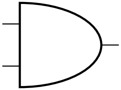
$\Rightarrow$ On peut exprimer un polynôme booléen avec uniquement des opérateurs *NON-ET* (respectivement *NON-OU*)

# Réseau logique

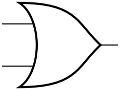
## Portes logiques (Symboles norme américaine)



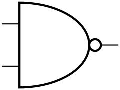
(a) Porte *NON/NOT*



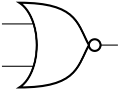
(b) Porte *ET/AND*



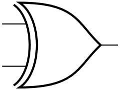
(c) Porte *OU/OR*



(d) Porte *NON-ET/NAND*

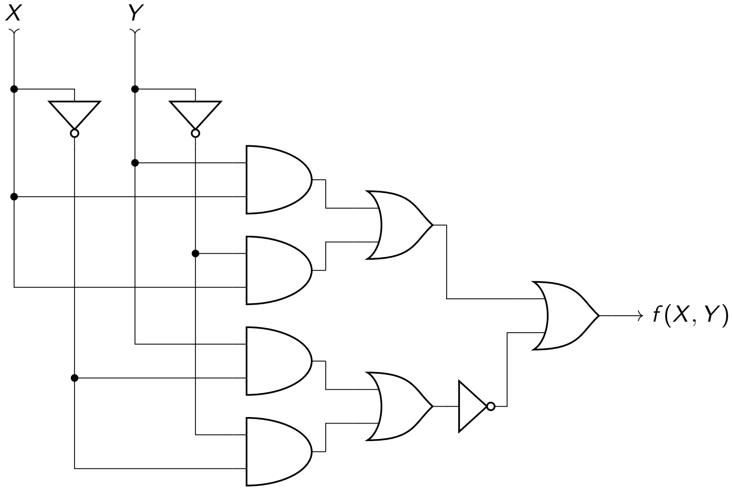


(e) Porte *NON-OU/NOR*

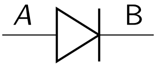


(f) Porte *XOR*

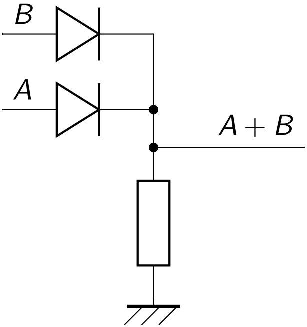
# Réseau logique : exemple



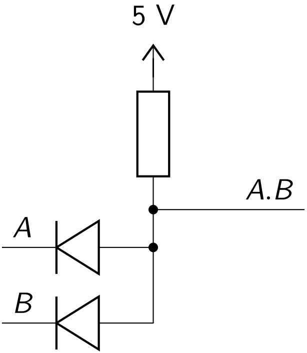
# Réalisation physique des opérateurs logiques




Une diode

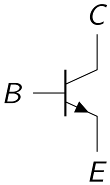



(g) Réalisation d'une porte *OU*

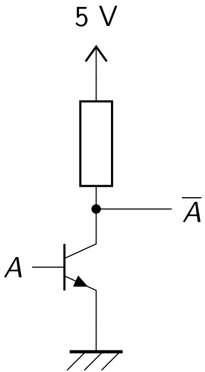



(h) Réalisation d'une porte *ET*

# Réalisation physique des opérateurs logiques




(i) Un transistor *NPN*




(j) Réalisation d'une porte *NON* avec un transistor *NPN*

# Réduction d'un polynôme booléen

- Objectifs
  - Simplifier l'équation
  - Diminuer le nombre de monômes et leur complexité
  - Diminuer la complexité et le coût de réalisation
- 2 méthodes
  - Algébrique
    - Utilisation des propriétés ensemblistes
  - Graphique
    - Utilisation des tables de Karnaugh

# Réduction d'un polynôme booléen

- Comment ?
  - Fusion de monômes avec un facteur et son inverse
    - Exemple : $\overline{A}.B.\overline{C}$ et $A.B.\overline{C}$
- Identification de ces monômes candidats
  - Réordonner la table de vérité
  - Code binaire réfléchi ou *code de Gray*
  - 1 seul bit change entre deux lignes contiguës du tableau
  - Exemple sur 3 bits : 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100.

