

СТАТИКА КОНСТРУКЦИЈА 1

Модул: Конструкције

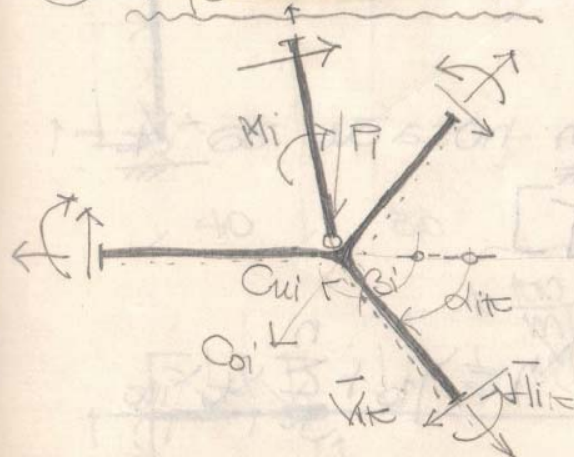
– материјал за вежбе –

2024.

OPŠTE METODE SILA U PRESJECIMA U STATICI KONSTRUKCIJA

- 1 - metoda zvorova
- 2 - " dekompozicije
- 3 - " zamjene elemenata

① METODA ZVOROVA



k - broj zvorova

$2k+m$ - uslovi ravnot.

$Z_0 - C_0$

$Z_u - C_u$

$Z_S - S_k$

$Z_{k+m} - M_{ki} \text{ i } M_{ki}$

$2k+m$

2. METODA DEKOMPOZICIJE

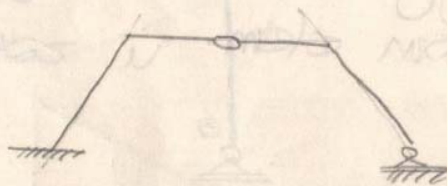
$Z_0 -$

$Z_u -$

$2Z_e -$

$3Z_p -$

uslov rav.



3. METODA ZAMJENE ELEMENATA

Proračun uticaja metodom zam. elemenata svodi se na proračun uticaja u drugom jednostavnijem nosaču. Pri tome od datog nosača prebacimo na zamjenjujući nosač.

Potrebno je da zamjenjujući nosač da bude kin. prost. stabil i da reakcije i sile u presjec. mogu da se odrede elementarnim metodom (prihod. met.). Zamjen. nosač dobijamo uklanjanjem n -elementa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ reakcije.

Uticaje u datom nosaču odred. superpozicijom
$$Z = Z_0 + Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + \dots + Z_n x_n = Z_0 + \sum_{k=1}^n x_k Z_k$$

$= Z$ - uticaj u datom nosaču

$= Z_0$ - " Z u zamjenjujućem nosaču usled datih spoljašnjih uticaja

$= Z_k$ - uticaj Z u zamjenjujućem nosaču za $x_k = 1$

Reakcije dodatnih elemenata $[Y]$

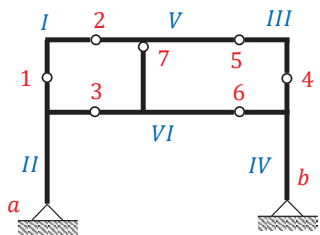
$$Y_i = Y_{i0} + Y_{i1} x_1 + Y_{i2} x_2 + \dots + Y_{in} x_n = Y_{i0} + \sum_{k=1}^n x_k Y_{ik}$$

$= Y_{i0}$ - reakcija u dodatnom elementu usled spoljašnjeg opterećenja na zamjenjujućem nosaču

Y_{ik} - reakcija u dodatnom elem. u zamjen. nosaču za $x_k = 1$

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{vmatrix}$$

$\neq 0$ da bi imali res. i da nosač bude kinematički stabilan



стварни носач

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$$

$$4 + 0 + 15 + 9 = 2 \cdot 14$$

$$28 = 28$$

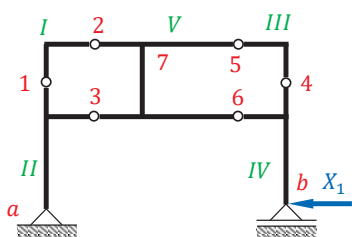
$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$$

-1

+1

OK!

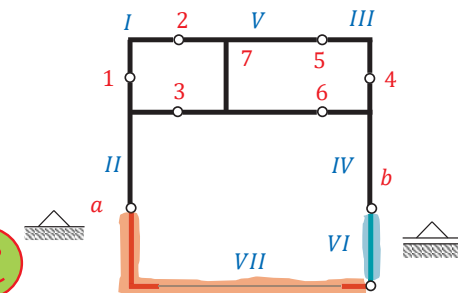
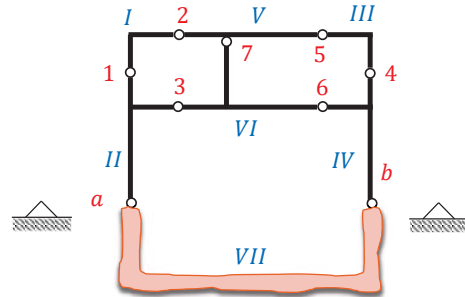
Мењамо елементе !.



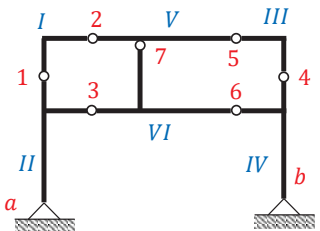
$$3 + 0 + 15 + 10 = 2 \cdot 14$$

$$28 = 28$$

замењујући носач



стварни носач



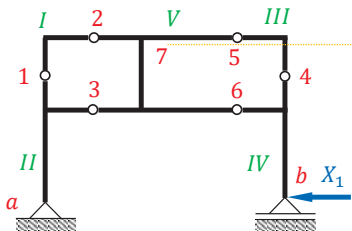
$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^1 X_k Z_k$$

$$Z = Z_0 + X_1 Z_1$$

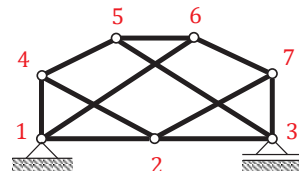
где је:

- Z – неки од утицаја (реакција ослонаца, моменат укљештења или сила у неком пресеку у датом носачу услед спољашњих сила),
- Z_0 – утицај Z у замењујућем носачу услед датих спољашњих сила,
- Z_k – утицај Z при $X_k=1.0$ ($k=1,2,..., n$).

