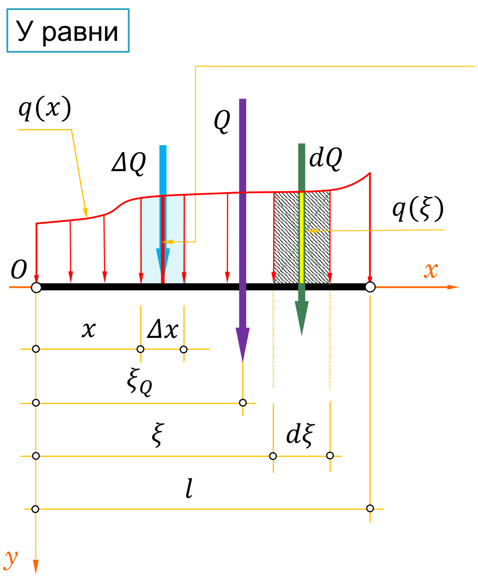
Услови равнотеже штапа - силе у пресецима

Замена расподељеног оптерећења еквивалентним силама



Средњи интензитет континуалног оптерећења:

$$q_{sr} = \frac{\Delta Q}{\Delta x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} q_{sr} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx} = q$$

Површина дијаграма оптерећења:

$$dQ = q(\xi) \cdot d\xi \qquad Q = \int_0^l dQ = \int_0^l q(\xi) \cdot d\xi$$

Применом Варињонове теореме за тачку O:

$$Q \cdot \xi_Q = \int_0^l dQ \cdot \xi = \int_0^l \xi \cdot q(\xi) \cdot d\xi$$

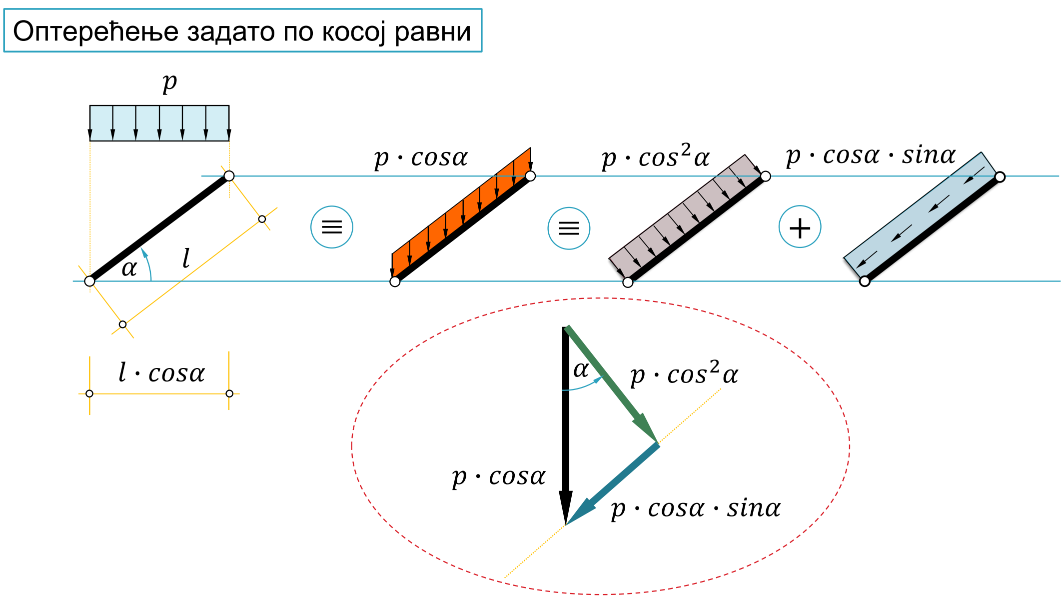
Положај резултанте је:

$$\xi_Q = \frac{\int_0^l \xi \cdot q(\xi) \cdot d\xi}{Q} = \frac{\int_0^l \xi \cdot q(\xi) \cdot d\xi}{\int_0^l q(\xi) \cdot d\xi}$$

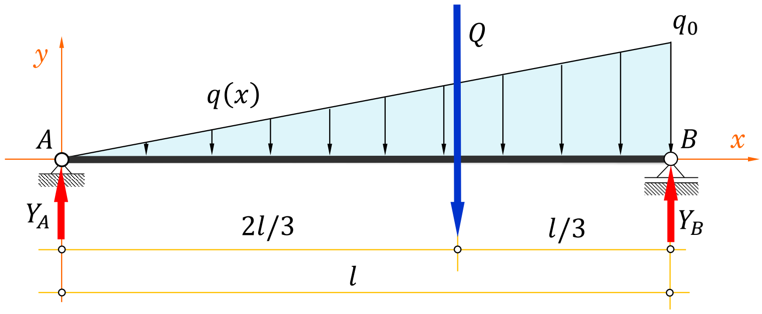
Тако смо сада заменили расподељено оптерећење концентрисаном силом Q са њеним положајем ξ_Q у односу на леви крај штапа за услове равнотеже. Ово се **не ради** када се тражи деформација штапа.!.

Примери:

- Еквиваленције равномерно једноликог расподељеног оптерећења у равни.



- Еквиваленција линеарно подељеног оптерећења



$$\boxed{y = a \cdot x + b}$$

$$q(x) = \frac{q_0}{l} \cdot x$$

$$Q = \int_0^l q(x) \cdot dx$$

$$Q = \frac{1}{2} q_0 \cdot x$$

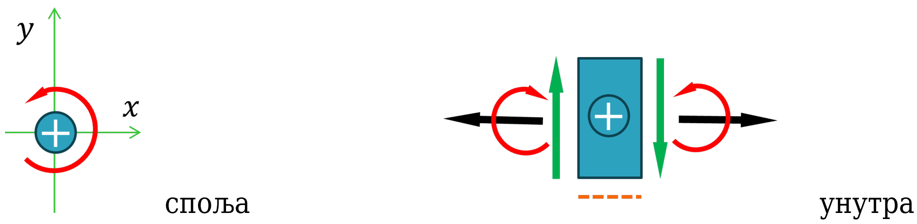
$$\sum M_z^A = 0: \quad Y_B \cdot l - Q \cdot \frac{2}{3} l = 0 \rightarrow Y_B = \frac{1}{3} \cdot q_0 \cdot l$$

$$\sum Y = 0: \quad Y_A + Y_B = Q \rightarrow Y_A = \frac{1}{6} \cdot q_0 \cdot l$$

