

## СТАТИКА КОНСТРУКЦИЈА 1

---

Модул: Конструкције

---

– материјал за вежбе –

2024.

# Структурална анализа

## Класификациони критеријуми

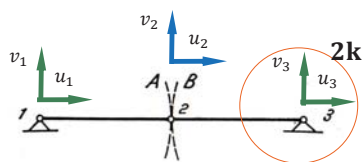
| 1. начин             |        |                                      |                     |
|----------------------|--------|--------------------------------------|---------------------|
| Кинематички          | споља  | $z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2k + m$ | просто стабилан     |
|                      |        | $z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2k + m$ | вишеструко стабилан |
|                      |        | $z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2k + m$ | лабилан             |
|                      | унутра | $z_s + z_k = 2k - 3$                 | просто стабилан     |
| $z_s + z_k > 2k - 3$ |        | вишеструко стабилан                  |                     |
| $z_s + z_k < 2k - 3$ |        | лабилан                              |                     |
| Статички             |        | $z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2k + m$ | одређен             |
|                      |        | $z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2k + m$ | неодређен           |
|                      |        | $z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2k + m$ | преодређен          |
| 2. начин             |        |                                      |                     |
| Кинематички          | споља  | $z_o + z_u + 2z_z = 3z_p$            | просто стабилан     |
|                      |        | $z_o + z_u + 2z_z > 3z_p$            | вишеструко стабилан |
|                      |        | $z_o + z_u + 2z_z < 3z_p$            | лабилан             |
|                      | унутра | $2z_z = 3z_p - 3$                    | просто стабилан     |
| $2z_z > 3z_p - 3$    |        | вишеструко стабилан                  |                     |
| $2z_z < 3z_p - 3$    |        | лабилан                              |                     |
| Статички             |        | $z_o + z_u + 2z_z = 3z_p$            | одређен             |
|                      |        | $z_o + z_u + 2z_z > 3z_p$            | неодређен           |
|                      |        | $z_o + z_u + 2z_z < 3z_p$            | преодређен          |

| Систем 1   | Систем 2  |
|--|---|
|  |   |
| $z_o = 3$<br>$z_u = 0$<br>$z_s = 25$<br>$z_k = 0$<br>$k = 14$  | $z_o = 4$<br>$z_u = 0$<br>$z_s = 2$<br>$z_k = 0$<br>$k = 3$   |
| $z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$ <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">OK !</span><br>$\det D = 0$ <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">NO !</span> | $4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3$ <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">OK !</span><br>$\det D = 0$ <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">NO !</span> |
| Кинематички лабилни системи !!!  |   |
| Систем 1 има коначна померања, и изведен из равнотежног положаја остаје <b>лабилан</b> . (има неправилан распоред елемената)   | Систем 2 има бесконачно мала померања, и изведен из почетне конфигурације ( <b>критичне конфигурација</b> ) постаје <b>стабилан</b> .                                       |

## Закључак

- систем 1 - има неправилан распоред елемената,
- систем 2 - је критична конфигурација.

## Доказ кинематичког критеријума



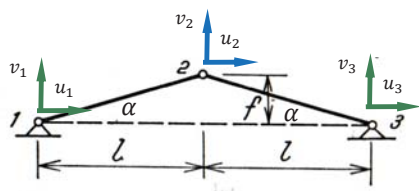
- 1:  $F_1(i, k) = \Delta l_{ik} \dots \dots \dots z_s = 2$
- 2:  $F_2(i, k) - F_2(i, r) = \tau_{ir} - \tau_{ik} \dots \dots z_k = 0$
- 3:  $u_i \cos \beta_i + v_i \sin \beta_i = c_{oi} \dots \dots \dots z_o = 4$
- 4:  $F_2(i, k) = c_{ui} - \tau_{ik} \dots \dots \dots z_u = 0$

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \Delta l_{12} \\ u_3 - u_2 &= \Delta l_{23} \\ u_1 &= 0 \\ u_3 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Решења :  $u_2 = \infty \quad v_2 = \infty$

Критична конфигурација !.