# Code binaire réfléchi

Exemple : $f(A, B, C) = A + B.C$

| A | B | C | A+B.C |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(k) Ordre binaire habituel

| A | B | C | A+B.C |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | *1* | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | **1** | 1 |
| 1 | *0* | **0** | 1 |

(l) Ordre binaire réfléchi

# Table de Karnaugh

Représentation réordonnée de la table de vérité sur 2 dimensions

| A | B | C | A+B.C |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | *1* | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | **1** | 1 |
| 1 | *0* | **0** | 1 |

| $A$ \ $BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Table de Karnaugh

Exemple de tables de Karnaugh à 2, 3 et 4 variables.

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

$$f(A,B) = B$$

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f(A,B,C) = A + B.C$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$$f(A,B,C,D) = CD + AB\overline{D}$$

# Table de Karnaugh

Exemple d'une table de Karnaugh.

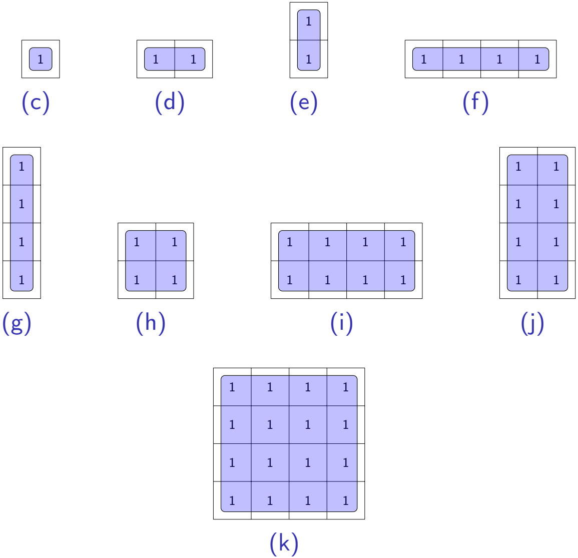
| $A$ \ $BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

(a)

| $A$ \ $BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Table de Karnaugh

Les différents regroupements valides pour une table de Karnaugh d'au plus 4 variables




(c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k)

# Les cas indéterminés

| $A$ \ $BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | - | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

(m) Table sans tenir compte de la valeur indéterminée.

| $A$ \ $BC$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | - | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

(n) Table en tenant compte de la valeur indéterminée.

# Table de Karnaugh à plus de 4 variables

## Exemple de table de Karnaugh à 6 variables

| dc \ ba | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | - | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

*fe*= 00

| dc \ ba | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*fe*= 01

| dc \ ba | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | - | - | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

*fe*= 10

| dc \ ba | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*fe*= 11

# Fonctions booléennes et multiplets (sur n bits)

Fonction $f : \{0,1\}^N \to \{0,1\}^M$

- $\underline{y} = f(\underline{x})$
- Introduction de fonctions à valeur sur $\{0,1\}$ telles que
  - $f_0, \ldots, f_{M-1}$
  - $y_0 = f_0(\underline{x}) = f_0(x_0, \ldots, x_{N-1})$
  - $\vdots$
  - $y_{M-1} = f_{M-1}(\underline{x})$

# Exemples de fonction booléennes usuelles

# Additionneur ADD sur $N$ bits

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & C_{N-2} & \cdots & C_i & C_{i-1} & \cdots & C_1 & C_0 & C_{-1} \\
+ & & X_{N-1} & \cdots & X_{i+1} & X_i & \cdots & X_2 & X_1 & X_0 \\
+ & & Y_{N-1} & \cdots & Y_{i+1} & Y_i & \cdots & Y_2 & Y_1 & Y_0 \\
\hline
= & C_{N-1} \leftarrow & S_{N-1} & \cdots & S_{i+1} & S_i & \cdots & S_2 & S_1 & S_0
\end{array}
$$

Figure – Algorithme d'addition sur $N$ bits avec retenues amont et aval.

# Additionneur ADD sur $N$ bits

## Tranche sur 1 bit

| $C_{i-1}$ \ $X_iY_i$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

(l) La fonction de sortie $S_i$.

