

Zum Tragverhalten im Grundriss gekrümmter Verbundträger

Vorgelegte
Dissertation

zur

**Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)**

der

**Fakultät für Bauingenieurwesen
Ruhr-Universität Bochum**

von

Dipl.-Ing. Alexandra Wehnert-Brigdar
geboren am 06.12.1970 in Wuppertal

Bochum, Februar 2009

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2003 bis 2009 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum. Sie wurde von der Fakultät für Bau- und Umwelt-ingenieurwissenschaften als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. R. Kindmann für die Betreuung und Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit sowie die Übernahme des Referates.

Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Hartmann danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferates.

Weiterhin gilt mein Dank allen meinen Kollegen, die durch ihre Diskussionsbereitschaft zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Schließlich danke ich meiner Familie für ihre verständnisvolle Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit.

Februar 2009

Alexandra Wehnert-Brigdar

Doktorarbeit eingereicht am:

06. Januar 2009

Tag der mündlichen Prüfung:

18. Februar 2009

Berichter:

Prof. Dr.-Ing. R. Kindmann, Ruhr-Universität Bochum
Prof. Dr.-Ing. D. Hartmann, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung und Zielsetzung	1
1.2	Stand der Forschung	9
1.3	Bezeichnungen	11
1.4	Allgemeine Annahmen und Voraussetzungen	13
1.5	Grundlagen der linearen Stabtheorie	14
2	Gekrümmte Verbundträger im Brückenbau	19
2.1	Vorbemerkungen	19
2.2	Trassierung	19
2.3	Lagerung	21
2.3.1	Allgemein	21
2.3.2	Lagerung von gekrümmten Bauwerken	22
2.4	Vollwandbalkenbrücken	23
2.4.1	Tragsysteme	23
2.4.2	Querschnittsvarianten	24
2.5	Belastungen	27
2.6	Werkstoffe	29
2.7	Ideelle Querschnittskennwerte	33
2.7.1	Vorbemerkungen	33
2.7.2	Mittragende Breiten – Schubverzerrung	33
2.7.3	Ideelle Querschnittskennwerte im Verbundbau	37
2.7.4	Ideelle Torsionssteifigkeit aufgelöster Kastenwände	41
2.7.5	Ideelle Schubsteifigkeit von Queraussteifungen	43
2.8	Hinweise zur Bemessung	45
3	Grundlegende Beziehungen für gekrümmte Träger	46
3.1	Vorbemerkungen	46
3.2	Statisch bestimmter Einfeldträger	46
3.3	Beidseitig gabelgelagerter Träger	47
3.3.1	Vorüberlegung	47
3.3.2	Schnittgrößen des Einfeldträgers mit Gabellagern	48
3.3.3	Gleichgewicht in Teilsystemen	50
3.3.4	Gleichgewicht um die Sehne	50
3.4	Zweifeldträger mit Gabellagern in den Endauflagern	54
3.5	Lastgrößen im Hauptachsensystem und Transformation	55
3.6	Gleichgewichtsgleichungen	56
4	Tragverhalten gekrümmter Träger	59
4.1	Untersuchte Träger	59
4.1.1	Vorbemerkungen	59
4.1.2	Systeme	59
4.1.3	Querschnitte	59
4.2	Idealisierung der Träger	62

4.2.1	BOGEN2008	62
4.2.2	ANSYS	64
4.3	Gekrümmte Einfeldträger	65
4.3.1	Schnittgrößen	65
4.3.2	Tragfähigkeit gekrümmter Verbundträger	68
4.4	Gekrümmte Zweifeldträger	72
4.4.1	Schnittgrößen	72
4.4.2	Einfluss der Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen auf die Auflagerreaktionen	76
4.4.3	Tragfähigkeit gekrümmter Verbundträger	80
5	Erfassung der Krümmung durch Ersatzsysteme	85
5.1	Vorbemerkungen	85
5.2	Gerader Stab mit Ersatzlasten	85
5.2.1	Ersatzlasten	85
5.2.2	Träger mit schwacher Krümmung	87
5.2.3	Träger mit starker Krümmung	87
5.2.3.1	Einfeldträger	87
5.2.3.2	Zweifeldträger	90
5.2.4	Beispiele	94
5.2.4.1	Einfeldträger mit starker Krümmung	94
5.2.4.2	Zweifeldträger aus Stahlprofilen	95
5.3	Gerade Träger mit Vorverformungen	99
5.3.1	Vorbemerkungen	99
5.3.2	Theorie II. Ordnung mit Vorverformungen	99
5.3.3	Analogiebetrachtung	101
5.4	Leitermodell zur Erfassung der Wölbkrafttorsion in gekrümmten Trägern	103
6	Mäßig gekrümmtes Stabelement für FE-Berechnungen	106
6.1	Vorbemerkungen	106
6.2	Weggrößenverfahren	106
6.3	Kreisförmig gekrümmte Träger	107
6.3.1	Voraussetzungen	107
6.3.2	Verschiebungen u, v, w und Dehnung in Längsrichtung	107
6.3.3	Virtuelle Arbeit	110
6.3.4	Differentialgleichungen und Randbedingungen	111
6.3.5	Elementsteifigkeitsmatrix und -lastvektor	112
6.3.6	Gleichgewicht in den Knoten	114
6.4	Beispiele	115
6.4.1	Vorbemerkungen	115
6.4.2	Gekrümmter Einfeldträger aus Stahlprofilen	115
6.4.3	Zweifeldrige Fußgängerbrücke	116
6.4.4	Zweifeldträger mit horizontalen Lasten	118

7	Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens bei gekrümmten Verbundträgern	119
7.1	Vorbemerkungen	119
7.2	Kriechen und Schwinden	119
7.2.1	Vorüberlegungen	119
7.2.2	Schnittgrößenermittlung	120
7.2.3	Querschnittstragfähigkeit	126
7.3	Beispiele	130
7.3.1	Gekrümmter Einfeldträger	130
7.3.2	Gekrümmter Zweifeldträger	131
7.3.3	Fußgängerbrücke	137
8	Maßnahmen zur Erhaltung der Querschnittsform	141
8.1	Vorbemerkungen	141
8.2	Problemstellung	141
8.3	Umsetzen von Lasten zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit	145
8.4	Queraussteifungen in gekrümmten Brücken	147
8.4.1	Allgemein	147
8.4.2	Einleiten der Torsion im Bereich von Queraussteifungen	149
8.4.3	Ebene Stabmodelle	149
8.4.4	Hinweise zur konstruktiven Ausbildung	151
9	Querweiche Systeme	152
9.1	Vorbemerkungen	152
9.2	Querschnitte mit zwei Hauptträgern	152
9.3	Offene Querschnitte mit mehr als zwei Hauptträgern	157
10	Zusammenfassung	158
	Literaturverzeichnis	161

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Tragverhalten im Grundriss gekrümmter Träger untersucht. Offene und geschlossene Querschnitte mit oben liegender Betonplatte aus dem Verbundbrückenbau stehen dabei im Vordergrund. Maßgebende Parameter, die den Einfluss der Krümmung auf den Verlauf von Schnittgrößen und Verformungen in Ein- und Zweifeldträgern beschreiben, werden festgelegt. Die Auswirkungen des zeitabhängigen Betonverhaltens werden untersucht.

Ersatzsysteme für stark gekrümmte Ein- und Zweifeldträger, bei denen die Krümmung mit Hilfe von Ersatzlasten am geraden Ersatzstab berücksichtigt wird, werden entwickelt. Außerdem wird ein mäßig gekrümmtes Stabelement für FE-Berechnungen hergeleitet.

Ein Vorschlag zur Bemessung der Queraussteifungen in gekrümmten Trägern wird gemacht. Darüber hinaus wird die Modellierung querweicher Systeme unter Verwendung von Trägerrosten behandelt.

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Beim Neubau übergeordneter Straßen sollen längere Geraden durch Kurven mit großen Radien ersetzt werden. Dies vereinfacht das Abschätzen der Entfernung und Geschwindigkeit entgegenkommender und nachfolgender Kraftfahrzeuge, die Blendgefahr wird reduziert und der Fahrer nicht zu überhöhten Geschwindigkeiten verleitet. Gleichzeitig lässt sich eine gekrümmte Linienführung leichter an die Struktur der Landschaft anpassen.

Ein typisch ausgeführtes Beispiel ist die 2004 fertig gestellte Werratalbrücke im Zuge der A71 bei Einhausen (Bild 1.1). Sie quert das Tal der Werra in einem Radius von $R = 1.000$ m und hat eine Gesamtlänge von ca. 1.200 m mit Stützweiten zwischen 37 und 85 m. Die Fahrbahn wurde mit zwei separaten Überbauten und einer Nutzbreite zwischen den Geländern von 28,50 m ausgebildet. Der für einen Überbau gewählte Verbundquerschnitt wurde als zweistegiger Plattenbalken mit gevouteten, luftdicht verschweißten Hohlkastenträgern und Beton-Fahrbahnplatte realisiert. Die Kastenträger mit einem Achsabstand von 6800 mm sind 1680 mm breit und in Abständen von ca. 5000 mm durch vollwandige Querschnitte quer ausgesteift. In Bild 1.2 ist der Regelquerschnitt im Feld und über den Stützen dargestellt. Die Montage der Hohlkästen erfolgte im Freivorbau mit Hauptträgerschüssen von bis zu 53 m. In diesem Zustand traten maximale Durchbiegungen bis zu 1000 mm auf, die durch entsprechende Werkstattüberhöhungen ausgeglichen wurden.