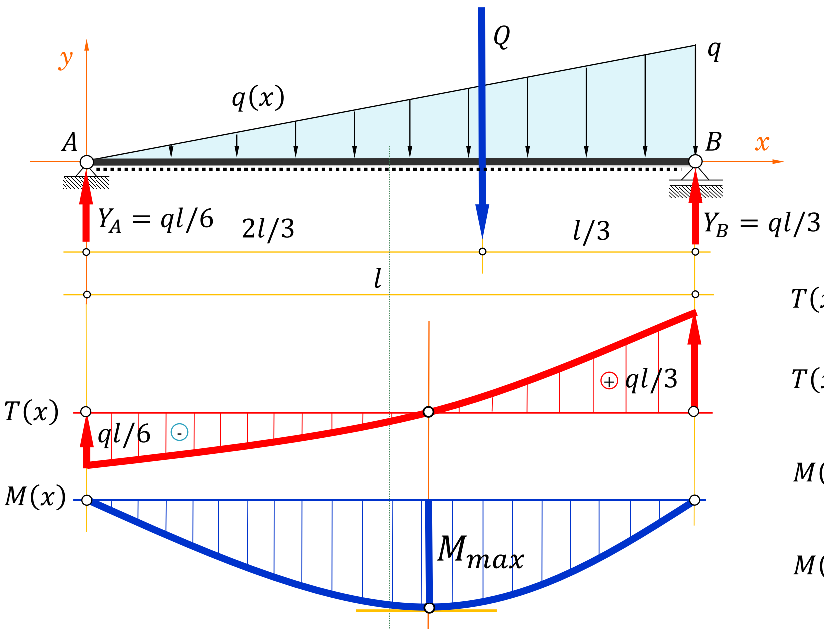
$$\boxed{Q(x) = \frac{1}{2} \cdot q(x) \cdot x}$$

$$\boxed{Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_0}{l} \cdot x^2}$$

- Конвенција за смерове сила (једна од могућих) – договор



- Дијаграми унутрашњих сила у пресецима



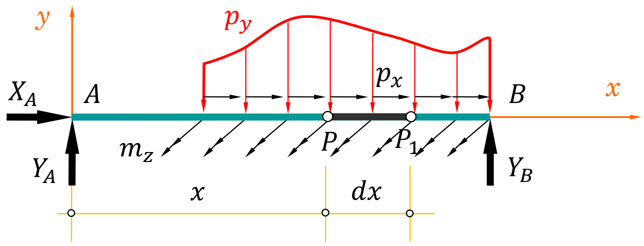
$$T(x) = Y_A - Q(x)$$

$$T(x) = \frac{1}{6} ql - \frac{1}{2} \frac{q}{l} x^2$$

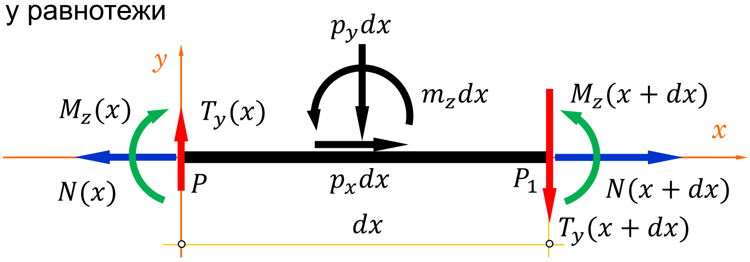
$$M(x) = Y_A x - Q(x) \frac{1}{3} x$$

$$M(x) = \frac{1}{6} qlx - \frac{1}{6} \frac{q}{l} x^3$$

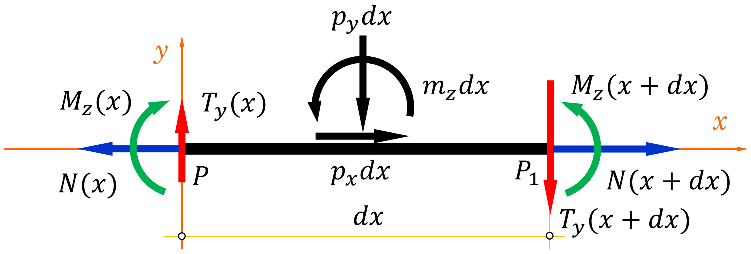
Услови равнотеже елемента линијског носача у равни



Део АБ је у равнотежи



Када је само један део штапа у равнотежи, онда је у равнотежи и било који други део штапа. Због тога узимамо само један његов мали део дужине dx.

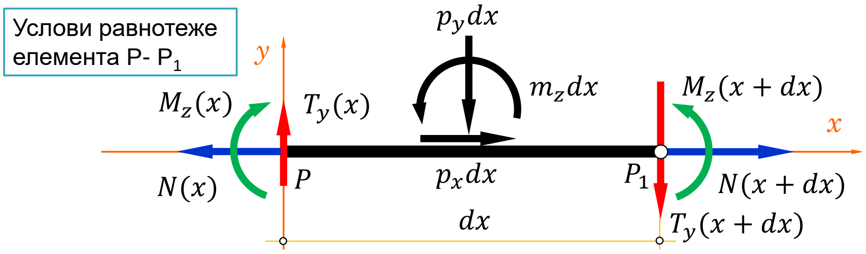


Тејлоров ред за силе у пресеку:

$$N(x+dx) = N(x) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx + \cdots$$

$$T_y(x+dx) = T_y(x) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{dT_y(x)}{dx} \cdot dx + \cdots$$

$$M_z(x+dx) = M_z(x) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{dM_z(x)}{dx} \cdot dx + \cdots$$



$$\sum X=0: \quad -N(x)+p_x dx+N(x)+\frac{dN(x)}{dx}dx=0 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{dN(x)}{dx}=-p_x}$$

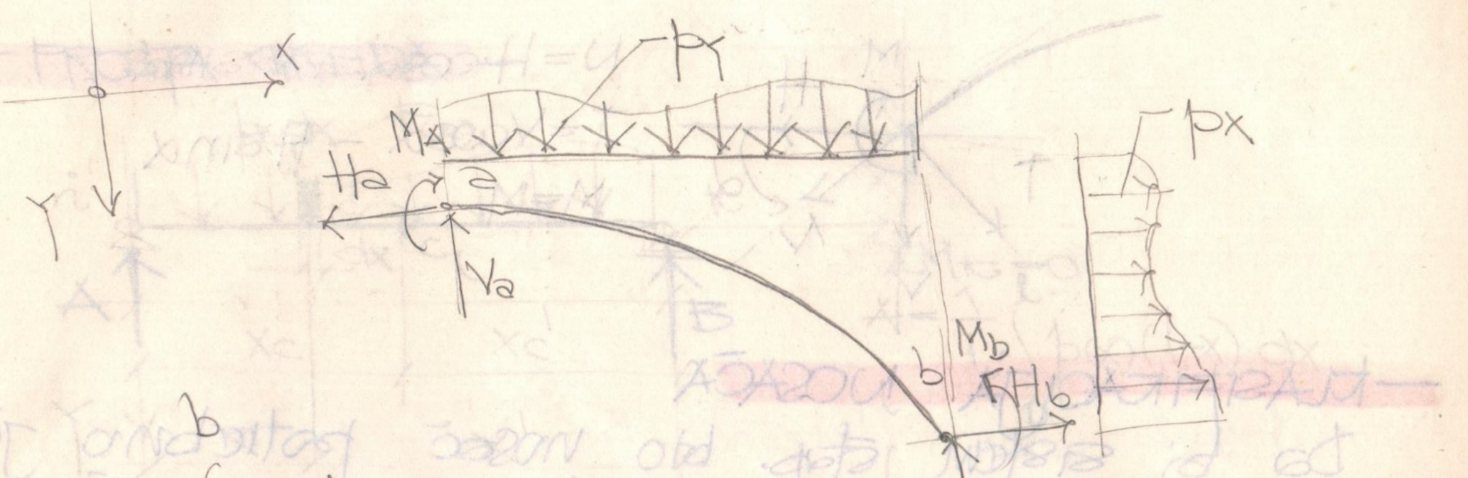
$$\sum Y=0: \quad T_y(x)-p_y dx-T_y(x)-\frac{dT_y(x)}{dx}dx=0 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{dT_y(x)}{dx}=-p_y}$$

$$\sum M_z^{P_1}=0: \quad -M_z(x)-T_y(x)dx+m_z dx+p_y\frac{dx^2}{2}+M_z(x)+\frac{dM_z(x)}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{dM_z(x)}{dx}=T_y(x)-m_z}$$

Тако смо дошли до диференцијалних једначина услова равнотеже правог штапа у равни по теорији првог реда - линеарна теорија.

