Notes M18

Mehdi Ben Ahmed

December 19, 2023

Contents

1 Nombres Complexes

1.1 Definition

Soit z un nombre complexe. l'écriture $z = a + bi$ est dite la forme algébrique de z.

- *a est la partie réele de z*, notée $Re(z)$, si $a = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.

- *b est la parie imaginaire de z*, notée $Im(z)$, si $b = 0$, z est un réel

1.2 Module et argument

1.2.1 Définition

1.3 Racine carrée

Soit z un complexe non nul, on cherche a résoudre l'equation $w^2 = z$
on peut écrire w et z sous forme cartésienne et identifier:
si $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $w = \alpha + i\beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on obtient: On obtient aussi, d'après l'égalité des modules, $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.3.1 Racine énieme

Soient w et z deux nombre complexes, on cherche a résoudre l'équation $w^n = z$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > 2$, on utilisera le plus souvent la forme exponentielle.

Définition 1.3.1 *racine n-ieme de l'unité Resolvons $w^n = 1$*

1. *on emploie la forme polaire, $w = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$*

2. *n est un entier positif, donc le nombre complexe a n racines*

3. *la formule pour obtenir un nombre complexe est*

$$\sqrt[n]{r}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

on obtient donc, pour $w = 4i$:

$$4i = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$
$$k = 0, alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$w_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow w_1 = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

1.4 Les Polynomes

Un polynome est définit comme suit

$$P(x) = 0 + 0_1X + 0_2X^2 + 0_3X^3 + ... + 0_nX^n$$

polynome comme objet abstrait P

Exemple 1 *$p(x) = x^2$ comme polynome*

Exemple 2 *En Particulier $P = 0$ comme polynome*

Définition 1.4.1 *on dit que z_0 est une racine de P tel que $P(z_0) = 0$*
On utilie le mot racine dans les deux senses

- *racine (n-ieme) d'un nombre complexe tel que $z_0^n = w$*
- *racine d'un polynome tel que $P(z_0) = 0$*

Définition 1.4.2 *Soit P un polynôme*
on appelle degré en polynôme
la puissance la plus grande pour laquelle $n \neq 0$

Exemple 3

$$\begin{aligned} P(x) = 1 + x^2 + x^27 \\ deg = 27 \end{aligned}$$

Définition 1.4.3 *Question Soit P un polynôme de degré n combien de racine admet-t-il, (complexe et réel)?*

Exemple 4

$$P(z) = z^n - 1$$

2 racines réels, et 2 racines complexes

$$\begin{aligned} z_0 racines \iff z_0^2 = 0 \\ donc \\ z_0 \quad est\ la\ racine \end{aligned}$$

Définition 1.4.4 *Division des polynomes*

Théoreme 1 *Soit F et G des polynômes, ($degF \leq degG$)*
alors ils existent Q et R tels que $degR < degG$

$$F = QG + R$$

Si $R = 0$, on dit aue F est divisible par G
c'est le principe de la division euclidienne

$x^5 + x^5 + 0x^3 + 3x^2 + x + 1$	$x^3 + 2x + 1$
$x^5 + 2x^3 + x2$	$x^2 + x - 2$

Exemple 5 *Voici un exemple de division polynomial*

Définition 1.4.5 *Racine d'un polynome P Racine d'un Polynome P,* $P(z_0) = 0$
la multiplicité de la racine z_0 *es* k
ce qui veut dire $(z - z_0)$ *divise* P
mais $(z - z_0)^k$ *ne divise pas* P
cette équivalence est vrai a cause de la formule de Taylor

$$P(Z) = P(Z_0) + P'(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{P^z(z - z_0)}{z!}(z - z_0)^2 + \frac{P^\epsilon(z_0)}{\epsilon!}$$

1.4.1 La formule de Taylor

soit P un Polynome de degré n, $n \in \mathbb{R}^+$ $\forall x, x_0 \in \mathbb{C}$ la formule de Taylor de ce polynome est

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x_0 \frac{(x - x_0)^n}{k!} \tag{1}$$

Définition 1.4.6

2 Integrales et primitives

2.1 Definition

Définition 2.1.1 *interpretation geo Je veux calculer l'air de la courbe d'une fonction*

Définition 2.1.2 *interprétation dynamique Si t est le temps et $f(y) = y(t)$ est la vitesse*

Définition 2.1.3 *ce qu'on appellera integrale On considere la fonction suivante $x \in q$*

$$f(x) = \{ \begin{array}{l} 1six \in Q \\ 0six \in \mathbb{R}/Q \end{array}$$

Définition 2.1.4 *Definition de Riemann on définit une portion comme suit:*

$$P = (x_n$$

l'aire de l'intégrale est:

$$I(P, f) = \sum_{j=0}^{n-1} mg\Delta xg$$

$$mg = min, \quad f(x)\Delta x =$$