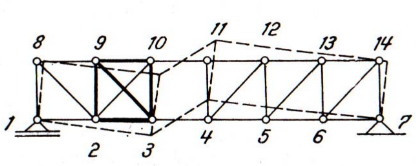
Структурална анализа

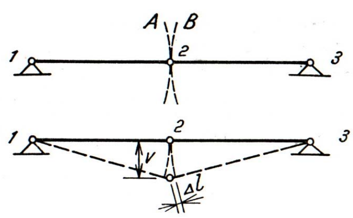
Класификациони критеријуми

1. начин		
Кинематички — споља	$z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2k + m$	просто стабилан
	$z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2k + m$	вишеструко стабилан
	$z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2k + m$	лабилан
Кинематички — унутра	$z_s + z_k = 2k - 3$	просто стабилан
	$z_s + z_k > 2k - 3$	вишеструко стабилан
	$z_s + z_k < 2k - 3$	лабилан
Статички	$z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2k + m$	одређен
	$z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2k + m$	неодређен
	$z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2k + m$	преодређен
2. начин		
Кинематички — споља	$z_o + z_u + 2z_z = 3z_p$	просто стабилан
	$z_o + z_u + 2z_z > 3z_p$	вишеструко стабилан
	$z_o + z_u + 2z_z < 3z_p$	лабилан
Кинематички — унутра	$2z_z = 3z_p - 3$	просто стабилан
	$2z_z > 3z_p - 3$	вишеструко стабилан
	$2z_z < 3z_p - 3$	лабилан
Статички	$z_o + z_u + 2z_z = 3z_p$	одређен
	$z_o + z_u + 2z_z > 3z_p$	неодређен
	$z_o + z_u + 2z_z < 3z_p$	преодређен

Систем 1	Систем 2



$z_o = 3$, $z_u = 0$, $z_s = 25$, $z_k = 0$, $k = 14$



$z_o = 4$, $z_u = 0$, $z_s = 2$, $z_k = 0$, $k = 3$

$z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$ OK !

$\det D = 0$ NO !

$4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3$ OK !

$\det D = 0$ NO !

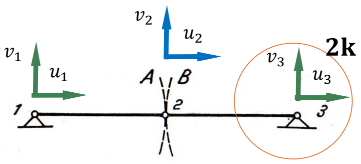
Кинематички лабилни системи !!!

Систем 1	Систем 2
Систем **1** има коначна померања, и изведен из равнотежног положаја остаје **лабилан**. (има неправилан распоред елемената)	Систем **2** има бесконачно мала померања, и изведен из почетне конфигурације (критичне конфигурација) постаје **стабилан**.

Закључак

- систем 1 - има неправилан распоред елемената,
- систем 2 - **је критична конфигурација.**

Доказ кинематичког критеријума



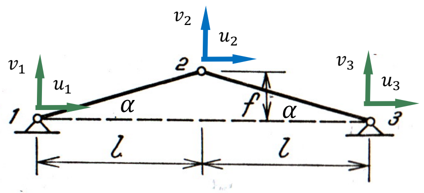
1: $F_1(i,k) = \Delta l_{ik}$ ⋯⋯ $z_s = 2$
2: $F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}$ ⋯ $z_k = 0$
3: $u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi}$ ⋯⋯⋯ $z_o = 4$
4: $F_2(i,k) = c_{ui} - \tau_{ik}$ ⋯⋯ $z_u = 0$

$$u_2 - u_1 = \Delta l_{12}$$
$$u_3 - u_2 = \Delta l_{23}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_3 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$v_3 = 0$$

$$\det D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0$$

Решења : $u_2 = \infty \qquad v_2 = \infty$

Критична конфигурација .!.



