

СТАТИКА КОНСТРУКЦИЈА 1

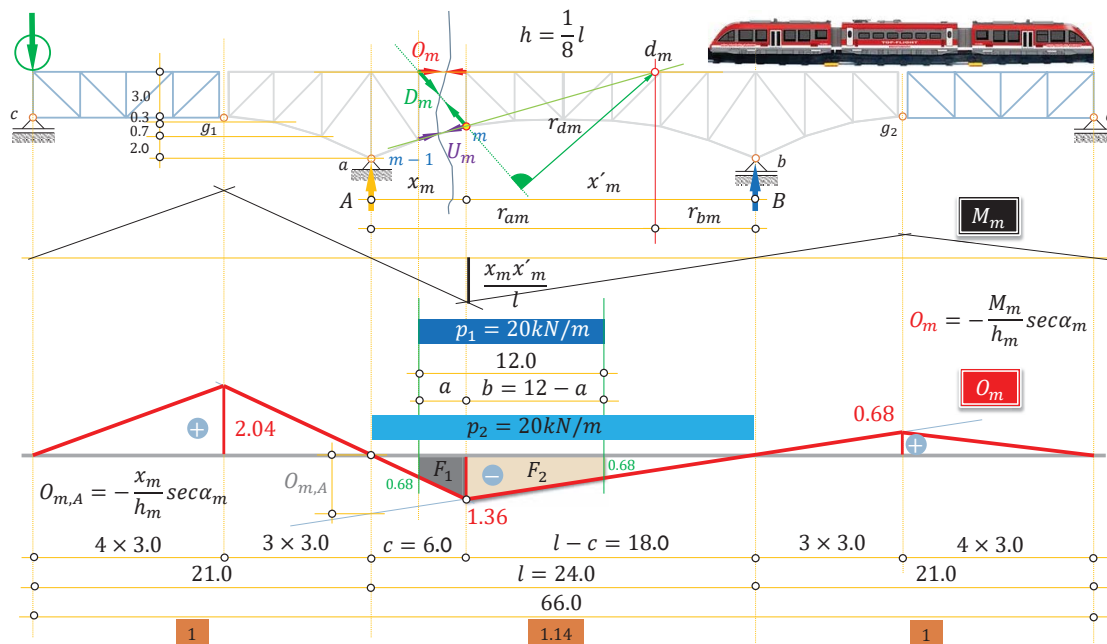
Модул: Конструкције

– материјал за вежбе –

2024.

Примери

За носач на скици при покретном подељеном оптерећењу коначне и бесконачне дужине наћи меродаван положај и срачунати силу у штапу горњег појаса.



Резултанта оптерећења:

$$R = p_1 \cdot 12 = 20 \cdot 12 = 240 \text{ kN}$$

Да би се оптерећење било у меродавном (опасном) положају, и тада изазвало максималне (+ или -) утицаје потребно је да буде испуњен услов:

$$\frac{R^L}{c} = \frac{R^D}{(l-c)} = \frac{R}{l}, \quad \frac{p_1 \cdot a}{c} = \frac{p_1 \cdot b}{(l-c)} = \frac{1}{2}$$

односно,

$$p_1 \cdot \frac{a}{c} = p_1 \cdot \frac{b}{(l-c)} = 0.5 \quad \frac{a}{6} = \frac{12-a}{18} = 0.5 \quad a = 0.5 \cdot 6 = 3.0 \text{ m}$$

односно, другачије из истог услова, имамо

$$12 - a = 18 \cdot 0.5 \\ -a = 18 \cdot 0.5 - 12 \quad a = 3.0 \text{ m}$$

Провера услова за меродаван (опасан) положај - просечног оптерећења:

- на левом делу утицајне линије:

$$\frac{R^L}{c} = \frac{p_1 \cdot a}{c} = \frac{20 \cdot 3}{6} = 10 \text{ kN/m}^1$$

- на десном делу утицајне линије:

$$\frac{R^D}{l-c} = \frac{p_1 \cdot b}{(l-c)} = \frac{20 \cdot 9}{18} = 10 \text{ kN/m}^1$$

- укупно просечно оптерећење над делом утицајне линије:

$$\frac{R}{l} = \frac{240}{24} = 10 \text{ kN/m}^1$$

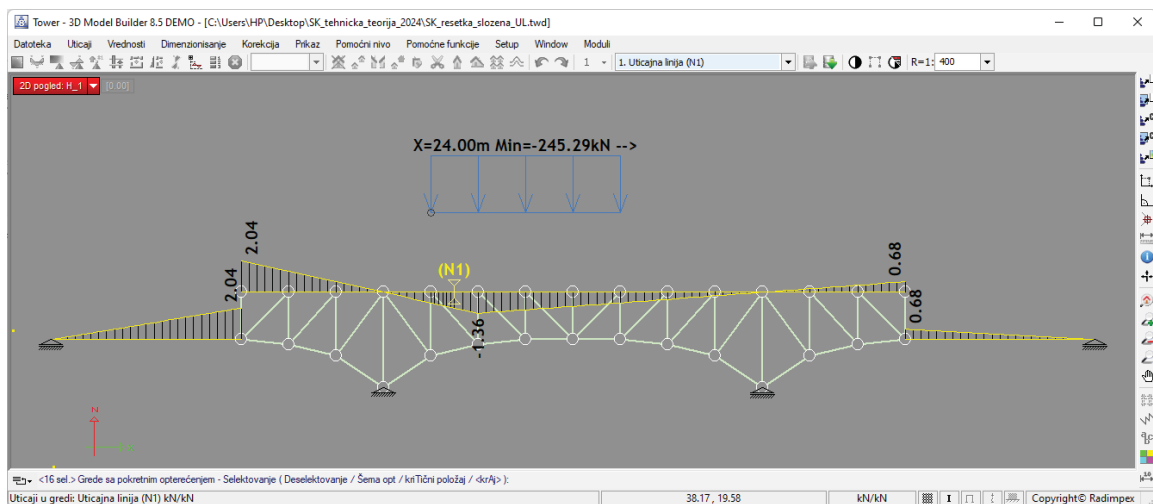
Минимална сила у штапу горњег појаса

- од оптерећења p_1 је:

$$\begin{aligned} \max Z = \min O_m &= p \cdot (F_1 + F_2) = \\ &= 20 \cdot \left[\left(\frac{0.68 + 1.3636}{2} \right) \cdot 3.0 + \left(\frac{1.3636 + 0.68}{2} \right) \cdot 9.0 \right] = \\ &= 20 \cdot (3.0655 + 9.1964) = 20 \cdot 12.2619 = 245.24 \text{ kN} \end{aligned}$$

- разлика резултата у поређењу са методом коначних елемената

$$R = \left(\frac{245.29 - 245.24}{245.29} \right) \cdot 100 = 0.02\%$$

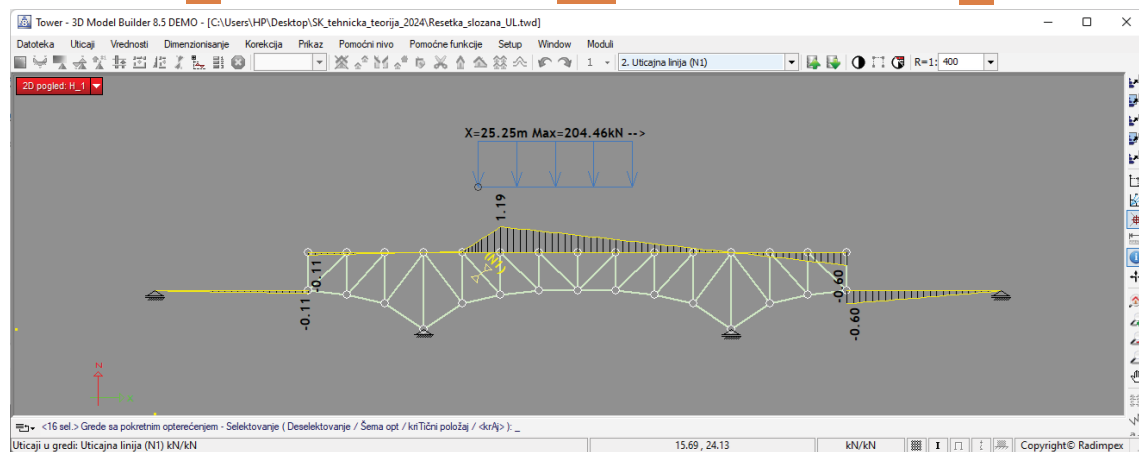
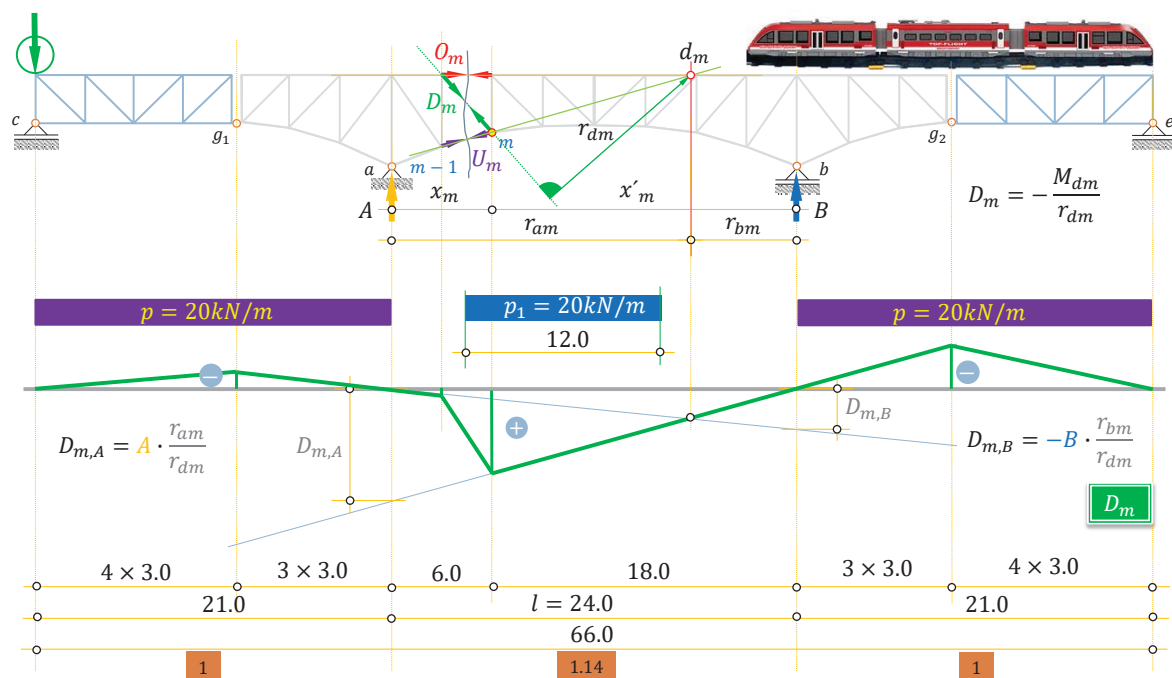


Слика 1: штап O_m

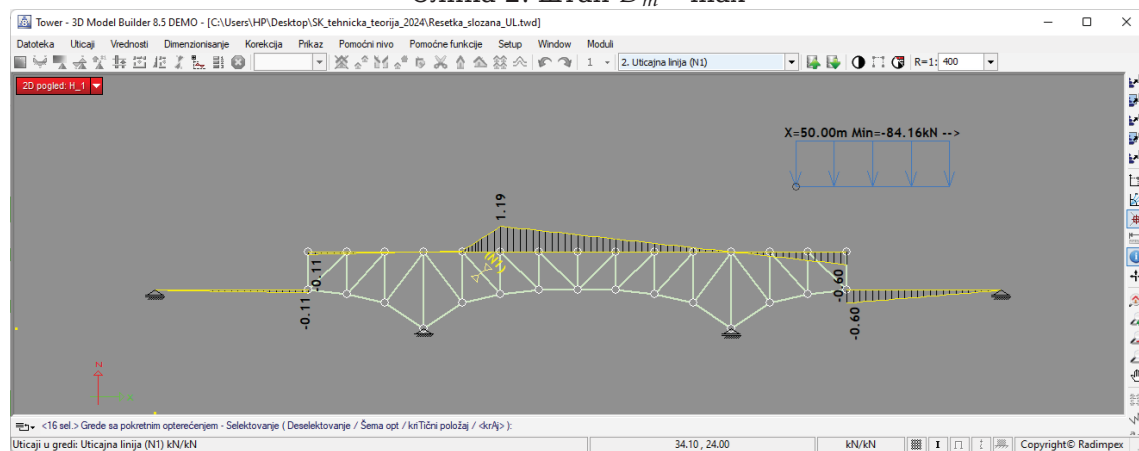
- од оптерећења p_2 налазимо максималну "минималну" вредност силе у штапу

$$\begin{aligned} \min O_m &= p \cdot F^- = \\ &= 20 \cdot \left[\left(\frac{1.3636}{2} \right) \cdot 6.0 + \left(\frac{1.3636}{2} \right) \cdot 18.0 \right] = \\ &= 20 \cdot (4.0909 + 12.2727) = 20 \cdot 16.3636 = 327.27 \text{ kN} \end{aligned}$$