2.1. USLOVI RAVNOTEŽE ŠTAPA KONAČNE DUŽINE



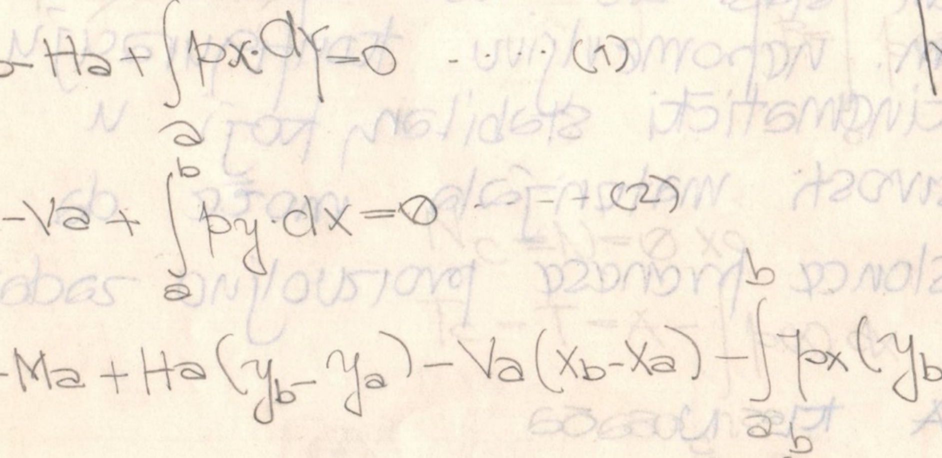
$$H_b - H_a + \int_a^b p_x \cdot dy = 0 \quad \dots (1)$$

$$V_b - V_a + \int_a^b p_y \cdot dx = 0 \quad \dots (2)$$

$$M_b - M_a + H_a(y_b - y_a) - V_a(x_b - x_a) - \int_a^b p_x(y_b - y)\,dy + \int_a^b p_y(x_b - x)\,dx = 0 \quad \dots (3')$$

$$M_b - M_a + H_b(y_b - y_a) - V_b(x_b - x_a) + \int_a^b p_x(y - y_a)\,dy - \int_a^b p_y(x - x_a)\,dx = 0 \quad \dots (3'')$$

2.2. SILE U PRESJEKU

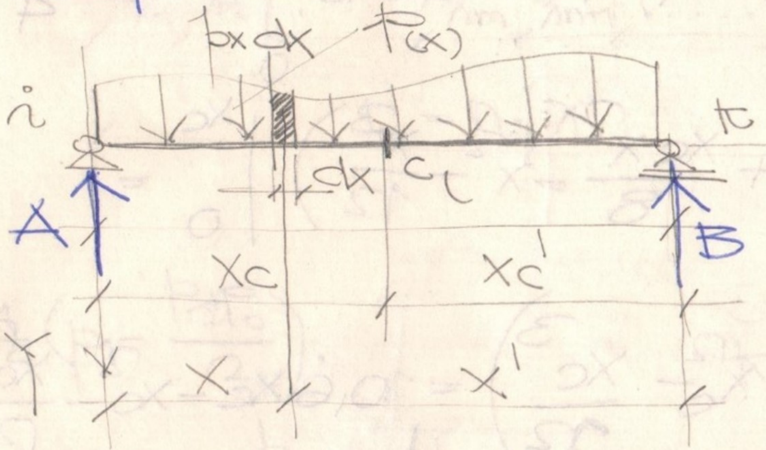


$$H = H_{ik} - \int_i^s p_x\,dy = -H_{ki} + \int_c^k p_x\,dy$$

$$V = V_{ik} - \int_i^c p_y\,dx = V_{ik} + \int_c^k p_y\,dx$$

$$\overset{SL}{M} = M_{ik} - H_{ik} \cdot (y_c - y_i) + V_{ik} \cdot (x_c - x_i) + \int_i^c p_x(y_c - y)\,dy - \int_i^c p_y(x_c - x)\,dx$$

— PROSTA GREDA —



$$\Sigma M_k = 0$$

$$A = \frac{1}{l}\int_0^l p(x)(l-x)\cdot dx$$

$$B = \int_0^l p(x)\,dx - A$$

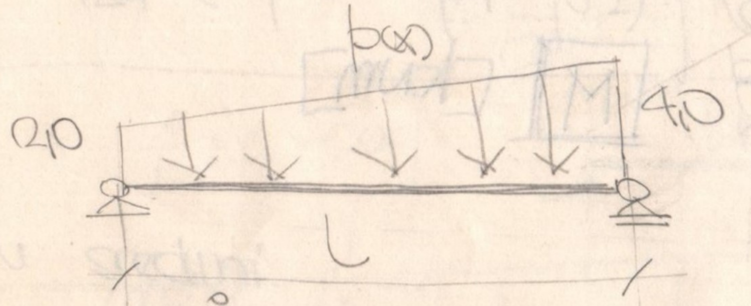
$$N_c = N = 0 \quad x_c$$

$$T_c = T = A - \int_i^c p(x)\cdot dx$$

$$M_c = M = A\cdot x_c - \int_i^c p(x)(x_c - x)\cdot dx$$

PRIMJER:

Sračunati i nacrtati dijagrame sila u presjecima koristeći predhodne izraze u desetinama ~~ter~~



$$p(x) = 2 + \frac{x}{4}\left(\frac{kN}{m'}\right)$$

$$A = \frac{1}{8}\int_0^8\left(2+\frac{x}{4}\right)(8-x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^8\left(16-\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{1}{8}\left(16x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^8$$

$$= \frac{1}{8}\left(128-\frac{512}{12}\right) = \underline{\underline{10,\dot{6}\ kN}}$$

$$T = 10{,}\dot{6} - \int_0^{x_c}\left(2+\frac{x}{4}\right)dx = 10{,}\dot{6} - \left(2x+\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^{x_c} =$$

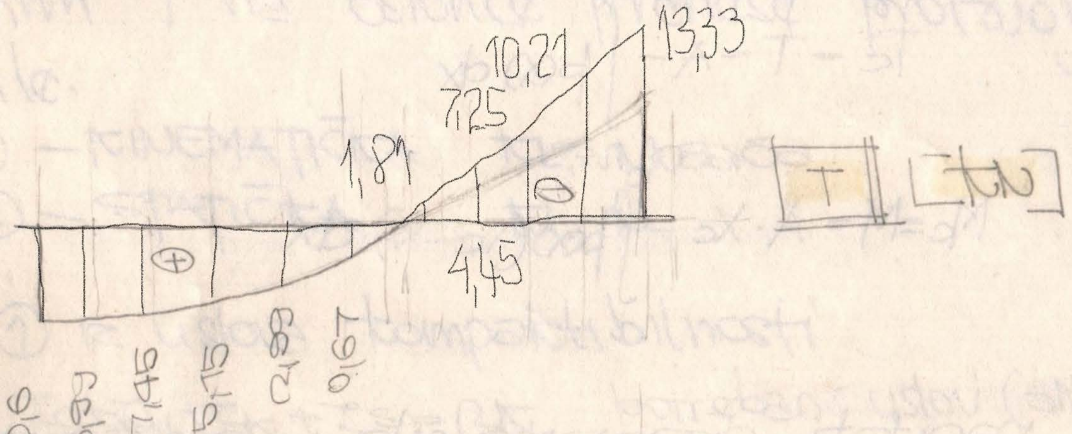
$$= \boxed{10{,}\dot{6} - 2x_c - \frac{x_c^2}{8}}$$