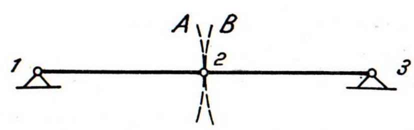
$F_1(i,k) = \Delta l_{ik}$ ⋯⋯ $z_s = 2$
$F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik}$ ⋯ $z_k = 0$
$u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi}$ ⋯⋯⋯ $z_o = 4$
$F_2(i,k) = c_{ui} - \tau_{ik}$ ⋯⋯ $z_u = 0$

$$(u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha = \Delta l_{12}$$
$$(u_3 - u_2)\cos\alpha - (v_3 - v_2)\sin\alpha = \Delta l_{23}$$
$$u_1 = 0$$
$$u_3 = 0$$
$$v_1 = 0$$
$$v_3 = 0$$

$$\det D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -\cos\alpha & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & -\sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \sin 2\alpha$$

Следе решења за непознате величине: $u_2 = \dfrac{\Delta l_{12} - \Delta l_{23}}{2 sin\alpha} \qquad v_2 = \dfrac{\Delta l_{12} + \Delta l_{23}}{2 sin\alpha}$

Закључак

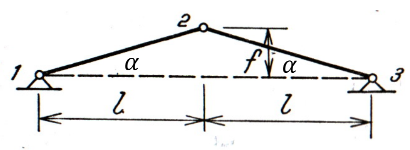


$z_o = 4, z_u = 0, z_s = 2, z_k = 0, k = 3$

$z_o + z_u + z_s + z_k = 2k$

$4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3 \qquad 6 = 6$ OK !

Ово је **критична конфигурација система** .!.



$z_o = 4, z_u = 0, z_s = 2, z_k = 0, k = 3$

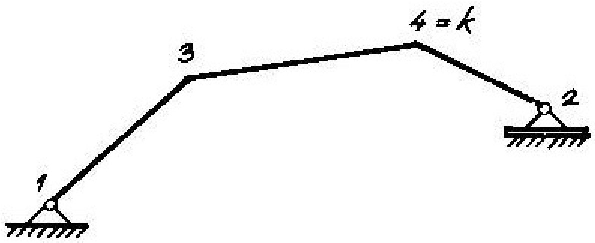
$4 + 0 + 2 + 0 = 2 \cdot 3 \qquad 6 = 6$ OK !

НИЈЕ критична конфигурација система – то је **лук са три зглоба.**

Примери

За све дате системе штапова проверити спољашњу и унутрашњу кинематичку класификацију.

1.



$$\begin{aligned} Z_s &= 3 \\ Z_k &= 2 \\ Z_o &= 3 \\ Z_u &= 0 \\ \hline \Sigma Z &= 8 \end{aligned}$$

$2K = 2 \cdot 4 = 8$

$\Sigma Z = 8 = 2K$

Sistem je kinematički prosto stabilan.

$Z_s + Z_k = 5$

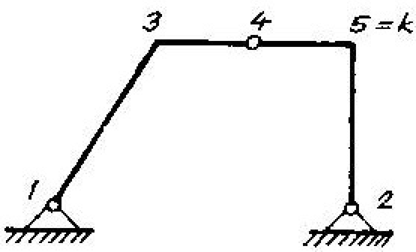
$2K - 3 = 5$

$\Rightarrow$ sistem je unutrašnje kinematički prosto stabilan.

$$\left.\begin{aligned} Z_p &= 1 \\ Z_o &= 3 \\ Z_z &= 0 \\ Z_u &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2Z_z + Z_o + Z_u &= 3 \\ 3Z_p &= 3 \end{aligned} \Rightarrow$$

sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

2.



$$\begin{aligned} Z_s &= 4 \\ Z_k &= 2 \\ Z_o &= 4 \\ Z_u &= 0 \\ \hline \Sigma Z &= 10 \end{aligned}$$

$2K = 2\ 5 = 10$

$\Sigma Z = 2K = 10$

Sistem je kinematički prosto stabilan

$Z_s + Z_k = 6$

$2K - 3 = 7$

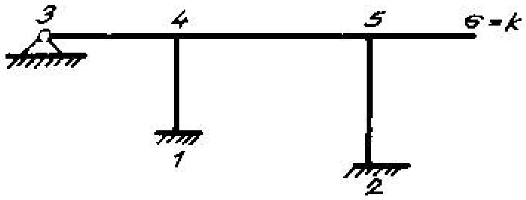
$\Rightarrow$ Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja, ti

$n_u = (2K-3) - \Sigma Z = 7-6 = 1$

$Z_p = 2$
$Z_z = 1$
$Z_o = 4$
$Z_u = 0$

$\Rightarrow \quad 2Z_z + Z_o + Z_u = 6, \quad 3Z_p = 6 \quad \Rightarrow$ Sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

3.