замењујући носач



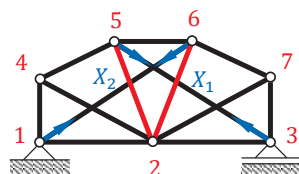
стварни носач



$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^2 X_k Z_k$$

$$Z = Z_0 + X_1 Z_1 + X_2 Z_2$$

замењујући носач

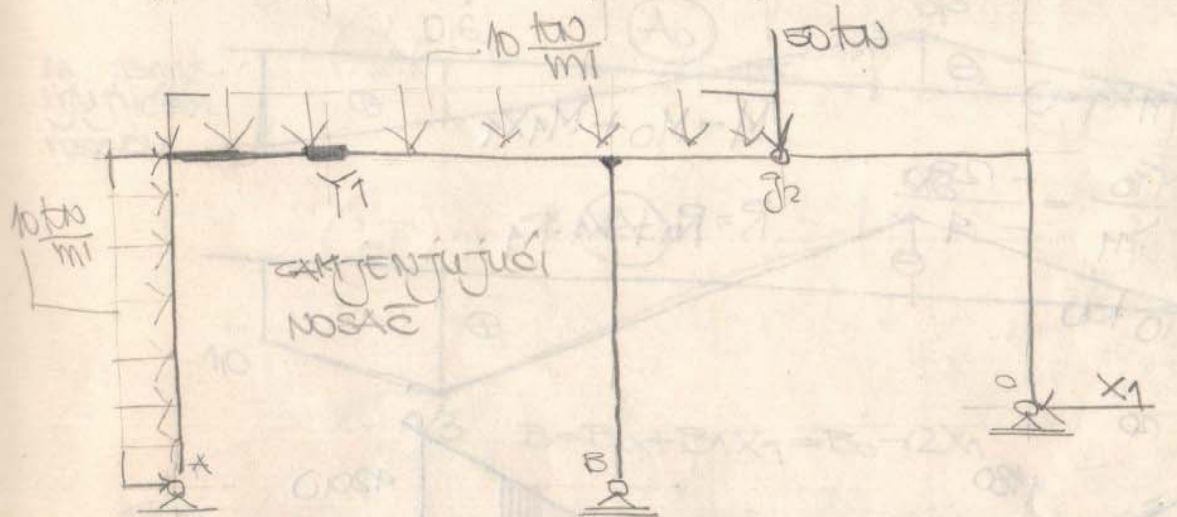
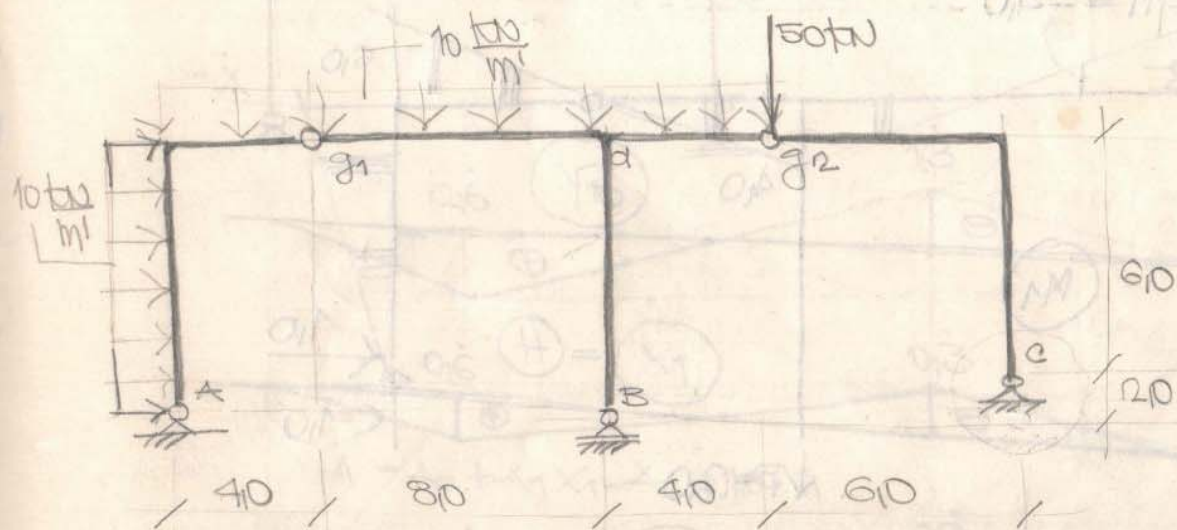


⊗ ZADATAK 7 ⊗

7a nosač na slici:

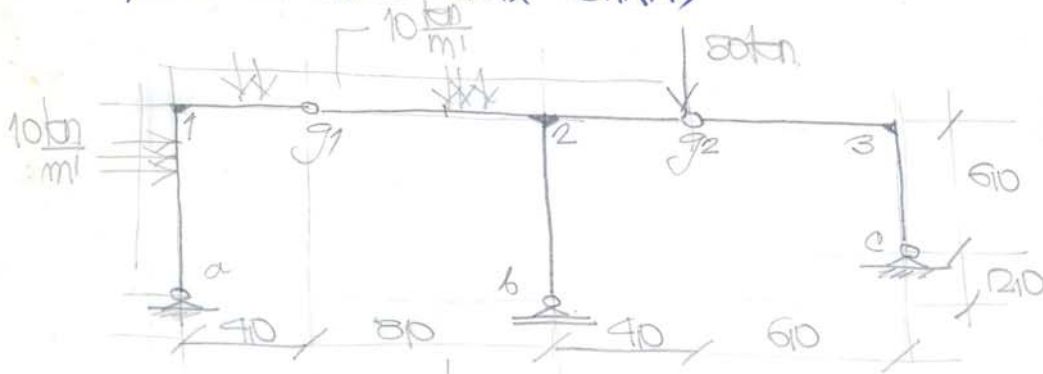
a) nacrtati sile u presjecima metodom zamjene elemenata

b) konstruisati uticajne linije za ^{horizontalnu silu} H, reakcije A, B, C
momental M_d , T_d , N_d , T_d