Дијагонални штап - максимална "+" или "-" сила у штапу

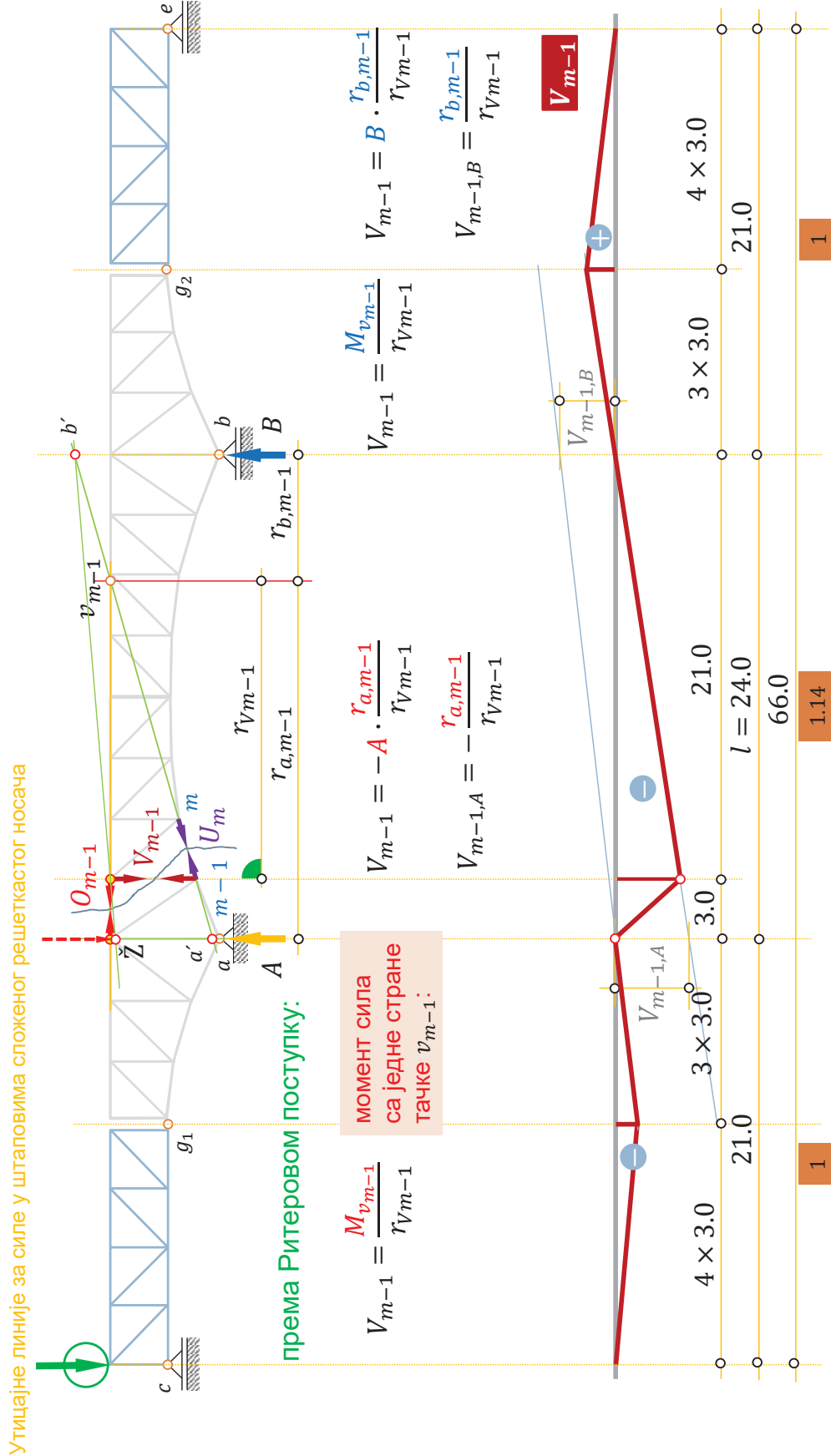


Слика 2: штап D_m - max

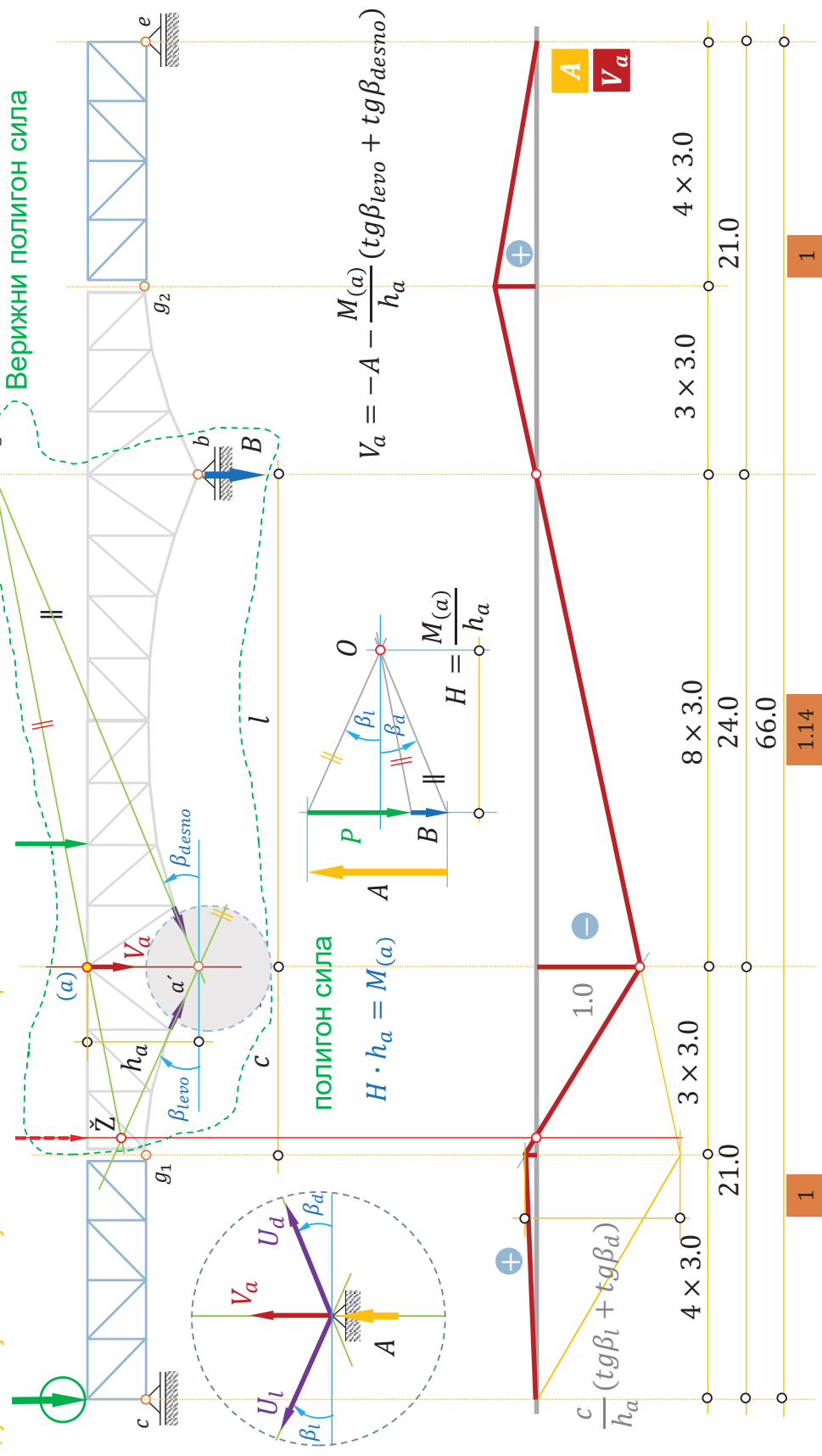


Слика 3: штап D_m - min

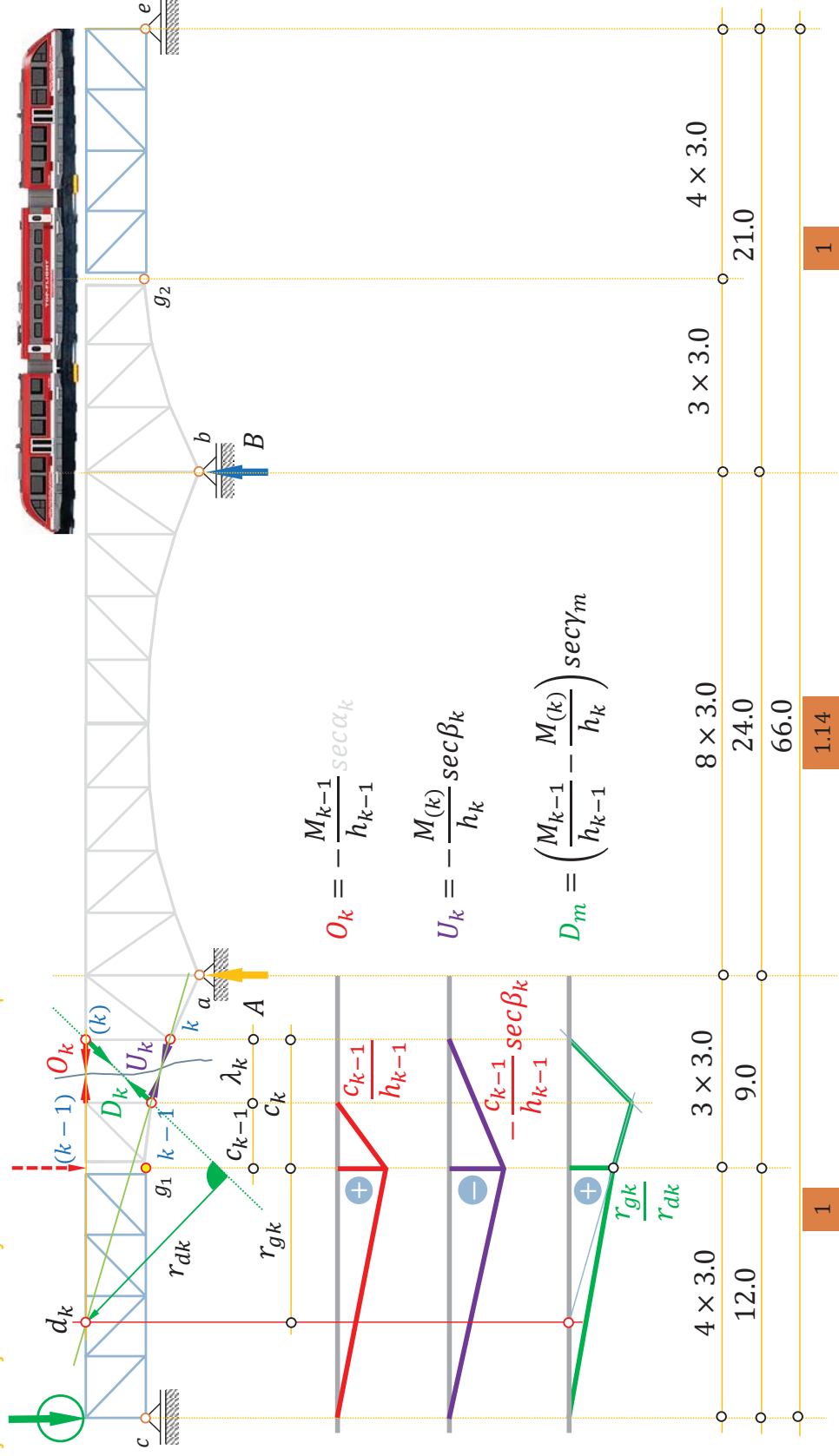
Решени примери за самостално вежбање - дате су у општим вредностима ординате утицајних линија.!



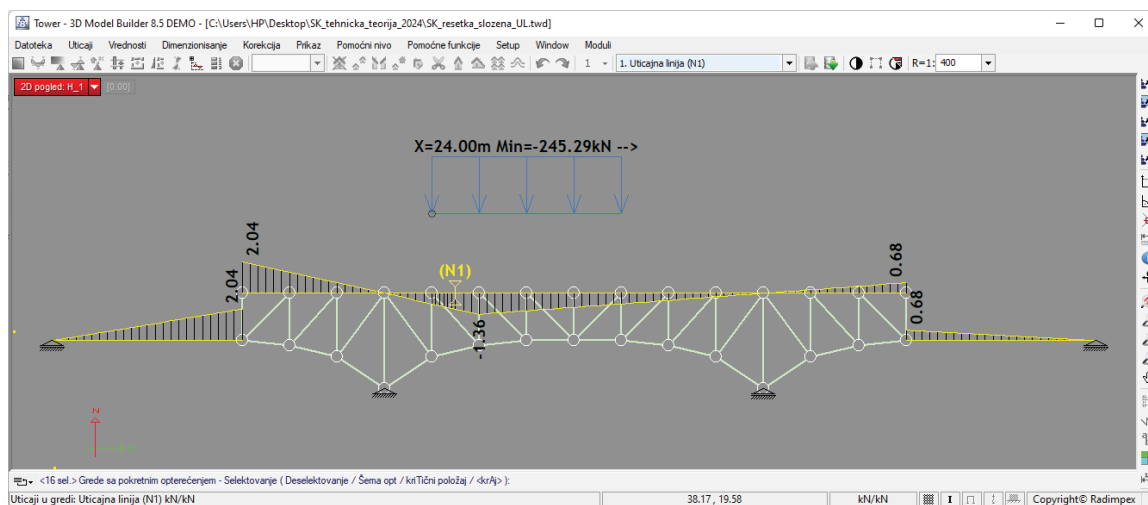
Утицајне линије за силе у штаповима сложеног решеткастог носача



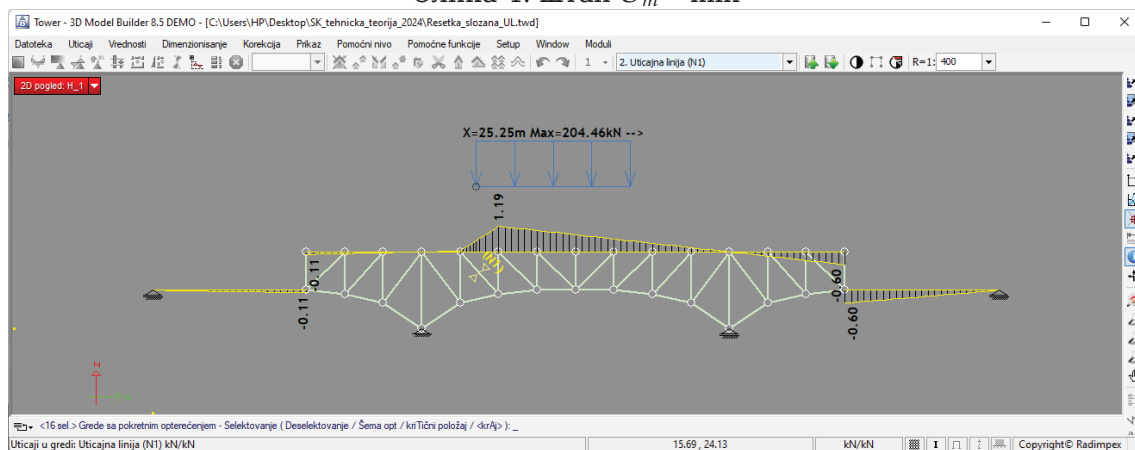
Утицајне линије за силе у штаповима сложеног решеткастог носача



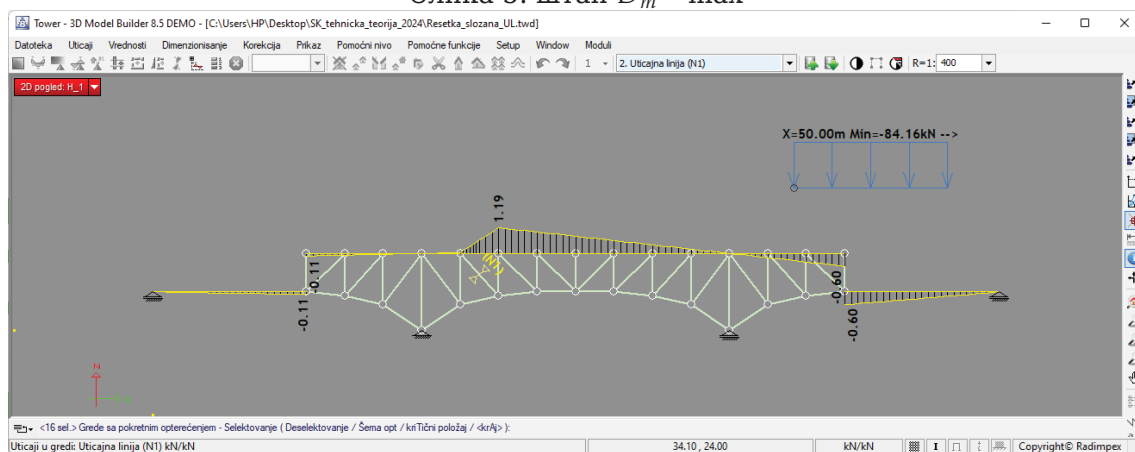
Преглед резултата – метода коначних елемената