$Z_s = 5$
$Z_k = 4$
$Z_o = 6$
$Z_u = 2$
$\Sigma Z = 17$

$2K = 2 \cdot 6 = 12$

$n = \Sigma Z - 2K = 17 - 12 = 5$

Sistem je kinematički višestruko stabilan sa 5 suvišnih elemenata.

$Z_s + Z_k = 9$
$2K-3 = 9$

$\Rightarrow \quad (Z_s + Z_k) - (2K-3) = 0$

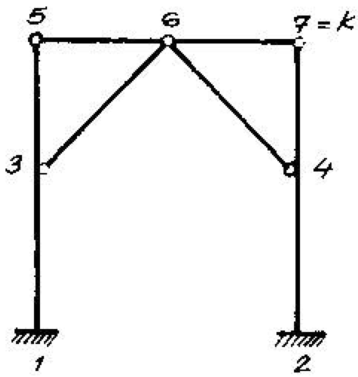
Sistem je unutrašnje kinematički prosto stabilan

$Z_p = 1$
$Z_z = 0$

$\Rightarrow \quad 2Z_z + Z_o + Z_u = 8, \quad 3Z_p = 3 \quad \Rightarrow \quad n_s = (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 5$

Sistem je spoljašnje kinematički višestruko stabilan sa 6 suvišnih spoljašnjih elemenata

4.



$Z_S = 8$
$Z_K = 2$
$Z_O = 4$
$Z_U = 2$
$\Sigma Z = 16$

$2K = 2 \cdot 7 = 14$

$n = \Sigma Z - 2K = 16 - 14 = 2$

Sistem je kinematički višestruko stabilan sa 2 suvišna elementa.

$Z_S + Z_K = 10$
$2K - 3 = 11$

$\Rightarrow \quad n_u = (2K-3) - (Z_S + Z_K) = 11 - 10 = 1$

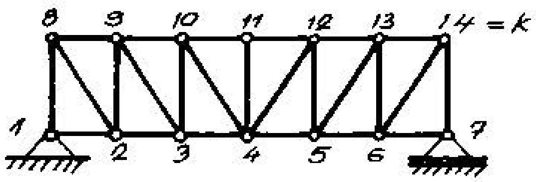
Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa 1 stepenom slobode pomeranja.

$Z_p = 2$
$Z_Z = 1$

$\Rightarrow \quad 2Z_Z + Z_O + Z_U = 8$, $3Z_p = 6$ $\Rightarrow n_S = (2Z_Z + Z_O + Z_U) - 3Z_p = 8 - 6 = 2$

Sistem je spoljašnje kinematički višestruko stabilan sa dva suvišna elementa

5.



$Z_S = 25$
$Z_K = 0$
$Z_O = 3$
$Z_U = 0$
$\Sigma Z = 28$

$2K = 2 \cdot 14 = 28$

$n = \Sigma Z - 2K = 28 - 28 = 0$

Sistem je kinematički prosto stabilan.

$Z_S + Z_K = 25$
$2K - 3 = 25$

$\Rightarrow \quad (Z_S + Z_K) - (2K - 3) = 0$

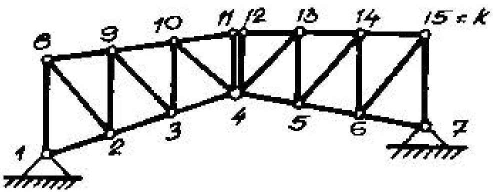
Sistem je unutrašnje kinematički prosto stabilan

$Z_p = 1$
$Z_Z = 0$

$\Rightarrow \quad (2Z_Z + Z_O + Z_U) - 3Z_p = 3 - 3 = 0$

Sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

6.