- $$\begin{aligned} F_1(i, k) &= \Delta l_{ik} \dots \dots \dots z_s = 2 \\ F_2(i, k) - F_2(i, r) &= \tau_{ir} - \tau_{ik} \dots \dots z_k = 0 \\ u_i \cos \beta_i + v_i \sin \beta_i &= c_{oi} \dots \dots \dots z_o = 4 \\ F_2(i, k) &= c_{ui} - \tau_{ik} \dots \dots \dots z_u = 0 \end{aligned}$$

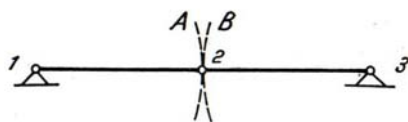
$$\begin{aligned} (u_2 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - v_1) \sin \alpha &= \Delta l_{12} \\ (u_3 - u_2) \cos \alpha - (v_3 - v_2) \sin \alpha &= \Delta l_{23} \\ u_1 &= 0 \\ u_3 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \\ -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -\sin \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin 2\alpha$$

Следе решења за непознате величине:

$$u_2 = \frac{\Delta l_{12} - \Delta l_{23}}{2 \sin \alpha} \quad v_2 = \frac{\Delta l_{12} + \Delta l_{23}}{2 \sin \alpha}$$

## Закључак



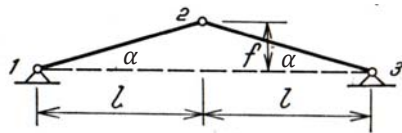
$$z_o = 4, z_u = 0, z_s = 2, z_k = 0, k = 3$$

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$$

$$4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3 \quad 6 = 6$$

OK!

Ово је критична конфигурација система !.



$$z_o = 4, z_u = 0, z_s = 2, z_k = 0, k = 3$$

$$4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3 \quad 6 = 6$$

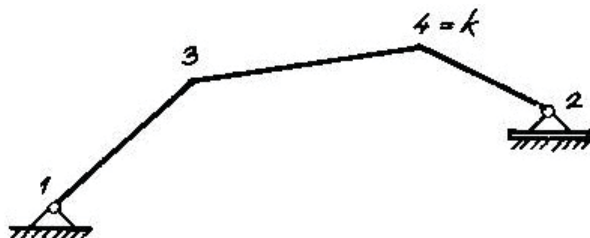
OK!

НИЈЕ критична конфигурација система – то је лук са три зглоба.

## Примери

За све дате системе штапова проверити спољашњу и унутрашњу кинематичку класификацију.

1.



$$\begin{array}{r} z_s = 3 \\ z_k = 2 \\ z_o = 3 \\ z_u = 0 \\ \hline \Sigma z = 8 \end{array}$$

$$2K = 2 \cdot 4 = 8$$

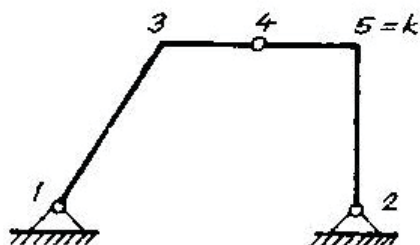
$$\Sigma z = 8 = 2K$$

*Sistem je kinematički prosto stabilan.*

$$\begin{array}{l} z_s + z_k = 5 \\ 2K - 3 = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sistem je unutrašnje} \\ \text{kinematički prosto} \\ \text{stabilan.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_p = 1 \\ z_o = 3 \\ z_z = 0 \\ z_u = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2z_o + z_z + z_u = 3 \\ 3z_p = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{sistem je spoljašnje} \\ \text{kinematički prosto} \\ \text{stabilan.} \end{array}$$

2.



$$\begin{array}{r} z_s = 4 \\ z_k = 2 \\ z_o = 4 \\ z_u = 0 \\ \hline \Sigma z = 10 \end{array}$$

$$2K = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\Sigma z = 2K = 10$$

*Sistem je kinematički prosto stabilan*

$$\begin{array}{l} z_s + z_k = 6 \\ 2K - 3 = 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Sistem je unutrašnje} \\ \text{kinematički labilan sa} \\ \text{jednim stepenom slobod-} \\ \text{ne pomeranja, tj.} \end{array}$$

$$\lambda u = (2K-3) - \sum Z = 7-6 = 1$$

$$Z_p = 2$$

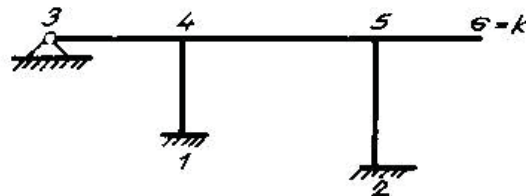
$$Z_z = 1$$

$$Z_o = 4$$

$$Z_u = 0$$

$$\Rightarrow 2Z_z + Z_o + Z_u = 8 \quad \Rightarrow \quad 3Z_p = 6 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistem je spoljašnje kinematički, prosto stabilan.}$$

