

9

СТАТИКА КОНСТРУКЦИЈА

Модул: Хидротехника и водно инжењерство околине, Саобраћајнице, Архитектонско инжењерство

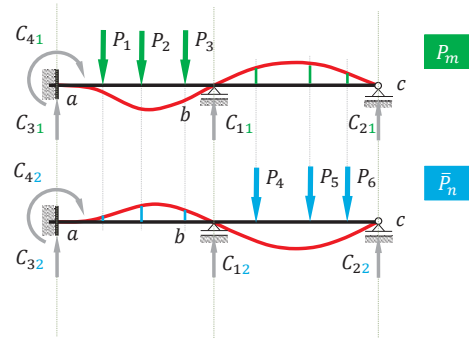
- материјал за вежбе -

2024.

Теореме о узајамности

20 Betti – јева теорема

$$\sum P_m \delta_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i$$



Рад спољашњих сила P_m и C_i **првог** система при померањима која изазива **други** систем једнак је раду спољашњих сила \bar{P}_n и \bar{C}_i **другог** система при померањима који изазива **први** систем утицаја.

21 Maxwell – ова теорема

$$\sum P_m \delta_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i$$

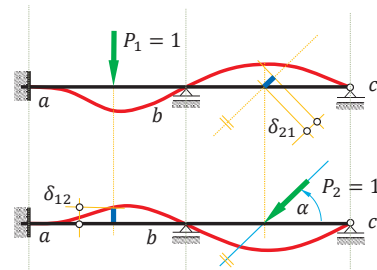
$$P_m \Rightarrow P_1 = 1 \quad \Rightarrow \delta_n = \delta_{21}$$

$$\bar{P}_n \Rightarrow P_2 = 1 \quad \Rightarrow \delta_m = \delta_{12}$$

$$\sum 1 \cdot \delta_{12} + \sum C_i \bar{c}_i = \sum 1 \cdot \delta_{21} + \sum \bar{C}_i c_i$$

$$1 \cdot \delta_{12} = 1 \cdot \delta_{21}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$



Померање нападне тачке силе P_1 у правцу те силе услед силе P_2 једнако је померању нападне тачке силе P_2 у правцу силе P_2 услед силе P_1 .

22 прва Rayleigh – јева теорема

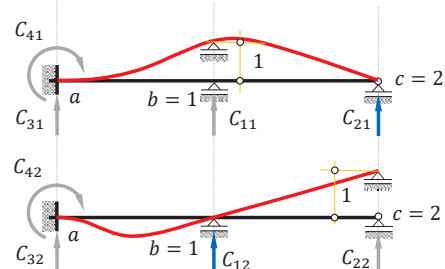
$$\sum P_m \delta_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i$$

$$P_m \Rightarrow P_1 = 0 \quad c_i = c_1 = 1 \quad \Rightarrow C_i = C_{12}$$

$$\bar{P}_n \Rightarrow P_2 = 0 \quad \bar{c}_i = c_2 = 1 \quad \Rightarrow \bar{C}_i = C_{21}$$

$$\sum 0 \cdot \delta_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum 0 \cdot \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i$$

$$C_{12} \cdot 1 = C_{21} \cdot 1$$



Реакција ослонца 1 услед јединичног померања ослонца 2 једнака је реакцији ослонца 2 услед јединичног померања ослонца 1.

23 друга Rayleigh – јева теорема

$$\sum P_m \delta_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i$$

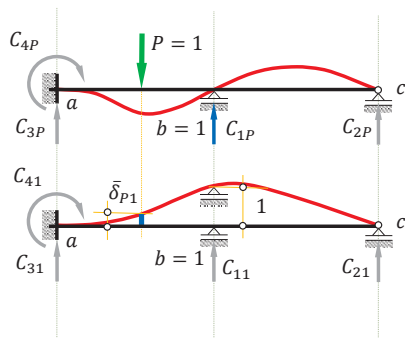
$$P_m \Rightarrow P = 1 \quad c_i = 0 \quad \Rightarrow C_{1P}$$

$$\bar{P}_n \Rightarrow P = 0 \quad \bar{c}_i = c_1 = 1 \quad \Rightarrow \bar{C}_i = \bar{C}_{P1}$$

$$\sum 1 \cdot \delta_{P1} + \sum C_{1P} \cdot 1 = \sum 0 \cdot \delta_n + \sum \bar{C}_{P1} \cdot 0$$

$$C_{1P} \cdot 1 = -\bar{C}_{P1} \cdot 1$$

$$C_{1P} = -\bar{C}_{P1}$$



Реакција ослонца 1 услед дејства јединичне силе P једнака је негативној вредности померања нападне тачке силе P у правцу те силе услед јединичног померања ослонца 1.

DEFORMACIJA STATIČKI OPREĐENIH NOSAČA

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{EJ} + \alpha t \frac{\Delta t}{h} \\ \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \nu_1 t^\circ \\ \varphi_T &= k \frac{T}{GF} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta u_i, \Delta t_i, \Delta \varphi_i \rightarrow C_{oi}, C_{ui} \Rightarrow u_i, v_i$$