Bild 1.1 Werratalbrücke Einhausen

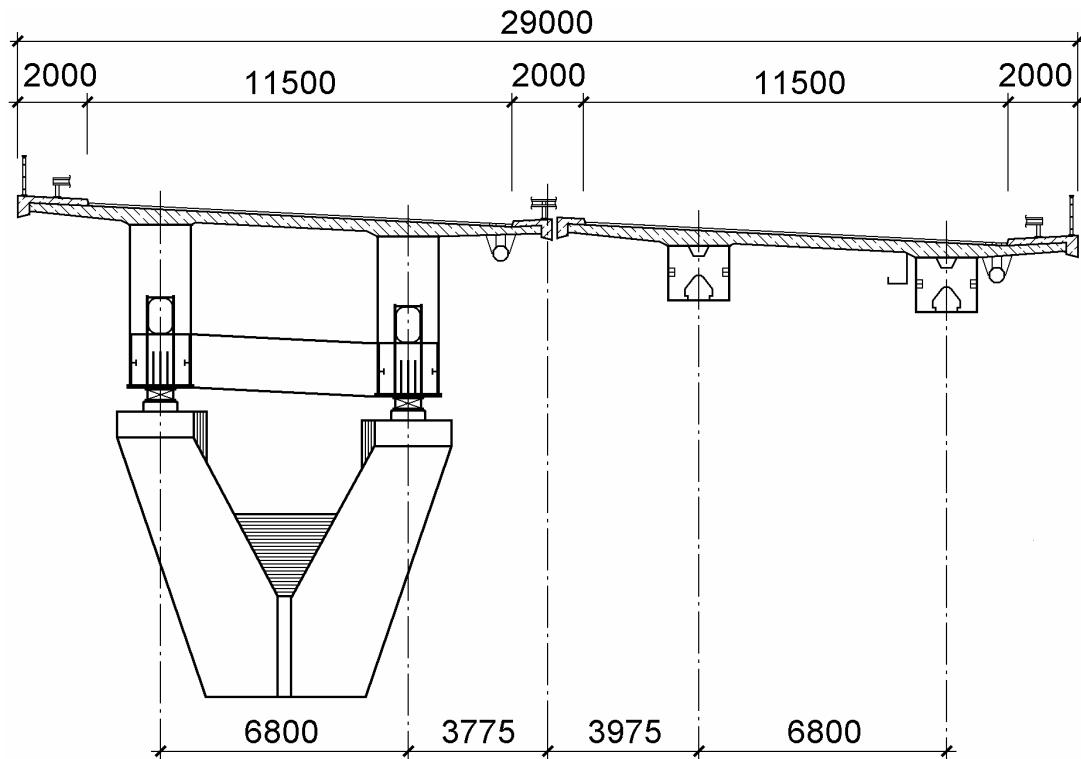


Bild 1.2 Regelquerschnitt im Feld und über der Stütze [96]

Bei der Planung von Fußgängerbrücken entscheiden architektonische Gesichtspunkte und die Topologie des Geländes über die Wahl des Tragwerks. Dies führt in der Ausführung teilweise zu stark gekrümmten Brücken und Brücken mit Abspannkonstruktionen. Da die Verkehrslasten bei Geh- und Radwegbrücken eine untergeordnete Rolle spielen, werden häufig komplexere Lastabtragungsmechanismen gewählt. Bild 1.3 zeigt die als Geh- und Radwegbrücke ausgeführte Stahlbrücke im Bochumer Westpark mit einer Spannweite von 132 m. Die Brücke mit einem Krümmungswechsel in Feldmitte und Krümmungsradien von $R = 25,80$ m ist mit S-förmigen Kreisringträgern und im Innenradius angeordneten Seilebenen ausgeführt. Die Seilebenen bestehen aus zwei Abspannseilen, die zu einem schräg angeordneten Mast mit gelenkigem Fußpunkt führen, und weiteren Seilen, die den Kreisringträger an diskreten Stellen unterstützen und mit den Abspannseilen verbunden sind. Auf diese Weise wird der Mast vom Fahrbahnträger am Umkippen gehindert. Die dadurch entstehenden anhebenden Kräfte wirken entgegen dem Eigengewicht des Fahrbahnträgers. Die im Untergurt aufzunehmenden radial auftretenden Horizontalkräfte werden über einen Druckbogen abgetragen (Bild 1.4).

Beim Betrieb von Eisenbahnen und Hochbahnen sind sprunghafte Krümmungsänderungen in der Streckenführung aus betriebstechnischen Gründen nicht möglich. Hieraus folgt die Festlegung der Liniengleichung mit den Geometrie-Elementen Gerade, Kreis und Übergangsbogen. Dies führt dazu, dass einzuplanende Brücken sowie Fahrbahnträger von Hochbahnen häufig in der Ebene gekrümmmt sind. An der Universität in Dortmund und am Flughafen Düsseldorf finden sich als Hängebahnen ausgeführte Hochbahnen. Bild 1.5 zeigt die Einfahrt des Skytrain am Düsseldorfer Flughafen.



Bild 1.3 S-förmige Fußgängerbrücke in Bochum

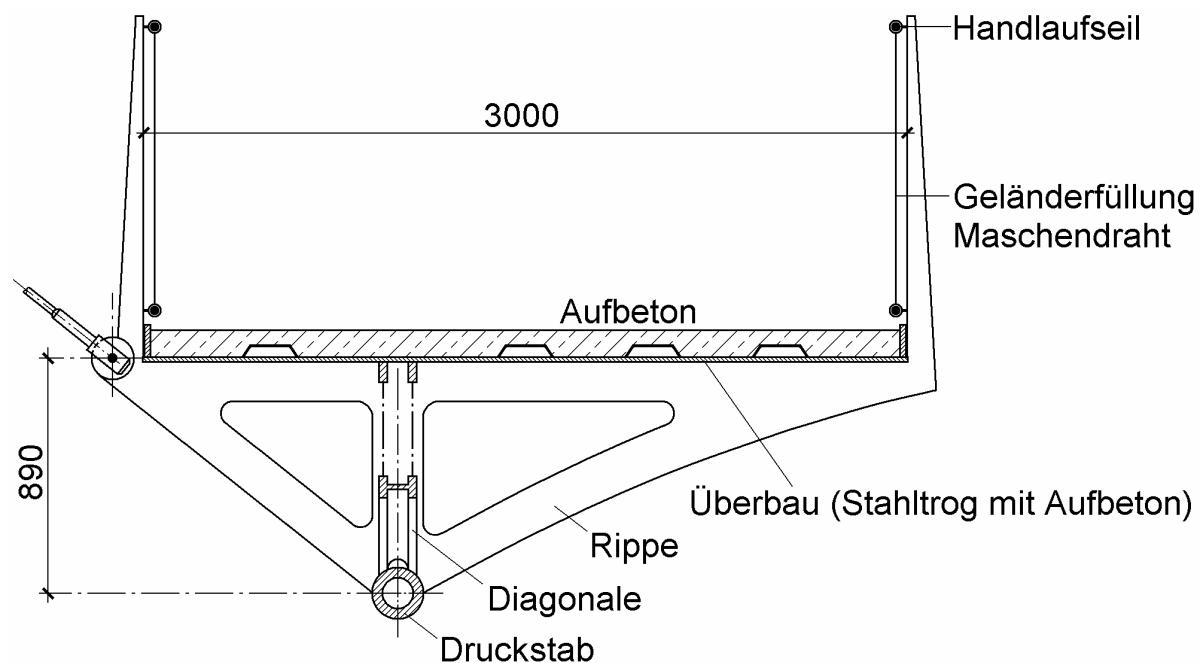


Bild 1.4 Querschnitt der S-förmigen Fußgängerbrücke in Bochum [32]



Bild 1.5 Einfahrt des Skytrain am Flughafen Düsseldorf

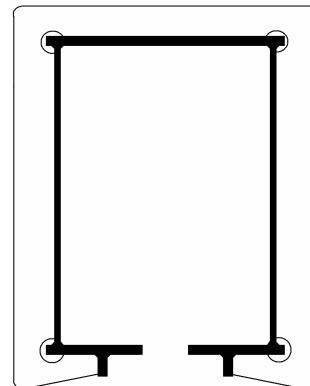
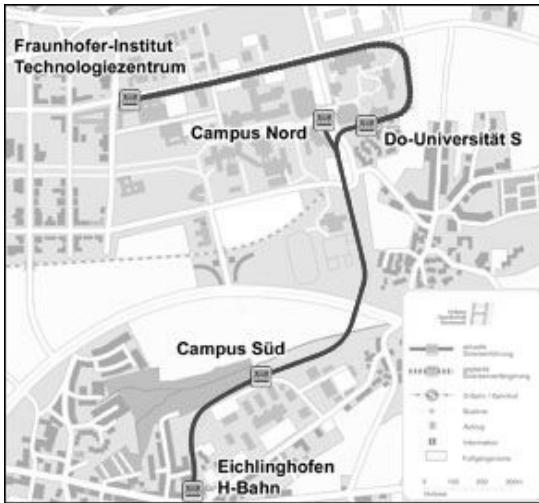


Bild 1.6 Streckenführung der H-Bahn an der Universität in Dortmund und Querschnitt des H-Bahnträgers

Da die Kabinen am Fahrbahnträger hängen, wird dieser mit einem für den Lastabtrag ungünstigen offenen Querschnitt ausgeführt. Bild 1.6 zeigt die Streckenführung der H-Bahn an der Universität in Dortmund mit zahlreichen gekrümmten Bereichen und den Querschnitt des eingebauten Fahrbahnträgers. Die Formerhaltung des Querschnitts wird über außen liegende Aussteifungen gewährleistet. Die Fahrbahnträger sind als Einfeldträger zwischen den Stützen eingehängt.

Zur Darstellung des Tragverhaltens von im Grundriss gekrümmten Trägern wird an dieser Stelle auf Ergebnisse von im Kapitel 4 untersuchten Ein- und Zweifeldträgern

zurückgegriffen. Die Träger weisen Feldlängen von je 9,60 m auf und werden mit einer konstanten Gleichstreckenlast von $q_z = 5 \text{ kN/m}$ belastet. Die Schnittgrößen und Verformungen sind nach Theorie I. Ordnung berechnet. Unterschieden werden ein über die Länge konstanter offener und ein über die Länge konstanter wölbfreier Stahlquerschnitt. Alle Auflager sind torsionsstarr. In Bild 1.7 und Bild 1.8 sind die Schnittgrößenverläufe und Verformungen der kreisförmig gekrümmten Träger mit $R = 10 \text{ m}$ im Vergleich zu den entsprechenden geraden Trägern mit gleichen Feldlängen dargestellt. Des Weiteren werden die Ergebnisse bei der Wahl des offenen I-Querschnitts den Ergebnissen bei Ausführung mit dem wölbfreien Quadrathohlprofil gegenüber gestellt.

Für die betrachteten Einfeldträger entspricht der Querkraftverlauf V_z im gekrümmten Träger dem Verlauf des geraden Trägers (Bild 1.7). Die Krümmung hat keine Auswirkung auf den Querkraftverlauf. Beim geraden Träger resultieren aus einer Beanspruchung q_z Biegemomente. Eine Krümmung führt zu einer Vergrößerung der Biegemomente. Gleichzeitig erzeugt q_z neben Biegemomenten auch Torsionsmomente M_x . Es ist festzustellen, dass der Verlauf der Biege- und Torsionsmomente vom gewählten Querschnitt unabhängig ist. Beim I-Querschnitt treten aber zusätzliche Wölbmomente auf, die die Querschnittstragfähigkeit reduzieren. Torsionsbeanspruchungen werden bei den Trägern mit dem Quadrathohlprofil ausschließlich durch *St. Venantsche* Torsion abgetragen. Bei den Trägern mit I-Querschnitt tritt die *St. Venantsche* Torsion mit der Wölkrafttorsion in Kombination auf. Hieraus resultieren die zusätzlichen Wölbmomente. Die unterschiedliche Querschnittsform führt bei gleichen Schnittgrößen M_y und M_x zu unterschiedlichen Verformungen. Der I-Querschnitt weist im Vergleich zum Quadrathohlprofil ein sehr ungünstiges Verformungsverhalten auf. Die Verdrehung ϑ ist in Feldmitte 195fach größer als beim Quadrathohlprofil, die Durchbiegung w immerhin noch 44fach.