3.



$$Z_s = 5$$

$$Z_k = 4$$

$$Z_o = 6$$

$$Z_u = 2$$

$$\sum Z = 17$$

$$2K = 2 \cdot 6 = 12$$

$$n = \sum Z - 2K = 17 - 12 = 5$$

Sistem je kinematički višestruko stabilan sa 5 suvišnih elemenata.

$$Z_s + Z_k = 9$$

$$2K-3 = 9$$

$$\Rightarrow (Z_s + Z_k) - (2K-3) = 0$$

Sistem je unutrašnje kinematički, prosto stabilan

$$Z_p = 1$$

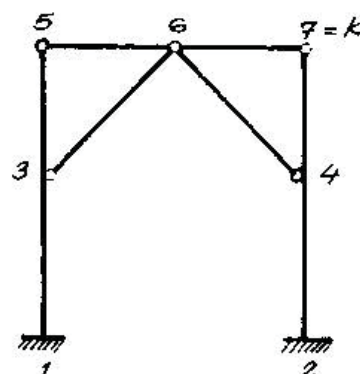
$$Z_z = 0$$

$$\Rightarrow 2Z_z + Z_o + Z_u = 8 \quad \Rightarrow \quad n_s = (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 5$$

$$3Z_p = 3$$

Sistem je spoljašnje kinematički višestruko stabilan sa 6 suvišnih spoljašnjih elemenata

4.



$$Z_s = 8$$

$$Z_k = 2$$

$$Z_o = 4$$

$$Z_u = 2$$

$$\Sigma Z = 16$$

$$2K = 2 \cdot 7 = 14$$

$$n = \Sigma Z - 2K = 16 - 14 = 2$$

Sistem je kinematički višestruko stabilan sa 2 suvišna elementa.

$$Z_s + Z_k = 10$$

$$2K - 3 = 11$$

$$\Rightarrow \lambda_u = (2K - 3) - (Z_s + Z_k) = 11 - 10 = 1$$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa 1 stepenom slobode pomeranja.

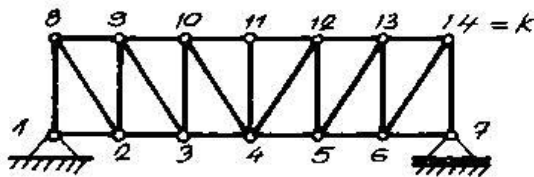
$$Z_p = 2$$

$$Z_z = 1$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2Z_z + Z_o + Z_u &= 8 \\ 3Z_p &= 6 \end{aligned} \Rightarrow n_s = (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 8 - 6 = 2$$

Sistem je spoljašnje kinematički višestruko stabilan sa dva suvišna elementa.

5.



$$Z_s = 25$$

$$Z_k = 0$$

$$Z_o = 3$$

$$Z_u = 0$$

$$\Sigma Z = 28$$

$$2K = 2 \cdot 14 = 28$$

$$n = \Sigma Z - 2K = 28 - 28 = 0$$

Sistem je kinematički prosto stabilan.

$$Z_s + Z_k = 25$$

$$2K - 3 = 25$$

$$\Rightarrow (Z_s + Z_k) - (2K - 3) = 0$$

Sistem je unutrašnje kinematički prosto stabilan.

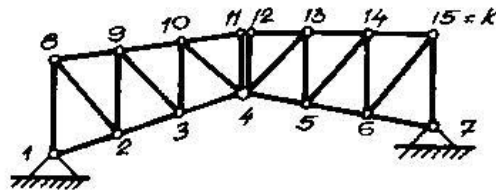
$$Z_p = 1$$

$$Z_z = 0$$

$$\Rightarrow (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 3 - 3 = 0$$

Sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

6.



$$Z_s = 26$$

$$Z_k = 0$$

$$Z_o = 4$$

$$Z_u = 0$$

$$\Sigma Z = 30$$

$$2K = 2 \cdot 15 = 30$$

$$n = \Sigma Z - 2K = 0$$

Sistem je kinematički prosto stabilan

$$Z_s + Z_k = 26$$

$$2K - 3 = 27$$

$$\Rightarrow \lambda_u = (2K - 3) - (Z_s + Z_k) = 27 - 26 = 1$$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.