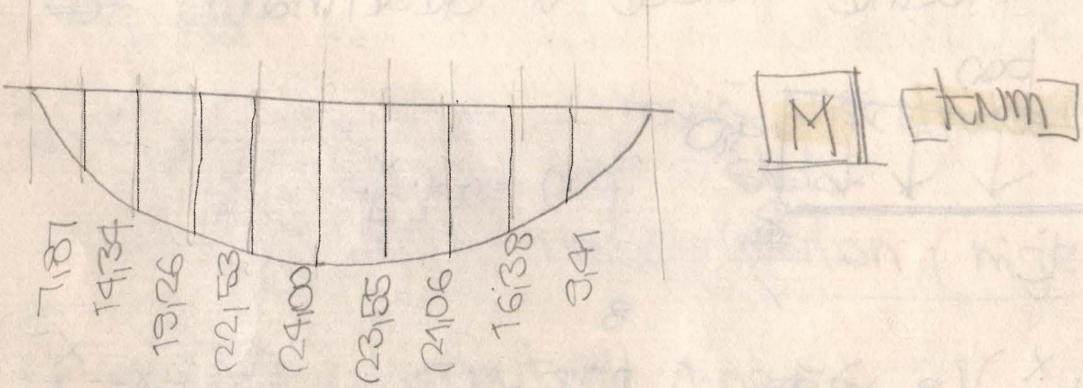
$$M_c = 10{,}\dot{6}\cdot x_c - \int_0^{x_c}\left(2+\frac{x}{4}\right)(x_c-x)\,dx = 10{,}\dot{6}x_c - \int_0^{x_c}\left(2x_c+\frac{x\cdot x_c}{4}-2x-\right.$$

$$\left.-\frac{x^2}{4}\right)dx = 10{,}\dot{6}x_c - \left(2x_c x+\frac{x_c x^2}{8}-x^2-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^{x_c} =$$

$$M_c = 10{,}\dot{6}x_c - \left(2x_c^2+\frac{x_c^3}{8}-x_c^2-\frac{x_c^3}{12}\right) = \boxed{10{,}\dot{6}x_c - x_c^2 - \frac{x_c^3}{24}}$$

$x_c = 0;\ 0{,}8;\ 1{,}6;\ \ldots\ 8{,}0$





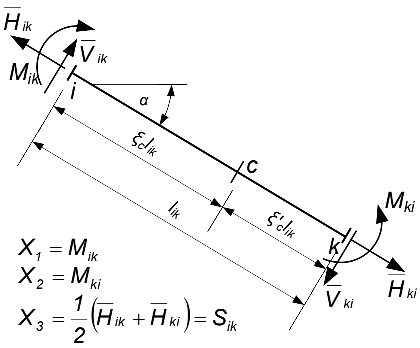
Силе у пресецима произвољног правог штапа у равни

Sile u preseku *"c"*

$$N = N_0 + S_{ik}$$

$$T = T_0 + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$$

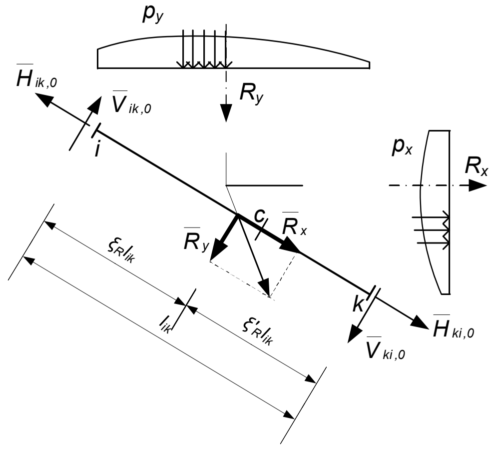
$$M = M_0 + M_{ik} \cdot \xi_c' + M_{ki} \cdot \xi_c$$



$$X_1 = M_{ik}$$

$$X_2 = M_{ki}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\overline{H}_{ik} + \overline{H}_{ki}\right) = S_{ik}$$



Sile u preseku *"c"* od spoljašnjeg opterećenja

$$N_0 = \overline{H}_{ik,0} - \cos\alpha \int_i^c p_x dy - \sin\alpha \int_i^c p_y dx$$

$$T_0 = \overline{V}_{ik,0} - \cos\alpha \int_i^c p_y dx + \sin\alpha \int_i^c p_x dy$$

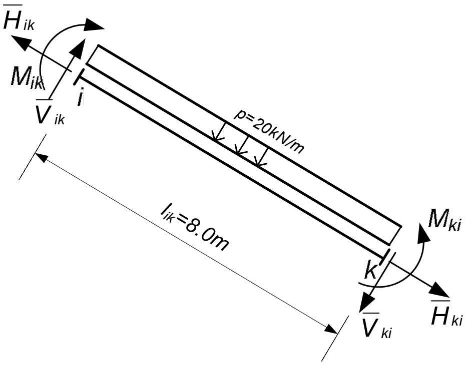
$$M_0 = \overline{V}_{ik,0} \cdot \xi_c l_{ik} + \int_i^c p_x (y_c - y) dy - \int_i^c p_y (x_c - x) dx$$

Sile na krajevima štapa od spoljašnjeg opterećenja

$$\overline{H}_{ik,0} = -\overline{H}_{ki,0} = \frac{\overline{R}_x}{2}$$

$$\overline{V}_{ik,0} = \overline{R}_y \cdot \xi_R' \qquad \overline{V}_{ki,0} = -\overline{R}_y \cdot \xi_R$$

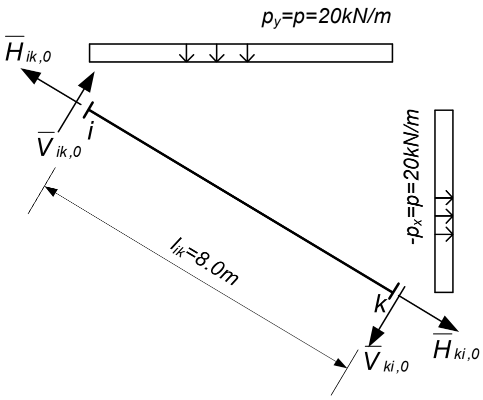
Sračunati i nacrtati dijagrame presečnih sila za štap sa opterećenjem.