Beim Zweifeldträger hängen die dargestellten Schnittgrößenverläufe von der Krümmung und vom Querschnittstyp ab (Bild 1.8). Es ist festzustellen, dass die Schnittgrößenverläufe V_z und M_y beim gekrümmten Träger mit dem Quadrathohlprofil in etwa den Schnittgrößenverläufen des geraden Trägers entsprechen. Für den I-Querschnitt ergeben sich große Unterschiede zu den am geraden Träger ermittelten Schnittgrößenverläufen. Die Vergrößerung des Stützmomentes beträgt immerhin 71 %. Aus der Gleichgewichtsbetrachtung muss die Summe der Auflagerkräfte aber in beiden Fällen der aufgebrachten Last entsprechen.

Der Torsionsmomentenverlauf M_x beim gekrümmten Zweifeldträger hängt sehr stark vom gewählten Querschnitt ab und die **Schnittgrößenverläufe** sind auf den ersten Blick schwer nachvollziehbar. Da die Torsionsbeanspruchungen aus der Krümmung entstehen, ist die Größenordnung der Torsionsmomente an den Auflagern nicht direkt aus der Belastung ablesbar. Auch bei den Zweifeldträgern sind die Verformungen beim I-Querschnitt im Vergleich zum Quadrathohlprofil größer. Die Verdrehung ϑ ist in Feldmitte 32fach größer, die Durchbiegung w 4,3fach.

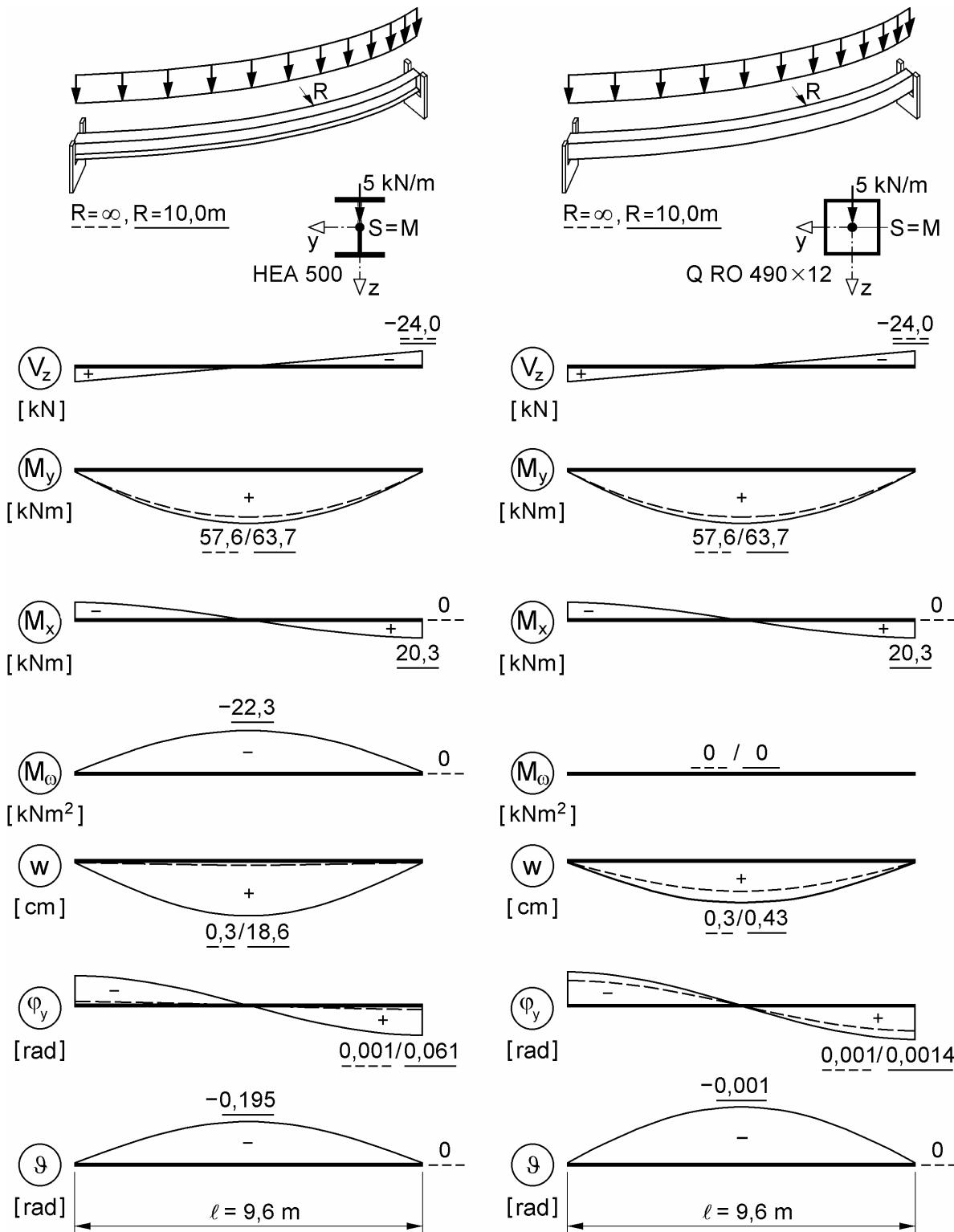
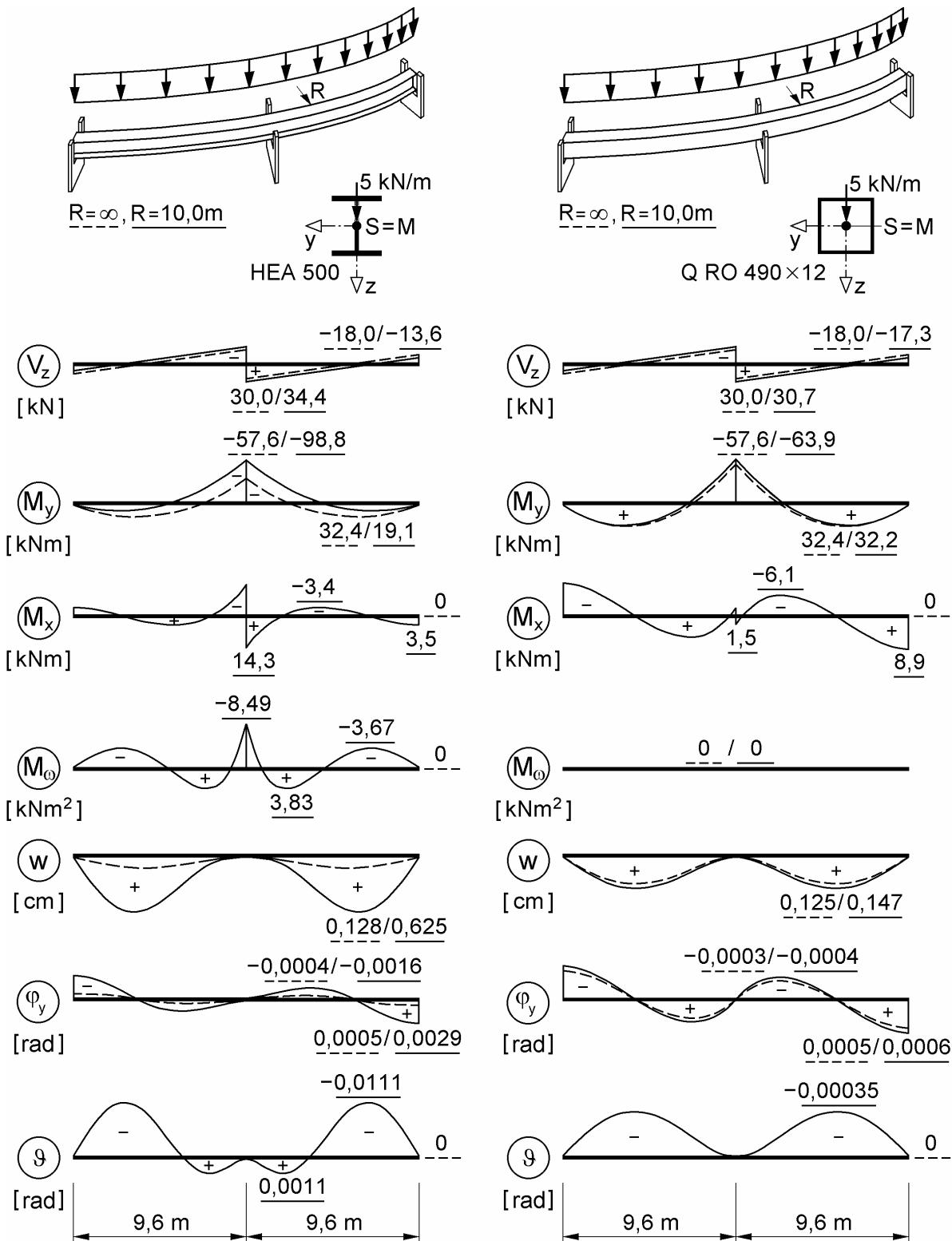


Bild 1.7 Einfeldträger mit Gleichstreckenlast q_z

Variante 1: Querschnitt HEA 500, $R = \infty$ (gerader Stab) und $R = 10 \text{ m}$

Variante 2: Querschnitt Q RO 490x12, $R = \infty$ (gerader Stab) und $R = 10 \text{ m}$

**Bild 1.8** Zweifeldträger mit Gleichstreckenlast q_z Variante 1: Querschnitt HEA 500, $R = \infty$ (gerader Stab) und $R = 10\text{ m}$ Variante 2: Querschnitt Q RO 490x12, $R = \infty$ (gerader Stab) und $R = 10\text{ m}$

Die oben dargestellten Beispiele zeigen, dass zur Kontrolle von Schnittgrößenverläufen und zur Abschätzung des Verformungsverhaltens in gekrümmten Trägern ein tiefer gehendes Verständnis von **Lastabtragungsmechanismen** notwendig ist. In der Praxis werden Träger mit starker Krümmung relativ selten ausgeführt. Um die Auswirkungen der Kopplung von Biegung und Torsion richtig zu erfassen fehlen die Erfahrungen. Schwach gekrümmte Träger finden sich vermehrt bei der Ausführung von langen Talbrücken, dann jedoch in der Regel mit einem geschlossenen Querschnitt.

Das **Verformungsverhalten** in torsionsbeanspruchten Trägern mit einem offenen Querschnitt unterscheidet sich grundsätzlich von Trägern mit einem geschlossenen Querschnitt. Bei einem geschlossenen Querschnitt erfolgt der Lastabtrag überwiegend durch *St. Venantsche Torsion*, beim offenen Querschnitt durch Wölbkrafttorsion. Dies führt bei Trägern mit einem offenen Querschnitt tendenziell zu größeren Verdrehungen ϑ . In einem gekrümmten Träger erzeugt eine vertikale Beanspruchung immer Torsion. Aufgrund der Kopplung von Biegung und Torsion hat das unterschiedliche Verformungsverhalten bei den Verdrehungen ϑ auch Einfluss auf die Durchbiegung w . In Durchlaufträgern kann dies zu sehr unterschiedlichen Schnittgrößenverläufen führen.

Maßgebende Parameter, die den Einfluss der Krümmung auf den Verlauf von Schnittgrößen und Verformungen in **Ein- und Mehrfeldträgern** beschreiben, sollen identifiziert werden.