Princip virtualni radova

Princip: Algebarski zbir radova unutrašnjih i spoljasnih jednog mogućeg stanja jeste jednak nuli

$$\sum \bar{P} \delta + \sum \bar{Q} \alpha = \int_s (\bar{M} \varepsilon + \bar{N} \varepsilon + \bar{T} \varphi_T) ds$$

$$\bar{P}=1$$

$$\bar{M}=1$$

$$\delta = \int_s (\bar{M} \varepsilon + \bar{N} \varepsilon + \bar{T} \varphi_T) ds - \sum \bar{Q} \alpha$$

$$\delta = \int_s \left(\frac{M \bar{M}}{EJ} + \frac{N \bar{N}}{EF} + k \frac{T \bar{T}}{GF} + \bar{M} \alpha t \frac{\Delta t}{h} + \bar{N} \alpha t^\circ \right) ds - \sum \bar{Q} \alpha$$

$$\delta_0 = \int_s \frac{M \bar{M}}{EJ} ds + \int_s \frac{N \bar{N}}{EF} ds + k \int_s \frac{T \bar{T}}{GF} ds$$

$$\delta_t = \int_s \bar{M} \alpha t \frac{\Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \alpha t^\circ ds$$

$$\delta_c = - \sum \bar{Q} \alpha$$

$$EJ \delta_0 = \int_s M \bar{M} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int_s N \bar{N} \frac{F_c}{F} ds + (2+2) \frac{J_c}{F_c} \int_s T \bar{T} \frac{F_c}{F} ds$$

$$ds = \frac{J_c}{J} ds$$

$$ds = \frac{F_c}{F} ds$$

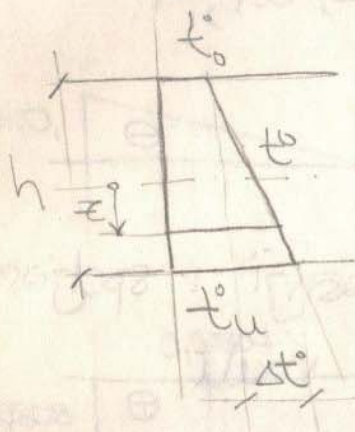
$$ds =$$

$$EJ_c \delta_0 = \int_s M \bar{M} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int_s N \bar{N} \frac{F_c}{F} ds$$

usled spoljasnog opterećenja

$$EJ_c \delta t = EJ_c \int_s \bar{N} \alpha t \frac{\Delta t}{h} ds + EJ_c \int_s \bar{N} \alpha t^0 ds$$

$$EJ_c \delta c = - \sum C_i \alpha_i$$



$$t^0(x) = t_o + \Delta t \frac{x}{h}$$

$$\Delta t^0 = t_u - t_o$$

$$t^0 = \frac{t_u + t_o}{2}$$

load resultants

$$\delta = \int_s \bar{N} \epsilon ds - \sum \bar{Q}_i \alpha_i$$

$$\delta = \sum_s \int_s \bar{N} \epsilon ds - \sum C_i \alpha_i = \sum_s \bar{s} \Delta l - \sum \bar{Q}_i \alpha_i = \sum_s \frac{\bar{s} \bar{s}}{EF} l + \sum \bar{s} \alpha_i t^0 l - \sum \bar{Q}_i \alpha_i$$

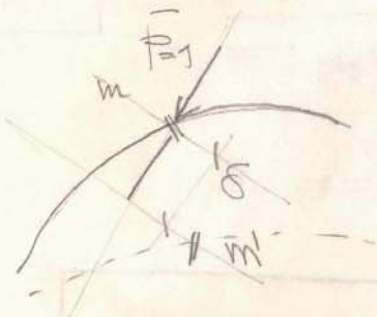
$$\int_s \bar{N} \epsilon ds = \bar{N} \epsilon \int_s ds = \bar{N} \cdot \underbrace{\epsilon \cdot l}_{\Delta l} = \bar{s} \cdot \Delta l$$

$$\delta_0 = \sum_s \frac{\bar{s} \bar{s}}{EF} l / EF_c \rightarrow EF_c \delta_0 = \sum_s \bar{s} \frac{F_c}{F} \cdot l$$

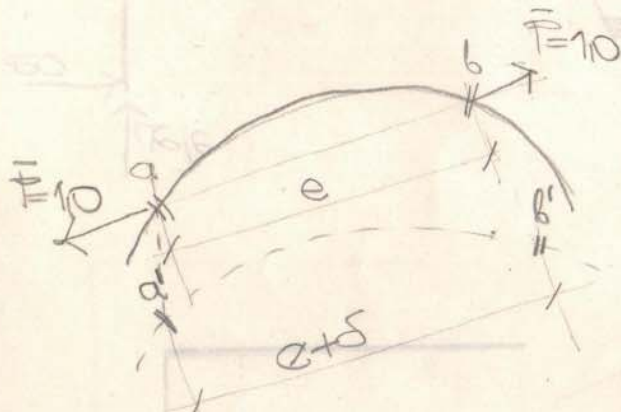
$$\delta_t = \sum_s \bar{s} \alpha_i t^0 l / EF_c \rightarrow EF_c \delta_t = \sum_s \bar{s} \alpha_i t^0 l / EF_c$$

$$\delta_c = - \sum \bar{Q}_i \alpha_i / EF_c \quad EF_c \delta_c = - EF_c \sum \bar{Q}_i \alpha_i$$