$$X_1 = M_{ik} = -36\ kNm$$

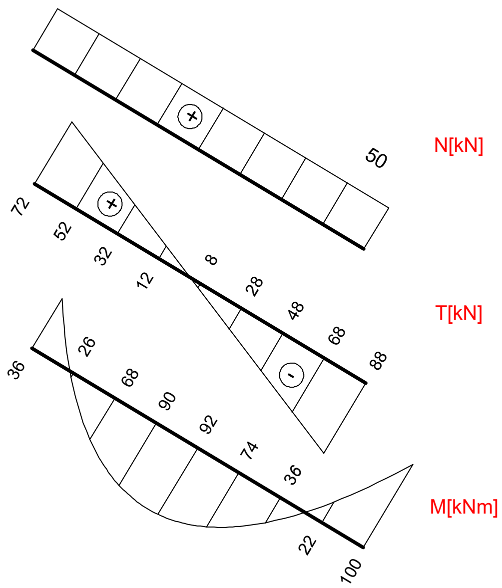
$$X_2 = M_{ki} = -100 kNm$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\overline{H}_{ik} + \overline{H}_{ki}\right) = S_{ik} = 50kN$$



$$R_x = p_x \cdot l_y \qquad R_y = p_y \cdot l_x$$
$$\overline{R}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{H}_{ik,0} = -\overline{H}_{ki,0} = 0$$
$$\overline{R}_y = p \cdot l_{ik} = 160kN; \quad \xi_R = \xi_R^{'} = 0.5$$
$$\overline{V}_{ik,0} = 80kN \qquad \overline{V}_{ki,0} = -80kN$$

$$N_0 = p \cdot \cos\alpha \int_i^c dy - p \cdot \sin\alpha \int_i^c dx = p \cdot (\cos\alpha \cdot y_c - \sin\alpha \cdot x_c) = p \cdot x_c \left(\cos\alpha \frac{y_c}{x_c} - \sin\alpha \right) =$$
$$= p \cdot x_c \left(\cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha \right) = 0$$
$$T_0 = \overline{R}_y \xi_R^{'} - p \cdot \cos\alpha \int_i^c dx - p \cdot \sin\alpha \int_i^c dy = \overline{R}_y \xi_R^{'} - p \cdot (\cos\alpha \cdot x_c + \sin\alpha \cdot y_c) =$$
$$= \overline{R}_y \xi_R^{'} - p \cdot x_c \left(\cos\alpha + \frac{y_c}{x_c} \sin\alpha \right) = \overline{R}_y \xi_R^{'} - p \cdot x_c \left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \sin\alpha \right) =$$
$$= \overline{R}_y \xi_R^{'} - p \cdot x_c \frac{1}{\cos\alpha} = p \cdot l_{ik} \cdot \frac{1}{2} - p \cdot \xi_c l_{ik} = \frac{p \cdot l_{ik}}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi_c) = 80(1 - 2 \cdot \xi_c)$$
$$M_0 = \overline{R}_y \xi_R^{'} \cdot \xi_c l_{ik} - p \int_i^c (y_c - y) dy - p \int_i^c (x_c - x) dx = \overline{R}_y \xi_R^{'} \cdot \xi_c l_{ik} - p \cdot \left(\frac{y_c^2}{2} + \frac{x_c^2}{2} \right) =$$
$$= p \cdot l_{ik} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_c l_{ik} - p \cdot \frac{1}{2} (\xi_c l_{ik})^2 = \frac{p \cdot l_{ik}^2}{2} \cdot (\xi_c - \xi_c^2) = 640 \cdot (\xi_c - \xi_c^2)$$



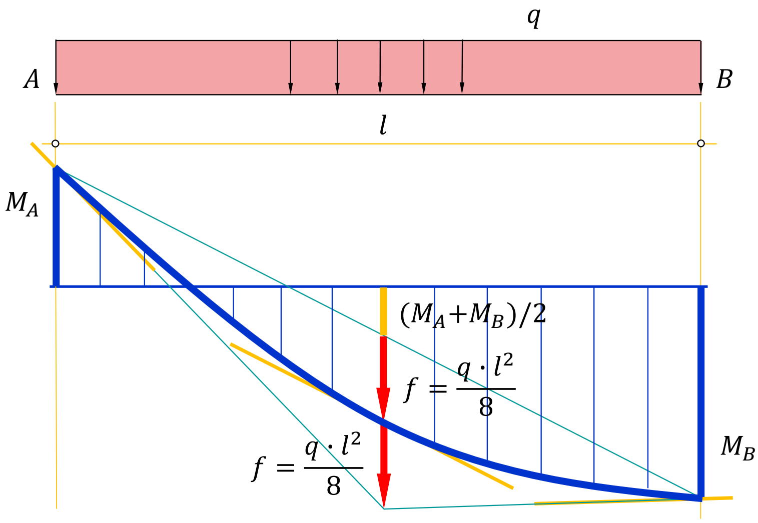
$$N = 50kN$$
$$T = 80(1 - 2 \cdot \xi_c) + \frac{-100 - (-36)}{8} = 80\,(1 - 2 \cdot \xi_c) - 8$$
$$M = 640 \cdot (\xi_c - \xi_c^2) + (-36) \cdot \xi_c^{'} + (-100)\,\xi$$

ξ_c	N(kN)	T_0(kN)	T(kN)	M_0(kNm)	M(kNm)
0	50	80	72	0	-36
0.125	50	60	52	70	26
0.25	50	40	32	120	68
0.375	50	20	12	150	90
0.5	50	0	-8	160	92
0.625	50	-20	-28	150	74
0.75	50	-40	-48	120	36
0.875	50	-60	-68	70	-22
1	50	-80	-88	0	-100

Примери:

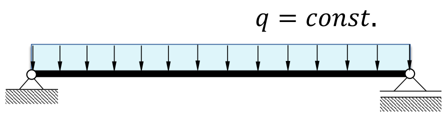
- Конструисање дијаграма пресечних сила правог штапа који има познате вредности концентрисаних моменте на крајевима штапа M_A и M_B.

Конструкција параболе – дијаграма момената

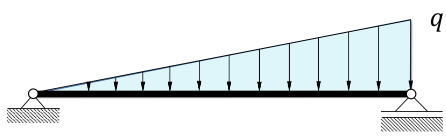


- Неколико модела расподељеног оптерећења које најчешће срећемо у литератури при чему еквиваленцију-замену другим статички еквивалентним оптерећењима редовно спроводимо у прорачунима са једначинама услова равнотеже штапа или носача. Иначе, у природи имамо различита дејства, тако да њих на одређени начин моделирамо у наша статичка оптерећења.