ЗАДАЧА 1

ЗА ПОСЛУ НА СКИЦИ МЕТОДОМ ЗАМЈЕНЕ ЕЛЕМЕНТА НАУСТАТИ
ДИЈАГРАМ ПРЕСЕЧНИХ СИЛА,



$$X_A - 80 = 0 \Rightarrow X_A = 80 \text{ kN}$$

$$\textcircled{2} \sum Y = 0$$

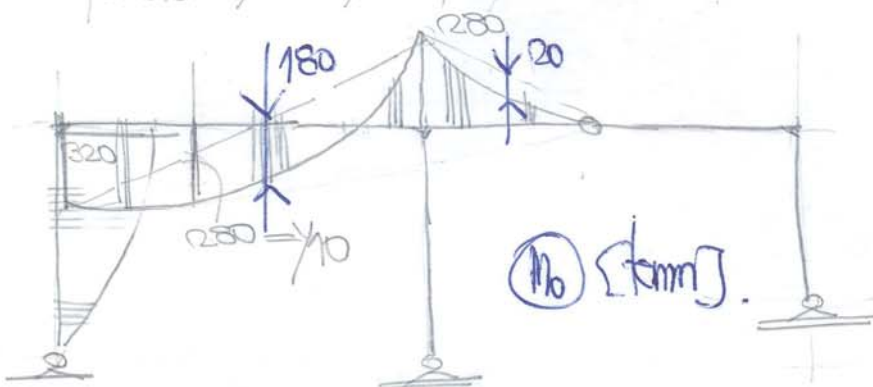
$$Y_A + Y_b + Y_c - 150 - 50 = 0 \Rightarrow Y_A = 210 - 200 = 10 \text{ kN} \quad Y_A = 10 \text{ kN}$$

$$\textcircled{3} \sum M_A = 0$$

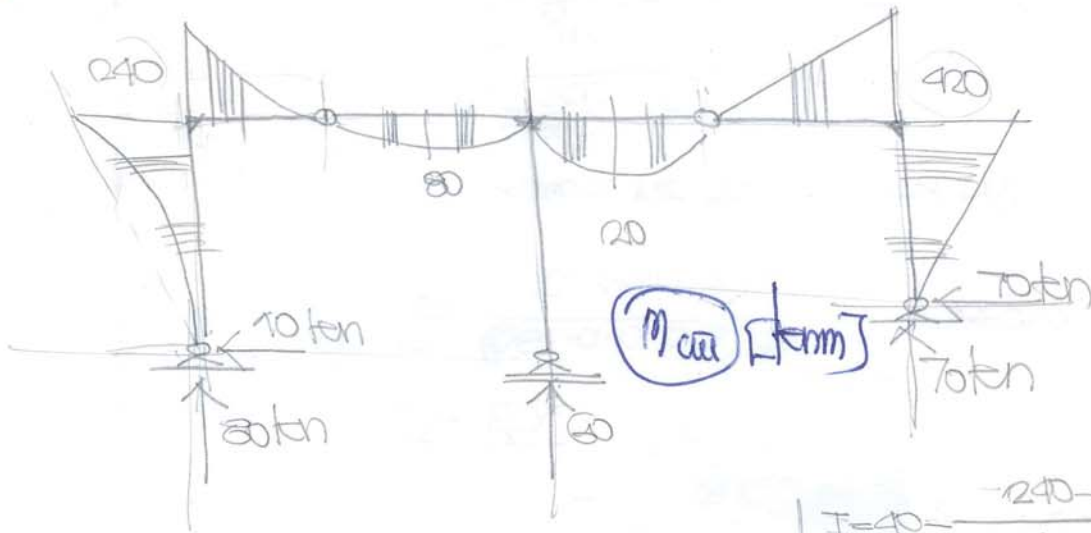
$$-80 \cdot 40 - 150 \cdot 80 - 50 \cdot 160 + Y_b \cdot 120 + Y_c \cdot 220 = 0 \Rightarrow Y_b = \frac{2400}{12} = 200$$

$$\textcircled{4} \sum M_c = 0$$

$$Y_c \cdot 60 = 0 \Rightarrow Y_c = 0$$



$\textcircled{10} \text{ [kNm]}$



$$R_1 = R_0 + R_1 \cdot x_1 = 10 + 110 \cdot 70 = 80$$

$$R_2 = -80 + 110 \cdot 70 = 10$$

$$R = 200 + (-2) \cdot 70 = 60$$

$$R = 0 + 170 = 70$$

$$T = 40 - \frac{240 \cdot 8}{8} = 40 - 240 = -200$$

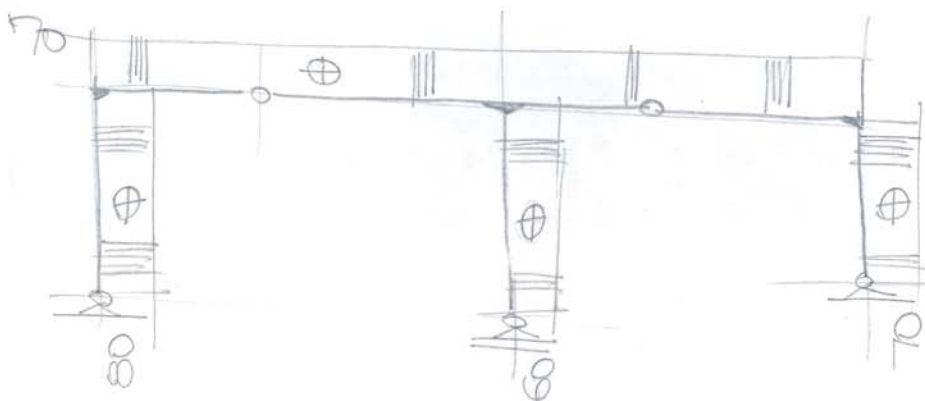
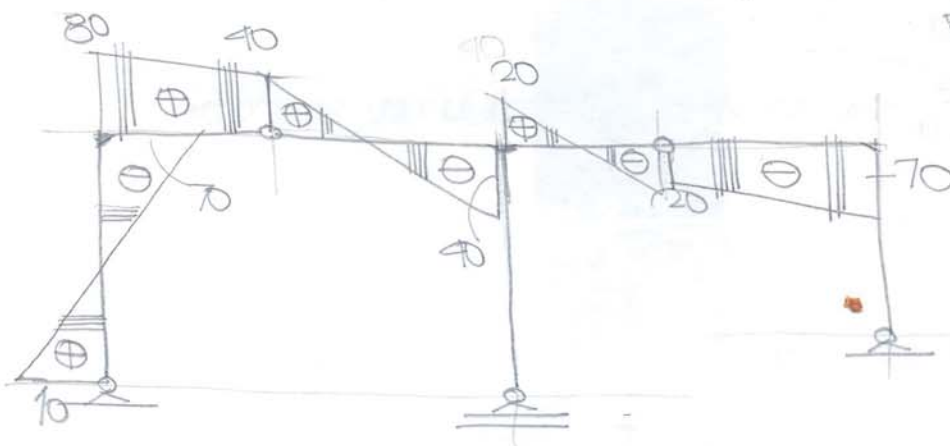
$$T = 40 - \frac{240}{8} = 40 - 30 = 10$$

$$T = 20 - \frac{420}{4} = 20 - 105 = -85$$

$$T = -20 + \frac{240}{4} = -20 + 60 = 40$$

$$T = 40$$

$$80 - \frac{420 \cdot 8}{60}$$



(N) [kN]