Verbundträger werden häufig mit oben liegender Betonplatte ausgeführt. In Verbundträgern sind **Rissbildungen im Beton** in Zug beanspruchten Bereichen zu berücksichtigen. Der Einfluss der Rissbildung auf das Tragverhalten gekrümmter Verbundträger ist zu klären. Des Weiteren sind die **Einflüsse des Kriechens und des Schwindens** zu beachten. Bei länger andauernder Beanspruchung treten im Werkstoff Beton zeitabhängige Kriechverformungen auf. Dies führt zu zeitabhängigen Umlagerungen von Schnittgrößen. Zur Berechnung dieser Zwangsschnittgrößen muss bei einer elastischen Schnittgrößenberechnung auf das Kraftgrößenverfahren zurückgegriffen werden, da der zum Zeitpunkt t_0 eingeprägte Schnittgrößenverlauf als zeitlich konstanter Lastfall und die Zwangsschnittgrößen als zeitlich veränderlicher Lastfall aufgefasst werden müssen. Der Einfluss der Krümmung auf die Umlagerung von Schnittgrößen infolge Kriechen ist zu untersuchen. Gleichzeitig treten im Beton belastungsunabhängige Schwindverkürzungen auf. In Verbundträgern verhindert die Verbindung der Betonplatte mit dem Stahlträger die Verkürzung der Betonplatte. Hieraus resultiert ein primärer Beanspruchungszustand aus einer Schwindnormalkraft N_{Sh} und einem Schwindmoment M_{Sh} . Die Kopplung von Biegung und Torsion im gekrümmten Träger muss zu weiteren Schnittgrößen führen. Hier besteht Klärungsbedarf.

Das Tragverhalten gekrümmter Verbundträger soll untersucht und geklärt werden.

Große FE-Programmsysteme (z. B. ANSYS) bieten zur Berechnung gekrümmter Träger krummlinige Stabelemente an. In der Baupraxis kommen diese Programmsysteme wegen ihrer Komplexität jedoch selten zur Anwendung. In der Praxis stehen dem Ingenieur für die richtige Berechnung der Schnittgrößenverläufe in gekrümmten Trägern kaum EDV-Programme zur Verfügung. Räumliche Stabwerkprogramme ver-

wenden in der Regel **gerade Stabelemente**, bei denen die **Wölkrafttorsion** keine Berücksichtigung findet. Das gekrümmte Stabelement muss durch gerade Stabelemente polygonal angenähert werden. Des Weiteren führt die Vernachlässigung der Wölkrafttorsion bei offenen Querschnitten zu falschen Verformungen. Dies hat Auswirkungen auf die Gebrauchstauglichkeit sowie auf die Schnittgrößenverläufe in Durchlaufträgern. Die Verwendbarkeit dieser Programme ist zu überprüfen. In eindimensionalen Stabwerkprogrammen findet teilweise die Wölkrafttorsion Berücksichtigung (z. B. KSTAB [83]). Es ist zu überprüfen, in wie weit die Krümmung auch als Ersatzlast oder -verformung aufgefasst werden kann und die gekrümmten Träger auf diese Weise unter Berücksichtigung der Wölkrafttorsion berechnet werden können.

Es soll überprüft werden, in wie weit die Einflüsse der Krümmung über Ersatzlasten oder -verformungen am geraden Träger erfasst werden können. Ein **mäßig gekrümmtes Stabelement** für die FE-Berechnung gekrümmter Träger soll zur Verfügung gestellt werden.

Eine Voraussetzung für die Anwendung der Stabtheorie ist die **Erhaltung der Querschnittsform**. Bei der Konstruktion von Trägern werden in der Regel an den Stellen, an denen große Lasten in den Träger eingeleitet werden, Aussteifungen angeordnet. Bei gekrümmten Trägern führt die Kopplung von Biegung und Torsion zu einer kontinuierlichen Torsionsbeanspruchung aus der Krümmung, dessen Größe von der Biegung und der Krümmung abhängt. Wenn die Stabtheorie verwendet werden soll, ist zu gewährleisten, dass Profilverformungen gering bleiben.

Die notwendigen Maßnahmen, die die Erhaltung der Querschnittsform in gekrümmten Trägern gewährleisten, sollen herausgestellt werden.

Im Brückenbau werden die Tragsysteme häufig unter Anwendung von **Trägerrosten** modelliert. Der Träger wird dabei in mehrere Längsstäbe aufgeteilt, die an diskreten Stellen durch Querstäbe verbunden sind. Bei dieser Art der Modellierung wird die Voraussetzung, das der Querschnitt seine Form beibehält, verlassen. Bei breiten Querschnitten kann auf diese Weise die Querweichheit Beachtung finden.

Es ist zu untersuchen, bei welchen Querschnittstypen eine Berechnung mit einem Stab bzw. eine Berechnung als Trägerrost zu besseren Ergebnissen führt.

1.2 Stand der Forschung

Die ersten Brücken mit engen Kurvenradien wurden Ende des 19. Jahrhunderts im Zuge des Ausbaus von Stadtbahnen ausgeführt. Die Spannweiten waren auf einen Öffnungswinkel von $\varphi = \ell/R \approx 0,5$ begrenzt [63]. Gottfeldt [33] entwickelte in den 30er Jahren ein Stabmodell zur Erfassung von Torsionsbeanspruchungen in Brückentragwerken. Er betrachtet zwei auf konzentrischen Kreisbögen liegende Hauptträger, die nur durch Querverbände miteinander verbunden sind. Unold [110] gibt Lösungen für den Kreisringträger mit I-Querschnitt an. Die Wölkrafttorsion findet über Flanschbiegung Berücksichtigung.

In den 60er Jahren sind eine Reihe Publikationen erschienen, in denen das Problem des in einer Ebene gekrümmten Trägers unter Anwendung der Stabtheorie behandelt wird. Wansleben [119] betrachtet den konstant gekrümmten Träger mit Gabellagern. Er berücksichtigt aber nicht die gegenseitige Abhängigkeit der Verschiebung w und der Verdrehung ϑ . Wlassow [125] gibt die Gleichgewichtsgleichungen eines gekrümmten Stabelementes an. Bei der Ermittlung geht er davon aus, dass der Abstand Schubmittelpunkt zu Schwerpunkt klein ist. Weiterhin stellt er den Zusammenhang zwischen den Verschiebungsgrößen und den Schnittgrößen im gekrümmten Stabelement unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion über eine Analogiebetrachtung zum geraden Stab her. Er zeigt die Kopplung der Verschiebung w und der Verdrehung ϑ auf und führt die reduzierte Verdrillung $\vartheta' + w'/R$ ein. Auf die Lösung der Differentialgleichungen wird nicht eingegangen. Kreisel [61] gibt Lösungen der Differentialgleichungen an, arbeitet die Theorie der Wölbkrafttorsion jedoch ohne Berücksichtigung der reduzierten Verdrillung ein. Kollbrunner, Hajdin [57] betrachten die Schnittgrößen als Resultierende der Spannungen. Dabei berücksichtigen sie die unterschiedlichen Längen der Fasern in einem gekrümmten Element näherungsweise. Die Schnittgrößen enthalten infolgedessen Flächenintegrale 3. Ordnung. Sie geben ein numerisches Verfahren zur Lösung der Differentialgleichungen 4. Grades an.

Für wölfreie Querschnitte gibt Wittfoht [124] aufbereitete Lösungen für den vertikal beanspruchten Einfeldträger mit Gabellagern und starker Krümmung an. Für die Berechnung von Durchlaufträgern unter Anwendung des Kraftgrößenverfahrens gibt er die Lösungen von Einheitszuständen an. Vogel [115] gibt ebenfalls Lösungen für den gekrümmten Durchlaufträger unter Anwendung des Kraftgrößenverfahrens an. Petersen [76], [77], [78] betrachtet ebenfalls den wölfreien Querschnitt. Er stellt die Feldmatrix für einachsige Biegung und Torsion auf.

Dabrowski [14], [13] gibt Lösungen für den gabelgelagerten Einfeldträger mit offenem Querschnitt unter Berücksichtigung einachsiger Biegung und Torsion an. Die Unbekannten im Durchlaufträger berechnet er unter Verwendung des Kraftgrößenverfahrens. Schütz [100], [101] löst die gekoppelten Differentialgleichungen der Durchbiegung und der Verdrehung. Becker [3], Heil [40] und Schmoll, Uhlig [98] benutzen das Übertragungsmatrizenverfahren für die Berechnung des gekrümmten Trägers mit offenem Querschnitt, Becker stellt die Feldmatrix für zweiachsige Biegung mit Torsion zur Verfügung und Heil, Schmoll, Uhrig für einachsige Biegung mit Torsion. Noch bis etwa 1985 war es eine wichtige Aufgabe, Tragwerke für eine computerunterstützte FE-Berechnung so zu modellieren, dass der begrenzte Speicherplatz ausreichte und Rechenzeiten nicht ausuferten. Da der Speicherbedarf beim Übertragungsmatrizenverfahren gering ist und es sich besonders gut für die Modellierung durchgehender Stabzüge eignet, nutzen Becker, Heil sowie auch Petersen dieses Berechnungsverfahren. Für Grenzfälle, z. B. schwach gekrümmte Träger oder ungünstige Stabkennzahlen, treten infolge von Differenzen zwischen großen Zahlen, die sich nur wenig unterscheiden, numerische Probleme auf. Mit der Entwicklung leistungsfähiger Computer werden FE-Berechnungen heutzutage in der Regel unter Verwendung des Weggrößenverfahrens durchgeführt. In universell einsetzbaren FE-Programmsystemen wie ANSYS [27] werden isoparametrische Stabelemente zur Be-

rechnung allgemein gekrümmter Stabelemente zur Verfügung gestellt. Hierbei kann die notwendige Steifigkeitsmatrix nicht mehr explizit angegeben werden.

Für die Berechnung gekrümmter Träger stehen in der Praxis kommerzielle, räumliche Stabwerkprogramme ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion zur Verfügung. Für die Berechnung gekrümmter Träger mit offenem Querschnitt sind diese Programme nur begrenzt geeignet. Ramberger [86], Schmitt [97] und Unterweger [112] lösen den Querschnitt in zwei parallele polygonal an die Krümmung angenäherte Stabzüge mit Querverbindungen auf, um die Wölbkrafttorsion innerhalb dieses ebenen Trägerrostmodells berücksichtigen zu können.

Im englischsprachigen Raum sind in den letzten Jahren im Zuge der Überarbeitung der amerikanischen Norm *AASHTO Guide Specifications für Horizontally Curved Highway Bridges*, die auf den Erkenntnissen der 70er Jahre beruhte, eine Reihe Untersuchungen an gekrümmten Trägern durchgeführt worden. In [131] sind verschiedene Methoden für die Berechnung gekrümmter Träger zusammengefasst. Unterschieden werden Näherungsverfahren, z. B. die *V-Load Method*, bei der der gekrümmte Stab als gleichwertiger gerader Stab von der Länge des Bogens idealisiert wird, und FE-Methoden. Neuere Untersuchungen wurden meistens mit FE-Modellen unter Verwendung von Scheiben-Platten-Elementen kombiniert mit Stabelementen durchgeführt. Das Tragverhalten gekrümmter Träger mit geschlossenen Querschnitten wird in [103], [108], [109] behandelt, mit offenen Querschnitten in [131], [15], [31], [16], [68]. Schwerpunkte der Untersuchungen sind Vergleiche ermittelter Spannungen und Verformungen mit den in Feldversuchen gemessenen Spannungen und Verformungen, Einfluss der Krümmung auf die Stege und Queraussteifungen.