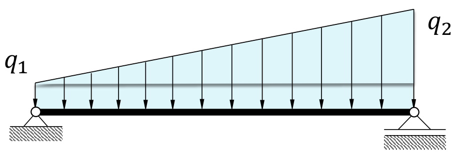
Равномерно расподељено оптерећење



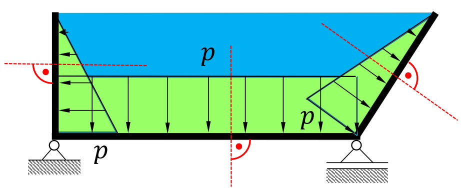
Троугаоно – линеарно расподељено оптерећење



Трапезасто – линеарно расподељено оптерећење

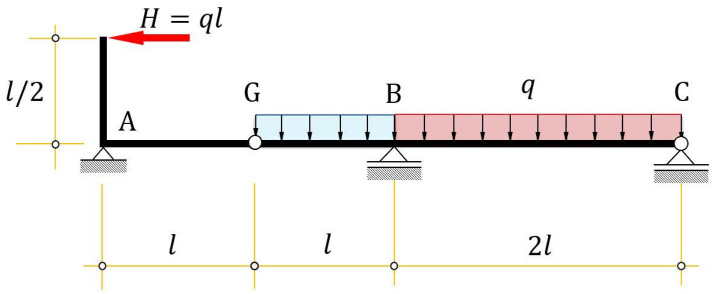


Оптерећење од воде – хидростатички притисак

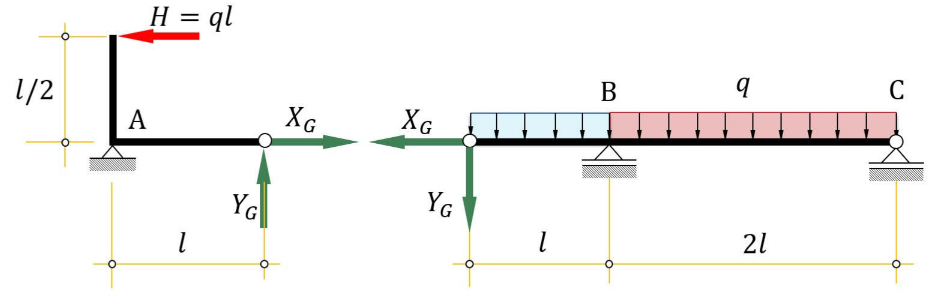


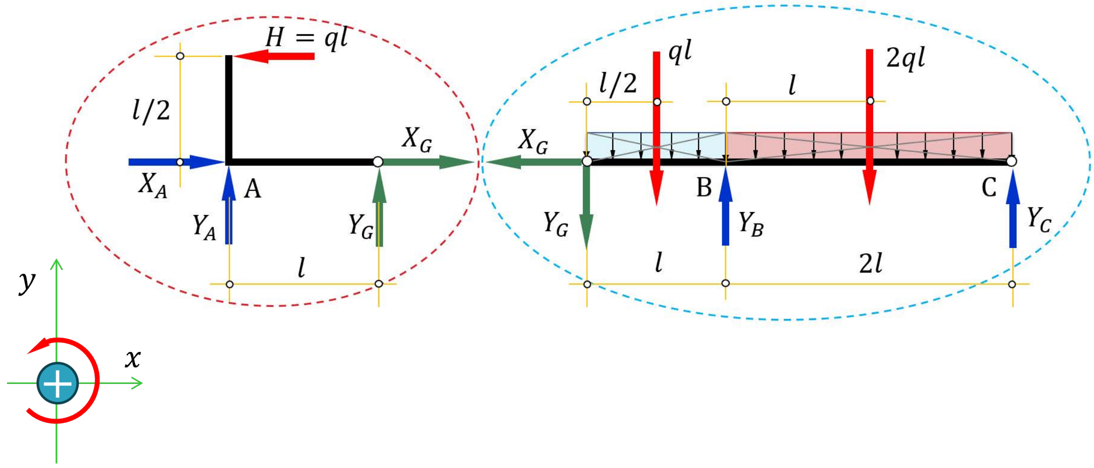
Метода декомпозиције

За дати носач са оптерећењем према скици срачунати реакције у ослонцима и силе у пресецима делимичном и тоталном декомпозицијом.



- тотална декомпозиција





Тело 1: 1: $\Sigma X = 0$: $X_A + X_G - H = 0 \rightarrow X_A = H = ql$

2: $\Sigma Y = 0$: $Y_A + Y_G = 0 \rightarrow Y_A = q\,l/2$

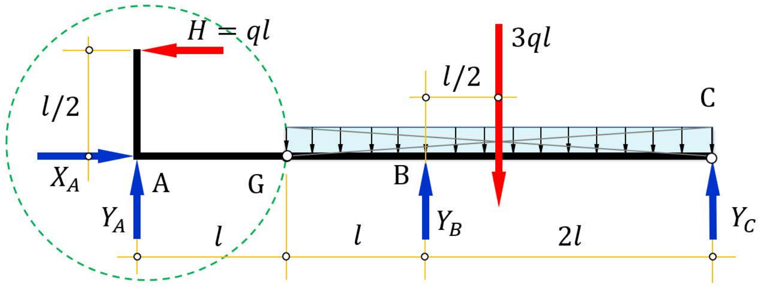
3: $\Sigma M_A = 0$: $H \cdot h + Y_G \cdot l = 0 \rightarrow Y_G = -H \cdot h/l = -q\,l/2$

Тело 2: 4: $\Sigma X = 0$: $-X_G = 0 \rightarrow X_G = 0$

5: $\Sigma Y = 0$: $-Y_G + Y_B + Y_C - 3ql = 0 \rightarrow Y_B = 3q\,l/2$

6: $\Sigma M_B = 0$: $Y_C \cdot 2l + Y_G \cdot l + ql \cdot l/2 - 2ql \cdot l = 0 \rightarrow Y_C = ql$

• делимична декомпозиција



$$1:\quad \Sigma X = 0: \quad X_A - H = 0 \;\rightarrow\; X_A = H = ql$$

$$2:\quad \Sigma Y = 0: \quad Y_A + Y_B + Y_C - 3ql = 0 \;\rightarrow\; Y_C = ql$$

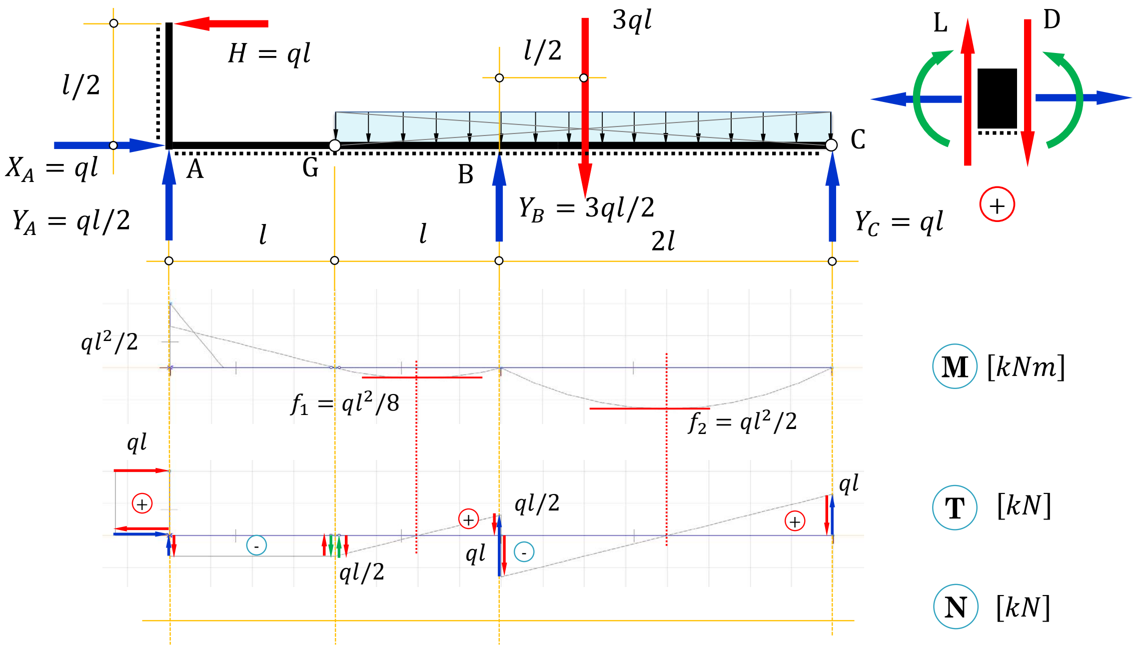
$$3:\quad \Sigma M_B = 0: \quad -Y_A \cdot 2l + Y_C \cdot 2l + H \cdot l/2 - 3ql \cdot l/2 = 0 \rightarrow Y_B = 3q\,l/2$$

$$4:\quad \Sigma M_G^l = 0: \quad H \cdot l/2 - Y_A \cdot l = 0 \;\rightarrow\; Y_A = q\,l/2$$

Унутрашње реакције X_G и Y_G следе из услова равнотеже дела **A-G**.