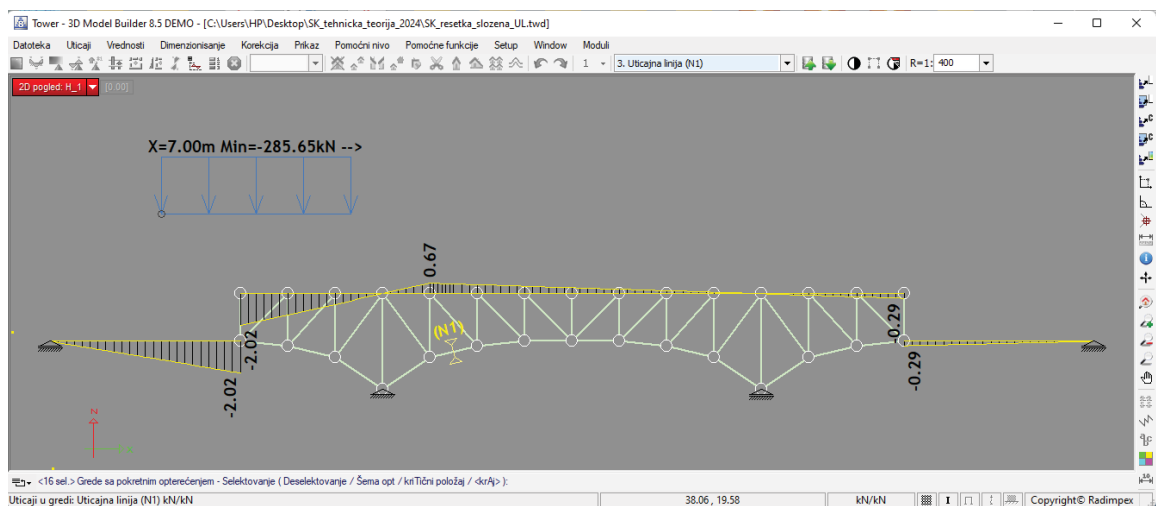
Слика 4: штап $O_m - \min$



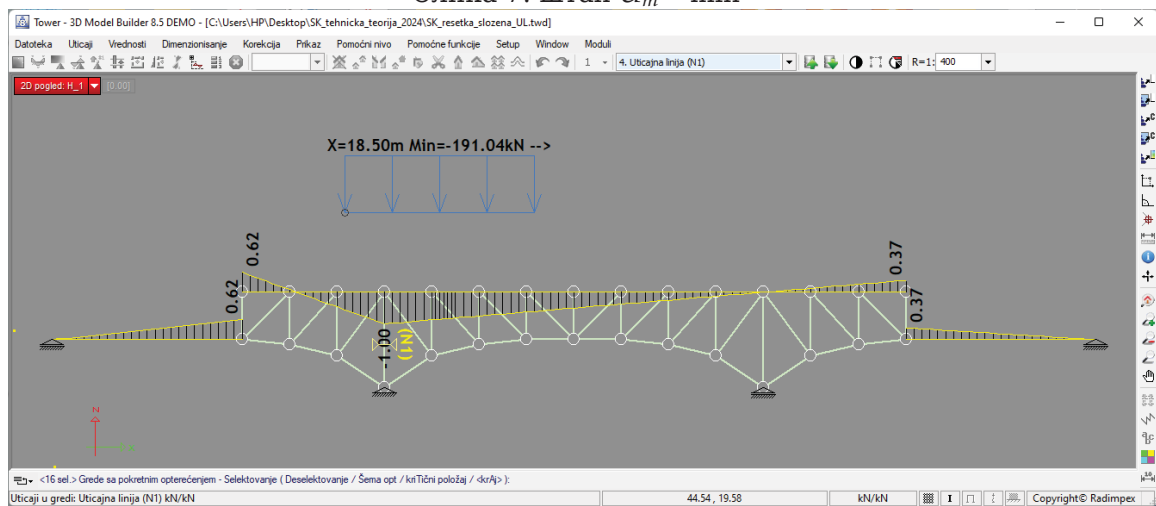
Слика 5: штап $D_m - \max$



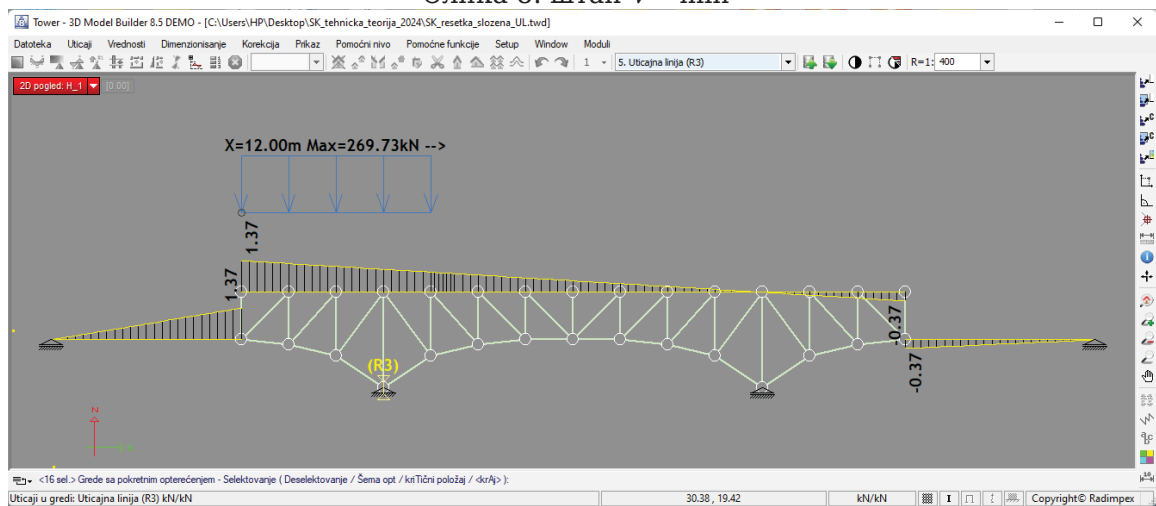
Слика 6: штап $D_m - \min$



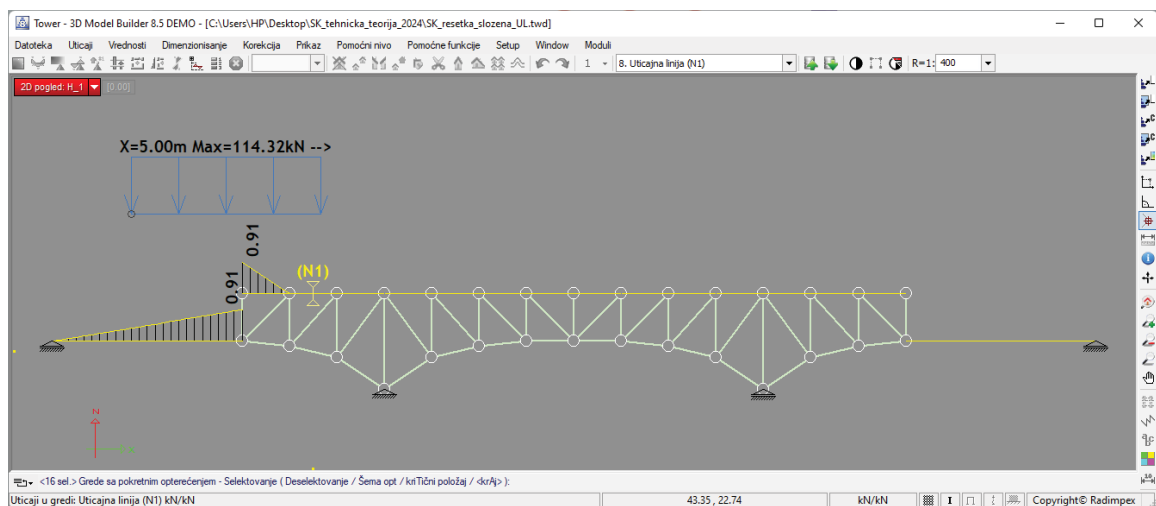
Слика 7: штап U_m - min



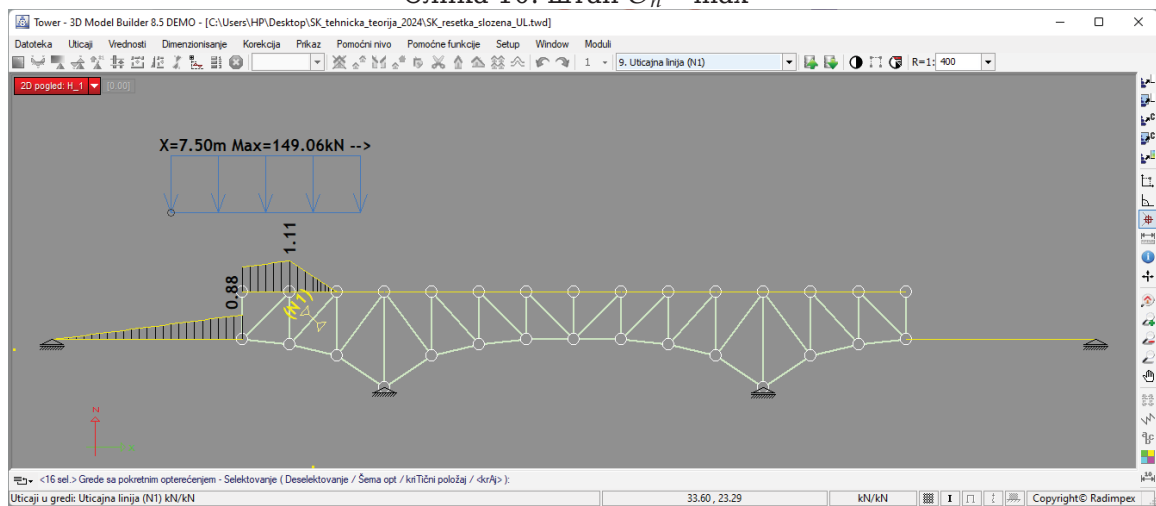
Слика 8: штап V - min



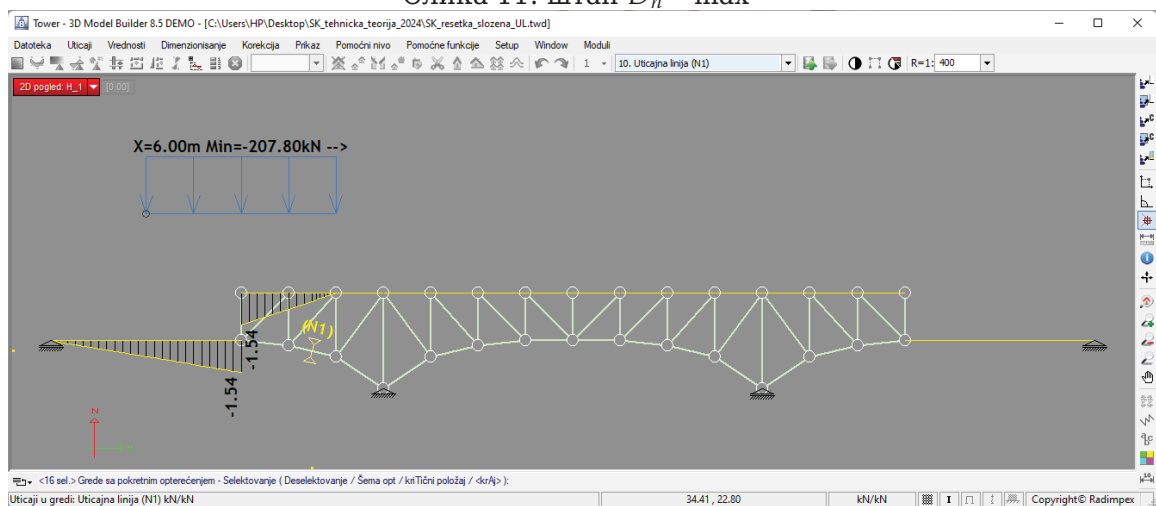
Слика 9: штап A - max



Слика 10: штап O_n - max

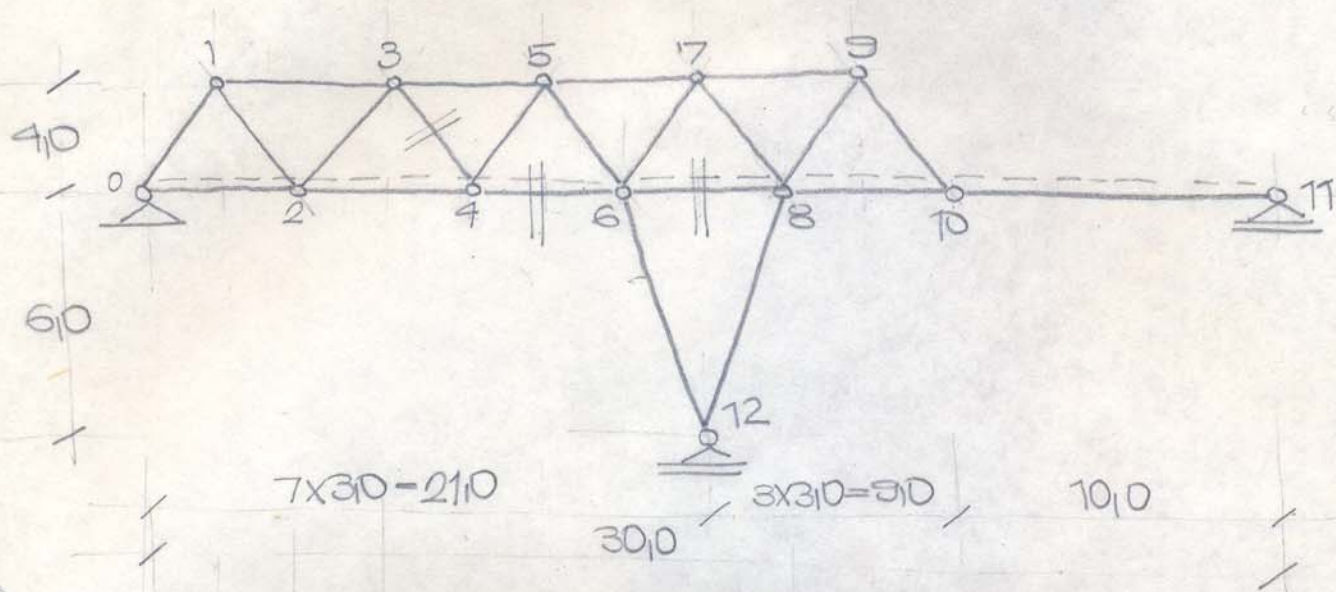


Слика 11: штап D_n - max



Слика 12: штап U_n - min

ЗАДАЧА:



* КОНСТРУИРАТИ УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА
СТАПОВЕ ОЗНАЧЕНИ НА СКИЦИ
КОРИШЋЕЊЕМ АНАЛИТИЧКИХ ИЗРАЗА

$$D_m = \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - H_m \right] \cdot \frac{1}{\cos \beta_m}$$