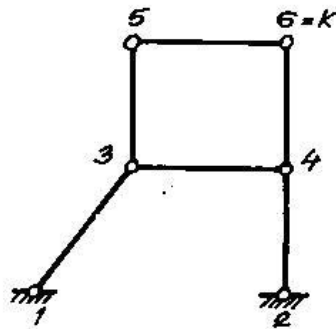
$$Z_p = 2$$

$$Z_z = 1$$

$$\Rightarrow (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 6 - 8 = 0$$

Sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

7.



$$Z_s = 6$$

$$Z_k = 0$$

$$Z_o = 4$$

$$Z_u = 0$$

$$\Sigma Z = 10$$

$$2K = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\lambda = 2K - \Sigma Z = 12 - 10 = 2$$

Sistem je kinematički labilan sa 2 stepena slobode pomeranja.

$$Z_s + Z_k = 6$$

$$2K - 3 = 9$$

$$\Rightarrow \lambda_u = (2K - 3) - (Z_s + Z_k) = 9 - 6 = 3$$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa tri stepena slobode pomeranja

$$Z_p = 6$$

$$Z_s = 6$$

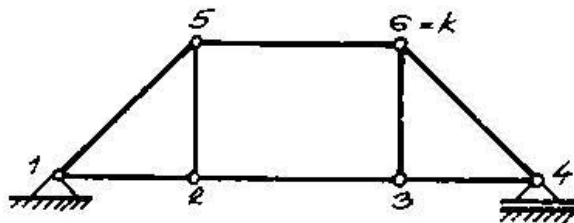
$$Z_o = 4$$

$$Z_u = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_s = -(2Z_s + Z_o + Z_u) + 3Z_p = 18 - 16 = 2$$

Sistem je spoljašnje kinematički labilan sa dva stepena slobode pomeranja.

8.



$$Z_s = 8$$

$$Z_k = 0$$

$$Z_o = 3$$

$$Z_u = 0$$

$$\Sigma Z = 11$$

$$2K = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\Rightarrow \lambda = 2K - \Sigma Z = 12 - 11 = 1$$

Sistem je kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.

$$Z_s + Z_k = 8$$

$$2K - 3 = 9$$

$$\Rightarrow \lambda_u = (2K - 3) - (Z_s + Z_k) = 9 - 8 = 1$$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja

$$Z_p = 4$$

$$Z_s = 4$$

$$Z_o = 3$$

$$Z_u = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_s = (3Z_p) - (2Z_s + Z_o + Z_u) = 12 - 11 = 1$$

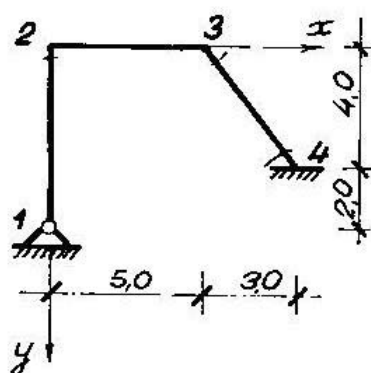
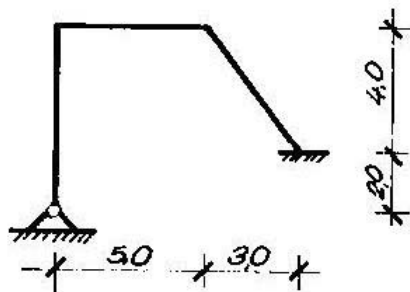
Sistem je spoljašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.



## Примери

За све дате системе штапова проверити статичку класификацију.

1.