$Z_s = 26$
$Z_k = 0$
$Z_o = 4$
$Z_u = 0$
$\Sigma Z = 30$

$2K = 2 \cdot 15 = 30$

$n = \Sigma Z - 2K = 0$

Sistem je kinematički prosto stabilan

$Z_s + Z_k = 26$
$2K - 3 = 27$

$\Rightarrow \lambda_u = (2K-3) - (Z_s + Z_k) = 27 - 26 = 1$

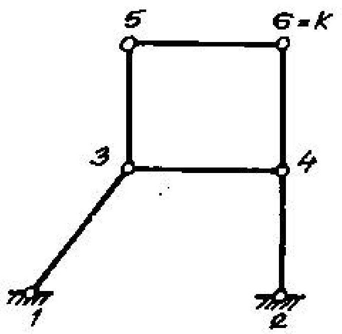
Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.

$Z_p = 2$
$Z_z = 1$

$\Rightarrow (2Z_z + Z_o + Z_u) - 3Z_p = 6 - 6 = 0$

Sistem je spoljašnje kinematički prosto stabilan.

7.



$Z_s = 6$
$Z_k = 0$
$Z_o = 4$
$Z_u = 0$
$\Sigma Z = 10$

$2K = 2 \cdot 6 = 12$

$\lambda = 2K - \Sigma Z = 12 - 10 = 2$

Sistem je kinematički labilan sa 2 stepena slobode pomeranja.

$Z_s + Z_k = 6$

$2K - 3 = 9$

$\Rightarrow \lambda_u = (2K-3) - (Z_s + Z_k) = 9 - 6 = 3$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa tri stepena slobode pomeranja

$Z_p = 6$

$Z_s = 6$

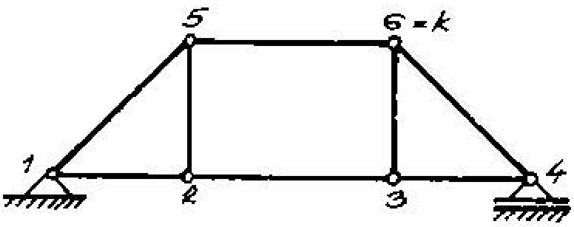
$Z_o = 4$

$Z_4 = 0$

$\Rightarrow \lambda_s = -(2Z_z + Z_o + Z_4) + 3Z_p = 18 - 16 = 2$

Sistem je spoljašnje kinematički labilan sa dva stepena slobode pomeranja.

8.



$Z_s = 8$

$Z_k = 0$

$Z_o = 3$

$Z_4 = 0$

$\sum Z = 11$

$2K = 2 \cdot 6 = 12$

$\Rightarrow \lambda = 2K - \Sigma Z = 12 - 11 = 1$

Sistem je kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.

$Z_s + Z_k = 8$

$2K - 3 = 9$

$\Rightarrow \lambda_u = (2K-3) - (Z_s + Z_k) = 9 - 8 = 1$

Sistem je unutrašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja

$Z_p = 4$

$Z_z = 4$

$Z_o = 3$

$Z_4 = 0$

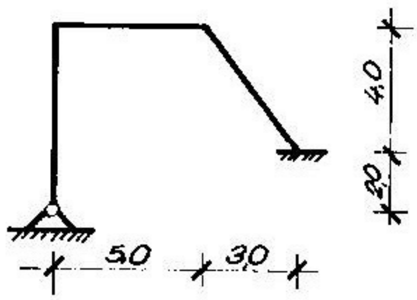
$\Rightarrow \lambda_s = (3Z_p) - (2Z_z + Z_o + Z_4) = 12 - 11 = 1$

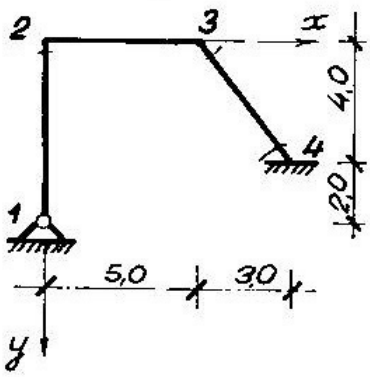
Sistem je spoljašnje kinematički labilan sa jednim stepenom slobode pomeranja.

Примери

За све дате системе штапова проверити статичку класификацију.

1.