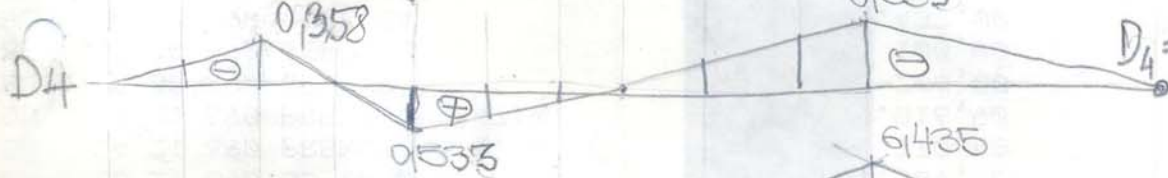
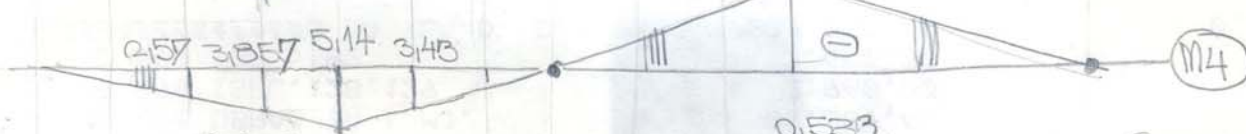
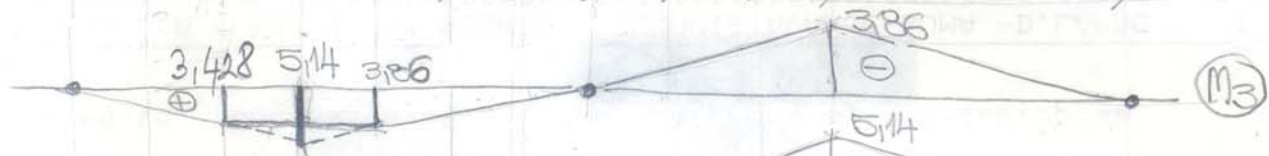
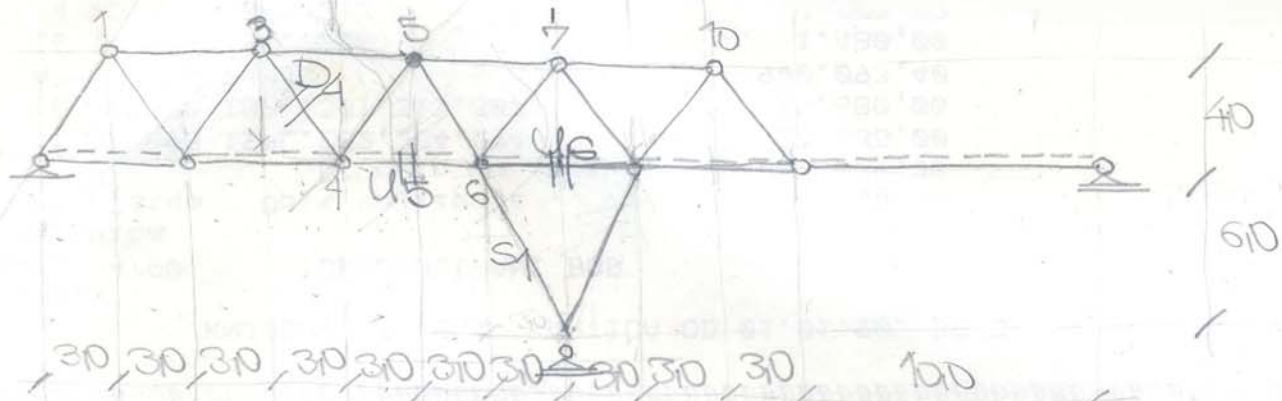
$$D_{m+1} = \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - H_{m+1} \right] \cdot \frac{1}{\cos \beta_{m+1}}$$

ГОРЉИ ПОЈАС

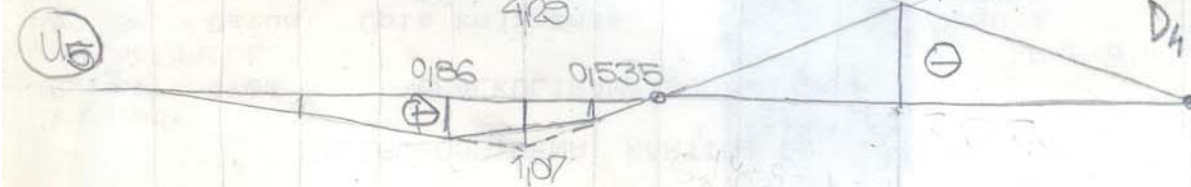
$$O_m = - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_m}$$

ДОЉИ ПОЈАС

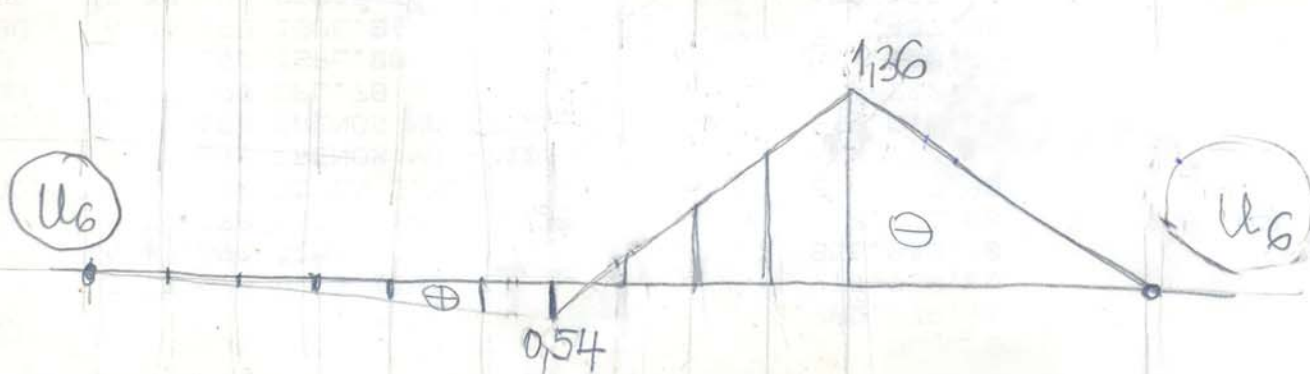
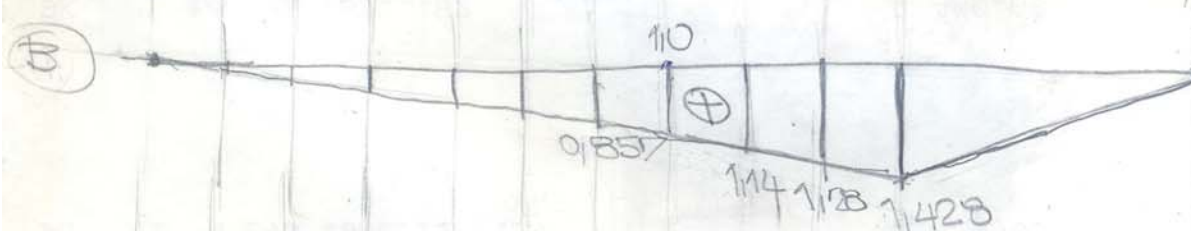
$$U_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{1}{\cos \beta_m}$$



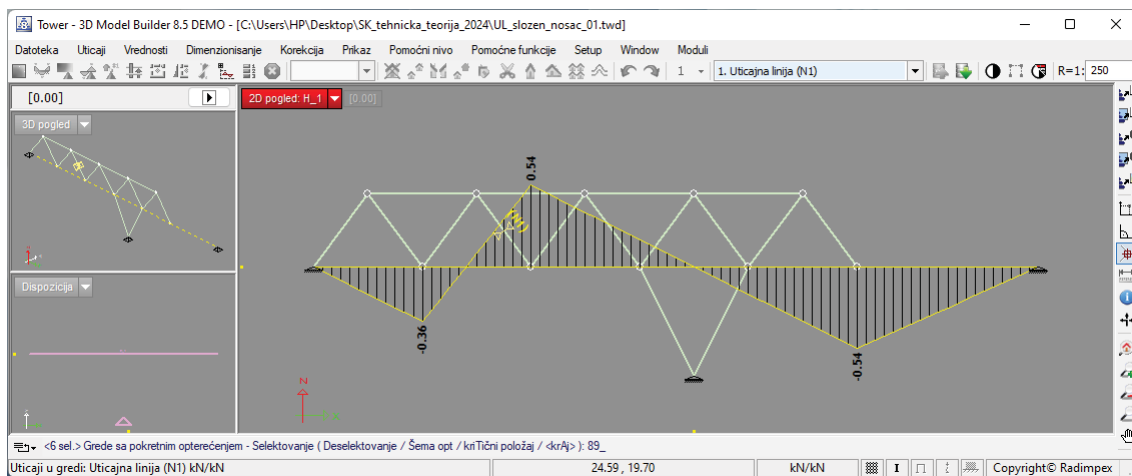
$$D_4 = \left(\frac{M_4}{h_4} - \frac{M_3}{h_3} \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \left(\frac{5.14}{40} - \frac{3.86}{40} \right) \cdot 1.6 = 0.533$$



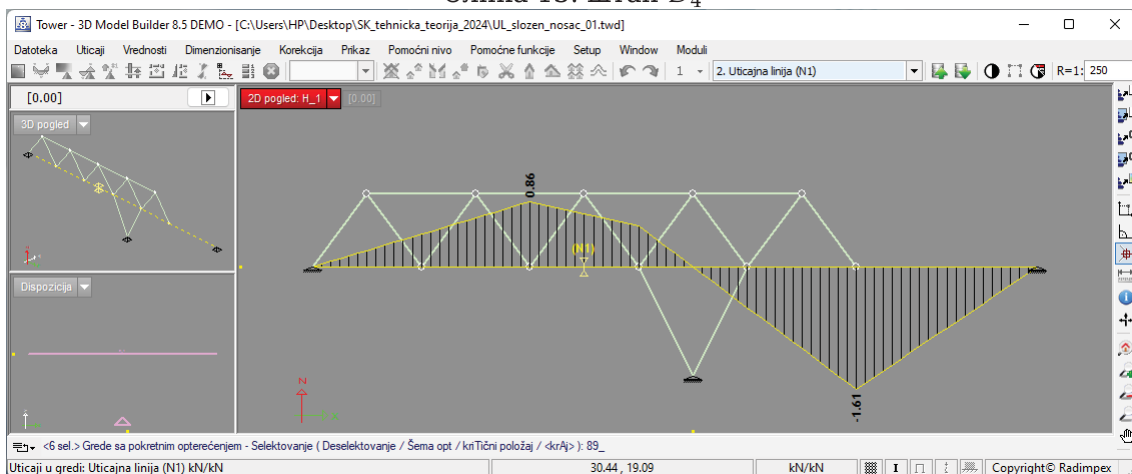
$$D_4 = \left(\frac{2.57}{4} - \frac{3.428}{4} \right) \cdot 1.6 = -0.358$$



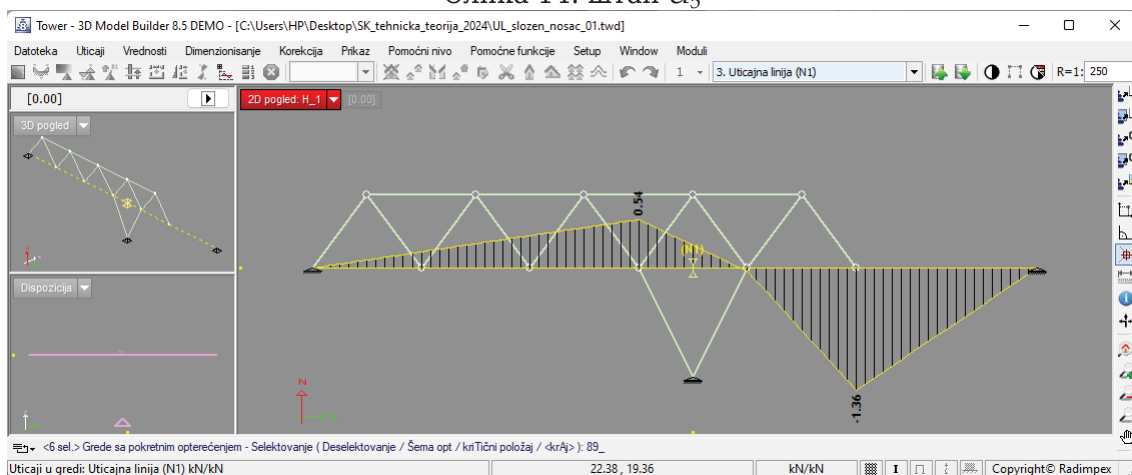
Преглед резултата – метода коначних елемената



Слика 13: штап D_4



Слика 14: штап U_5

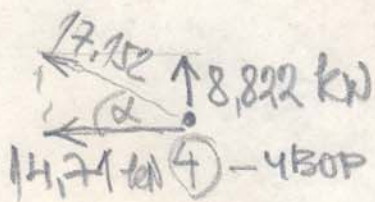
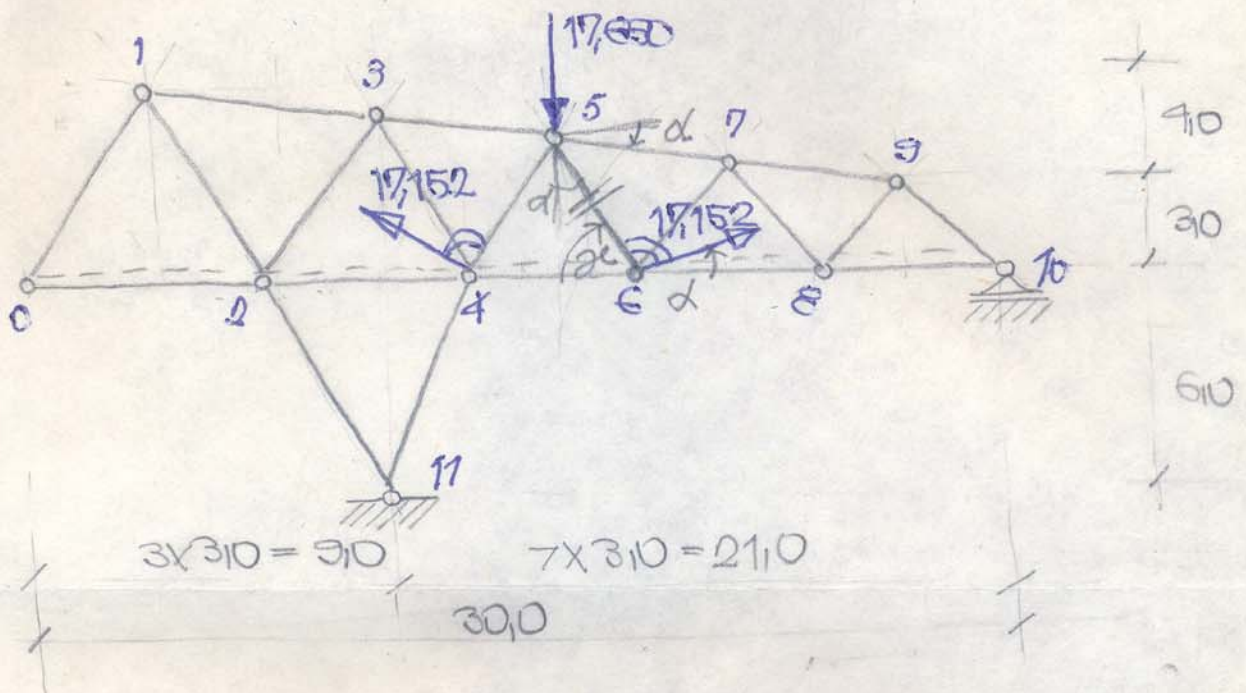


Слика 15: штап U_6

ЗА НОСАЧ НА ОКЛУЗИ,

- * НАУПРАТН ВТИВАНУ ЛИНИЈУ ЗА ОЗНАЧЕНИ ШТАП
- * ЗА ДАТО ОПТЕРЕЖЕЊЕ СРАЧУНАТИ СИЛУ У ОЗНАЧЕНОМ ШТАПУ.