Geometrijske karakteristike  
štapova

| Štap | $l_{ik}$ | $\sin \alpha_{ik}$ | $\cos \alpha_{ik}$ |
|------|----------|--------------------|--------------------|
| 1-2  | 6,0      | -1,0               | 0,0                |
| 2-3  | 5,0      | 0,0                | 1,0                |
| 3-4  | 5,0      | 0,8                | 0,6                |

Statički nepoznate veličine su:

$$C_{1H}, C_{1V}, C_{4H}, C_{4V}, C_{4U} \quad \dots (Z_0 + Z_4) = 5$$

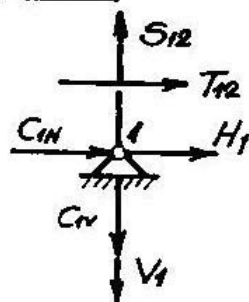
$$S_{12}, S_{23}, S_{34} \quad \dots Z_s = 3$$

$$M_{21}, M_{23}, M_{32}, M_{34}, M_{43} \quad \dots Z_k + m + z_0 = 4 + 1$$

$$\text{Ukupno} \quad (Z_0 + Z_4) + Z_s + (Z_k + m + z_0) = 13$$

Uсловne јednaciне ravnoteže

Čvor 1



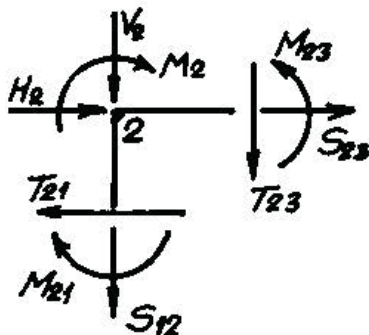
$$T_{12} + C_{1H} + H_1 = 0$$

$$-S_{12} + C_{1V} + V_1 = 0$$

$$M = 0$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{M_{21}}{l_{12}} + C_{1H} + H_1 = 0 \\
 & -S_{12} + C_{1V} + V_1 = 0
 \end{aligned}$$

Čvor 2



(b)

$$S_{23} - T_{21} + H_2 = 0$$

$$S_{12} + T_{23} + V_2 = 0$$

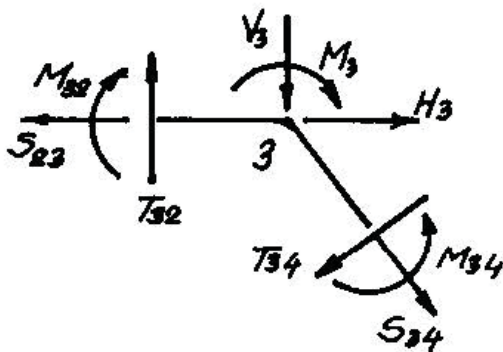
$$-M_{23} + M_{21} + M_2 = 0$$

$$S_{23} - \frac{M_{21}}{l_{12}} + H_2 = 0$$

$$S_{12} + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} + V_2 = 0$$

$$-M_{32} + M_{21} + M_2 = 0$$

Čvor 3



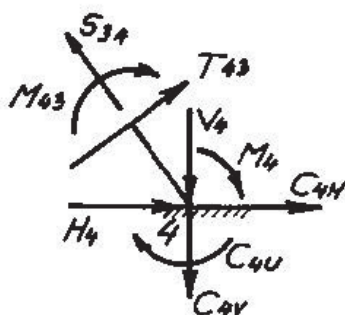
$$-S_{23} + 0.6 S_{34} - 0.8 T_{34} + H_3 = 0$$

$$0.8 S_{34} - T_{32} + 0.6 T_{34} + V_3 = 0$$

$$M_{32} - M_{34} + M_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -S_{23} + 0,6 S_{34} - 0,8 \frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + H_3 = 0 \\
 (c) \quad & 0,8 S_{34} - \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} + 0,6 \frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + V_3 = 0 \\
 & M_{32} - M_{34} + M_3 = 0
 \end{aligned}$$

Čvor 4



$$\begin{aligned}
 & -0,6 S_{34} + 0,8 T_{43} + C_{4H} + H_4 = 0 \\
 & -0,8 S_{34} - 0,6 T_{43} + C_{4V} + V_4 = 0 \\
 & M_{43} + C_{4H} + M_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -0,6 S_{34} + 0,8 \frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + C_{4H} + H_4 = 0 \\
 (d) \quad & -0,8 S_{34} - 0,6 \frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + C_{4V} + V_4 = 0 \\
 & M_{43} + C_{4H} + M_4 = 0
 \end{aligned}$$