Geometrijske karakteristike štapova

štap	l_{ik}	$\sin\alpha_{ik}$	$\cos\alpha_{ik}$
1-2	6,0	-1,0	0,0
2-3	5,0	0,0	1,0
3-4	5,0	0,8	0,6

Statički nepoznate veličine su:

$C_{1H}, C_{1V}, C_{4H}, C_{4V}, C_{4U}$ ... $(z_o+z_u) = 5$

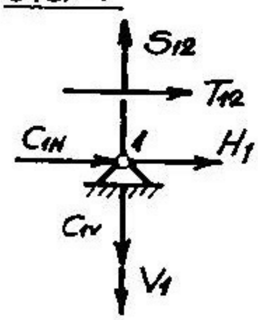
S_{12}, S_{23}, S_{34} .... $z_s = 3$

$M_{21}, M_{23}, M_{32}, M_{34}, M_{43}$ .. $z_k+m+z_a = 4+1$

Ukupno $(z_o+z_u)+z_s+(z_k+m+z_u) = 13$

Uslovne jednačine ravnoteže

Čvor 1



$T_{12}+C_{1H}+H_1=0$

$-S_{12}+C_{1V}+V_1=0$

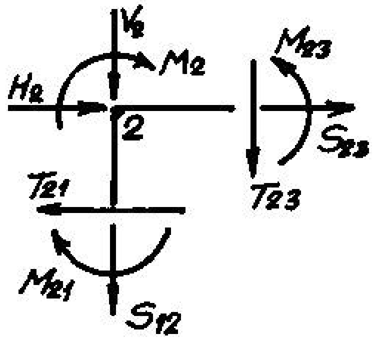
$M=0$

$$\frac{M_{21}}{l_{12}} + C_{1H} + H_1 = 0$$

(a)

$$-S_{12} + C_{1V} + V_1 = 0$$

Čvor 2



$$S_{23} - T_{21} + H_2 = 0$$

$$S_{12} + T_{23} + V_2 = 0$$

$$-M_{23} + M_{21} + M_2 = 0$$

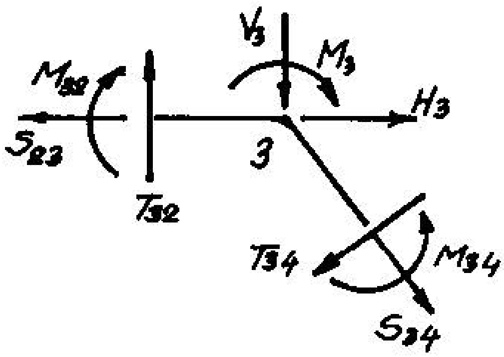
(b)

$$S_{23} - \frac{M_{21}}{l_{12}} + H_2 = 0$$

$$S_{12} + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} + V_2 = 0$$

$$-M_{32} + M_{21} + M_2 = 0$$

Čvor 3



$$-S_{23} + 0{,}6\, S_{34} - 0{,}8\, T_{34} + H_3 = 0$$

$$0{,}8\, S_{34} - T_{32} + 0{,}6\, T_{34} + V_3 = 0$$

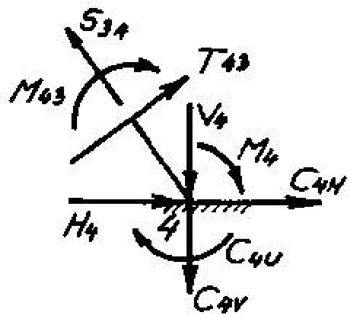
$$M_{32} - M_{34} + M_3 = 0$$

$$-S_{23} + 0{,}6\,S_{34} - 0{,}8\,\frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + H_3 = 0$$