27.03.1991

b)

$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^n X_k I_k$$

uticajna linija za neki uticaj

Z_0 - utic. linija

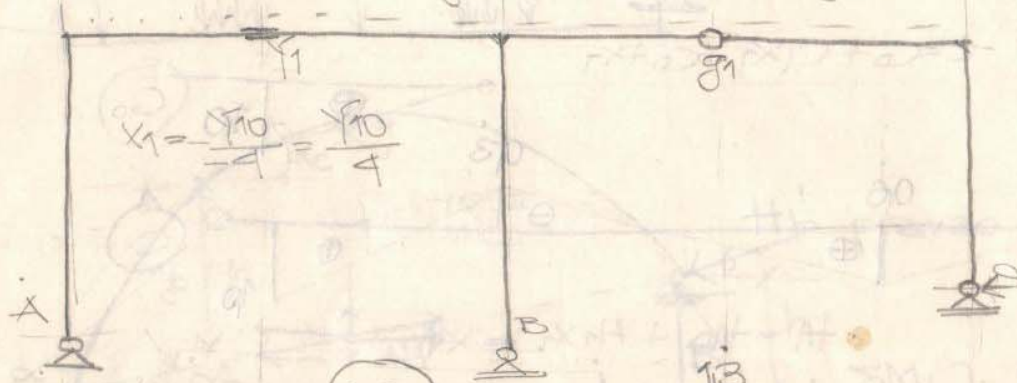
X_k - utic. linija za reakciju uklopnog elementa

$$X_k = - \frac{Y_{10}}{Y_{1k}}$$

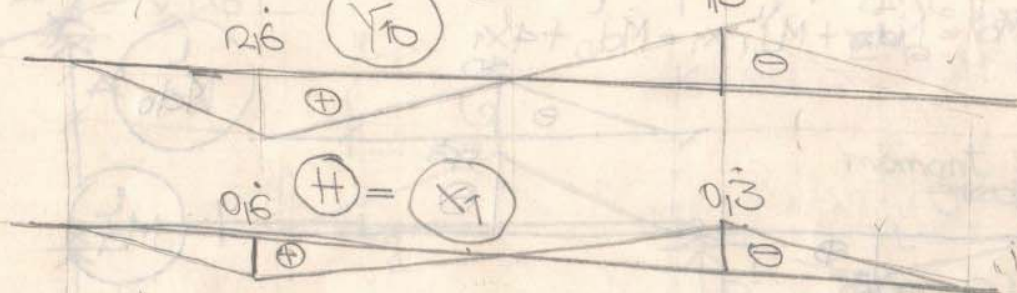
Z_k - broj vrednost utic. za $k=1$

Y_{10} - utic. lin. za reakciju dodatnog elem. na zamjenjujućem nosaču

Y_{1k} - vred. reakcije u dodatnom elem. " za $X_k=1$



$$X_1 = \frac{Y_{10}}{-4} = \frac{Y_{10}}{4}$$



$$A = A_0 + X_1 X_1 = A_0 + 10 \cdot X_1$$

$$Y_{11} = -4$$

$$Z = Z_0 + X_1 Z_1$$

$$X_1 = - \frac{Y_{10}}{Y_{11}}$$

$$X_1 = 10$$

$$A_1 = 10$$

$$B_1 = -20$$

$$C = 10$$

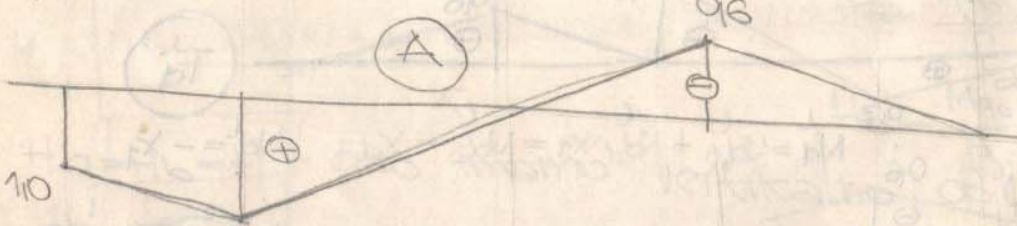
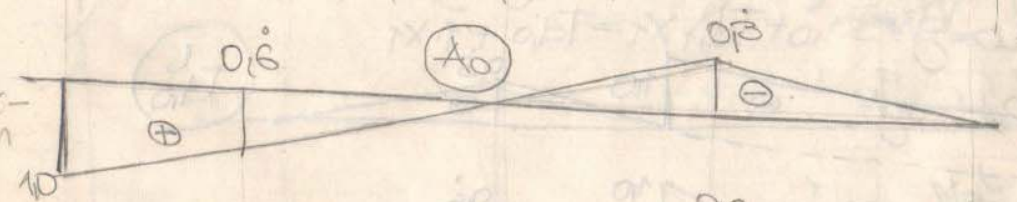
$$M_{dn} = 4$$