⊗ ЗА ДАТО ОПТЕРЕЖЕЊЕ НАУПРАТН ДИЈАГРАМ ВЕРТИКАЛНОГ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА 0-2-4-6-8-10



$$\tan \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 30,964^\circ$$

или

$$180 - \gamma - 90 - \alpha = 0$$



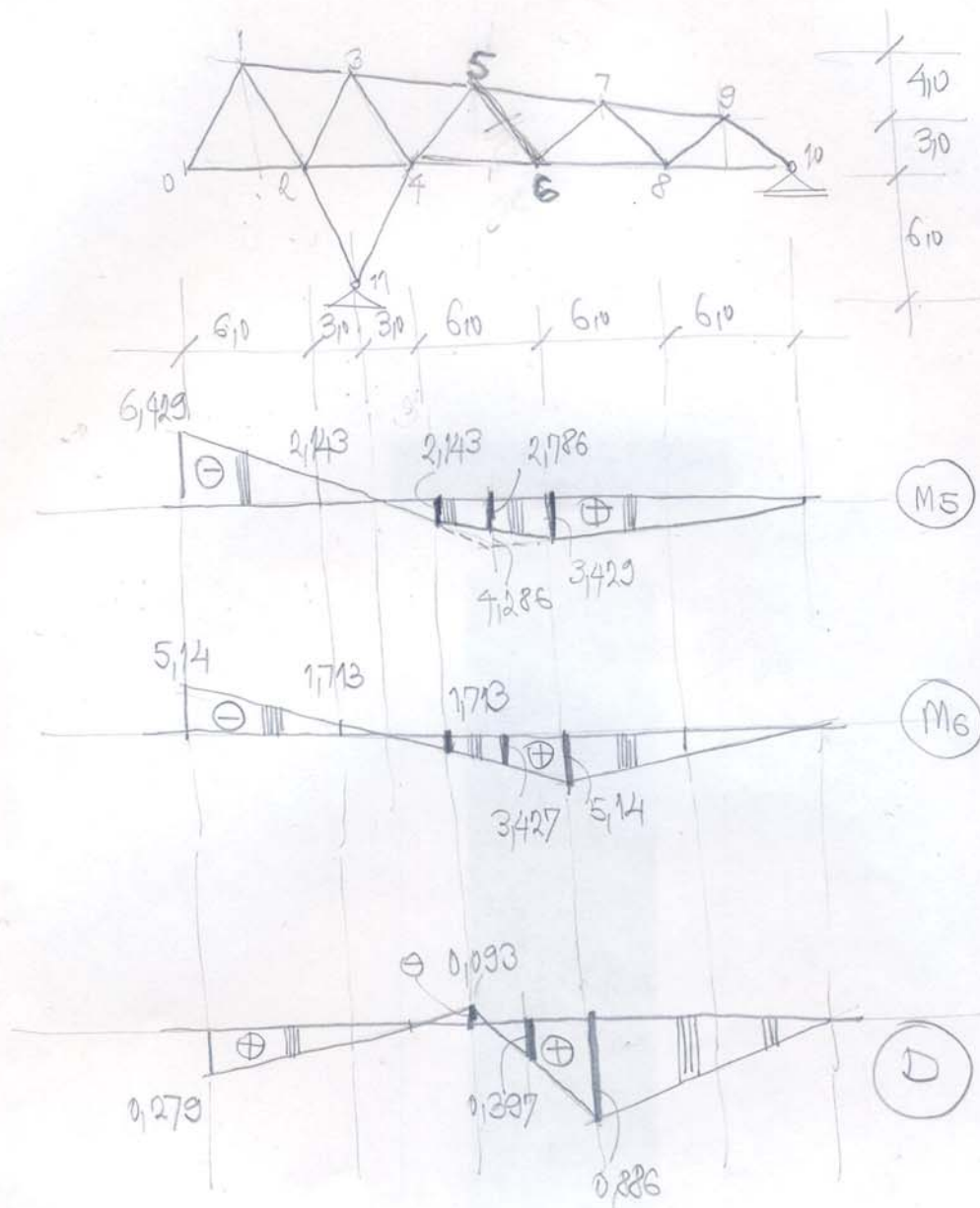
$$\tan \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma = 59,036^\circ$$

$$\frac{1}{\cos \gamma} = 1,943$$

$$180 - 59,036 - 90 - \alpha = 0$$

$$\alpha = 30,964^\circ$$

ДОБРО JE...



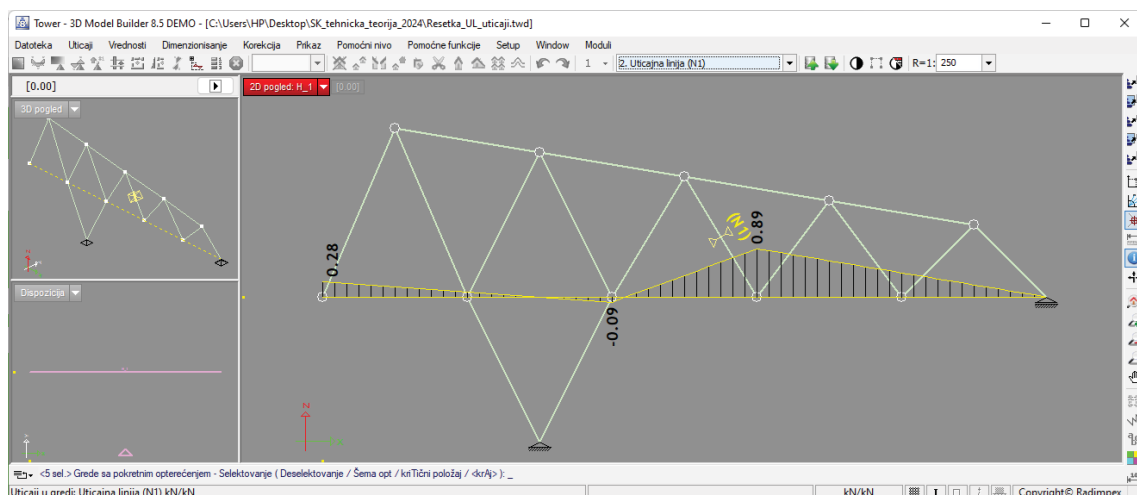
$$D = \left[\frac{M_6}{h_6} - \frac{M_5}{h_5} \right] \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$D = \left[\frac{-5.14}{4.5} + \frac{6.429}{5.0} \right] \cdot 1.943 = 0.279$$

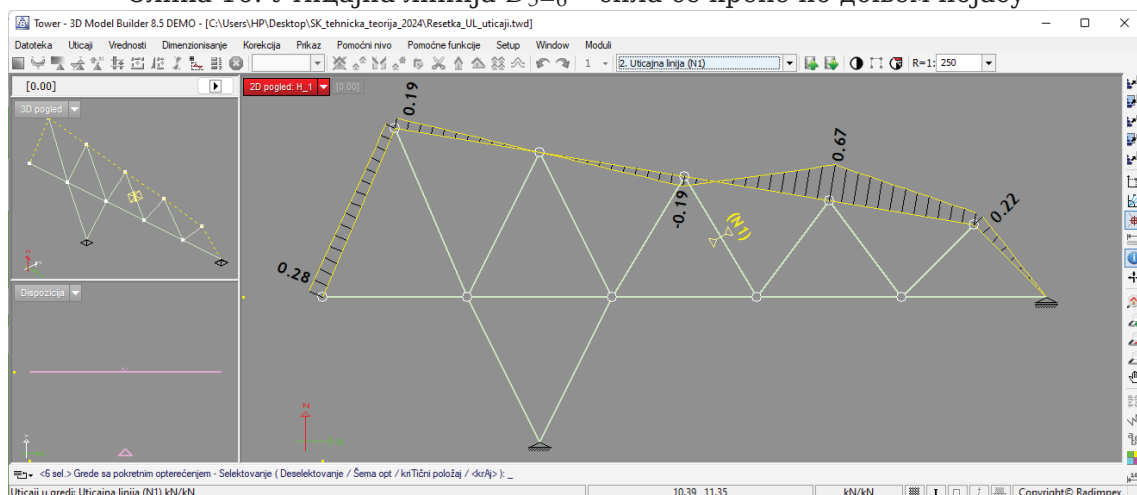
$$D = \left[\frac{1.713}{4.5} - \frac{2.143}{5.0} \right] \cdot 1.943 = -0.093$$

$$D = \left[\frac{3.427}{4.5} - \frac{2.786}{5.0} \right] \cdot 1.943 = 0.397$$

$$D = \left[\frac{5.14}{4.5} - \frac{3.429}{5.0} \right] \cdot 1.943 = 0.286$$



Слика 16: Утицајна линија D_{5-6} – сила се креће по доњем појасу



Слика 17: Утицајна линија D_{5-6} – сила се креће по горњем појасу

- оптерећење у чворовима горњег појаса – потребне су вредности ордината утицајне линије са горњег појаса, (сл. 18):

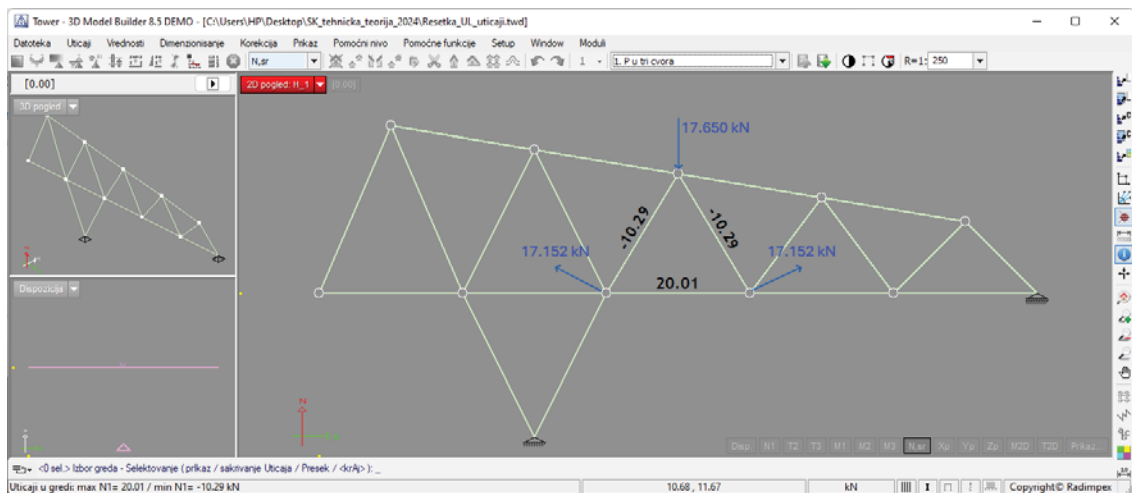
$$D_{5-6} = P \cdot Z_s = 17.650 \cdot (-0.19) \cdot \cos(9.46232221) = -3.29 \text{ kN}$$

- оптерећење у чворовима доњег појаса – потребне су вредности ордината утицајне линије са доњег појаса, (сл. 19):

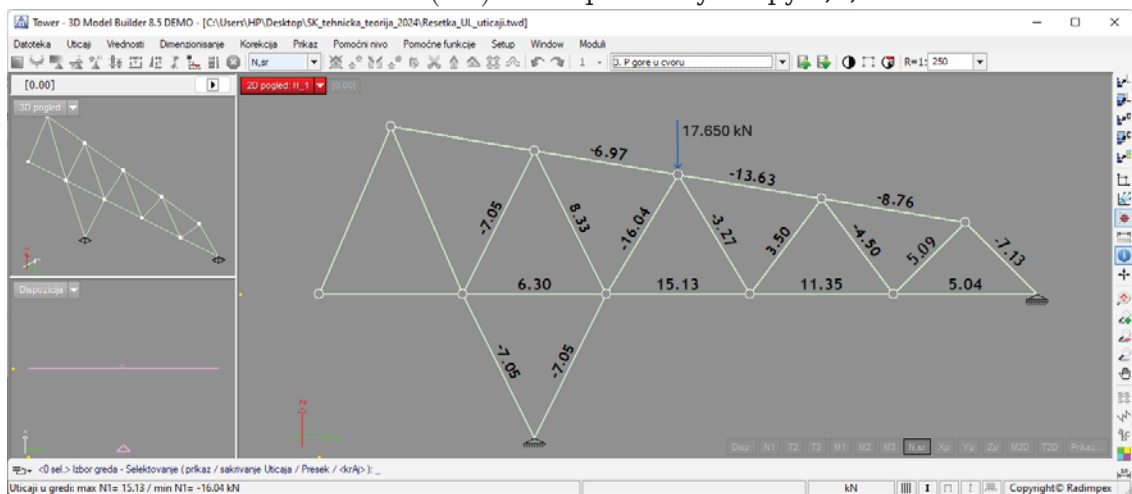
$$D_{5-6} = \sum P \cdot Z_s = -8.822 \cdot (-0.093) + (-8.822) \cdot 0.886 = -7.00 \text{ kN}$$

- оптерећење у чворовима горњег и доњег појаса – потребне су вредности ордината утицајне са оба појаса, (сл. 20):

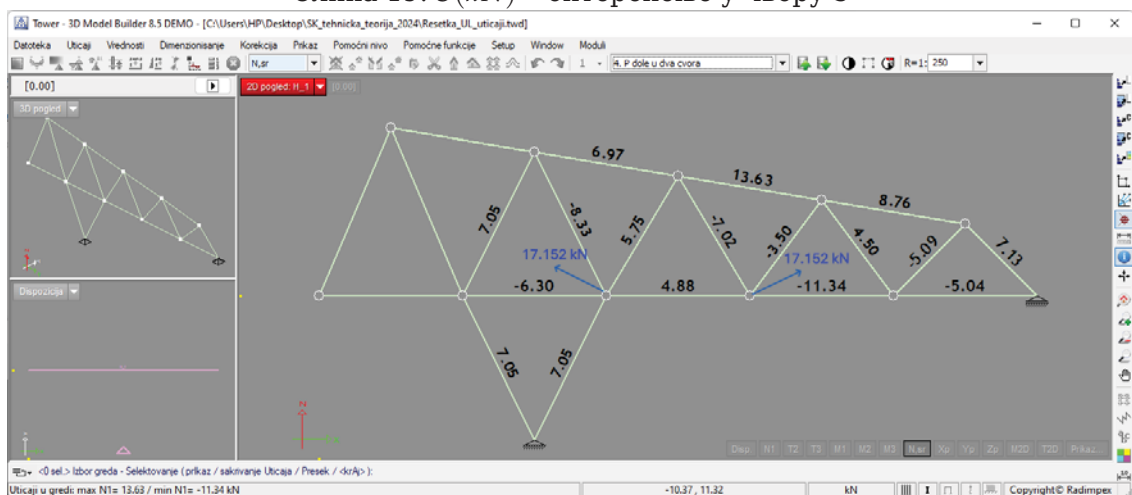
$$\begin{aligned} D_{5-6} &= \sum P \cdot Z_s = \\ &= -8.822 \cdot +17.650 \cdot (-0.19) \cdot \cos(9.46232221) + (-8.822) \cdot 0.886) = \\ &= -10.30 \text{ kN} \end{aligned}$$