Према томе, запажа се да делимична декомпозиција има решење непознати у носачу са мањим бројим једначина од тоталне декомпозиције.

• Конструисање дијаграма пресечних сила у носачу.



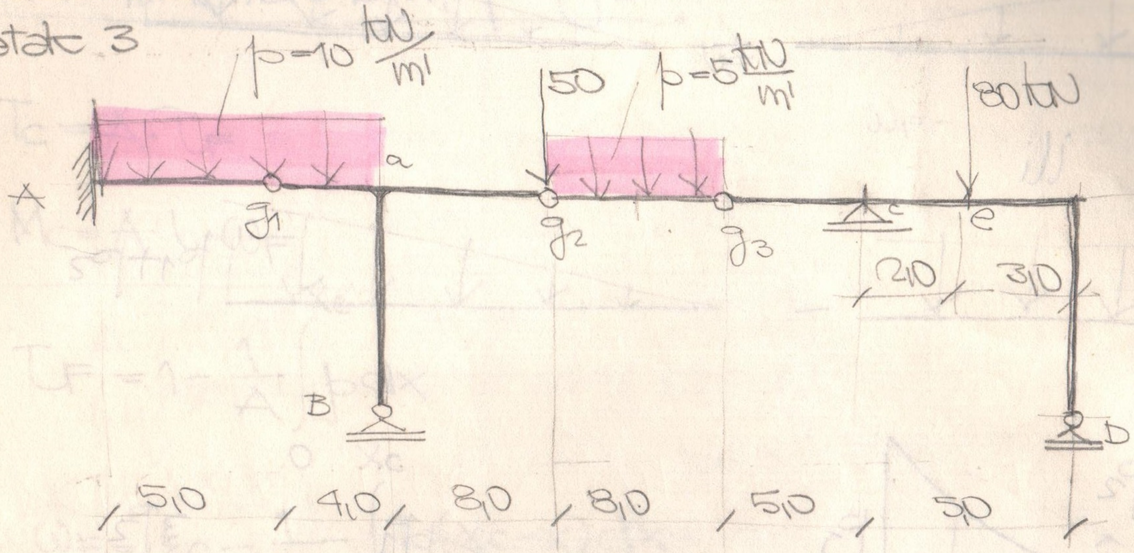
Предлаже се у вези обрађене теме погледати:

- Dr. Clayton Pettit : Engineering Statics | Theory | Shear and Bending Moment Diagrams (Relationships Method).
- Dr. Clayton Pettit : Engineering Statics | Theory | Shear and Bending Moment Diagrams (Cutting Method).
- Dr. Clayton Pettit : Engineering Statics | Theory | Internal Forces in Beams.