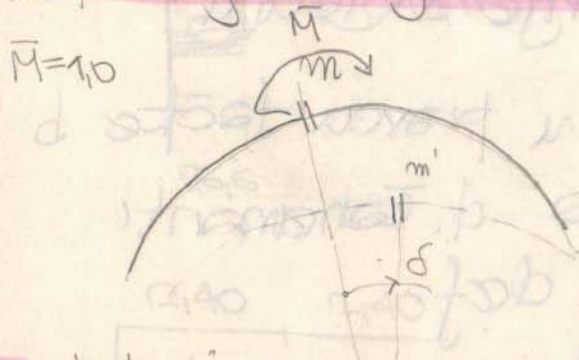
1. gen. pom. tačke u određenom pravcu



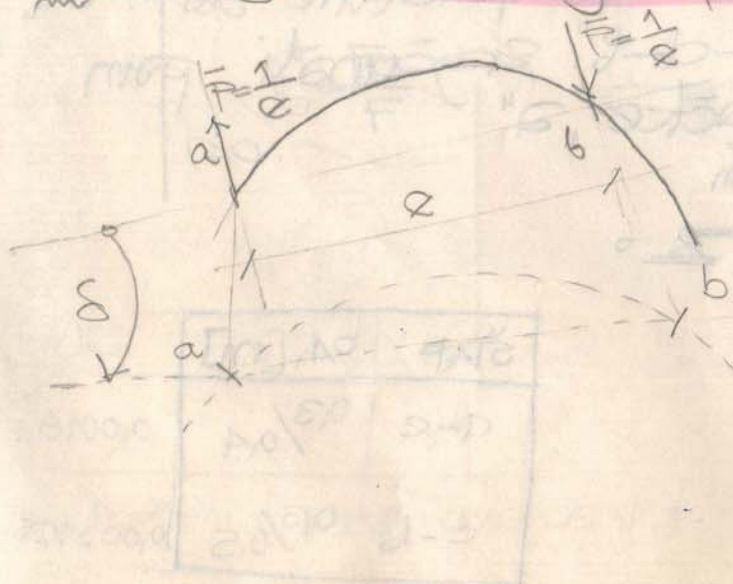
2. promjena odstojanja između dvije tačke



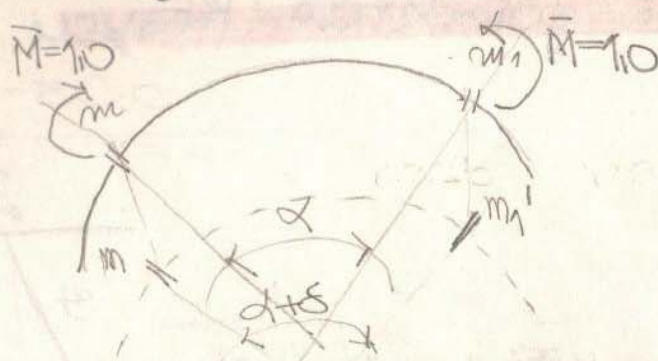
3. promjena ugla u presjeku



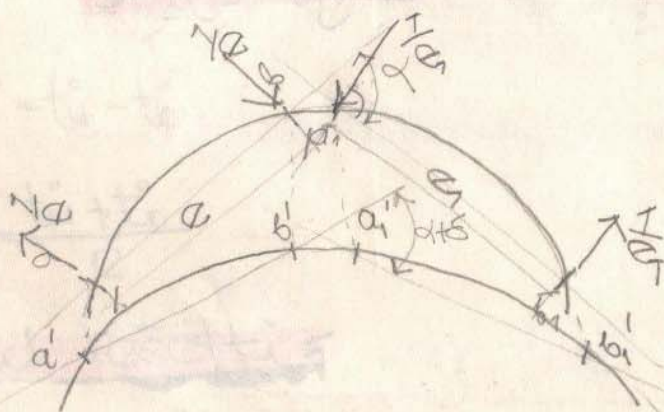
4. obrtanje prave koja prolazi kroz tačke A i B



5. promjena ugla ravnosti prave m i m_1

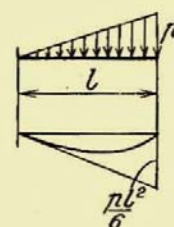
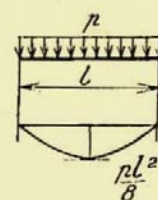
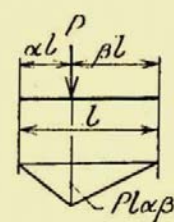