$$T_{d,1} = 10$$

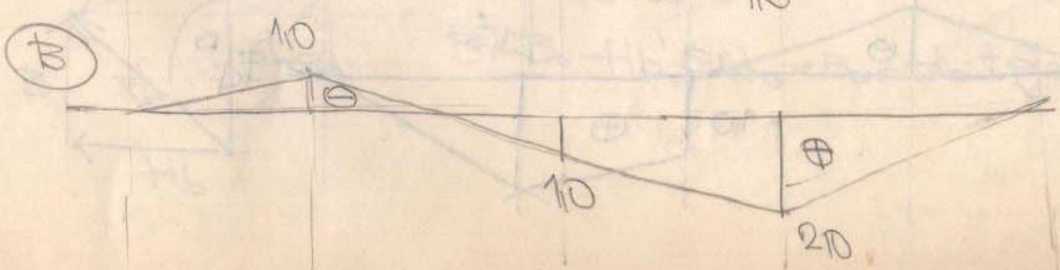
$$N_{d,1} = -10$$

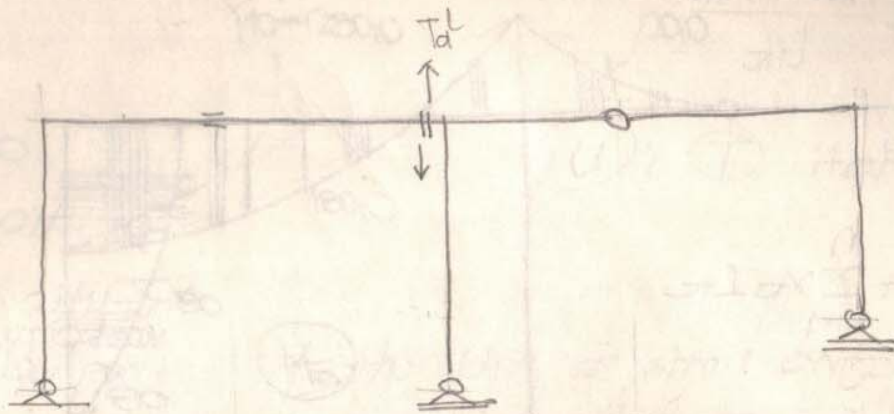
$$T_{d,1}^d = -10$$

na zamjenjujućem nosaču

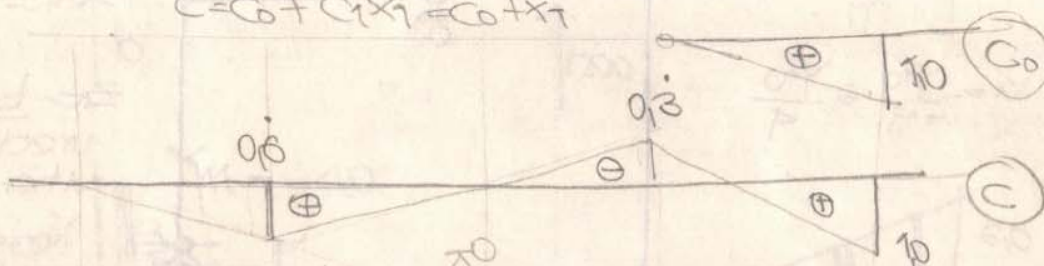


$$B = B_0 + B_1 X_1 = B_0 - 2X_1$$



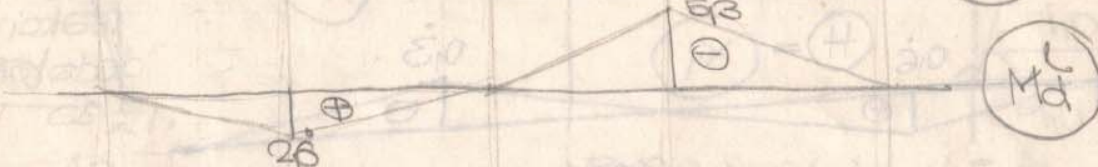
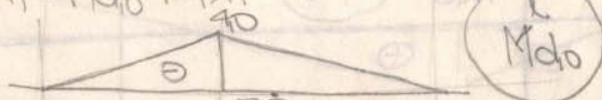


$$C = C_0 + C_1 X_1 = C_0 + X_1$$

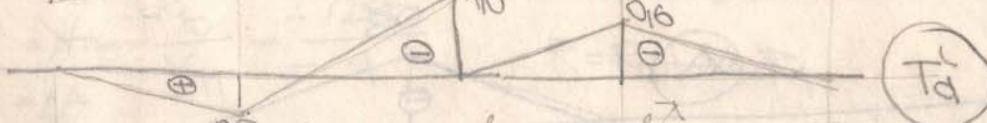
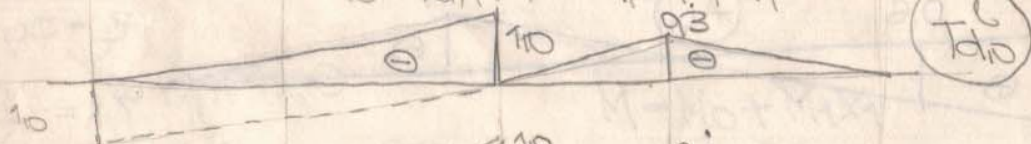