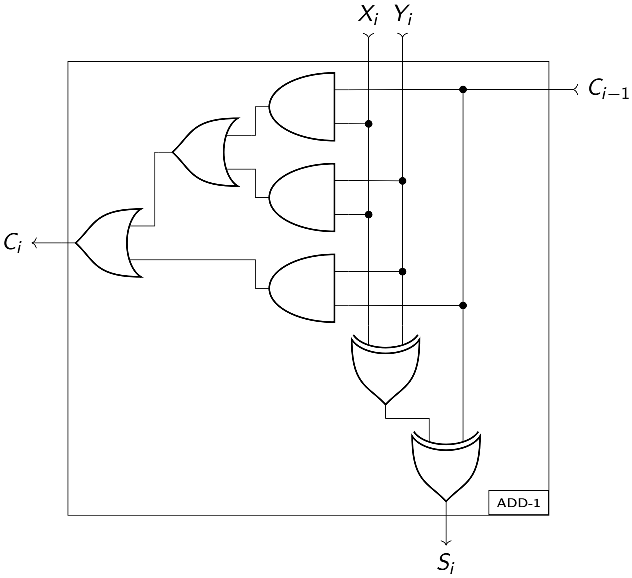
| $C_{i-1}$ \ $X_iY_i$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

(m) La fonction de retenue $C_i$.

Table – Tables de Karnaugh d'un additionneur 1 bit avec retenues amont et aval.

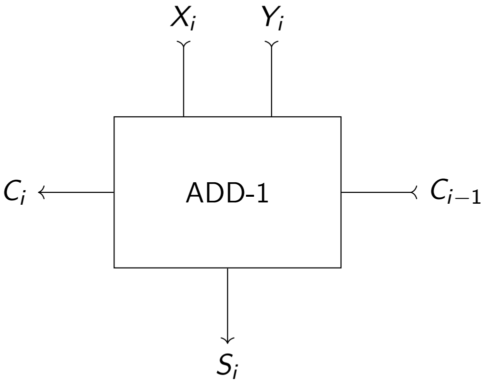
# Additionneur ADD sur $N$ bits

## Tranche sur 1 bit

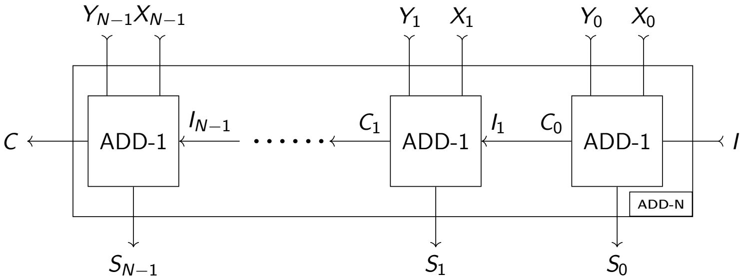


# Additionneur ADD sur $N$ bits

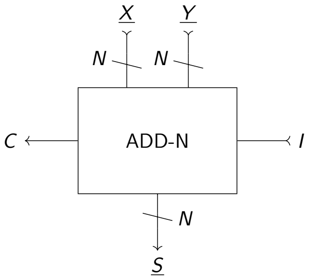
## Tranche sur 1 bit



# Additionneur ADD sur $N$ bits



# Additionneur ADD sur $N$ bits



# Codeur/Décodeur ENC/DEC sur $N$ bits

## Codeur $2^N$ vers $N$

| $X_3$ | $X_2$ | $X_1$ | $X_0$ | $S_1$ | $S_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | - | 0 | 1 |
| 0 | 1 | - | - | 1 | 0 |
| 1 | - | - | - | 1 | 1 |

(a) Codeur 4 vers 2.

| $X_3$ | $X_2$ | $X_1$ | $X_0$ | $S_1$ | $S_0$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | - | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | - | - | 1 | 0 | 1 |
| 1 | - | - | - | 1 | 1 | 1 |

(b) Codeur 4 vers 2 corrigé.

Table – Codeur 4 vers 2.

On en déduit les équations de ceux-ci :

- $S_1 = X_2 + X_3$,
- $S_0 = X_3 + \overline{X_2}.X_1$,
- et par déduction logique $G = X_0 + X_1 + X_2 + X_3$.