6. promjena ugla ravnosti duge prave



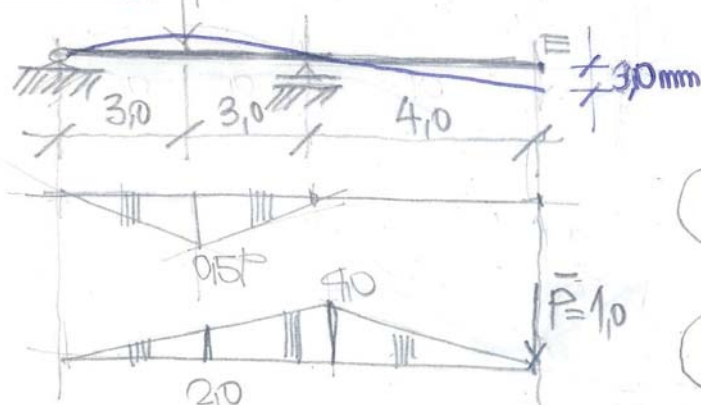
TABLICA 1

$\frac{1}{l} \int_0^l M \bar{M} ds$	\bar{i}		\bar{i}			
i	$i\bar{i}$	$\frac{1}{2} i\bar{k}$	$\frac{1}{2} i(\bar{i} + \bar{k})$	$\frac{1}{2} i\bar{m}$	$\frac{2}{3} i\bar{m}$	$\frac{1}{4} i\bar{k}$
	$\frac{1}{2} k\bar{i}$	$\frac{1}{3} k\bar{k}$	$\frac{1}{6} k(\bar{i} + 2\bar{k})$	$\frac{1}{6} k\bar{m}(1 + \alpha)$	$\frac{1}{3} k\bar{m}$	$\frac{2}{15} k\bar{k}$
i	$\frac{1}{2} i\bar{i}$	$\frac{1}{6} i\bar{k}$	$\frac{1}{6} i(2\bar{i} + \bar{k})$	$\frac{1}{6} i\bar{m}(1 + \beta)$	$\frac{1}{3} i\bar{m}$	$\frac{7}{60} i\bar{k}$
i	$\frac{1}{2} (i + k)\bar{i}$	$\frac{1}{6} (i + 2k)\bar{k}$	$\frac{1}{6} [i(2\bar{i} + \bar{k}) + k(\bar{i} + 2\bar{k})]$	$\frac{1}{6} [i(1 + \beta) + k(1 + \alpha)]\bar{m}$	$\frac{1}{3} (i + k)\bar{m}$	$\frac{1}{60} (7i + 8k)\bar{k}$
	$\frac{1}{2} m\bar{i}$	$\frac{1}{6} m\bar{k}(1 + \alpha)$	$\frac{1}{6} m[\bar{i}(1 + \beta) + \bar{k}(1 + \alpha)]$	$\frac{1}{3} m\bar{m}$	$\frac{1}{3} m\bar{m}(1 + \alpha\beta)$	$\frac{1}{20} m\bar{k}(1 + \alpha) \cdot (\frac{7}{3} - \alpha^2)$
	$\frac{2}{3} m\bar{i}$	$\frac{1}{3} m\bar{k}$	$\frac{1}{3} m(\bar{i} + \bar{k})$	$\frac{1}{3} m\bar{m}(1 + \alpha\beta)$	$\frac{8}{15} m\bar{m}$	$\frac{1}{5} m\bar{k}$
	$\frac{1}{4} k\bar{i}$	$\frac{2}{15} k\bar{k}$	$\frac{1}{60} k(7\bar{i} + 8\bar{k})$	$\frac{1}{20} k\bar{m}(1 + \alpha) \cdot (\frac{7}{3} - \alpha^2)$	$\frac{1}{5} k\bar{m}$	$\frac{8}{105} k\bar{k}$
i	$\frac{1}{4} i\bar{i}$	$\frac{7}{60} i\bar{k}$	$\frac{1}{60} i(8\bar{i} + 7\bar{k})$	$\frac{1}{20} i\bar{m}(1 + \beta) \cdot (\frac{7}{3} - \beta^2)$	$\frac{1}{5} i\bar{m}$	$\frac{31}{420} i\bar{k}$



ЗАДАЧА

Одредити силу P ако је вертикално померање тачке "E" 3mm.



$$\Delta E = 3.0 \text{ mm}$$

$$EI = 10 \cdot 10^{-3} \text{ kNm}^2$$

$$M(\text{kNm})$$

$$M_1(\text{kNm})$$

$$EI \Delta E = -310P$$

$$10 \cdot 10^{-3} \cdot 0.003 = -310P$$

$$P = -10.00 \text{ kN}$$

$$EI \Delta E = -\frac{1}{3} \cdot 0.5P \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 0.5P \cdot (4 + 2 \cdot 2) \cdot 3 =$$

$$= -1P - 2P = -3P$$

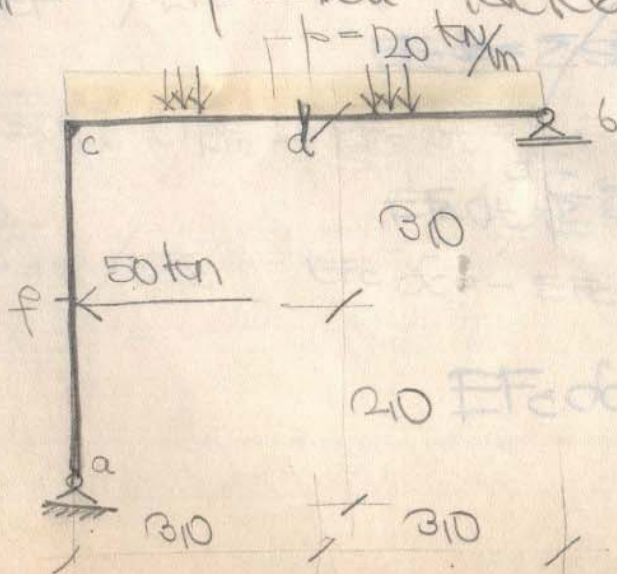
zadatak

zadati nosač i opterećenje odrediti

1.

- померanje тачке f у правцу тачке b
- обртanje пресека d . одређити
утицај транс. сила на деф.

2. Pri zadatoj promjeni temperature $t_0 = -5^\circ\text{C}$,
 $t_1 = 25^\circ\text{C}$ duž stepa "c-d-b" računati pom.
тачка "d" у правцу тачке "a"



STAP	b/h [m]	J (m ⁴)
a-c	0.3/0.4	0.0016
c-b	0.3/0.5	0.003125

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

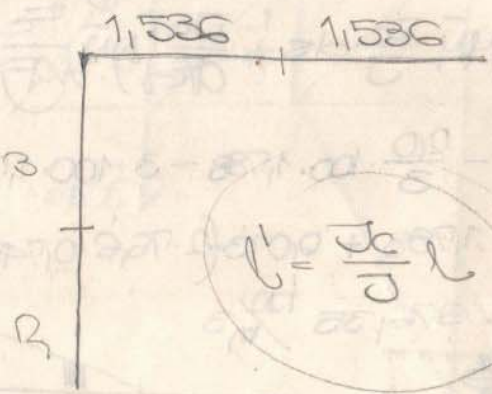
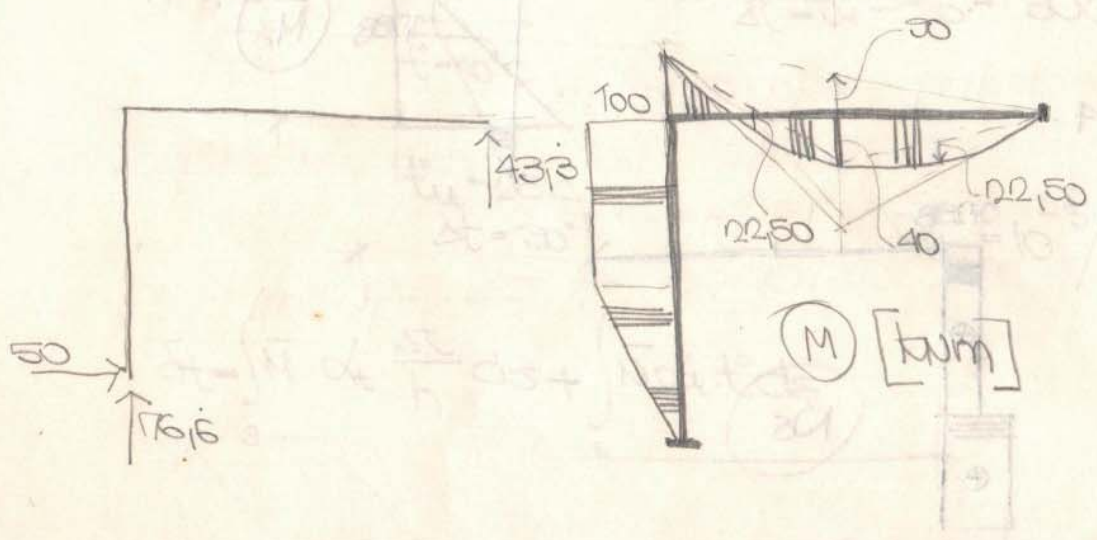
$F(m^2)$
0,12
0,15