Слика 18: $S(kN)$ - оптерећење у чвору 4,5,6



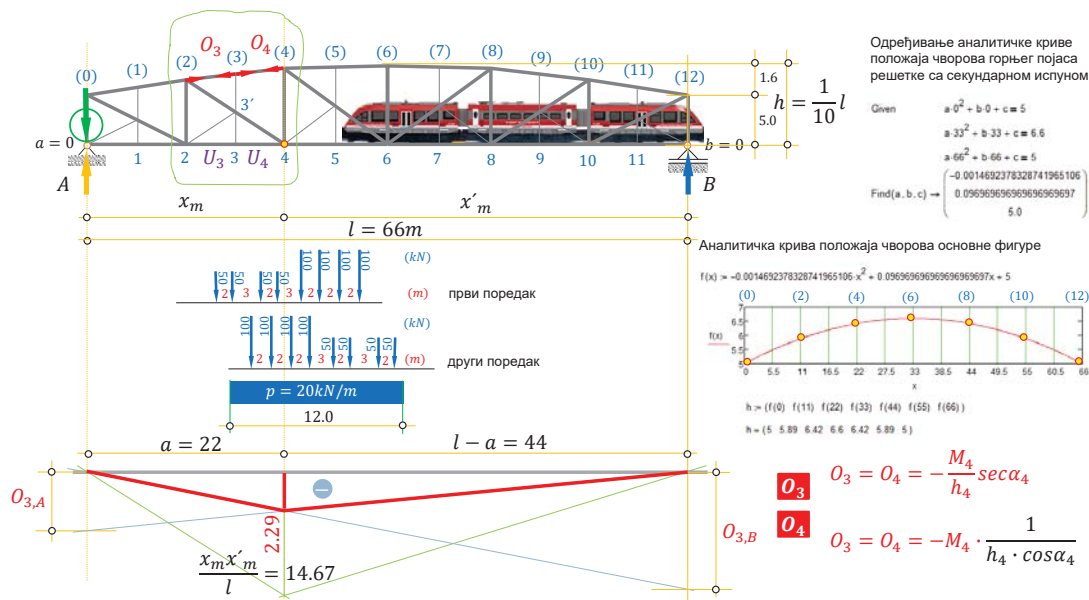
Слика 19: $S(kN)$ - оптерећење у чвору 5



Слика 20: $S(kN)$ - оптерећење у чвору 4 и 6

Решеткасти носач са секундарном испуном

За носач приказан на скици услед покретног везаног система концентрисаних сила наћи меродаван положај а потом срачунати силу у штапу горњег појаса.



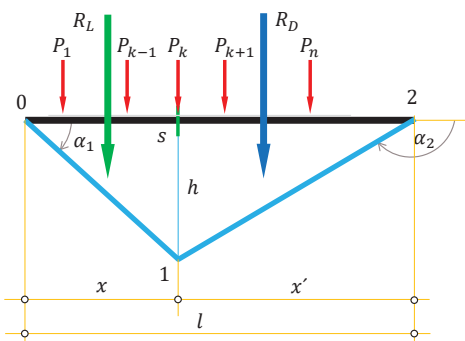
Да би оптерећење било у меродавном (опасном) положају, јер тада изазива максималне (+ или -) утицаје потребно је да буде испуњен услов

$$\frac{R_L}{x} = \frac{R_D}{x'} = \frac{R_L + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l}$$

Троугаона утицајна линија

27

□ меродавни положај оптерећења



$$\tan \alpha_1 = \frac{h}{x} \quad \tan \alpha_2 = \frac{h}{x'}$$

$$R_L \tan \alpha_1 + R_D \tan \alpha_2 = 0$$

$$R_L \frac{h}{x} - R_D \frac{h}{x'} = 0$$

$$\frac{R_L}{x} = \frac{R_D}{x'} = \frac{R_L + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l}$$

$$\frac{R}{l} > \begin{cases} \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{k-1} P_m \\ \frac{1}{x'} \sum_{m=k+1}^n P_m \end{cases}$$

$$Z_s = \sum_{m=1}^n P_m \cdot Z(s, u_m)$$

односно, критеријум биће испуњен када је:

$$\frac{R_L}{a} > \frac{R}{l} \quad \frac{R_D}{l-a} > \frac{R}{l}$$

што значи да је постављена сила у меродавном положају узета у просечно оптерећење и левог и десног дела.

Ако је постављена сила у меродавном положају изостављена у просечном оптерећењу левог и десног дела, онда је услов:

$$\frac{R_L}{a} < \frac{R}{l} \quad \frac{R_D}{l-a} < \frac{R}{l}$$

Резултанта покретног оптерећења,

$$R = \sum P = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 600 \text{ kN}$$

односно, укупно просечно оптерећење:

$$\frac{R}{l} = \frac{600}{66} = 9.091 \text{ kN/m}$$

1. проба: постављамо другу силу са лева над највећу ординату утицајне линије

$$\frac{R_L}{a} = \frac{2 \cdot 100}{22} = 9.091, \quad \frac{R_D}{l-a} = \frac{3 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 11.364,$$

случај када се меродавна сила изостави из просечног оптерећења

$$\frac{R_L}{a} = \frac{1 \cdot 100}{22} = 4.545, \quad \frac{R_D}{l-a} = \frac{2 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 9.091,$$

Коментар: не може се одмах закључити, услов није потпун, потребно је још којом пробом проверити.!

2. проба: постављамо четврту силу са лева над највећу ординату утицајне линије

$$\frac{R_L}{a} = \frac{4 \cdot 100}{22} = 18.182, \quad \frac{R_D}{l-a} = \frac{1 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 6.818,$$

случај када се меродавна сила изостави из просечног оптерећења

$$\frac{R_L}{a} = \frac{3 \cdot 100}{22} = 13.636, \quad \frac{R_D}{l-a} = \frac{4 \cdot 50}{44} = 4.545,$$

Коментар: услов није испуњен, идемо у следећу пробу.!

3. проба: постављамо трећу силу са лева над највећу ординату утицајне линије

$$\frac{R^L}{a} = \frac{3 \cdot 100}{22} = 13.636, \quad \frac{R^D}{l-a} = \frac{2 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 9.091,$$

случај када се меродавна сила изостави из просечног оптерећења

$$\frac{R^L}{a} = \frac{2 \cdot 100}{22} = 9.091, \quad \frac{R^D}{l-a} = \frac{1 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 6.818,$$

Коментар: услов није испуњен, идемо у следећу пробу.!

4. проба: постављамо са лева да највећа ординату утицајне линије полови растојање друге и треће силе.

$$\frac{R^L}{a} = \frac{2 \cdot 100}{22} = 9.091, \quad \frac{R^D}{l-a} = \frac{2 \cdot 100 + 4 \cdot 50}{44} = 9.091,$$

Коментар: потребан услов је сада испуњен - имамо опасан положај.!

Najveća ordinata uticajne linije za moment savijanja u čvoru "4" (uzeta tačnost na dve decimale)

$$\underline{M_4} := \frac{22 \cdot 44}{66} \quad M_4 = 14.67$$

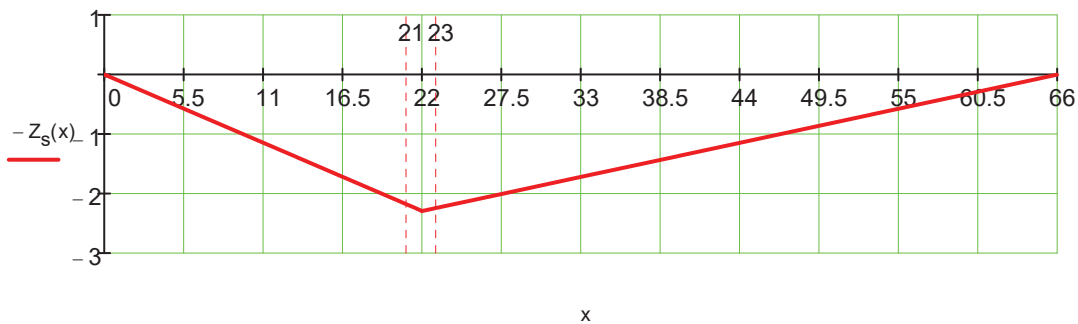
visina čvorova gornjeg pojasa: $\underline{h_3} := 5.89$ $\underline{h_4} := 6.42$

$$h_4 - h_3 = 0.53 \quad \frac{h_4 - h_3}{11} = 0.048 \quad \underline{\alpha_4} := 2.748088180$$

najveća ordinata uticajne linije: $\underline{O_3} := \frac{-M_4}{h_4} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_4 \cdot \text{deg})}$ $O_3 = -2.29$

$$\underline{Z_{s1}(x)} := \frac{2.29}{22} \cdot x \quad \underline{Z_{s2}(x)} := \frac{-2.29}{44} \cdot x + 3.44 \quad \underline{Z_s(x)} := \begin{cases} Z_{s1}(x) & \text{if } 0 \leq 22 \\ Z_{s2}(x) & \text{if } 22 \leq x \leq 66 \end{cases}$$

$$Z_{s2}(66) = 0$$



1. proba

$$\underline{P_1} := 100 \cdot (Z_s(20) + Z_s(22) + Z_s(24) + Z_s(26)) + 50 \cdot (Z_s(29) + Z_s(31) + Z_s(34) + Z_s(36))$$

$$P_1 = 1215.16 \text{ kN}$$

3. proba

$$\underline{P_3} := 100 \cdot (Z_s(18) + Z_s(20) + Z_s(22) + Z_s(24)) + 50 \cdot (Z_s(27) + Z_s(29) + Z_s(32) + Z_s(34))$$

$$P_3 = 1214.66 \text{ kN}$$

$$P_1 - P_3 = 0.5$$

4. proba

$$\underline{P_4} := 100 \cdot (Z_s(19) + Z_s(21) + Z_s(23) + Z_s(25)) + 50 \cdot (Z_s(28) + Z_s(30) + Z_s(33) + Z_s(35))$$

$$P_4 = 1214.66 \text{ kN}$$

Najveća ordinata uticajne linije za moment savijanja u čvoru "4" (uzeta tačnost na šest decimala)

$$M_4 := \frac{22 \cdot 44}{66} \quad M_4 = 14.666667$$

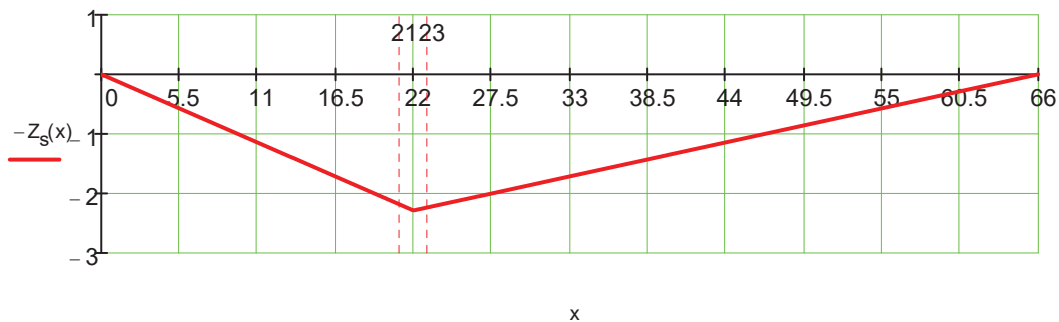
visina čvorova gornjeg pojasa: $h_3 := 5.88889 \quad h_4 := 6.42222$

$$h_4 - h_3 = 0.53333 \quad \frac{h_4 - h_3}{11} = 0.048485 \quad \alpha_4 := 2.7758017166$$

najveća ordinata uticajne linije: $O_3 := \frac{-M_4}{h_4} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_4 \cdot \text{deg})} \quad O_3 = -2.286421$

$$Z_{s1}(x) := \frac{2.286421}{22} \cdot x \quad Z_{s2}(x) := \frac{-2.286421}{44} \cdot x + 3.429631 \quad Z_s(x) := \begin{cases} Z_{s1}(x) & \text{if } 0 \leq x \leq 22 \\ Z_{s2}(x) & \text{if } 22 \leq x \leq 66 \end{cases}$$

$$Z_{s2}(66) = -0$$



1. proba

$$P_1 := 100 \cdot (Z_s(20) + Z_s(22) + Z_s(24) + Z_s(26)) + 50 \cdot (Z_s(29) + Z_s(31) + Z_s(34) + Z_s(36))$$

$$P_1 = 1210.76 \text{ kN}$$

3. proba

$$P_3 := 100 \cdot (Z_s(18) + Z_s(20) + Z_s(22) + Z_s(24)) + 50 \cdot (Z_s(27) + Z_s(29) + Z_s(32) + Z_s(34))$$

$$P_3 = 1210.76 \text{ kN}$$

$$P_1 - P_3 = -0.00005$$

4. proba

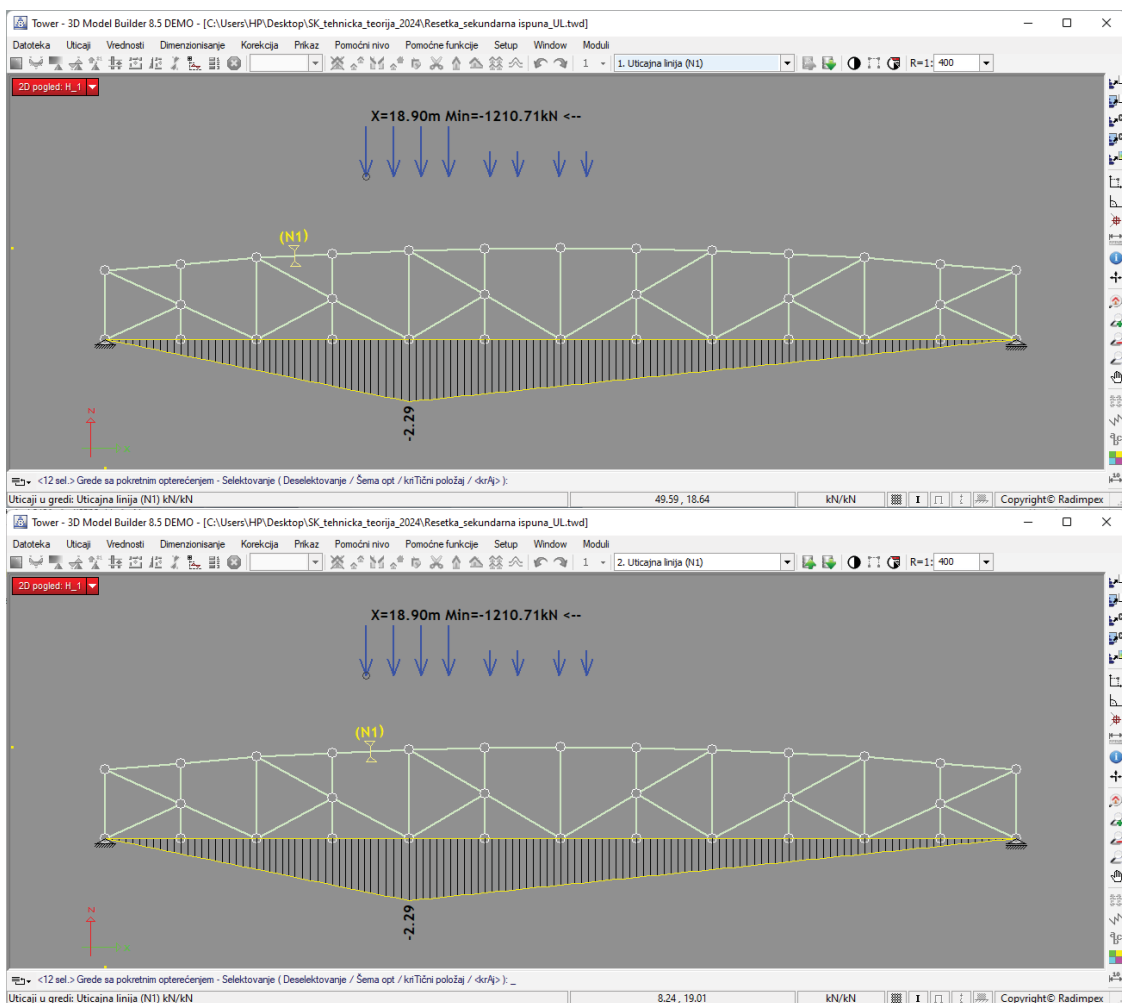
$$P_4 := 100 \cdot (Z_s(19) + Z_s(21) + Z_s(23) + Z_s(25)) + 50 \cdot (Z_s(28) + Z_s(30) + Z_s(33) + Z_s(35))$$