1.3 Bezeichnungen

An dieser Stelle werden die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Formelzeichen und Definitionen angegeben. Weitere Variablen werden bei ihrer erstmaligen Verwendung erläutert.

Abmessungen des gekrümmten Trägers

R	Krümmungsradius
φ	Öffnungswinkel
ℓ	Bogenlänge mit $\ell = R \cdot \varphi$

Koordinaten, Ordinaten und Bezugspunkte

x	Stablängsrichtung
y, z	Hauptachsen in der Querschnittsebene
ω	normierte Wölbordinate
S	Schwerpunkt
M	Schubmittelpunkt

Verschiebungsgrößen

u, v, w	Verschiebungen in x-, y-, z-Richtung
$\varphi_x \equiv \vartheta$	Verdrehung um die x-Achse
$\varphi_y \equiv -w'$	Verdrehung um die y-Achse
$\varphi_z \equiv v'$	Verdrehung um die z-Achse
$\psi \equiv \vartheta'$	Verdrillung der x-Achse

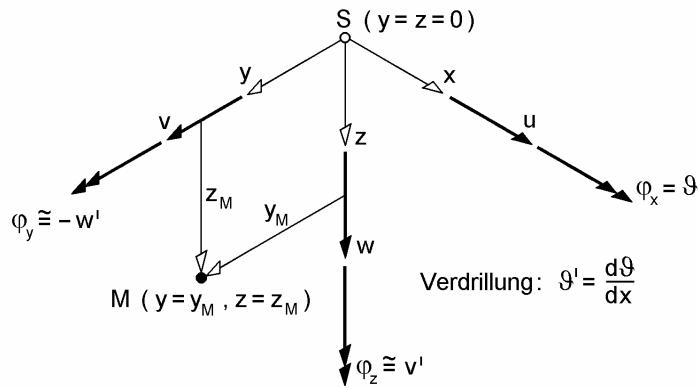


Bild 1.9

Definition positiver Verschiebungsgrößen im lokalen KOS [46]

Querschnittskennwerte und -abmessungen

A	Fläche
I_y, I_z	Hauptträgheitsmomente
I_ω	Wölbwiderstand
I_T	St. Venantsches Torsionsträgheitsmoment
b_{eff}	Mittragende Breite
Index i:	ideell
Index a:	Baustahl
Index s:	Betonstahl
Index st:	Gesamtstahl
Index c:	Beton
n_L	Lastbezogene Reduktionszahl mit $L = 0, P, PT, Sh, D$: 0 = Kurzzeitlasten P = ständige Lasten PT = zeitlich veränderliche Lasten Sh = Schwinden D = Absenken

Last- und Schnittgrößen

q_z	Streckenlasten in z-Richtung
F_z	Einzellasten in z-Richtung
m_x	Streckentorsionsmoment
M_{xL}	Lasttorsionsmoment
M_{yL}	Lastbiegemomente
N	Längskraft, Normalkraft
V_y, V_z	Querkräfte
M_y, M_z	Biegemomente
M_x	Torsionsmoment
M_{xp}, M_{xs}	primäres und sekundäres Torsionsmoment
M_ω	Wölbmoment

- Index el: Elastische Grenze (Abbruchkriterium $\varepsilon_{el} = f_y/E_a$)
 Index pl: Plastische Grenze

Spannungen, Dehnungen

σ_x	Normalspannung in x-Richtung
τ	Schubspannungen in y-z-Ebene
σ_v	Vergleichsspannung nach <i>von Mises</i>
ε_x	Dehnung in Stablängsrichtung
ε_{cs}	Schwinddehnung des Betons

Werkstoffkennwerte

E_a, E_{cm}	Elastizitätsmoduln für Stahl und Beton
G_a, G_c	Schubmoduln für Stahl und Beton
f_y, f_{sk}, f_{ck}	Streckgrenzen für Baustahl, Bewehrungsstahl und Beton

Weitere Bezeichnungen

ε_T	Stabkennzahl für Torsion
κ_{My}	Verhältnis $\kappa_{My} = EI_{y,\text{Stütz}} / EI_{y,\text{Feld}}$
κ_T	Verhältnis $\kappa_T = EI_y / GI_T$
α	Verhältnis $\alpha = -M_{y,\text{Stütz}} / M_{y,\text{Feld}}$

1.4 Allgemeine Annahmen und Voraussetzungen

Für alle Untersuchungen und Herleitungen in der vorliegenden Arbeit gelten, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, die folgenden Annahmen und Voraussetzungen:

- Die Träger sind nur in einer Ebene im Grundriss kreisförmig gekrümmmt.
- Verschiedene Krümmungsradien gehen tangential ineinander über.
- Der Querschnitt sei mindestens symmetrisch zur z-Achse. Schwer- und Schubmittelpunkt liegen auf der Symmetrieachse des Trägers. Die Stabachse des idealisierten Trägers geht durch den Schwerpunkt S des Querschnitts (s. Bild 1.10).
- Belastungen wirken vertikal in z-Richtung.
- Die Lagerbedingungen beziehen sich auf die lokale Stabachse.
- Die Stabtheorie sei gültig. Die Querschnittsform bleibt erhalten.
- Der Einfluss der Verformungen auf das Gleichgewicht sei gering (Theorie I. Ordnung).
- Der Einfluss der Schubspannungen aus Querkraft (Bernoulli-Hypothese) und der Einfluss der sekundären Schubspannungen aus Wölbkrafttorsion (Wagner-Hypothese) auf die Verformung des Stabes werden vernachlässigt.

- Die Einleitung der Torsion wird nicht weiterverfolgt. Es wird davon ausgegangen, dass Queraussteifungen in ausreichender Anzahl vorhanden sind und Torsionsmomente nahezu kontinuierlich eingeleitet werden können.
- Die Torsionssteifigkeit GI_T ist über die Länge konstant.

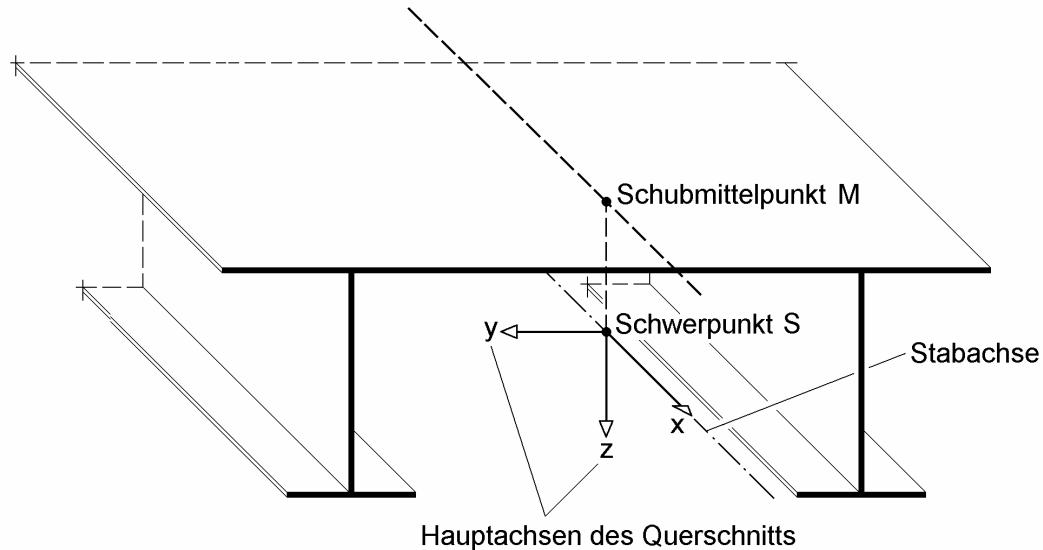


Bild 1.10 x-y-z-Koordinatensystem und Bezugspunkt S und M bei Stäben [31]

1.5 Grundlagen der linearen Stabtheorie

Zur Beschreibung der Stabgeometrie wird ein lokales x-y-z-Koordinatensystem verwendet. Als Stabachse ist die x-Achse durch den Schwerpunkt S definiert. Sie bildet in jedem Punkt die Tangente der Stablängsrichtung. Die Hauptachsen in der Querschnittsebene entsprechen der y- und der z-Achse.

Bei der linearen Stabtheorie (Theorie I. Ordnung) wird angenommen, dass die Verformungen sehr klein sind und ihre Auswirkungen auf das Gleichgewicht vernachlässigt werden können. Unter dieser Voraussetzung kann das Gleichgewicht am unverformten System formuliert werden. Auch für die Beziehung zwischen Schnittgrößen und Spannungen bedeutet dies, dass ihre Richtungen auf die unverformte Ausgangslage bezogen werden dürfen.

Verschiebungen (lineare Stabtheorie)

Die Verschiebungen u , v und w stellen die Differenz zwischen der verformten Lage und der Ausgangslage dar. Die Richtungen u , v und w entsprechen den Richtungen der Koordinaten x , y und z in der unverformten Ausgangslage. Die Längsverschiebung u_s bezieht sich auf den Schwerpunkt S und die Verschiebungen v_M sowie w_M beschreiben die Verschiebung des Schubmittelpunktes M (Bild 1.11). Für die Stablängsverschiebung u eines beliebigen Querschnittspunktes gilt:

$$u = u_s - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y - \omega \cdot \psi \quad (1.1)$$

Der erste Anteil ist die Verschiebung infolge einer Normalkraftbeanspruchung, der zweite und dritte resultiert aus den Biegemomenten, und stellt die Verschiebungen aufgrund von Querschnittsverdrehungen φ_y und φ_z dar. Der vierte Anteil erfasst die Stablängsverschiebung aus Torsionsbeanspruchungen in Abhängigkeit von der lastbezogenen Verdrillung.