$$F_c = 0,12 m^2$$

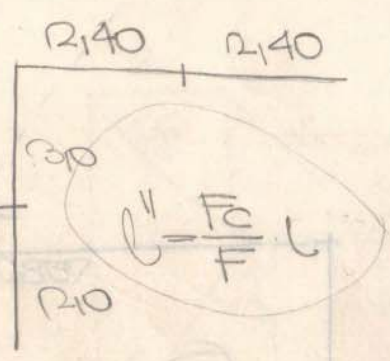
$$J_c = 0,0016 m^4$$

$$\frac{J_c}{F_c} = 0,0133 m^2$$

$$EJ_c = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,0016 = 32000 kNm^2$$

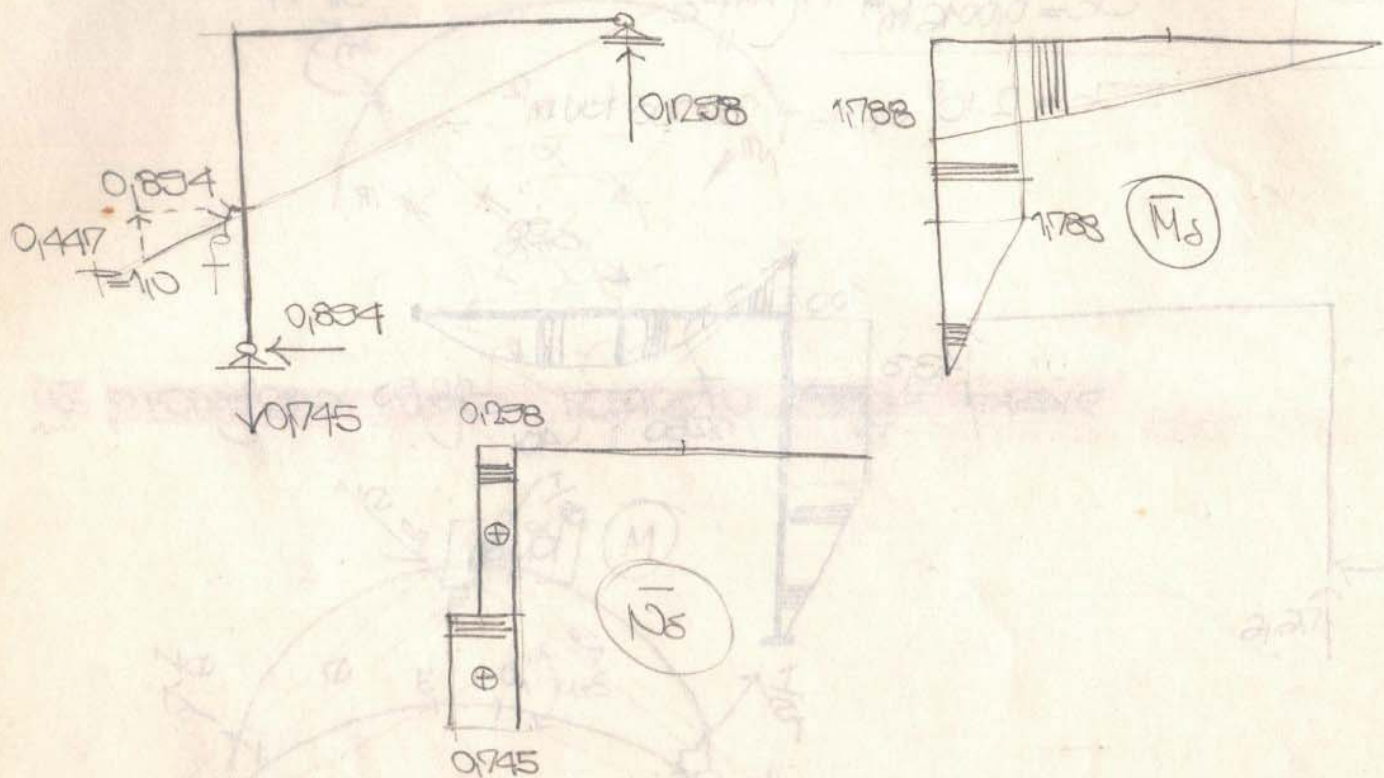


$$l' = \frac{J_c}{J} l$$



$$l'' = \frac{F_c}{F} l$$

$$2m(1,536) + \left(\frac{1}{2} \cdot 2,140 \cdot 2,140\right) \cdot 1,536 + 0,050 \cdot 0,050 \cdot 2,140 \cdot \frac{1}{2} +$$