Ukupan broj uslova ravnoteže je 11

$$2K + m = 2 \cdot 4 + 2 = 10.$$

Dakle, statički nepoznate veličine nemogu se odrediti nezavisno od proračuna deformacijskih nepoznatih, tj

$$\begin{aligned}
 Z_s + Z_k + Z_o + Z_u + m & > 2K + m, \text{ odnosno} \\
 12 & > 10,
 \end{aligned}$$

pa prema tome navedeni sistem predstavlja statički neodređen nosač. Broj statički nepoznatih veličina koje se mogu izabrati proizvoljno, a da svi uslovi ravnoteže sistema ostanu zadovoljeni je

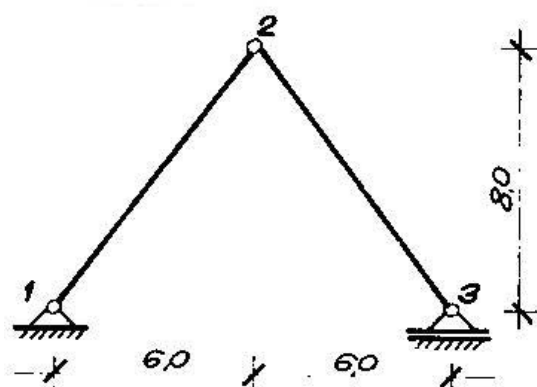
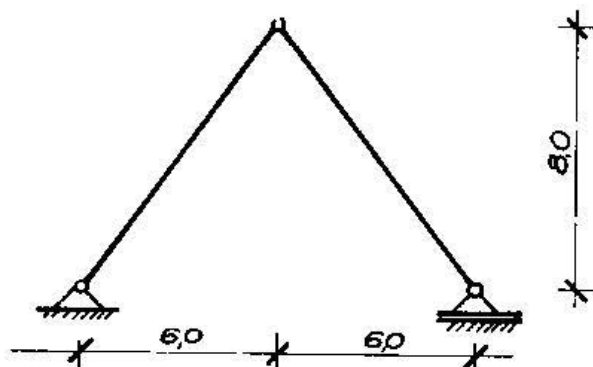
$$n = (Z_s + Z_k + Z_o + Z_u + m) - (2K + m) = 12 - 10 = 2.$$

Navedeni zaključak važi samo uz uslov da su jednačine ravnoteže (a), (b), (c), (d) međusobno nezavisne, i to njih

$$2K + m = 8 + 2 = 10$$

i da je ma jedna determinanta  $D' \neq 0$ .

2.



Geometrijske karakteristike štapova

| štap | $l_{ik}$ | $\sin \alpha_{ik}$ | $\cos \alpha_{ik}$ |
|------|----------|--------------------|--------------------|
| 1-2  | 10       | $-8/10$            | $6/10$             |
| 2-3  | 10       | $8/10$             | $6/10$             |

Statički nepoznate veličine su

$$C_{1H}, C_{1V}, C_{3V} \quad \dots \quad Z_o + Z_u = 3$$

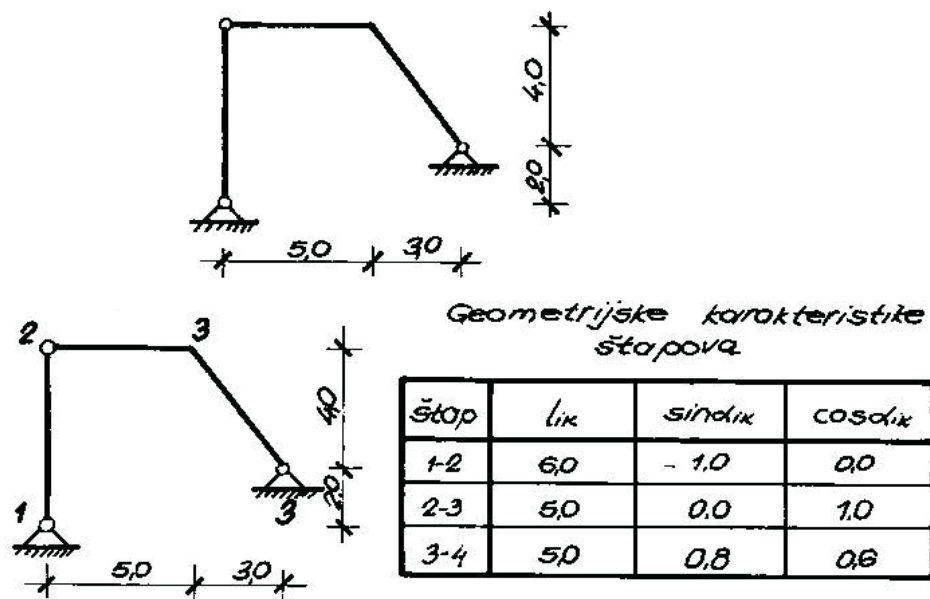
$$S_{12}, S_{23} \quad \dots \quad Z_s = 2$$

$$\text{Ukupno} \quad Z_o + Z_u + Z_s = 5$$

Uсловне jednačine ravnoteže ispisaćemo za čvorove 1, 2 i 3.