$$P_4 = 1210.76 \text{ kN}$$

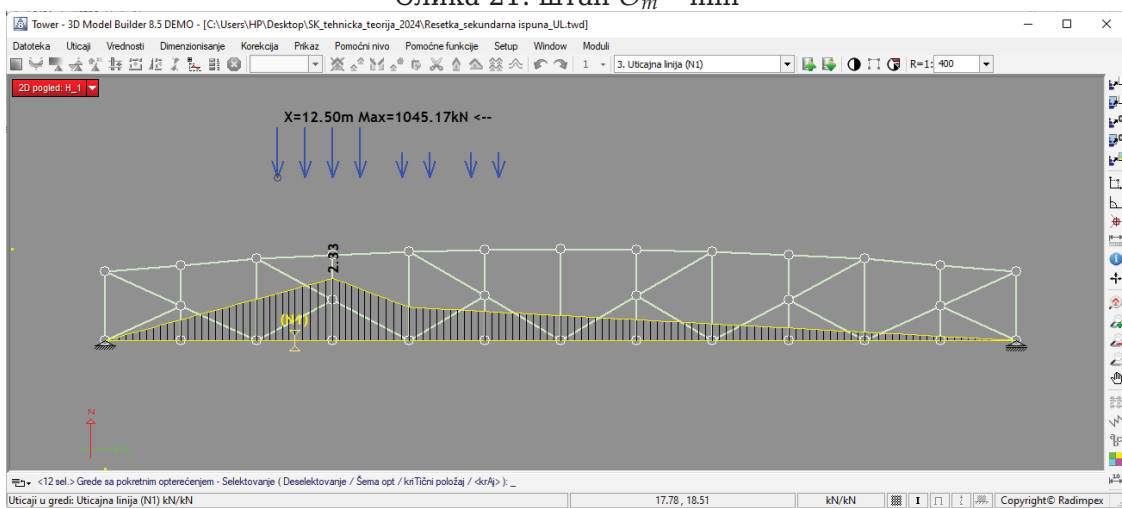
Закључак:

Максимална вредност минималне силе у штапу горњег појаса је

$$\max Z_s = \min O_m = 1210.76 \text{ kN}$$



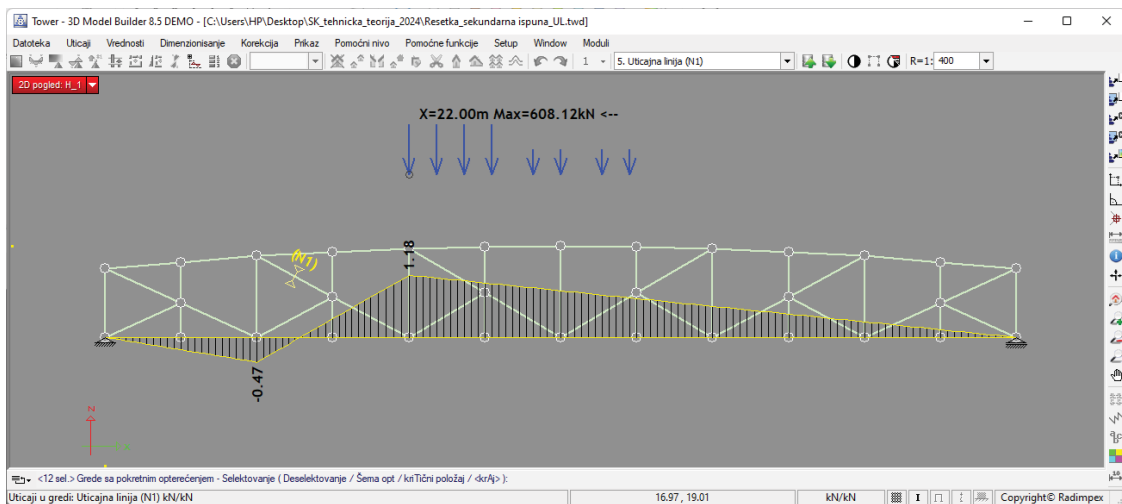
Слика 21: штап $O_m - \min$



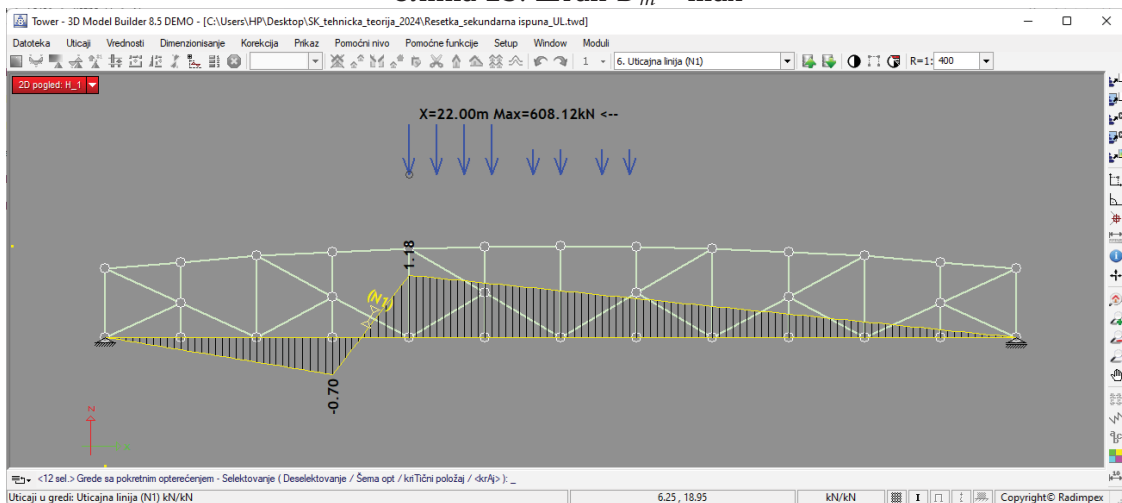
Слика 22: штап $U_m - \min$

Разлика (аналитички - метода коначних елемената) за штап $O_m - \min$:

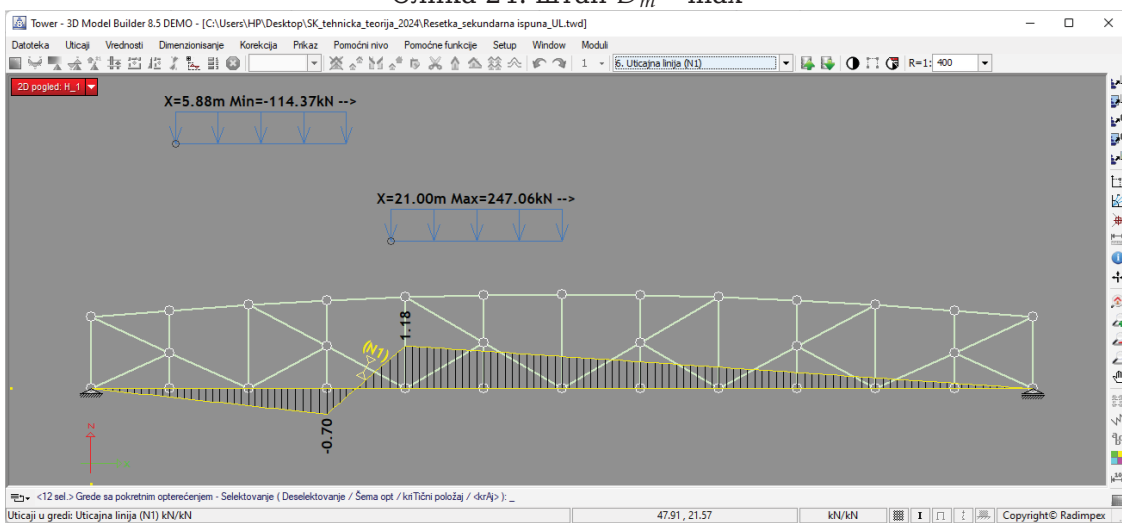
$$R = \left(\frac{1210.76 - 1210.71}{1210.76} \right) \cdot 100 = 0.004\%$$



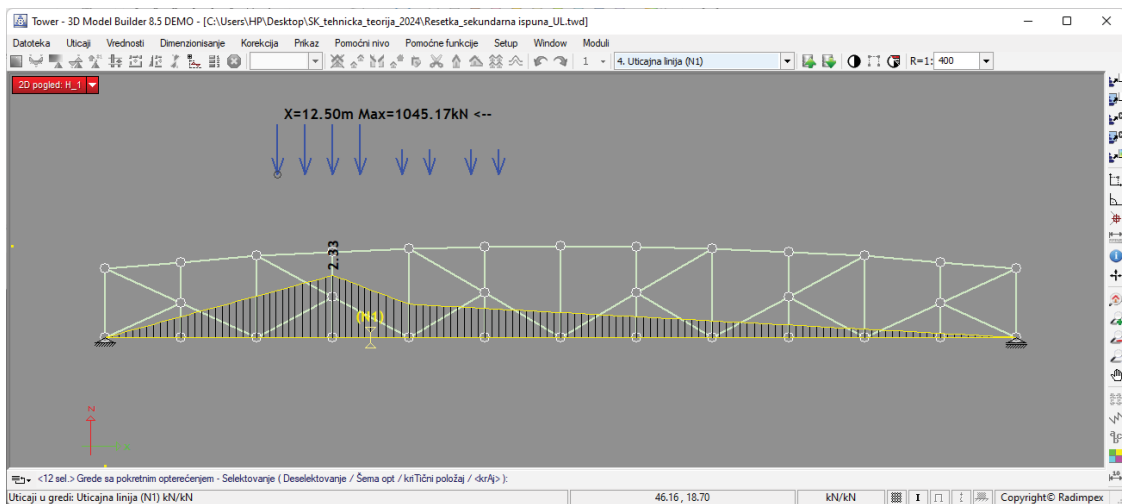
Слика 23: штап D_m - max



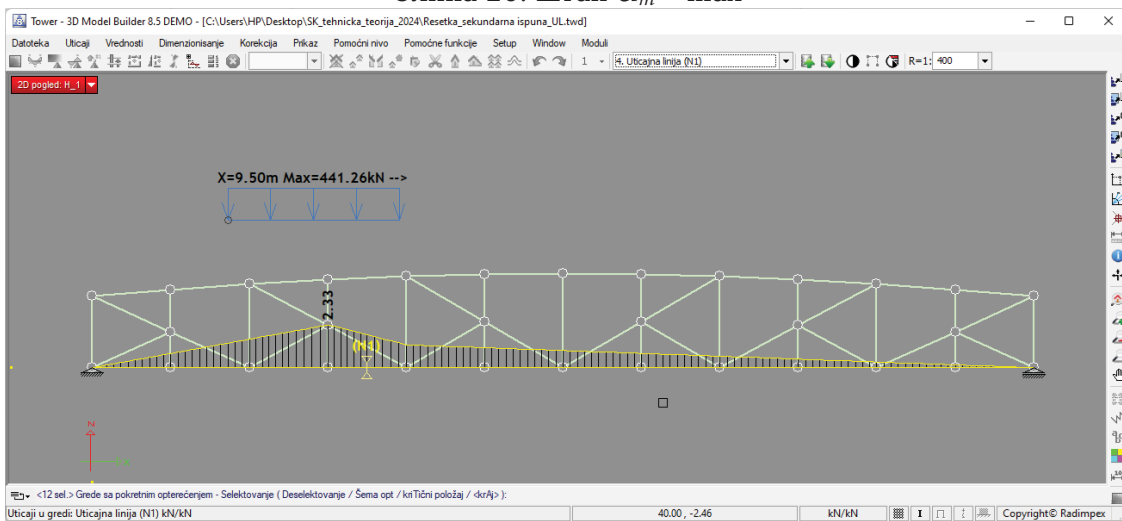
Слика 24: штап D_m - max



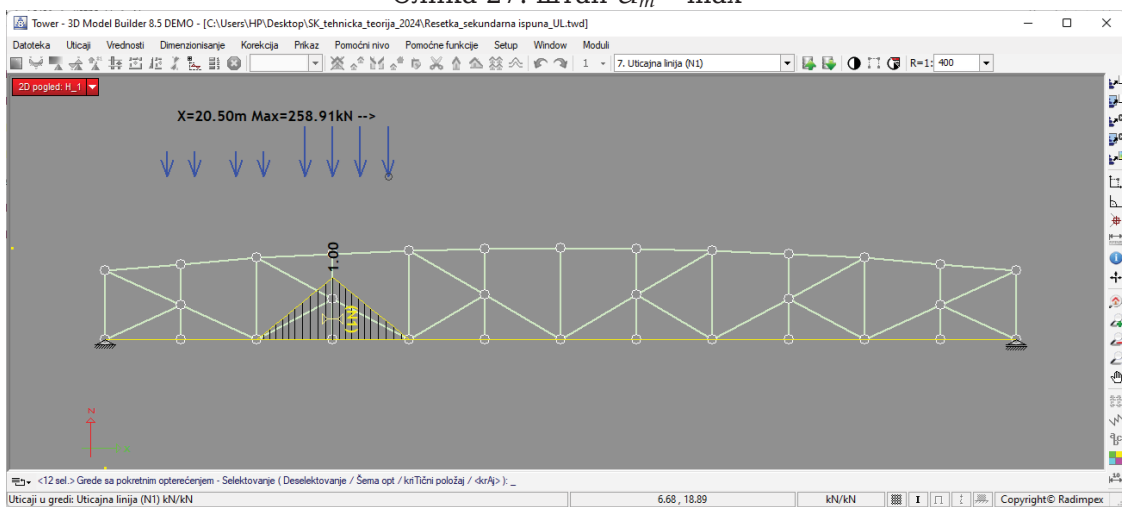
Слика 25: штап D_m - (min - max)