(c)
$$0{,}8\,S_{34} - \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} + 0{,}6\,\frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + V_3 = 0$$

$$M_{32} - M_{34} + M_3 = 0$$

Čvor 4



$$-0{,}6\,S_{34} + 0{,}8\,T_{43} + C_{4H} + H_4 = 0$$

$$-0{,}8\,S_{34} - 0{,}6\,T_{43} + C_{4V} + V_4 = 0$$

$$M_{43} + C_{4U} + M_4 = 0$$

(d)
$$-0{,}6\,S_{34} + 0{,}8\,\frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + C_{4H} + H_4 = 0$$

$$-0{,}8\,S_{34} - 0{,}6\,\frac{M_{43} - M_{34}}{l_{34}} + C_{4V} + V_4 = 0$$

$$M_{43} + C_{4U} + M_4 = 0$$

Ukupan broj uslova ravnoteže je 11

$$2K + m = 2 \cdot 4 + 2 = 10.$$

Dakle, statički nepoznate veličine nemogu se odrediti nezavisno od proračuna deformacijskih nepoznatih, tj

$$Z_s + Z_K + Z_o + Z_u + m > 2K + m \quad , \text{ odnosno}$$

$$12 > 10\,,$$

pa prema tome navedeni sistem predstavlja statički neodređen nosač. Broj statički nepoznatih veličina koje se mogu izabrati proizvoljno, a da svi uslovi ravnoteže sistema ostanu zadovoljeni je

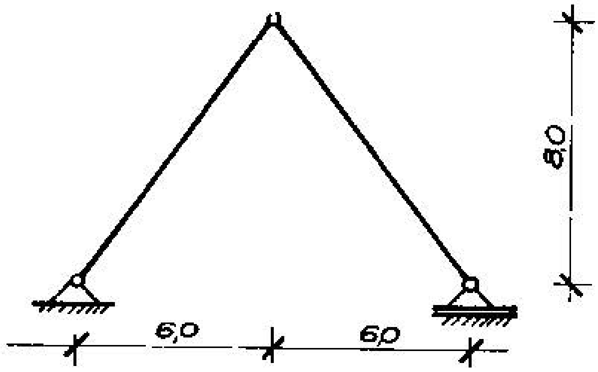
$$n = (Z_s + Z_K + Z_o + Z_u + m) - (2K + m) = 12 - 10 = 2.$$

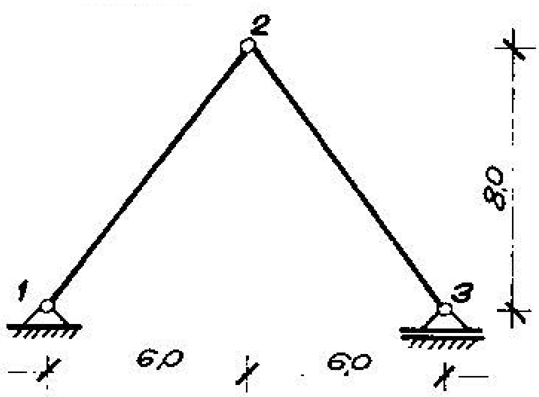
Navedeni zaključak važi samo uz uslov da su jednačine ravnoteže (a),(b),(c),(d) međusobno nezavisne, i to njih

$$2k + m = 8 + 2 = 10$$

i da je ma ijedna determinanta $D' \neq 0$.

2.





Geometrijske karakteristike štapova

štap	l_{ik}	$\sin\alpha_{ik}$	$\cos\alpha_{ik}$
1-2	10	$-8/10$	$6/10$
2-3	10	$8/10$	$6/10$

Statički nepoznate veličine su

C_{1H}, C_{1V}, C_{3V} ...... $z_o + z_u = 3$

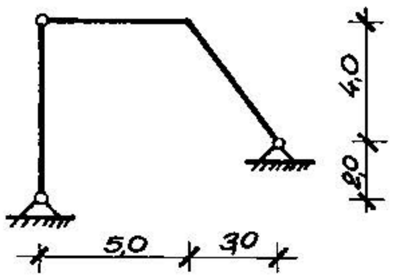
S_{12}, S_{23} .... $z_s = 2$

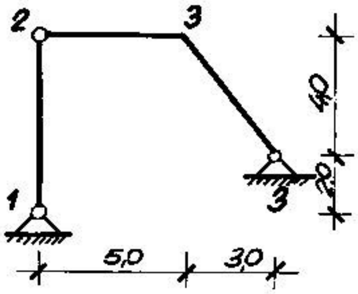
Ukupno $z_o + z_u + z_s = 5$

Uslovne jednačine ravnoteže ispisaćemo za čvorove 1, 2 i 3.

ljnog opterećenja, pa zbog toga predstavlja statički preodređen sistem. Da bi ovaj sistem bio u ravnoteži, opterećenje mora da ispuni jedan uslov (broj stepeni slobode gornjeg sistema).