linog opterećenja, pa zbog toga predstavlja statički preodređen sistem. Da bi ovaj sistem bio u ravnoteži, opterećenje mora da ispuni jedan uslov (broj stepeni slobode gornjeg sistema).

3.



Statički nepoznate veličine su:

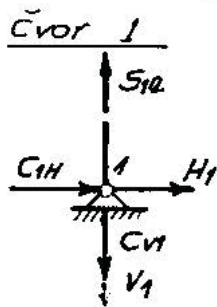
$$C_{1H}, C_{1V}, C_{4H}, C_{4V} \quad \dots \quad \sum Z_o = 4$$

$$S_{12}, S_{23}, S_{34} \quad \dots \quad \sum Z_s = 3$$

$$M_{32}, M_{34} \quad \dots \quad \sum Z_{k+m} = 2$$

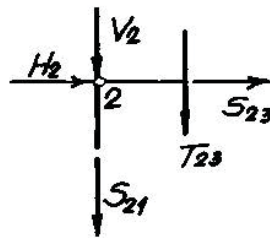
$$\text{Ukupno} \quad \sum Z + m = 9$$

Uslovne jednadžine ravnoteže



$$\begin{aligned} C_{1H} + H_1 &= 0 \\ -S_{12} + C_{1V} + V_1 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Čvor 2



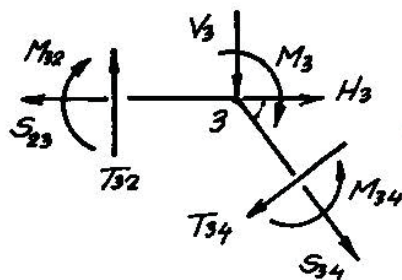
$$S_{23} + H_2 = 0$$

$$S_{21} + T_{23} + V_2 = 0$$

$$S_{23} + H_2 = 0$$

$$S_{21} + \frac{M_{32}}{l_{23}} + V_2 = 0 \quad (b)$$

Čvor 3



$$-S_{23} + 0,6 \cdot S_{34} - T_{34} \cdot 0,8 + H_3 = 0$$

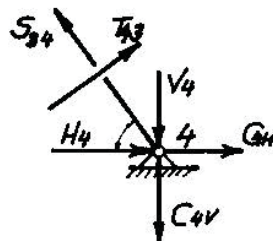
$$S_{34} \cdot 0,8 - T_{32} + T_{34} \cdot 0,6 + V_3 = 0$$

$$-S_{23} + 0,6 S_{34} + 0,8 \cdot \frac{M_{34}}{l_{34}} + H_3 = 0$$

$$0,8 S_{34} - \frac{M_{32}}{l_{23}} + 0,6 \left( -\frac{M_{34}}{l_{34}} \right) + V_3 = 0$$

$$M_{32} - M_{34} + M_3 = 0 \quad (c)$$

Čvor 4



$$-0,6 S_{34} + 0,8 T_{43} + C_{4H} + H_4 = 0$$

$$-0,8 S_{34} - 0,6 T_{43} + C_{4V} + V_4 = 0$$

$$-0,6 S_{34} - 0,8 \frac{M_{34}}{l_{34}} + C_{4H} + H_4 = 0 \quad (d)$$

$$-0,8 S_{34} + 0,6 \frac{M_{34}}{l_{34}} + C_{4V} + V_4 = 0$$

Ukupan broj uslova ravnoteže je

$$2K + m = 2 \cdot 4 + 1 = 9,$$

što je jednako broju statički nepoznatih veličina, a to znači da se statički nepoznate

veličine mogu odrediti nezavisno od proračuna deformacionih veličina,

$$(Z_3 + Z_K + Z_0 + Z_4 + m) = 2K + m.$$

Na osnovu navedenog zaključka proizilazi da je navedeni sistem statički određen nosač.