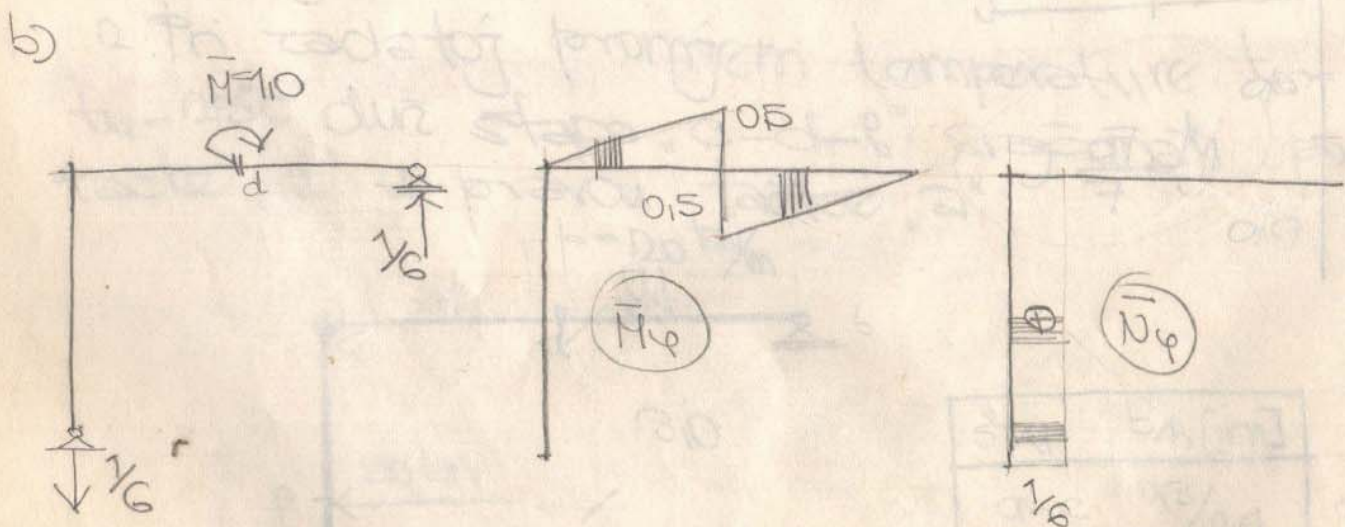


$$EJ_c \delta = \int M \bar{M} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{F_c} \int N \bar{N} \frac{F_c}{F} ds$$

$$EJ_c \cdot \delta = -\frac{20}{3} \cdot 100 \cdot 1.1788 - 3 \cdot 100 \cdot 1.1788 - \frac{1}{3} \cdot 31072 \cdot 100 \cdot 1.1788 + \frac{1}{3} \cdot 31072 \cdot 20 \cdot 1.1788 + 0.013 (2 \cdot 76.6 \cdot 0.1745 - 3 \cdot 76.6 \cdot 0.1238)$$

$$EJ_c \cdot \delta = -676.35 \frac{\text{Nm}}{3}$$

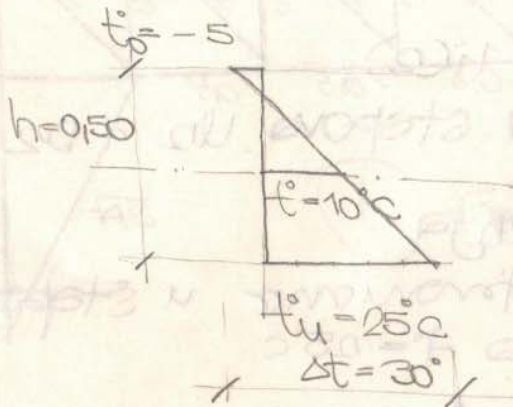
$$\delta = -0.021 \text{ m} = -2.1 \text{ cm}$$



$$EJ_c \varphi = -\frac{1}{2} \cdot 1.536 \cdot 0.50 (2.40 - 1.00) - \frac{1}{3} \cdot 1.536 \cdot 0.50 \cdot 22.50 + \frac{1}{3} \cdot 1.536 \cdot 40 \cdot 0.50 + \frac{1}{3} \cdot 1.536 \cdot 22.50 \cdot 0.50 + 0.013 (-50 \cdot 76.6 \cdot \frac{1}{6}) = 101.55 \text{ Nm}^2$$

$$\varphi = 0,0032 \text{ rad.}$$

②.

