Mehdi

November 21, 2023

1 fonctions

1.1 definitions

- injective si les images ne partagent pas d'antécedents
- surjective si toutes les images possèdent au moins un antécedent
- bijective si toutes les images ont un antécedent unique

1.2 Logarithme népérien

Propriétés:

$$\ln \to \mathbb{R}_*^+,$$
$$\frac{d}{dx}\ln \to \frac{1}{x}$$
$$\ln(1) = 0$$

1.2.1 Propriétés du logarithme

- ln est une bijection strict-crois de $\mathbb{R}_+^*$
- Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$:
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$
- Pour tout rél $a > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:
$$\ln(a^n) = a\ln(a)$$

Definition 1

$$\log_a : x \to \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \tag{1}$$

1.2.2 Propriétés du logarithme en base a

- La fonction $\log_a$ est une bijection de
$$\mathbb{R}_+^*$$
- on a:
$$\log_a(1) = 0 \quad et \quad log_a(a) = 1$$
- pour tout réels $\{c, d\} > 0$:
$$log_a(cd) = log_a(c) + log_a(d)$$
$$log_a(\frac{c}{d}) = log_a(c) - log_a(d)$$
- pour tout réel $c > 0$, on a
$$\log_a(ac) = \log_a(c) + 1$$
- on suppose que $a > 1$. Donc, $\forall c > 0$ on a:
n est la partie entière de $\log_a(c)$ (càd $n \leq \log_a(c) < n + 1$) si et seulement si
$$a^n \leq c < a^{n+1}$$

Exemple 1 *Dans le cas du log en base 10, on obtient:*

$$\log_{10}(10c) = \log_1 0(c) + 1$$

et la partie entière de $\log_1 0(c)$ *est le nombre entier* n *tel que:*

$$10^n \leq x < 10^{n+1} \tag{2}$$

ou autrement dit $c \in [10^n, 10^{n+1}]$

1.3 exponentielle

Definition 2 *La fonction exponentielle notée* exp*, est défini sur* $\mathbb{R}$

$$\exp(0) = 1 \quad et \quad \exp'(x) = \exp(x), \forall x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

1.3.1 Propriétés

- exp *est réciproque de* ln*: c'est une bijection strict-crois de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$*, et*
$$\forall x, \ln(\exp(x)) = x \quad et \quad \forall x > 0 \exp(\ln(x))x$$
$$\exp(1) = e$$

Puisque exp *est réciproque de* ln*, son graphe est symmetrique*

1.4 transformations

- translation verticale $f(x) + c$
- translation horizontale $f(x + c)$
- dilation ou contraction verticale $f(x)a$
- dilation ou contraction horizontale $f(xa)$

1.5 trigonometrie

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x); \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x); \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x); \sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x); \sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$$

2 Suites

Propriété 1 *Suites arithmetique terme* $u_n = an + u_0$*, où* a *est la raison*
somme $n\frac{u_0+u_n}{2}$

Propriété 2 *Suites geo terme* $u_n = u_0 * q^n$*, où* q *est la raison*
somme $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

3 Limites

3.1 limites d'une suite

Definition 3 *on dit d'une suite* x_n *qu'elle a une limite si:*

- *tend vers* $+\infty$ *si:*
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, x_n \geq M$$
- *tend vers* $-\infty$ *si:*
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, x_n \leq M$$

Une suite est divergente si elle n'admet pas de limites

Definition 4 *operations sur les limites*

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

	$f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$	$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x)$	$f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$	$f(x) = \frac{1}{x}\cos(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	0	1	0	$\nexists$
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$	1	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	1	0	$-\infty$	0

3.2 limites d'une fonction

Théoreme 1 *Des gendarmes on considère 3 fonctions f, g et h, et une intervalle a pour lequelles:*

$$\forall x \in I \ af(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

si f et h ont les mêmes limites, alors g a aussi la limite:

$$\lim_{limitx\to a} f(x) = \lim_{limitx\to a} g(x) = \lim_{limitx\to a} h(x)$$