# Codeur/Décodeur ENC/DEC sur $N$ bits

## Codeur $2^N$ vers $N$

| $X_3X_2$ \ $X_1X_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(a) Table de Karnaugh du bit $S_1$.

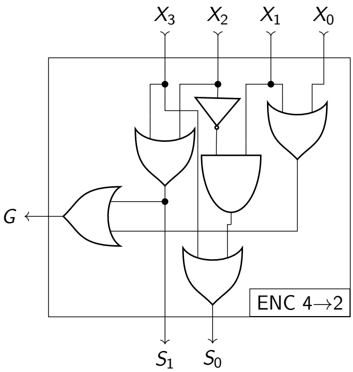
| $X_3X_2$ \ $X_1X_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(b) Table de Karnaugh du bit $S_0$.

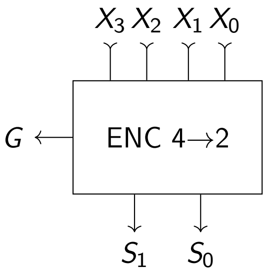
Table – Tables de Karnaugh des sorties d'un codeur 4 vers 2.

# Codeur/Décodeur ENC/DEC sur $N$ bits

## Codeur $2^N$ vers $N$




(a) Schéma de réalisation.




(b) Représentation simplifiée.

Figure – Encodeur 4 vers 2.

# Codeur/Décodeur ENC/DEC sur $N$ bits

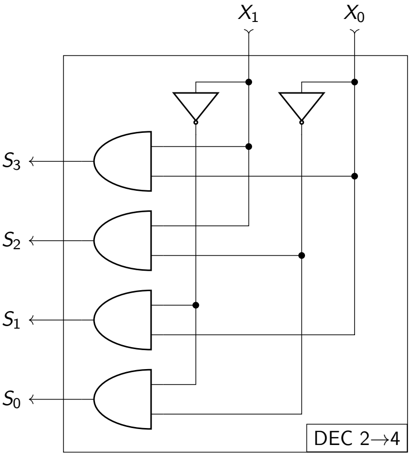
## Décodeur $N$ vers $2^N$

| $X_1$ | $X_0$ | $S_3$ | $S_2$ | $S_1$ | $S_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

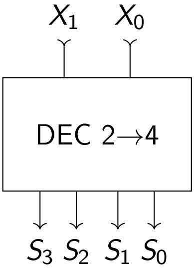
Table – Table de vérité d'une décodeur 2 vers 4.

# Codeur/Décodeur ENC/DEC sur $N$ bits

## Décodeur $N$ vers $2^N$




(a) Schéma de réalisation.




(b) Représentation simplifiée.

Figure – Décodeur 2 vers 4.

# Multiplexeur/Démultiplexeur sur $N$ bits

## Multiplexeur $M$ vers 1

| $S$ | $X_1$ | $X_0$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(a) Table de vérité.

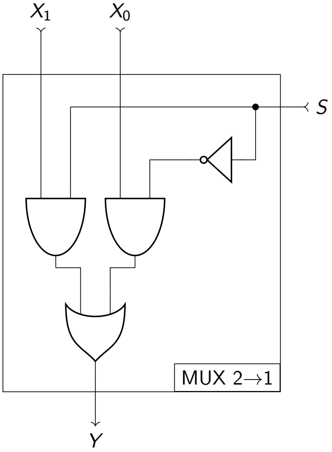
| $S$ \ $X_1X_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

(b) Table de Karnaugh.

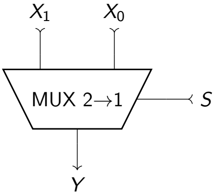
Table – Multiplexeur 2 vers 1 sur 1 bit.

# Multiplexeur/Démultiplexeur sur $N$ bits

## Multiplexeur $M$ vers 1




(a) Schéma de réalisation.




(b) Représentation simplifiée.

Figure – Multiplexeur 2 vers 1 sur 1 bit.