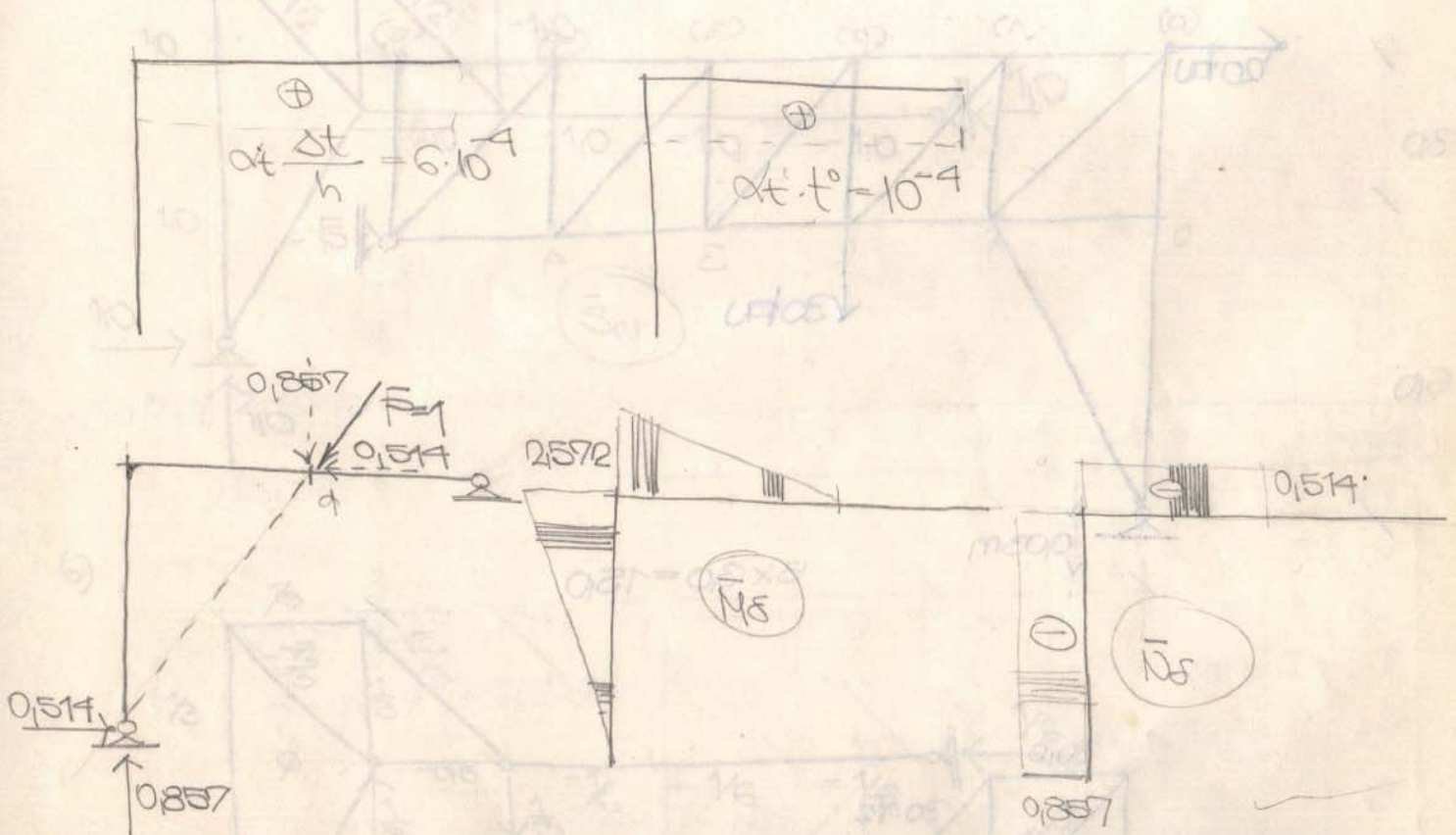


$$t^\circ = \frac{t_u + t_p}{2} = 10^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = t_u - t_p = 30^\circ\text{C}$$

$$\alpha_t = 10^{-5}/^\circ\text{C} - \text{za beton}$$

$$\delta_t = \int_s \bar{N} \cdot \alpha_t \frac{\Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \alpha_t \cdot t^\circ ds$$



$$\delta_t = \left(-\frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 2572 \cdot 6 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 0,514 \cdot 10^{-4} \right) \cdot E_c$$

$$\delta_t = -2,161 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \delta = -2,16 \text{ mm}$$

ЗАДАЧА 1
ЗА НОСАЧ НА СВИЦИ УМЕТА ЗАДАНОТ ОПРЕДЕЛЕНА ОДРЕДЕНИ:

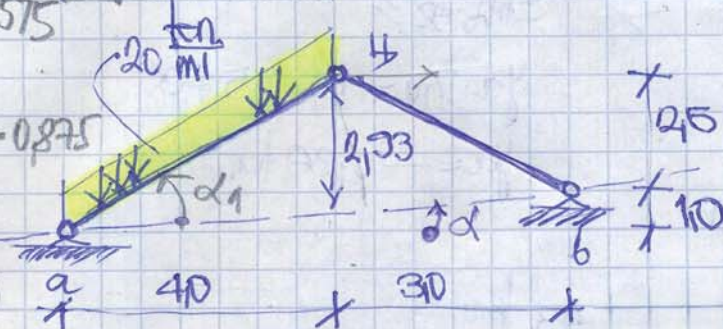
- 1° - ПРОМОЖЕН УГЛА У "1"
- 2° - ХОРИЗОНТАЛНО ПОМИРАЊЕ ЧЕВОРА "1" УМЕТА ВЕРТИКАЛНОТ ПОМИРАЊА ОСНОВИЦА "а" ЗА 0,01 м

$$p = \frac{20}{\cos \alpha_1} = 26,575$$

$$\lg \alpha_1 = \frac{3,5}{4} = 0,875$$

$$\alpha_1 = 41,19^\circ$$

$$\cos \alpha_1 = 0,753$$



$$E = 2 \cdot 10^7$$

$$J = 0,0072 \text{ m}^4$$

$$\lg \alpha = \frac{1}{7} = 0,14285 = 0,14$$

$$\alpha = 8,13^\circ$$

$$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow y_b \cdot 70 - 106,30 \cdot 20 = 0 \Rightarrow y_b = 30,37 \text{ tcn}$$

$$\Sigma M_b = 0 \Rightarrow -y_a \cdot 70 + 106,30 \cdot 50 = 0 \Rightarrow y_a = 75,93 \text{ tcn}$$

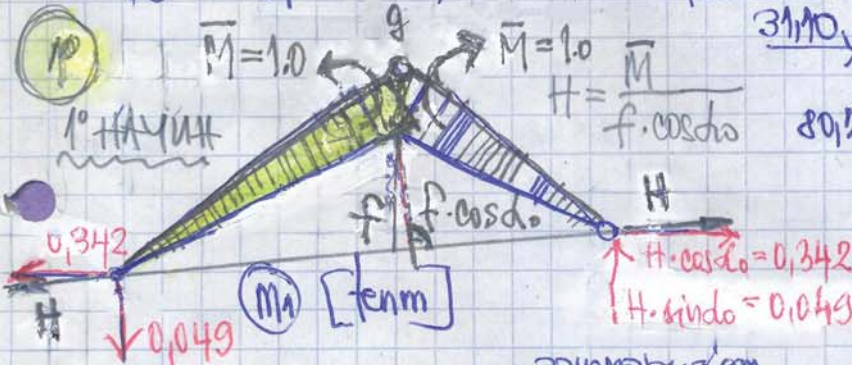
$$H_a = \frac{1}{2,33} (75,93 \cdot 40 - 106,30 \cdot 20) \Rightarrow H_a = 31,10 \text{ tcn}$$

$$H_b = \frac{1}{2,33} (30,37 \cdot 30) \Rightarrow H_b = 31,10 \text{ tcn}$$

$$V_a = 75,93 + 31,10 \cdot 0,14 = 80,28 \text{ tcn}$$

$$V_b = 30,37 - 31,10 \cdot 0,14 = 26,02 \text{ tcn}$$

$$M = 80,28 \cdot 2 - 31,10 \cdot 0,5 \cdot 3,5 - 26,575 \cdot 2 \cdot 1 = 52,985$$