Слика 26: штап U_m - max



Слика 27: штап U_m - max

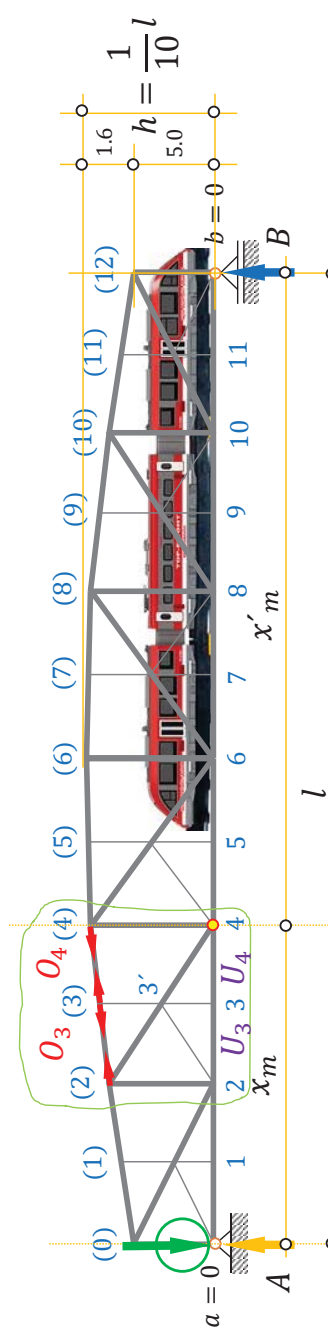


Слика 28: штап V_m - max

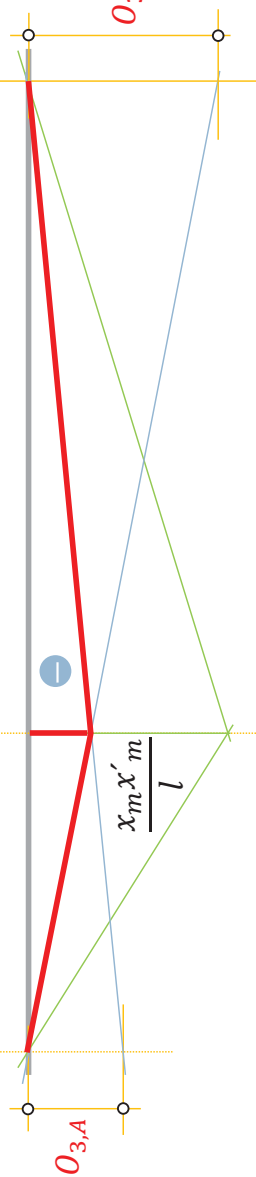
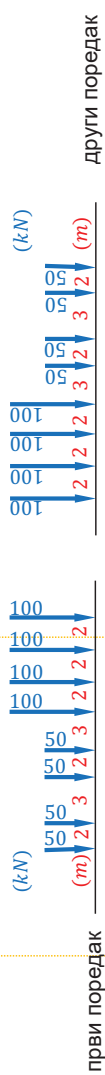
Решени примери за даље самостално вежбање

- ординате утицајних линија дате су са општим вредностима,
- висина носача је са односом наспрам распона.

Утицајне линије за силе у штаповима решеткастог носача са секундарном испуном



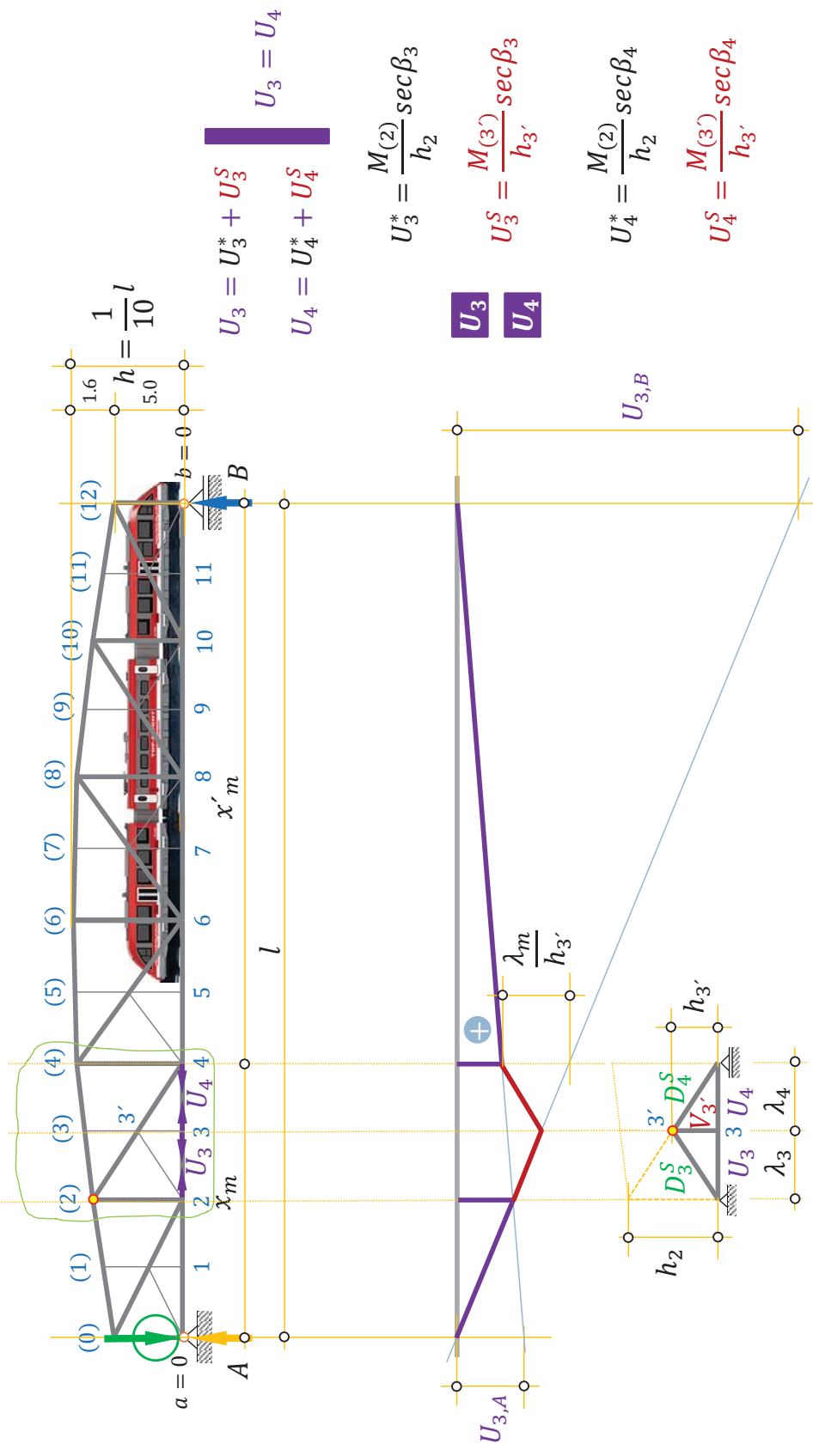
Аналитичка крива положаја чворова основне фигуре је парабола.



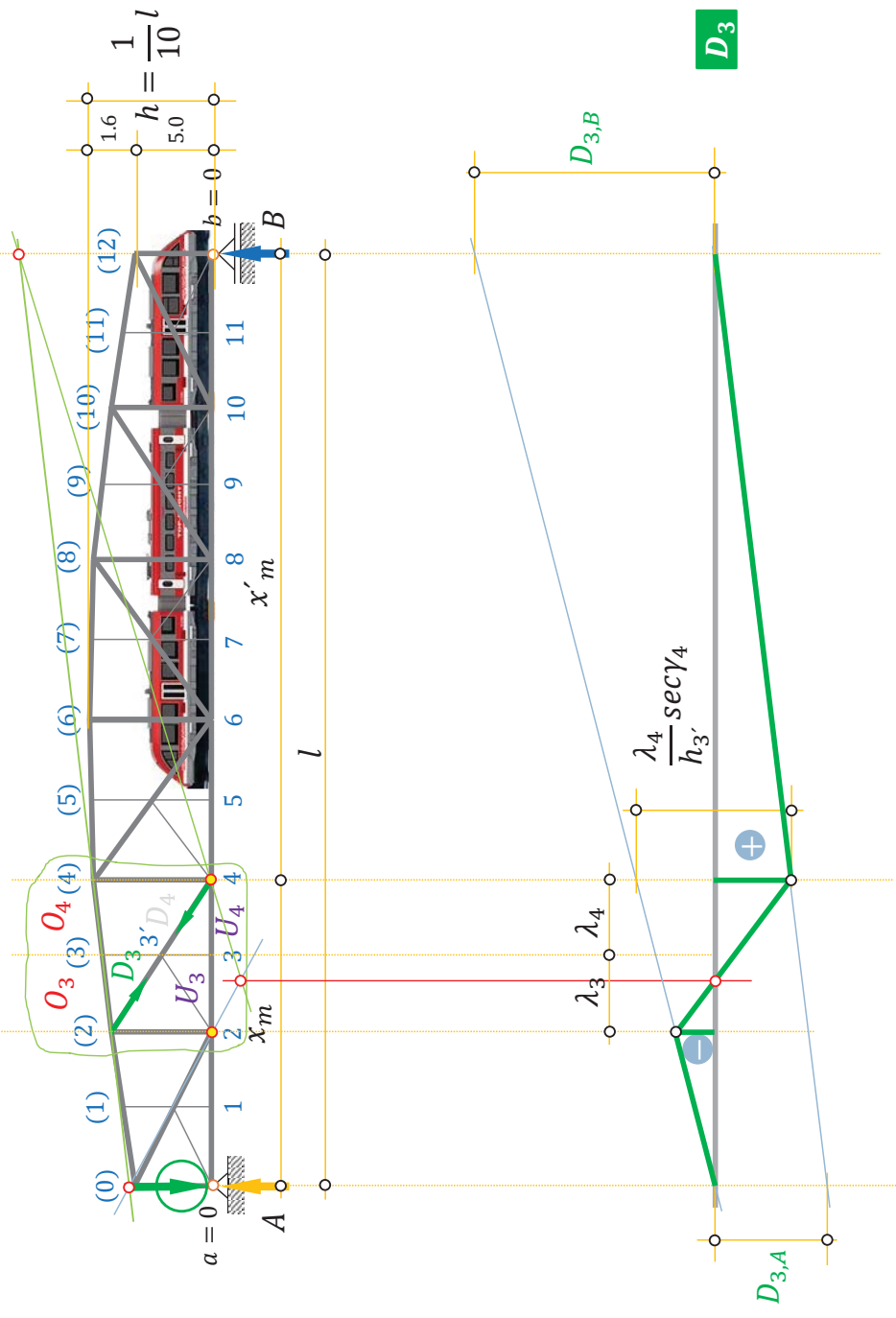
$$O_3 = O_4 = -\frac{M_4}{h_4} \sec \alpha_4$$

$$O_3 = O_4 = -M_4 \cdot \frac{1}{h_4 \cdot \cos \alpha_4}$$

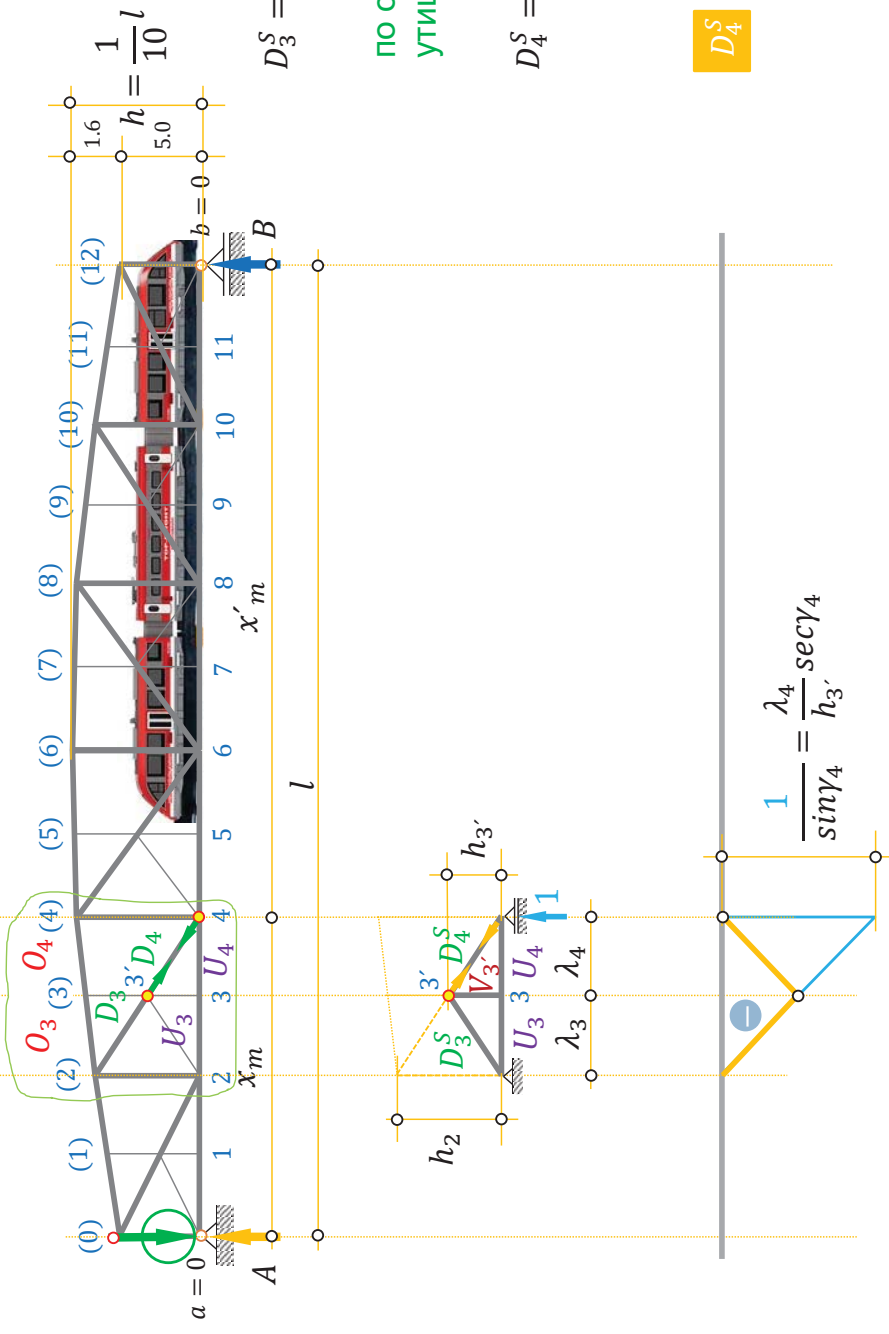
Утицајне линије за силе у штаповима решеткастог носача са секундарном испуном



Утицајне линије за силе у штаповима решеткастог носача са секундарном испуном



Утицајне линије за силе у штаповима решеткастог носача са секундарном испуном



$$D_3^S = \frac{M_{3'}}{h_3'} \sec \gamma_3$$

по облику је D_3^S слична
утицајној линији за D_4^S

$$D_4^S = \frac{M_{3'}}{h_3'} \sec \gamma_4$$

$$D_4^S$$

Утицајне линије за силе у штаповима решеткастог носача са секундарном испуном