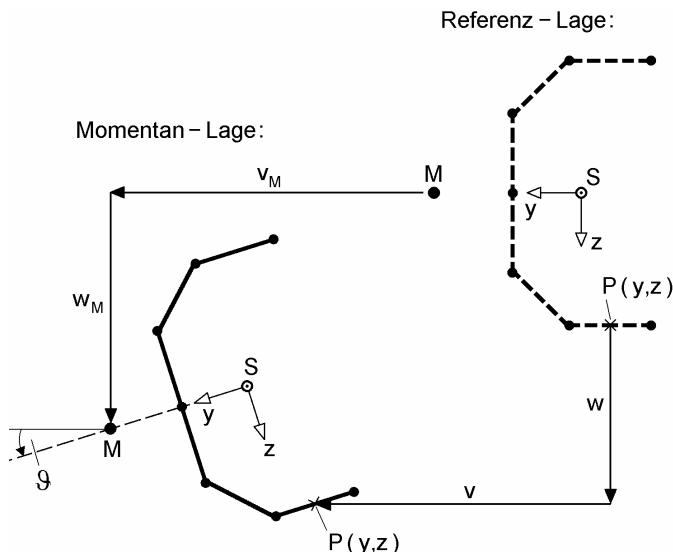


Bild 1.11 Verschiebungen v und w eines Punktes P auf der Profilmittellinie [31]

Die Verformungen v und w in der Querschnittsebene ergeben sich aus der Verschiebung des Schubmittelpunktes M sowie aus zusätzlichen Verschiebungsanteilen, die aus der Verdrehung ϑ resultieren. Es folgt:

$$v = v_M - (z - z_M) \cdot \vartheta \quad (1.2)$$

$$w = w_M + (y - y_M) \cdot \vartheta \quad (1.3)$$

Verzerrungen

Die auf eine Länge bezogenen Veränderungen der Verschiebungen bezeichnet man als Verzerrungen. Jeder Punkt des Kontinuums erfährt Verschiebungen im Raum, die durch die drei Verschiebungskomponenten u , v , w ausgedrückt werden. Die Kinematik stellt den Zusammenhang zwischen den äußeren Weggrößen (Verschiebungen) und den inneren Weggrößen (Verzerrungen) dar. Im Stabelement wird die Verschiebung jedes Punktes auf die Stabachse des Schwerpunktes bzw. Schubmittelpunktes bezogen. Hieraus ergeben sich die 7 Weggrößen u , v , w für die Verschiebungen, ϑ , φ_y , φ_z für die Verdrehungen und ψ für die lastbezogene Verdrillung. Bei Vernachlässigung der Schubverzerrungen aus Biegung (Bernoulli-Hypothese) und aus der Wölbkrafttorsion (Wagner-Hypothese) lassen sich für ein gerades Stabelement folgende Beziehungen aufstellen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial(u - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y - \omega \cdot \psi)}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(z - z_M + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \cdot \psi \quad (1.5)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(y - y_M - \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \cdot \psi \quad (1.6)$$

Werkstoffgesetz und Spannungen

Durch Werkstoffgesetze wird ein Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen formuliert. Mit dem Hookeschen Gesetz, dem Materialgesetz für isotropes, linearelastisches Werkstoffverhalten und den Verzerrungen nach Gln. (1.4) – (1.6) ergeben sich folgende Spannungen:

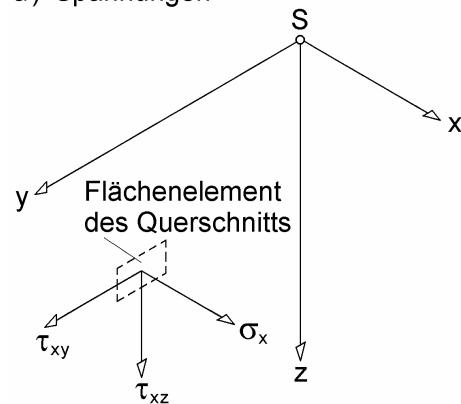
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (1.7)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad (1.8)$$

Schnittgrößen

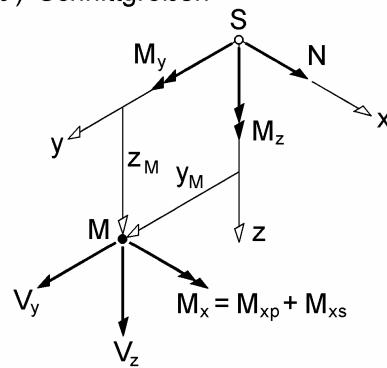
Durch Integration der Spannungen nach Gln. (1.7) und (1.8) über den Querschnitt werden Schnittgrößen zusammengefasst. Bei Stäben können maximal 8 verschiedene Schnittgrößen auftreten. Die Normalkraft und die Biegemomente greifen im Schwerpunkt an und die Querkräfte, Torsionsmomente und das Wölbmoment wirken im Schubmittelpunkt. In Tabelle 1.1 sind die Definitionen der Schnittgrößen zusammengefasst.

a) Spannungen



alternativ: $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$

b) Schnittgrößen



zusätzliche Schnittgröße M_ω in M!

Bild 1.12 Spannungen und Schnittgrößen am positiven Schnittufer eines Stabquerschnitts [31]

Querschnittskennwerte

Die elastischen Querschnittseigenschaften, die Steifigkeiten des Stabes, werden über Flächenintegrale bestimmt und auch als Querschnittskennwerte bezeichnet. Die Querschnittskennwerte sind zur Ermittlung von Verformungen, Schnittgrößen in statisch unbestimmten Trägern mit veränderlichen Querschnitten und Spannungen nach der Elastizitätstheorie erforderlich. In der Regel werden die Querschnittskennwerte normiert, d. h. auf das y–z–Hauptachsensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt S hat, und den Schubmittelpunkt M bezogen. Für einen normierten Querschnitt gilt, dass die Flächenintegrale A_y , A_z , A_ω , A_{yz} , $A_{y\omega}$ und $A_{z\omega}$ Null sind. Für eine Anzahl von Profilen im Stahlbau sind die normierten Querschnittskennwerte tabelliert. Für zusammengesetzte Querschnitte sind sie vorab zu ermitteln. Die für eine Berechnung nach Theorie I. Ordnung benötigten Querschnittskennwerte sind für zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Torsion:

- Fläche A und A_s bei schubweichen Stäben
- Hauptträgheitsmoment I_y und I_z
- Wölbwiderstand I_ω
- Torsionsträgheitsmoment I_T

Tabelle 1.1 Schnittgrößen als „Resultierende der Spannungen“ [31]

Bedingung	Schnittgröße	Definition
$\sum F_x = 0$: Normalkraft	N	$N = \int_A \sigma_x \cdot dA$
$\sum V_y = 0$: Querkraft	V_y	$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$
$\sum V_z = 0$: Querkraft	V_z	$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$
$\sum M_x = 0$: Torsionsmoment	M_x	$M_x = \int_A [\tau_{xz} \cdot (y - y_M) - \tau_{xy} \cdot (z - z_M)] \cdot dA$ $M_x = M_{xp} + M_{xs}$
$\sum M_y = 0$: Biegemoment	M_y	$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$
$\sum M_z = 0$: Biegemoment	M_z	$M_z = - \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$
Wölbmoment	M_ω	$M_\omega = \int_A \sigma_x \cdot \omega \cdot dA$

Die Flächenintegrale sind definitionsgemäß:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A dA; A_s = \kappa_s \cdot A \\
 I_y &= \int_A z^2 \cdot dA; I_z = \int_A y^2 \cdot dA \\
 I_\omega &= \int_A \omega^2 \cdot dA \\
 I_T &= \int_A \left((y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right) \cdot dA
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit

Das Prinzip der virtuellen Verschiebung beschreibt mit Hilfe von virtuellen Arbeiten das Gleichgewicht im System. Durch Aufbringen virtueller Verschiebungen, die den kinematischen Grundgleichungen und den Randbedingungen des Systems genügen, wird virtuelle Arbeit geleistet. Die Summe der geleisteten inneren virtuellen Arbeit δW_{int} muss gleich der Summe der virtuellen äußeren Arbeit δW_{ext} sein:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \tag{1.10}$$

Für die virtuelle innere Arbeit ergibt sich

$$\delta W_{int} = - \int_x \int_A (\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \cdot dA \cdot dx \tag{1.11}$$

Für die äußere Arbeit gilt

$$\delta W_{ext} = \sum F_i \cdot \delta v_{F,i} \tag{1.12}$$

Lastgrößen F_i leisten auf den korrespondierenden Verschiebungen $\delta v_{F,i}$ Arbeit.

2 Gekrümmte Verbundträger im Brückenbau

2.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel sind einige für den Brückenbau wichtige Grundlagen zusammengetragen. Zunächst werden die bei der Planung von im Grundriss gekrümmten Brücken nötigen Kenntnisse der Trassierung und der Lagerung vermittelt. Anschließend werden die Tragsysteme von Vollwandbalkenbrücken besprochen und die Tragsysteme in Abhängigkeit typischer Querschnitte klassifiziert. Es wird auf die maßgebenden Belastungen im Brückenbau eingegangen. Bei der Bemessung von Verbundbrücken sind Kenntnisse der im Verbund wirkenden Werkstoffe wichtig. Über den Ansatz ideeller Querschnittskennwerte können auch Träger, die die Voraussetzungen der Stabtheorie nicht erfüllen, unter Verwendung von Stabelementen berechnet werden. In den letzten Abschnitten wird auf diese Thematik eingegangen.

2.2 Trassierung

Die Trassierung einer Strecke erfolgt durch eine Aneinanderreihung von Geometrie-Elementen. Im Verkehrswegebau üblich sind die Gerade und der Kreis als Trassierungselemente mit konstantem Krümmungsradius und die Klohoide als Übergangsbogen zwischen Gerade und Kreis. Bei der Klohoide ändert sich die Krümmung linear mit der Länge. So wird eine sprunghafte Änderung des Krümmungsradius beim Übergang von der Gerade zum Kreis vermieden.

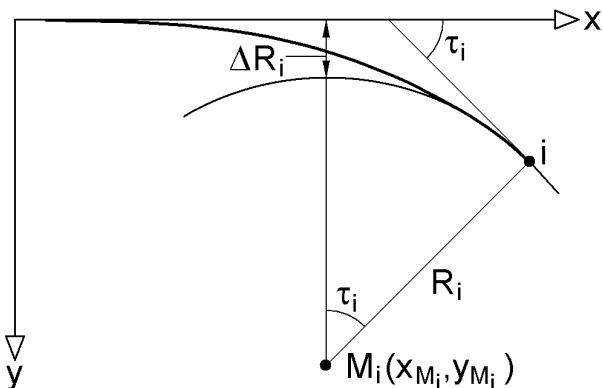


Bild 2.1 Klohoide mit Radius, Tangentenwinkel und Tangentenabrückung an der Stelle i

Die charakteristische Gleichung der Klohoide lautet:

$$A^2 = \ell_x \cdot R_x \quad (2.1)$$

mit A = Klothoidenparameter
 ℓ_x = Länge des Klothoidenabschnitts
 R_x = Radius am Ende des Klothoidenabschnitts

Bezeichnet K_i die Krümmung an der Stelle i , kann der Tangentenwinkel τ_i (Bild 2.1) wie folgt beschrieben werden:

$$K_i = \frac{d\tau_i}{d\ell} = \frac{1}{R_i} = \frac{\ell_i}{A^2} \Rightarrow \tau_i = \int_0^{\ell_i} \frac{\ell}{A^2} \cdot d\ell = \frac{\ell_i^2}{2 \cdot A^2} \quad (2.2)$$