# Multiplexeur/Démultiplexeur sur $N$ bits

## Multiplexeur $M$ vers 1

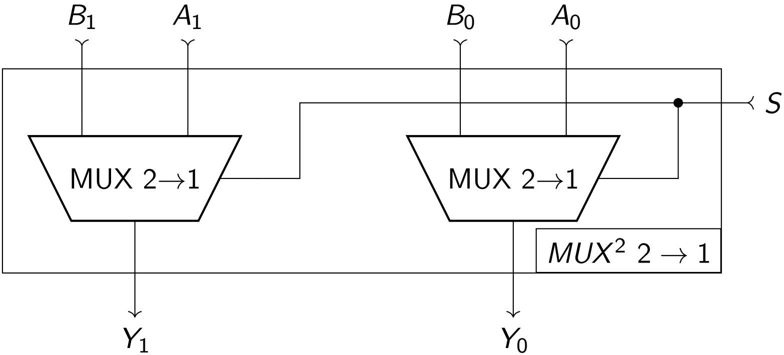



Figure – Multiplexeur 2 vers 1 sur 2 bits.

# Multiplexeur/Démultiplexeur sur $N$ bits

## Multiplexeur $M$ vers 1

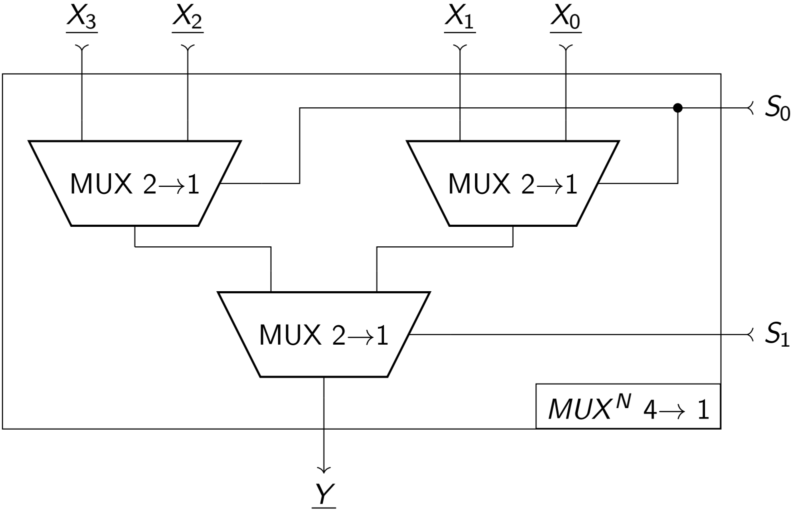
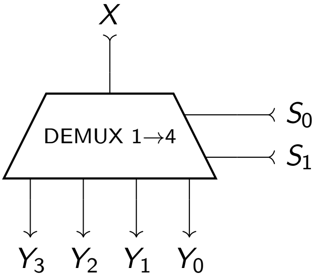


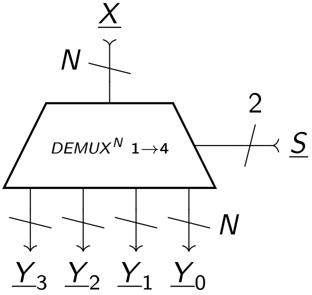

Figure – Multiplexeur 4 vers 1 sur $N$ bits, réalisé à partir d'un arbre de MUX2→1.

# Multiplexeur/Démultiplexeur sur $N$ bits

## Démultiplexeur 1 vers $M$




(a) Version 1 bit.




(b) Version $N$ bits.

Figure – Représentation d'un démultiplexeur 1 vers 4.

# Unité Arithmétique et Logique UAL sur $N$ bits

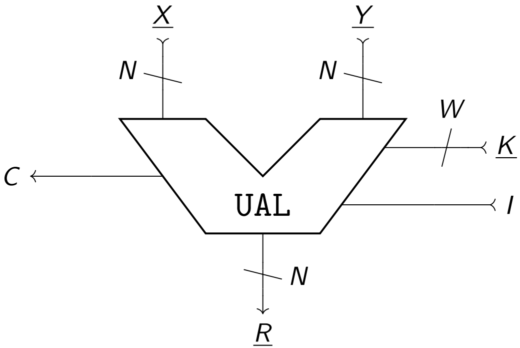



Figure – Représentation d'une Unité Arithmétique et Logique sur $N$ bits.