3.





Geometrijske karakteristike štapova

štap	l_{ik}	$\sin\alpha_{ik}$	$\cos\alpha_{ik}$
1-2	6,0	− 1,0	0,0
2-3	5,0	0,0	1,0
3-4	5,0	0,8	0,6

Statički nepoznate veličine su:

$C_{1H}, C_{1V}, C_{4H}, C_{4V}$ ..... $Z_o = 4$

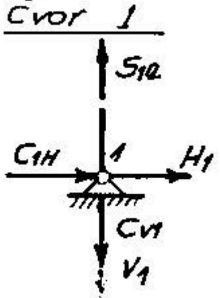
S_{12}, S_{23}, S_{34} ..... $Z_s = 3$

M_{32}, M_{34} ..... $Z_{k+m} = 2$

Ukupno $\Sigma Z + m = 9$

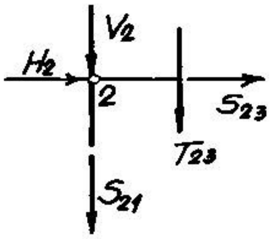
Uslovne jednačine ravnoteže

Čvor 1



$$C_{1H} + H_1 = 0$$
$$-S_{12} + C_{1V} + V_1 = 0 \qquad (a)$$

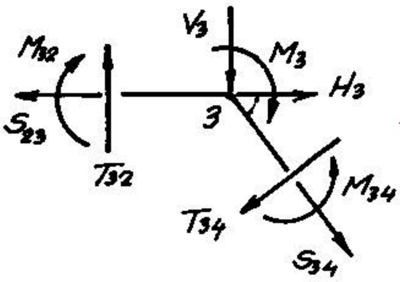
Čvor 2



$$S_{23} + H_2 = 0$$
$$S_{21} + T_{23} + V_2 = 0$$

$$S_{23} + H_2 = 0$$
$$S_{21} + \frac{M_{32}}{l_{23}} + V_2 = 0 \qquad (b)$$

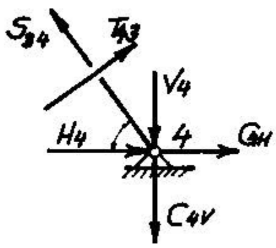
Čvor 3



$$-S_{23} + 0{,}6 \cdot S_{34} - T_{34} \cdot 0{,}8 + H_3 = 0$$
$$S_{34} \cdot 0{,}8 - T_{32} + T_{34} \cdot 0{,}6 + V_3 = 0$$

$$-S_{23} + 0{,}6 S_{34} + 0{,}8 \cdot \frac{M_{34}}{l_{34}} + H_3 = 0$$
$$0{,}8 S_{34} - \frac{M_{32}}{l_{23}} + 0{,}6 \left(-\frac{M_{34}}{l_{34}}\right) + V_3 = 0 \qquad (c)$$
$$M_{32} - M_{34} + M_3 = 0$$

Čvor 4



$$-0{,}6 S_{34} + 0{,}8 T_{43} + C_{4H} + H_4 = 0$$
$$-0{,}8 S_{34} - 0{,}6 T_{43} + C_{4V} + V_4 = 0$$

$$-0{,}6 S_{34} - 0{,}8 \frac{M_{34}}{l_{34}} + C_{4H} + H_4 = 0 \qquad (d)$$
$$-0{,}8 S_{34} + 0{,}6 \frac{M_{34}}{l_{34}} + C_{4V} + V_4 = 0$$

Ukupan broj uslova ravnoteže je

$$2k + m = 2 \cdot 4 + 1 = 9,$$

što je jednako broju statički nepoznatih veličina, a to znači da se statički nepoznate veličine mogu odrediti nezavisno od proračuna deformacijskih veličina,

$$(Z_o + Z_k + z_o + Z_u + m) = 2k + m .$$

Na osnovu navedenog zaključka proizilazi da je navedeni sistem statički određen nosač.