In der Richtlinie für die Anlage von Straßen–Linienführungen (RAS–L) im Verkehrswegebau werden Entwurfsrichtlinien für die Klohoide festgelegt. Aus fahrdynamischen und ästhetischen Gründen folgt eine Beschränkung auf den Klohoide nast mit geringen Richtungsänderungswinkeln:

$$3 \geq r \geq 1$$

$$\text{mit } A = \frac{R_x}{r} \text{ und } A = r \cdot \ell_x \quad (2.3)$$

Mit dem Faktor r werden die Kennstellen der Klohoide bezeichnet. Die Kennstelle $r = 1$ markiert z. B. den Punkt auf der Klohoide, bei dem $R_x = \ell_x = A$ ist. Der Tangentenwinkel an dieser Stelle beträgt $\tau = \frac{1}{2 \cdot r^2} = 0,5$. Die Punkte auf der Kurve der Klohoide werden über Fresnelsche Integrale, die nicht geschlossen lösbar sind, ermittelt:

$$x = \int_0^{\ell_x} \cos \frac{\ell^2}{2 \cdot R^2} \cdot d\ell \quad y = \int_0^{\ell_x} \sin \frac{\ell^2}{2 \cdot R^2} \cdot d\ell \quad (2.4)$$

Bei Aufteilung der Klohoide in Kurvenabschnitte der Länge $d\ell$ können die Punkte auf der Klohoide näherungsweise ermittelt werden. Der Punkt P_{i+1} wird unter Benutzung des Tangentenwinkels τ_i und der Koordinaten (x_i, y_i) in Punkt P_i bestimmt:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{\ell_i^2}{2 \cdot A^2} \\ x_{i+1} &= x_i + d\ell \cdot \cos \tau_i & y_{i+1} &= y_i + d\ell \cdot \sin \tau_i \\ \ell_{i+1} &= \ell_i + d\ell \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes (x_M, y_M) des Krümmungskreises und die Abrückung dieses Kreises – die Tangentenabrückung ΔR – ergeben sich zu:

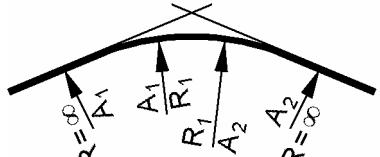
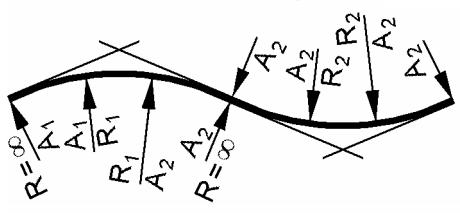
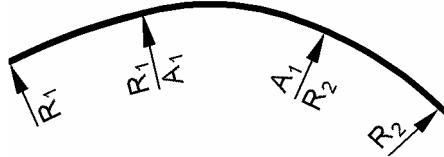
$$\begin{aligned} x_{Mi} &= x_i - R_i \cdot \sin \tau_i & y_{Mi} &= y_i + R_i \cdot \cos \tau_i \\ \Delta R_i &= y_{Mi} - R_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für Klohoiden bis zur Kennstelle $r = 1$ werden folgende Näherungsansätze vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} x &\approx \ell & y &\approx \frac{\ell^2}{6 \cdot R} & \Delta R &\approx \frac{\ell^2}{24 \cdot R} \end{aligned} \quad (2.7)$$

In Tabelle 2.1 sind übliche Abfolgen von Geometrie-Elementen und ihre Bezeichnungen dargestellt.

Tabelle 2.1 Abfolge von gebräuchlichen Geometrie-Elementen im Verkehrswegebau

einfache Klothoide		Gerade – Klothoide – Kreisbogen
Verbundkurve		Gerade – Klothoide – Kreisbogen – Klothoide – Gerade
Wendeklothoide (Wendelinie)		Kreisbogen – Klothoide – Klothoide – Kreisbogen (entgegen gesetzt gerichtet)
Eiklothoide (Eilinie, doppelte Eilinie)		Kreisbogen – Klothoide-nabschnitt – Kreisbogen (gleichgerichtet)

2.3 Lagerung

2.3.1 Allgemein

Lasten und Verformungen des Überbaus werden über Lager an den Stützungen auf die Unterkonstruktion abgetragen. Lager sollten so konzipiert werden, dass sie möglichst geringe Zwängungen im Überbau hervorrufen. Nach ihrer Funktion werden feste und bewegliche Lager unterschieden. Dabei können Verschiebungs- und Verdrehungsfreiheitsgrade gesperrt sein. Im Brückenbau dürfen nur Lager mit allseitiger Verdrehung eingesetzt werden.

Unterschieden werden Verformungs- und Gleitlager und Kombinationen dieser beiden Lagertypen. Verschiebungen und Verdrehungen zwischen Überbau und Unterbau erzeugen beim Verformungslager Lagerverformungen. Beim Elastomerlager werden diese gummielastisch aufgenommen. Wenn größere Verformungen aufgenommen werden müssen, können Elastomerlager durch ein zusätzliches Gleitteil erweitert werden. Wo immer möglich, sollten Verformungslager eingesetzt werden. Gleitlager ermöglichen Relativbewegungen durch Gleiten. In der Gleitfuge wirken Gleitwerkstoff, Schmierstoff und Gegenwerkstoff zusammen. Punktkipplager wie Topflager und Kalottenlager können als Gleitlager ausgebildet werden. In Tabelle 2.2 sind die Symbole gebräuchlicher Lager dargestellt.

Tabelle 2.2 Symbole in Lagerebene nach DIN 1337-1 [18]

	Elastomerlager (Verformungslager)
	mit Festhaltekonstruktion für eine Achse
	mit Festhaltekonstruktion für zwei Achsen
	Topflager, Kalottenlager (Punktkipplager)
	mit einachsig beweglichem Gleitteil
	mit zweiachsig beweglichem Gleitteil

2.3.2 Lagerung von gekrümmten Bauwerken

Die wesentlichen in den Lagern aufzunehmenden Bewegungsanteile werden aus Temperatur, Kriechen + Schwinden und Vorspannen hervorgerufen. Bei geraden Brücken ergibt sich die Lagerachse für eine möglichst zwängungsarme Ausdehnung des Überbaus aus der Bauwerksachse. Bei im Grundriss gekrümmten Brücken rufen ausgehend von einem Festpunkt die Beanspruchungen abweichende Bewegungsrichtungen hervor. Bewegungen aus Temperaturänderung und Schwinden verlaufen polstrahlförmig in Richtung des Festlagers, Bewegungen aus Kriechen und Vorspannen tangential in Richtung der Brückenachse. Bei im Grundriss gekrümmten Brücken ist eine zwängungsfreie Lagerung nicht möglich. Unterschieden werden die beiden Lagerungsformen (Bild 2.2):

- Polstrahlagerung
- Tangentiallagerung

Eine weitere Variante ist die Drehung der Lager, so dass eine mittlere Bewegungsrichtung zwischen Polstrahl- und Tangentiallagerung erzwungen wird. Dies führt zu einer optimierten Beanspruchung für die Verformungslager.

Bei der polaren Anordnung der Lager zeigt die Verformungsrichtung zum Festpunkt. Der Festpunkt kann hierbei auch in Brückenmitte liegen. Die Polstrahlagerung ist auf Dauer die zwängungsärmere Lagerung, da die in Tangentialrichtung wirkenden Bewegungsanteile aus Kriechen und Vorspannen über die Zeit nachlassen. Demgegenüber wirkt der in Richtung des Festpunktes wirkende Bewegungsanteil aus Temperaturänderung während der gesamten Lebensdauer der Brücke und ruft in den meisten Fällen größere Verformungen hervor.

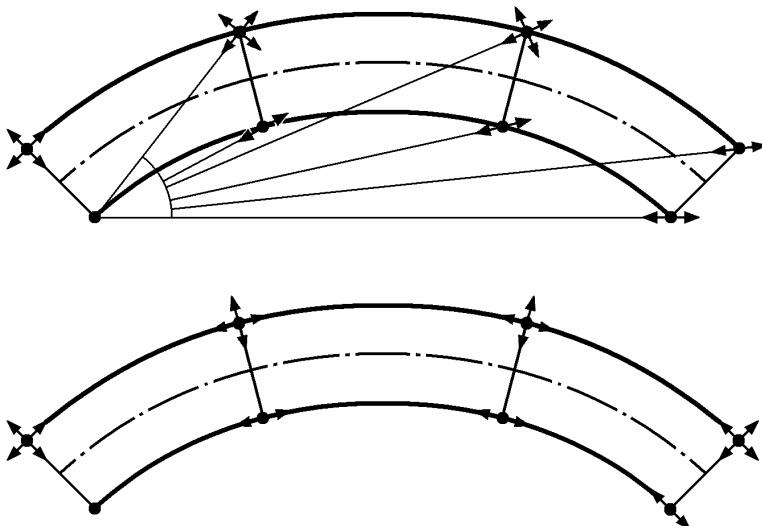


Bild 2.2 Polstrahl-Lagerung (oben) und Tangentiallagerung (unten)

Bei der tangentialem Anordnung der Lager wird der Überbau gezwungen, sich tangential zur Bauwerksachse zu bewegen. Die Größe dieser zusätzlichen Zwangskräfte ist abhängig von der Krümmung und der Steifigkeit des Überbaus und vom Steifigkeitsverhältnis zwischen Überbau und Unterbau.

2.4 Vollwandbalkenbrücken

2.4.1 Tragsysteme

Brückenüberbauten sind überwiegend vertikal beanspruchte Tragwerke. Sie müssen ihre Nutzlasten stets in Brückenlängsrichtung zu Widerlagern, Pfeilern oder Pylonen abtragen. Diese Aufgabe kann von unterschiedlichen Haupt- und Sekundärtragwerken durch eine Schar sich kreuzender Träger übernommen werden. Hieraus ergibt sich ein orthogonales Lastabtragungsprinzip.

Bei Vollwandbalkenbrücken wird das Haupttragwerk als Einfeldträger oder als Durchlaufträger über zwei oder mehr Felder ausgeführt. Die Hauptträger haben „vollwandige“ Stege, die vertikal und bei größeren Trägerhöhen auch horizontal ausgesteift werden. Man unterscheidet Vollwandbalkenbrücken mit konstanter und veränderlicher Konstruktionshöhe. Vollwandbalkenbrücken werden überwiegend als Deckbrücken, d. h. mit oben liegender Fahrbahn, ausgeführt. Bild 2.3a zeigt einen Einfeldträger mit konstanter Konstruktionshöhe und Bild 2.3b einen Dreifeldträger mit veränderlicher Konstruktionshöhen (mit so genannten *Vouten*) [47]. Infolge von Weiterentwicklungen bei der Herstellung werden immer häufiger auch im Grundriss gekrümmte Brücken mit Vouten ausgeführt.

Der Lastabtrag zu den Hauptträgern erfolgt über eine längs- oder querorientierte Fahrbahn. Bei der längsorientierten Fahrbahn werden örtliche Lasten von der Fahrbahn (FBT) in Querrichtung zu den Längsträgern (LT) abgetragen. Die Längsträger

dienen zur Abtragung dieser örtlichen Lasten in Längsrichtung zu den Querträgern (QT). Die Querträger wiederum leiten die Lasten in Querrichtung zu den Hauptträgern (HT), und von dort werden sie in Längsrichtung zu den Auflagern abgetragen. Bei der querorientierten Fahrbahn entfallen die Längsträger (LT). Die örtlichen Lasten werden direkt in Längsrichtung zu den Querträgern abgetragen. Die Querträger dienen häufig zusätzlich zur Stabilisierung des Haupttragssystems und sollten in diesen Fällen auch als Haupttragelemente behandelt werden.