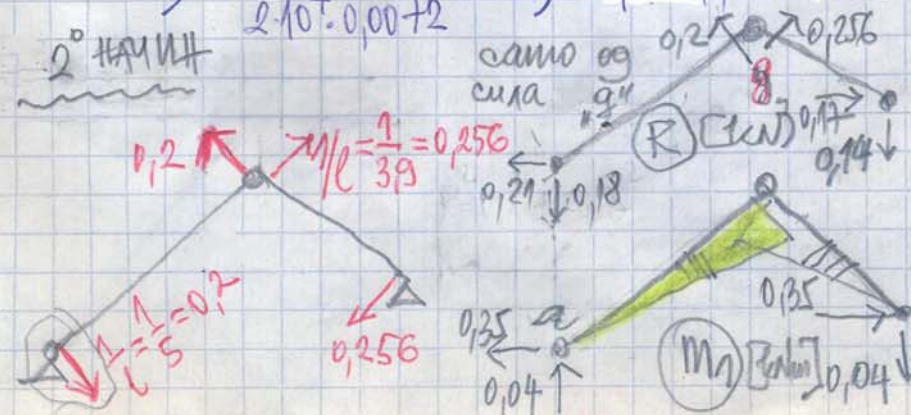
$$H = \frac{1}{2,33 \cdot 0,9899} = 0,345 \text{ tcn}$$

$$EI \cdot \delta_y = \int \frac{M M_0}{EI} ds + \int \frac{N N_0}{EI} ds + \int \frac{H H_0}{EI} ds$$

$$\delta_y = \frac{88,417}{2 \cdot 10^7 \cdot 0,0072}$$

$$\delta_y = 0,000614 \text{ rad.}$$

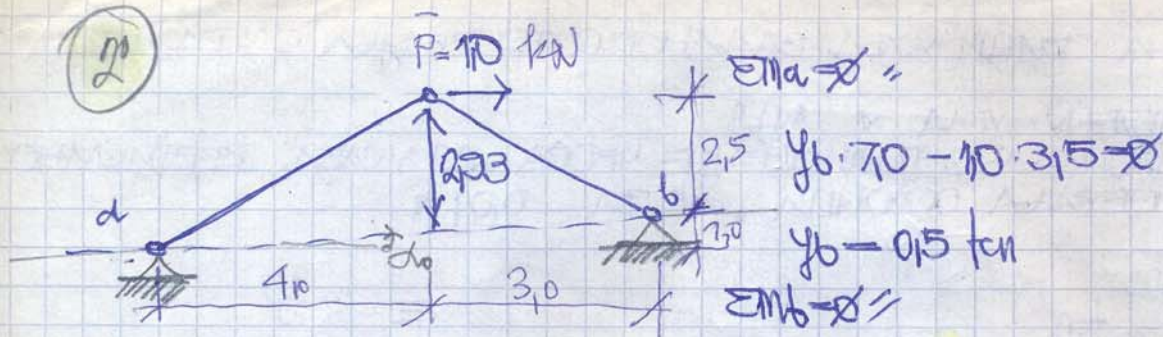
→ ПРОВЕРА СЪ 2° НАЧИН.



$$EI \delta_y = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 52,985 \cdot 5 + 0 = 88,417$$

$$\delta_y = 0,000614 \text{ rad.}$$

2)



$$\sum M_a = 0$$

$$y_b \cdot 7.0 - 10 \cdot 3.5 = 0$$

$$y_b = 0.5 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0$$

$$y_a \cdot 7.0 + 10 \cdot 2.5 = 0$$

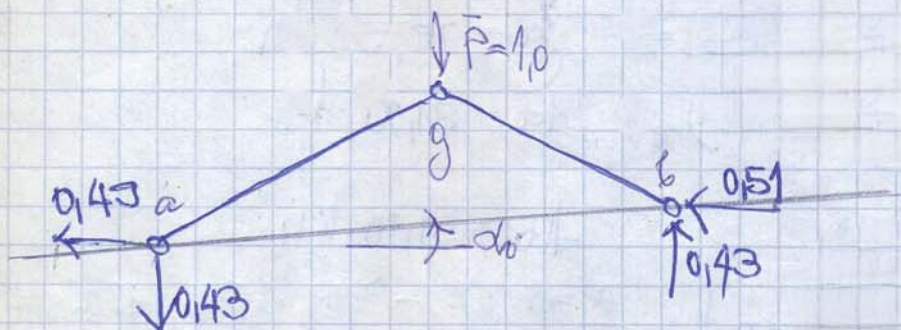
$$y_a = -0.36 \text{ kN}$$

$$H_b = \frac{1}{2.53} (0.5 \cdot 3.0) = 0.51 \text{ kN}$$

$$H_a = \frac{1}{2.53} (-0.36 \cdot 4.0) = -0.49 \text{ kN}$$

$$y_a = -0.36 + (-0.49) \cdot 0.14 = -0.43 \text{ kN}$$

$$y_b = 0.5 - 0.51 \cdot 0.14 = 0.43$$



$$\delta_y = -\sum \bar{C}_i \cdot c_i = -(-0.43) \cdot 0.01 = 0.0043 \text{ m} = 4.3 \text{ mm}$$