$$H = H_0 + H_1 X_1 = X_1$$

$$M_d^L = M_{d,0}^L + M_{d,1}^L X_1 = M_{d,0}^L + 4X_1$$



$$T_d^L = T_{d,0}^L + T_{d,1}^L X_1 = T_{d,0}^L + 1 \cdot X_1$$

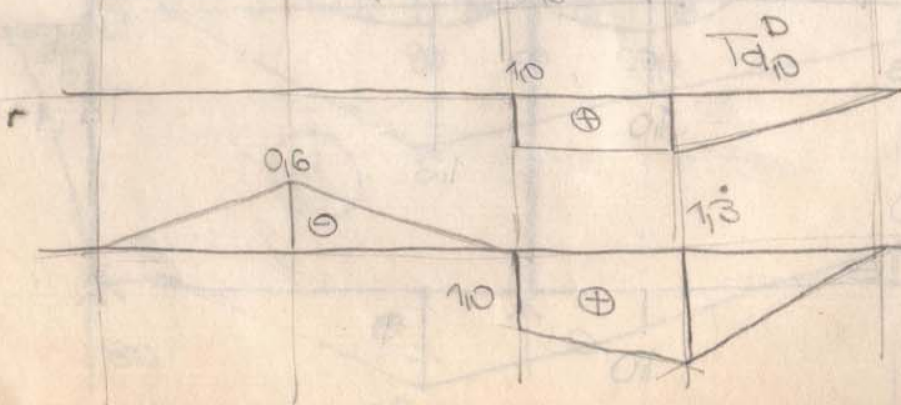


$$N_d = N_{d,0} + N_{d,1} X_1 = N_{d,0} - X_1$$

$$N_d^L = -X_1$$



$$T_d^D = T_{d,0}^D + T_{d,1}^D X_1 = T_{d,0}^D - X_1$$



Пример

$$\sin \alpha = 0,60$$

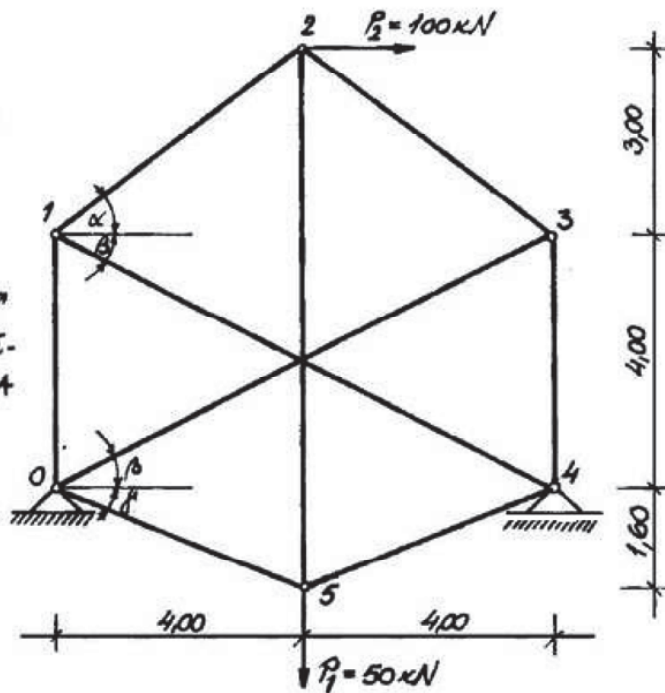
$$\cos \alpha = 0,80$$

$$\sin \beta = 0,447$$

$$\cos \beta = 0,372$$

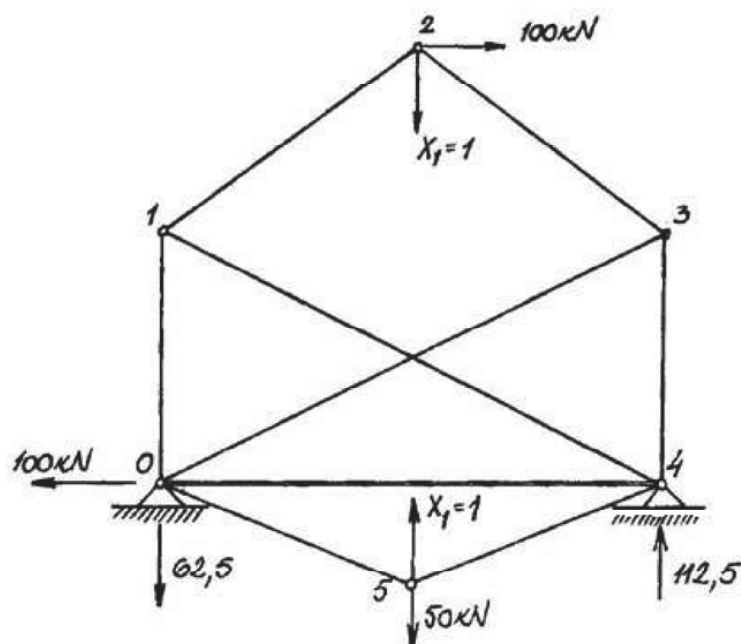
$$\cos \gamma = 0,828$$

НАПОМЕНА:
ЗА $\alpha = \beta$ I $\beta = \gamma$
НАСТАЈЕ КРИТИЧ-
НА КОНФИГУРАЦИЈА
НОСАЧА.

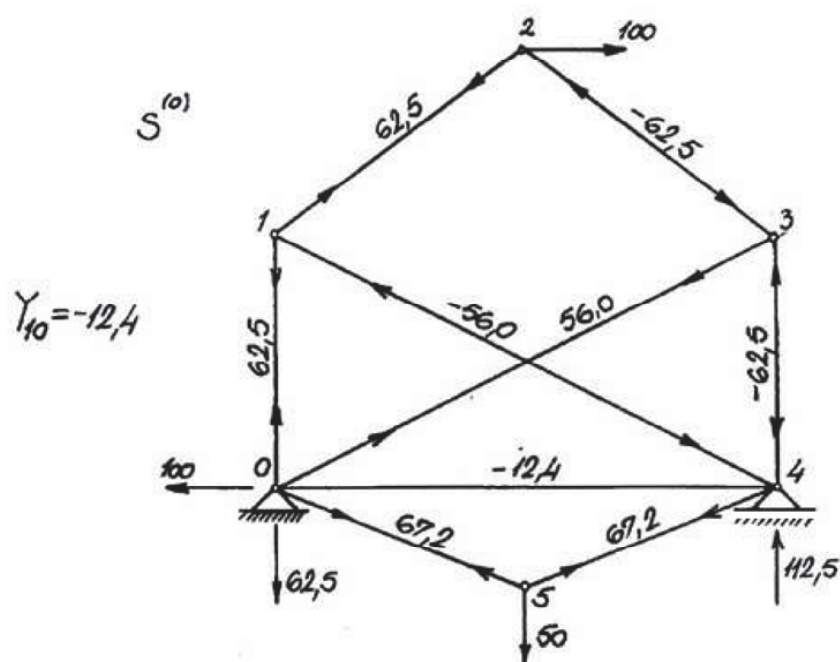


OD ZADATOG OPTEREĆENJA NAĆI SILE U ŠTAPOVIMA KORIS-
TEĆI METODU ZAMENE ELEMENATA.

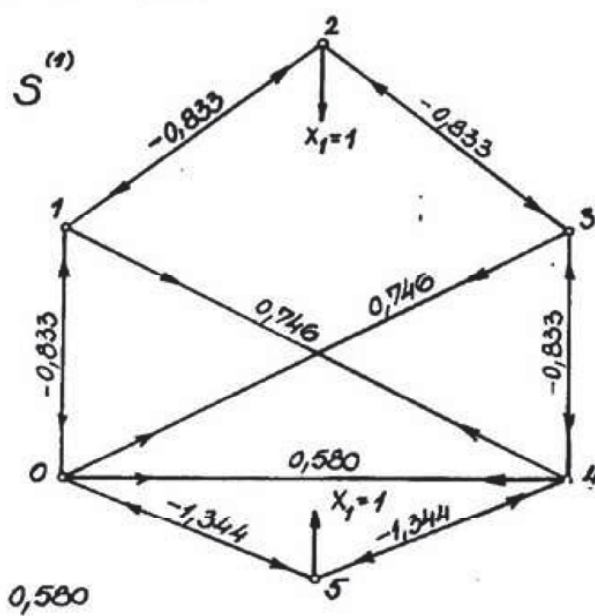
POŠTO SU U SVIM ČVOROVIMA VEZANA PO 3
ŠTAPA, UKLONICEMO ŠTAP 2-5 I POSTAVITI GA IZMEĐU ČV-
ROVA 0-4, A NA MESTO ŠTAPA 2-5 APLICIRATI SISTEM
SILA $X_1 = 1$ U ČVOROVIMA 2 I 5. TIME DOBIJAMO
ZAMENJUJUĆI SISTEM.