1. GERBEROV

Za nosač na skici nacrtati dijagrame sila u presecima

zadatak 3



$Z_o + Z_u + Z_s + Z_k - 2k = 0$

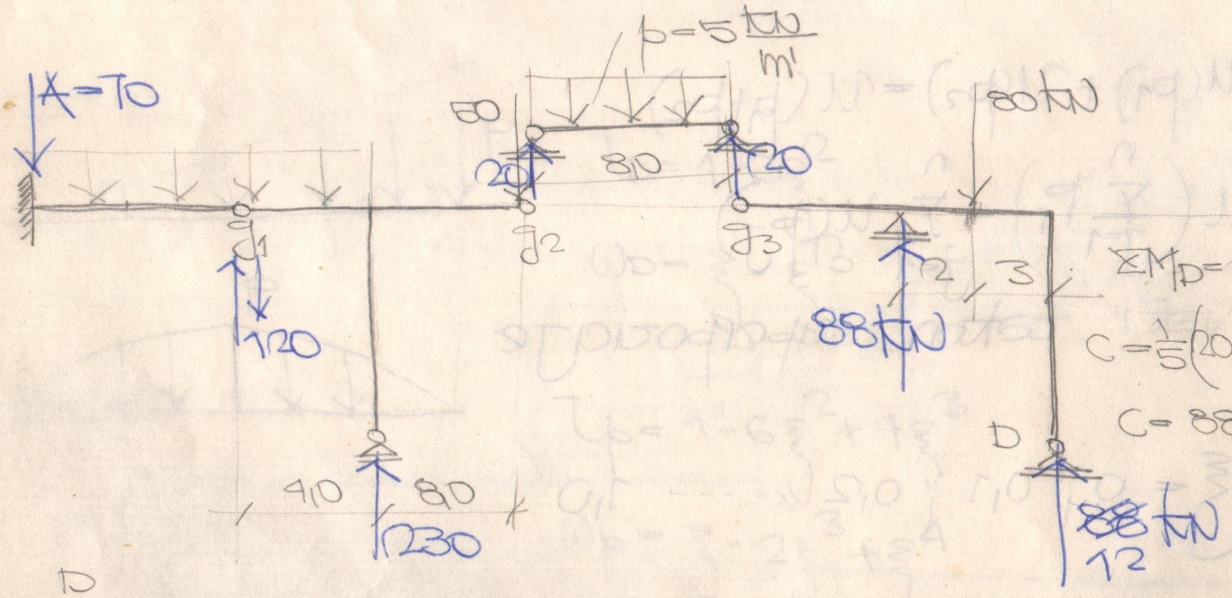
$Z_o = 5$ $\quad k = 9$

$Z_u = 1$ $\quad 2k = 18$

$Z_k = 4$

$Z_s = 8$

$\Sigma Z = 18 - 18 = 0$ statički određen

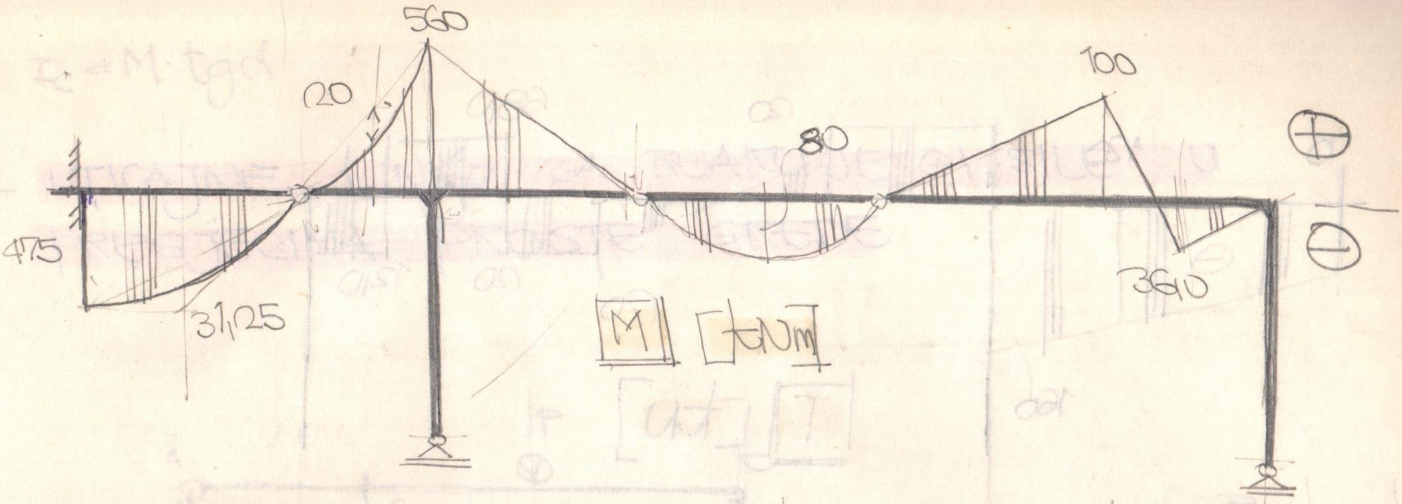


$\Sigma M_D = 0$

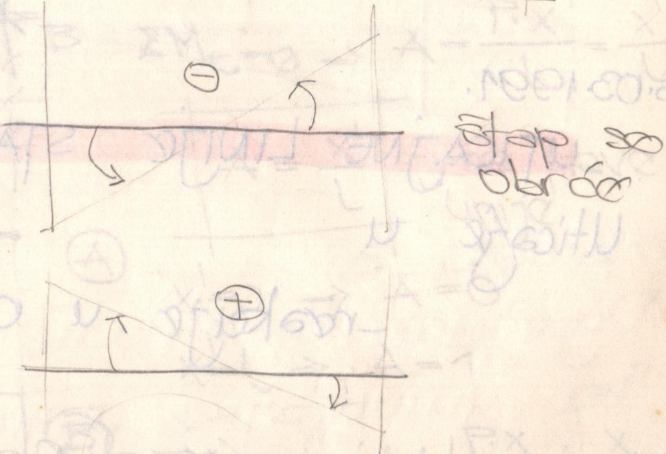
$C = \frac{1}{5}(20\cdot 10 + 80\cdot 3)$

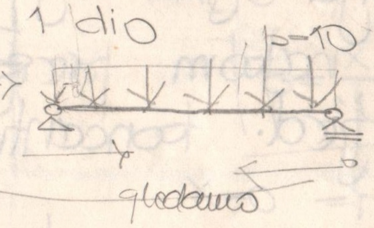
$C = 88$ kN

$\Sigma M^{D}_{g_1} = 0 \Rightarrow B = \frac{70\cdot 12 + 10\cdot 4\cdot 2}{4} = 230$ kN



$$T_{ik} = T_{ik}^{0} \pm \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}}$$





$T_{Ag_1} = 125 - \frac{475}{50} = -70\ kN$

$T_{g_1A} = -125 - \frac{475}{50} = -120\ kN$

$T_{g_1a} = 120 - \frac{560}{4} = -120\ kN$

$T_{ag_1} = -120 - \frac{560}{4} = -160\ kN$

$T_{ag_2} = T_{g_2a} = \frac{560}{8} = 70\ kN$

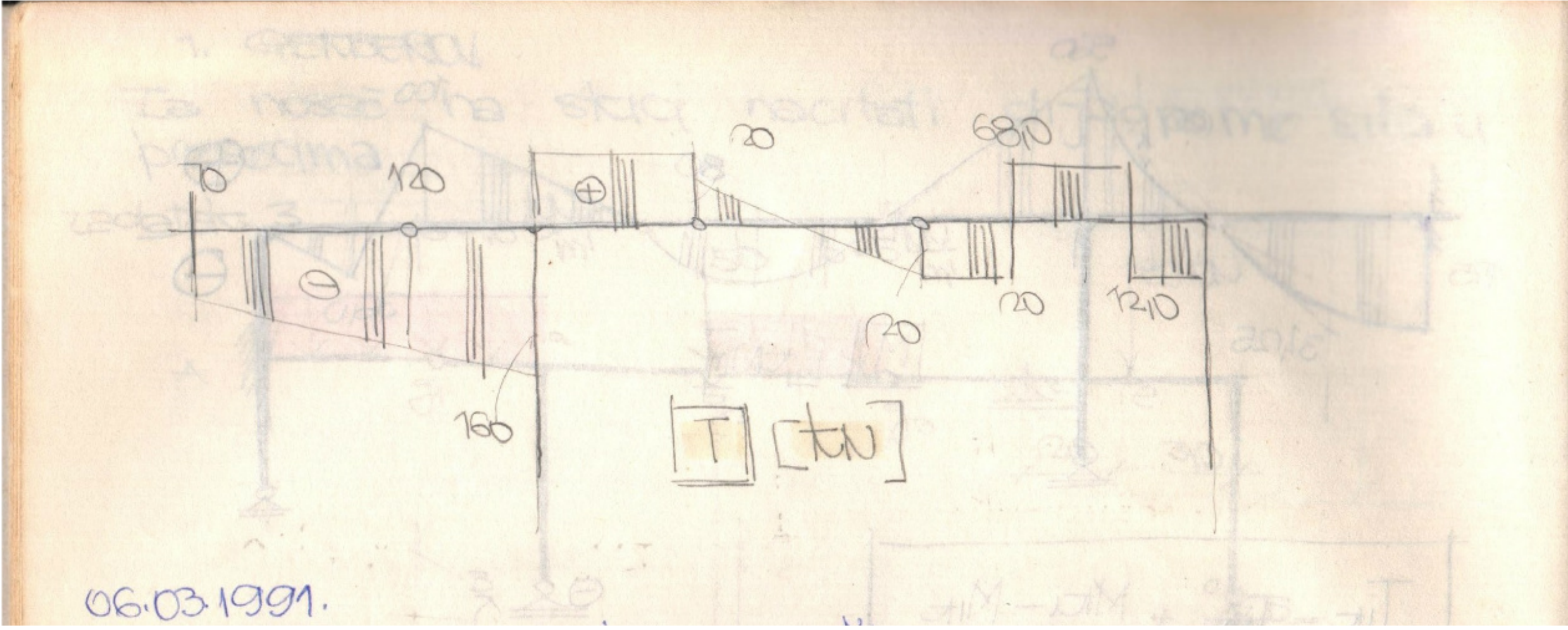
$T_{g_2g_3} = 120\ kN$

$T_{g_3g_2} = -120\ kN$

$T_{g_3c} = T_{cg_3} = -\frac{100}{5} = -20\ kN$

$T_{ce} = T_{ec} = \frac{100+36}{2} = 68{,}0\ kN$

$T_{ed} = T_{de} = -\frac{36}{3} = -12\ kN$



Коментар:

Сви приказани израђени задаци руком (ћириличним или латиничним писмом, ијекавским или екавским нарјечјем) писани на остарелом папиру "пожутелим листовима"не датирају из трећег века п.н.е., него из 1991. године.!. (ИММ, 2024.)