SILE U ŠTAPOVIMA OD SPOLJAŠNJEG OPTEREĆENJA U ZAMENJUJUĆEM SISTEMU.



SILE U ŠTAPOVIMA OD STANJA $X_1 = 1$
POŠTO JE OVO STANJE RAVNOTEŽNO, NEĆE SE POJAVITI REAKCIJE OSLOKACA.



ZAMENJUJUĆI ŠTAP U SISTEMU (0-4) NE POSTOJI PA
ĆE STVARNA VREDNOST SILE U ŠTAPU (0-4) BITI JED-
NAKA NULI.

$$Y_1 = Y_{10} + Y_{11} \cdot X_1 = 0$$

$$-12,4 + 0,58 X_1 = 0$$

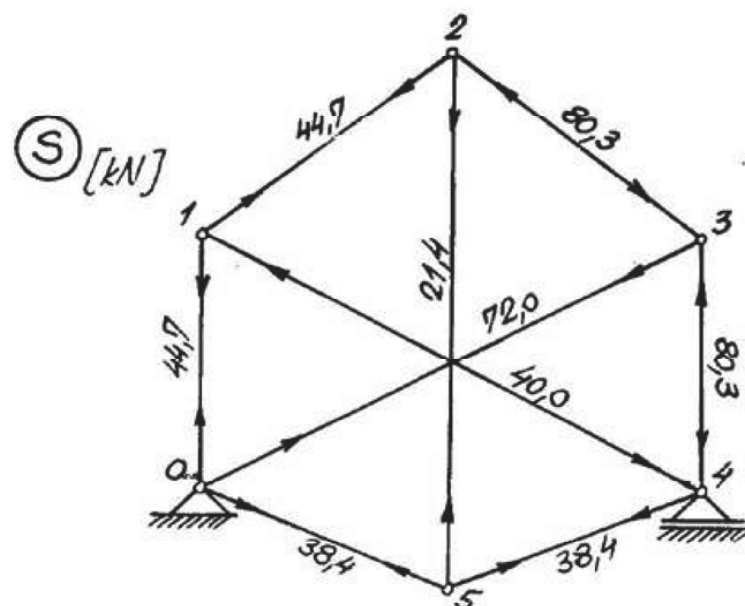
$$X_1 = \frac{12,4}{0,58} = 21,4$$

SILE U ŠTAPOVIMA DATOG NOSAČA DOBIČEMO NA OSNOVU PRINCIPA SUPERPOZICIJE

$$S = S^{(0)} + X_1 \cdot S^{(1)}$$

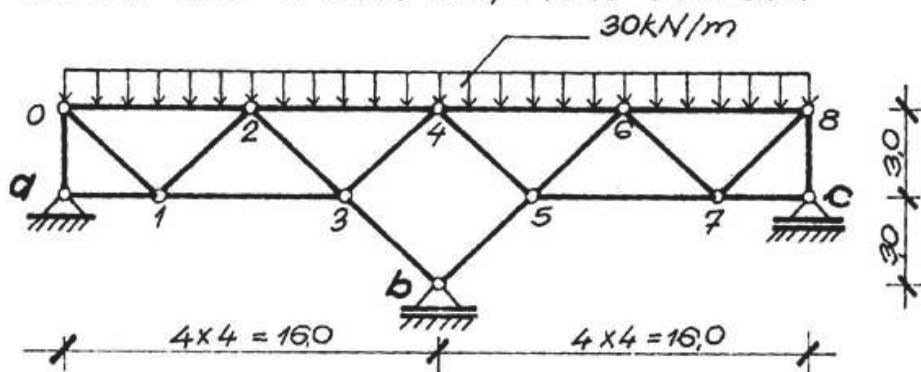
PREMA GORNJEM IZRAZU IZRAČUNATE SU SILE U ŠTAPOVIMA I UPISANE U ZADNJU KOLONU TABELA .

ŠTAP	$S^{(0)}$	$S^{(1)}$	$X_1 \cdot S^{(1)}$	S
0-1	62,5	-0,833	-17,8	44,7
1-2	62,5	-0,833	-17,8	44,7
2-3	-62,5	-0,833	-17,8	-80,3
3-4	-62,5	-0,833	-17,8	-80,3
4-5	67,2	-1,344	-28,8	38,4
5-0	67,2	-1,344	-28,8	38,4
0-3	56,0	0,746	16,0	72,0
1-4	-56,0	0,746	16,0	-40,0
2-5	0	1,000	21,4	21,4
0-4	-12,4	0,580	12,4	0



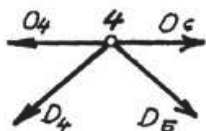
Пример

Odrediti sile u svim štapovima rešetke.



Rešenje:

Strukturnom analizom datog nosača lako se uveriti da se radi o nosaču II vrste. Stoga ćemo za njegovo rešavanje koristiti metodu zamene elemenata.

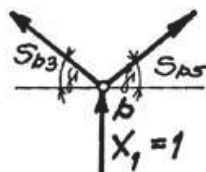


Zbog simetrije je $D_4 = D_5 = 2,0$,

a iz uslova

$$\sum Y = 0 \Rightarrow D_4 = -D_5$$

$$i \quad \sum X = 0 \Rightarrow D_4 = -D_5 = 0$$

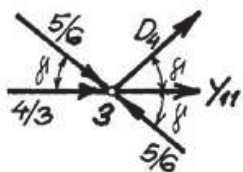


Iz uslova $\sum X = 0 \Rightarrow S_{b3} = S_{b5} = S$,

a iz $\sum Y = 0 \Rightarrow$

$$2S \cdot \sin \varphi_1 + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{1}{2 \sin \varphi_1}$$

$$tj \quad S = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{5}{6}$$

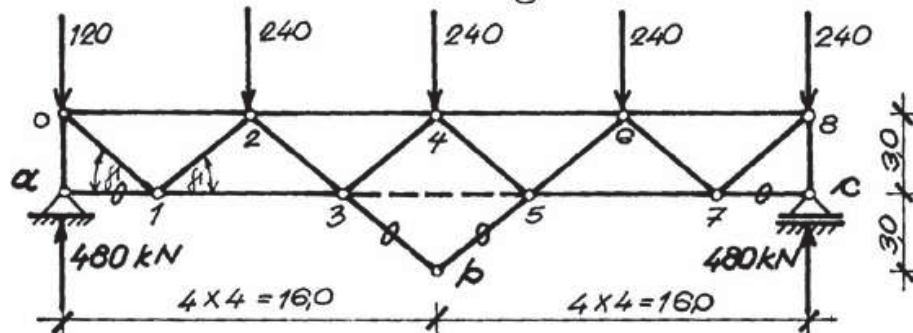


Iz uslova $\sum Y = 0 \Rightarrow D_4 = 0$ (kontrola)

Iz uslova $\sum X = 0 \Rightarrow Y_{11} + \frac{4}{3} = 0$ tj

$$Y_{11} = -\frac{4}{3}$$

Određivanje sila u štapovima usled spoljašnjeg opterećenja



$$U_1 = 0 \quad ; \quad S_{b3} = S_{b5} = 0$$

$$V_0 = -480 \text{ kN}$$

$$O_2 \cdot 3 + (480 - 120) \cdot 4 = 0 \Rightarrow O_2 = -480 \text{ kN}$$

$$O_4 \cdot 3 + (480 - 120) \cdot 12 - 240 \cdot 4 = 0 \Rightarrow O_4 = -1120 \text{ kN}$$

$$U_3 \cdot 3 + (120 - 480) \cdot 8 = 0 \Rightarrow U_3 = +960 \text{ kN}$$

$$U_5 \cdot 3 + (120 - 480) \cdot 16 + 240 \cdot 8 = 0 \Rightarrow U_5 = +1280 \text{ kN} = Y_{10}$$

$$D_1 \cdot \sin \alpha + 120 - 480 = 0 \Rightarrow D_1 = \frac{360}{\sin \alpha} = 360 \cdot \frac{5}{3} = 600 \text{ kN}$$

$$D_2 \cdot \sin \alpha - 120 + 480 = 0 \Rightarrow D_2 = -\frac{360}{\sin \alpha} = -360 \cdot \frac{5}{3} = -600 \text{ kN}$$

$$D_3 \cdot \sin \alpha + 120 + 240 - 480 = 0 \Rightarrow$$

$$D_3 = \frac{120}{\sin \alpha} = 120 \cdot \frac{5}{3} = 200 \text{ kN}$$

$$D_4 \cdot \sin \alpha + 480 - 120 - 240 = 0 \Rightarrow$$

$$D_4 = -\frac{120}{\sin \alpha} = -120 \cdot \frac{5}{3} = -200 \text{ kN}$$

Zbog simetrije i nosača i opterećenja dovoljno je odrediti sile samo u polovini nosača.

U stvarnom nosaču mora biti ispunjen uslov

$$Y_1 = Y_{10} + Y_{11} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{Y_{10}}{Y_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{1280}{-4/3} = +960 \text{ kN}$$

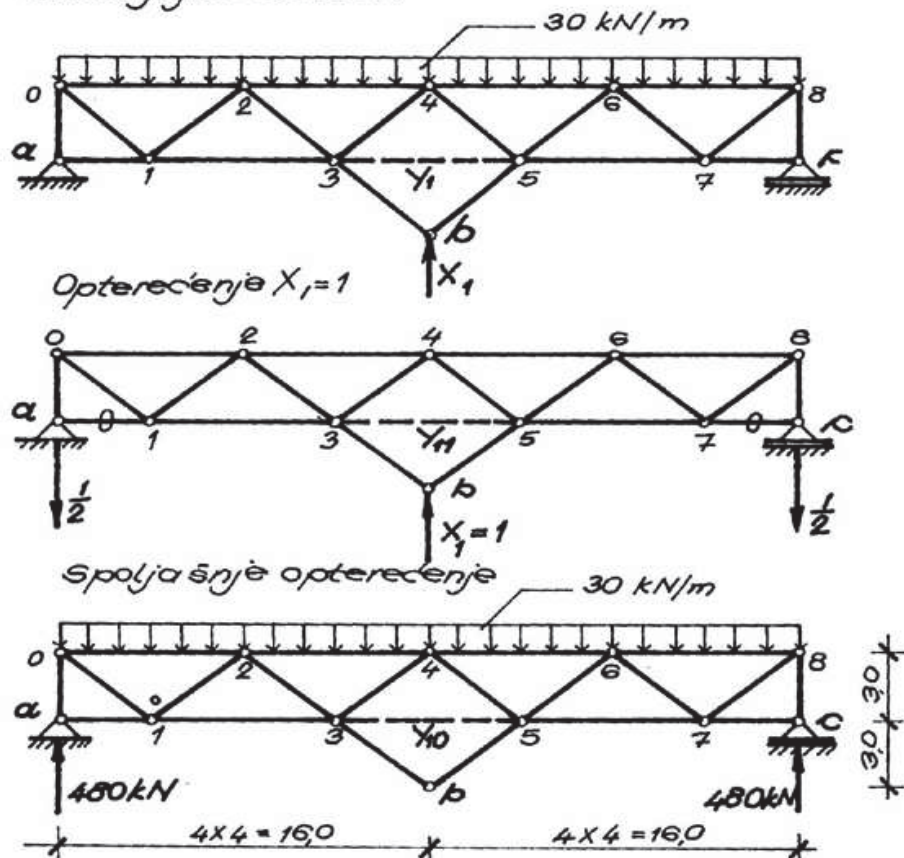
Konačne sile u svim štapovima dobijamo na osnovu superpozicije

$$S = S_0 + S_1 X_1 = S_0 + 960 S_1$$

štap	S_{i1}	S_{i0}	$S_{i1} X_1$	$S \text{ [kN]}$
U_1	0,0	0,0	0,0	0,0
U_3	-4/3	960	-1280	-320
Y_1	-4/3	1280	-1280	0,0
O_2	2/3	-480	640	160
O_4	2,0	-1120	1920	800
V_6	1/2	-480	480	0,0
D_1	-5/6	600	-800	-200
D_2	5/6	-600	800	200
D_3	-5/6	200	-800	-600
D_4	0,0	-200	0,0	-200
$S_{10}=S_{25}$	-5/6	0,0	-800	-800

Nosaci i opterećenje su simetrični te su i sile u štapovima simetrične.

Zamenjujući sistem :



Određivanje sila u štapovima rešetke od $X_1=1$

$$V_0 = +0,5 \quad U_1 = 0$$

$$O_2 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \Rightarrow O_2 = \frac{2}{3}$$

$$U_3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 0 \Rightarrow U_3 = -\frac{4}{3}$$

$$O_4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \Rightarrow O_4 = 2,0$$

$$D_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow D_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{5}{6}$$

$$D_2 \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow D_2 = +\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$D_3 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow D_3 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{5}{6}$$

~