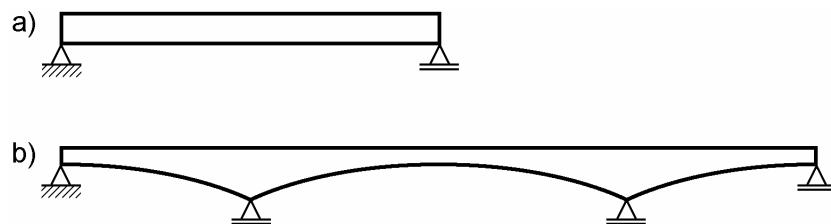


Bild 2.3 a) Einfeldträger mit konstanter Konstruktionshöhe
 b) Dreifeldträger mit Vouten [47]

2.4.2 Querschnittsvarianten

Vollwandbalkenbrücken können in Stahl oder in Verbund ausgeführt werden. Bei Stahlbrücken kommen in der Regel Querschnitte mit einer längsorientierten Fahrbahn zum Einsatz. Die hier betrachteten Verbundquerschnitte weisen eine oben liegende Betonplatte auf und sind mit einer querorientierten Fahrbahn ausgeführt. Die Querschnitte werden abhängig von ihrer Breite, der Aussteifung und der Anzahl der Hauptträger in drei Kategorien eingeteilt:

- **Kategorie 1**

In dieser Kategorie sollen Vollwandbalkenbrücken eingeordnet werden, die mit der Stabtheorie erfasst werden können. Folgende Voraussetzungen müssen eingehalten sein:

- (1) Die Brücke ist wesentlich länger als breit und hoch ($\ell /b > 5$, $\ell /h > 5$)
- (2) Die Querschnittsform bleibt erhalten
- (3) Der gesamte Querschnitt ist mittragend

Die Querschnitte sind schmal und haben zwei Hauptträger. Die mittragende Breite (s. Abschnitt 2.7.2) entspricht der geometrischen Breite, d. h. Schubverzerrungen sind vernachlässigbar. Die Erhaltung der Querschnittsform wird durch geeignete Maßnahmen (Queraussteifungen) gewährleistet. Zu unterscheiden sind offene und geschlossene Querschnitte:

(1A) Offene Querschnitte

Bei offenen Querschnitten (Bild 2.4) ist zu beachten, dass Torsionsbeanspruchungen überwiegend über Wölbkrafttorsion abgetragen werden. Bei der Idealisierung als Stab ist folglich ein Stabelement mit Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion (S') zu verwenden. Bild 2.4 zeigt einen Querschnitt mit einer orthotropen Fahrbahnplatte und einen Verbundquerschnitt.

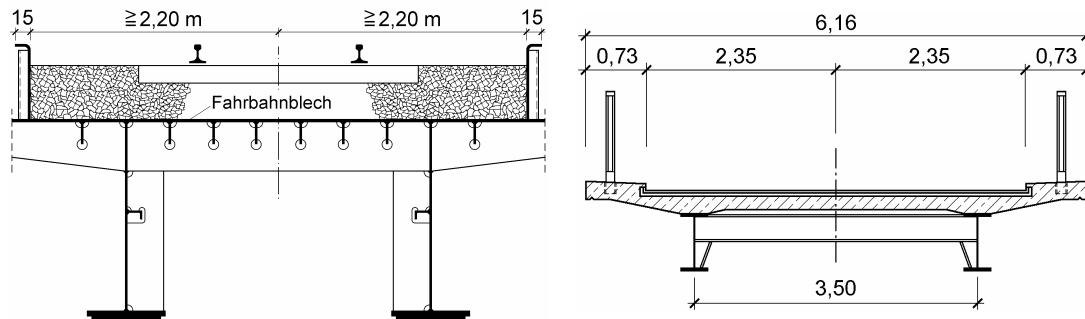


Bild 2.4 Eingleisige Deckbrücke mit längsorientierter Fahrbahn nach FTA1 und VTR10 [47] und Hutquerschnitt in Verbundbauweise

(1B) Kastenquerschnitte

Der geschlossene Querschnitt kann als wölbarer Querschnitt ohne Berücksichtigung der Wölkrafttorsion behandelt werden. Jedes kommerzielle Stabwerksprogramm ist verwendbar. Ausgeführte Beispiele zeigen Bild 2.5.

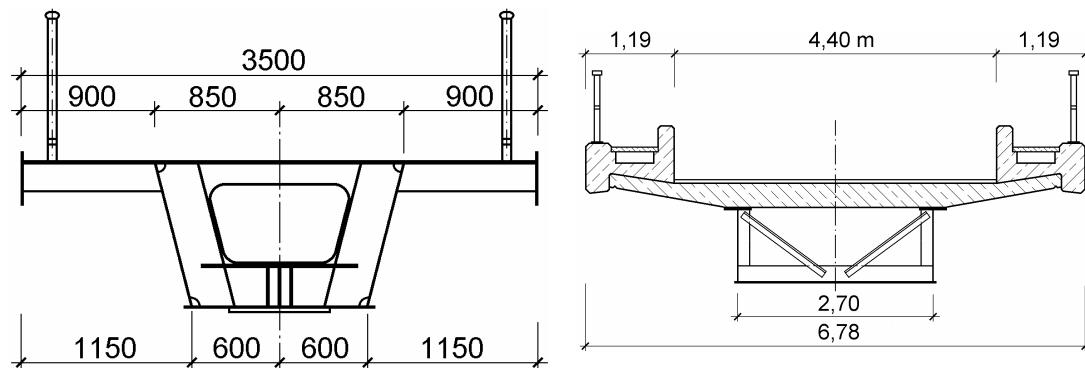


Bild 2.5 Radwegbrücke Gabelsbergerstraße in Dortmund [47] und eingleisige Eisenbahnbrücke Am Dammgraben in Frankfurt [47]

In der vorliegenden Arbeit wird das Tragverhalten gekrümmter Träger hauptsächlich an Querschnitten dieser Kategorie untersucht. Beim Nachweis der Fahrbahnplatte als lastverteilende Fahrbahnplatte sind zusätzliche Beanspruchungen aus der lokalen Einleitung der Lasten mit den Beanspruchungen aus der Berechnung als Stab zu überlagern.

- **Kategorie 2**

Vollwandbalkenbrücken mit Querschnitten mit zwei Hauptträgern, bei denen jedoch die Bedingungen (2) und/oder (3) nicht eingehalten werden, werden in die Kategorie 2 eingeordnet. Getrennt betrachtet weisen die Hauptträger eine geringe Torsionssteifigkeit auf. Unterschieden werden offene und geschlossene Querschnitte. Beim Nachweis der Fahrbahnplatte als lastverteilende Fahrbahnplatte sind wiederum zusätzliche Beanspruchungen aus der lokalen Einleitung der Lasten mit den Beanspruchungen aus der Berechnung des Haupttragsystems zu überlagern.

(2A) Offene Querschnitte

Beim offenen Querschnitt wird angenommen, dass sich bei Belastung der Fahrbahn die Hauptträgerstege und –untergurte frei verdrehen und somit auf die Fahrbahn keine einspannende Wirkung ausüben (Bild 2.6 links). Die Belastung der Hauptträger kann in diesem Fall über Quereinflusslinien bestimmt werden und die Berechnung des Brückentragwerks an Teilsystemen erfolgen (Bild 2.6 rechts).

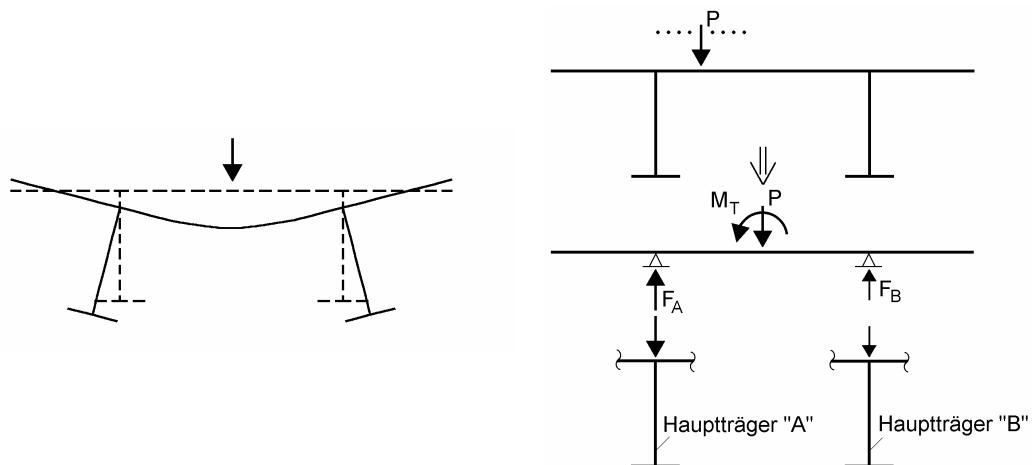


Bild 2.6 Freie Verdrehung der Hauptträger bei Belastung der Fahrbahn und zugehöriges Berechnungsmodell (Betrachtung des Hauptträgers als Teilsystem) [47]

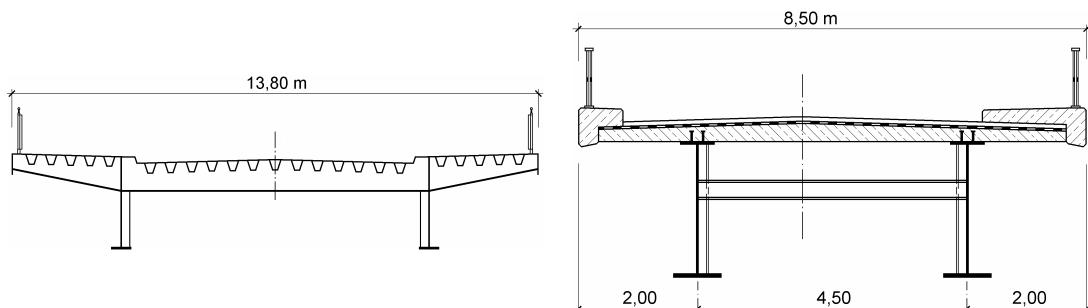


Bild 2.7 Stahlquerschnitt mit orthotroper Fahrbahnplatte und Schleusenkanalbrücke Gerlachshausen [47]

(2B) Kastenquerschnitte

Die Schnittgrößen in Hauptträgern von Brücken mit Kastenquerschnitt müssen unter Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung der Fahrbahnplatte, zusätzlichen Trägerroststrukturen sowie der Torsionssteifigkeit und der Profilverformung berechnet werden ([22], 5.2.3.3 (1)). Die Lasten werden über Quereinflusslinien auf die Hauptträger verteilt, um dann mithilfe einer Trägerroststruktur (s. auch Abschnitt 9.2) im Bereich der Queraussteifungen als *St. Venantsche Torsion* in den Träger eingeleitet zu werden. Beispiele für Kastenquerschnitte sind in Bild 2.8 dargestellt.

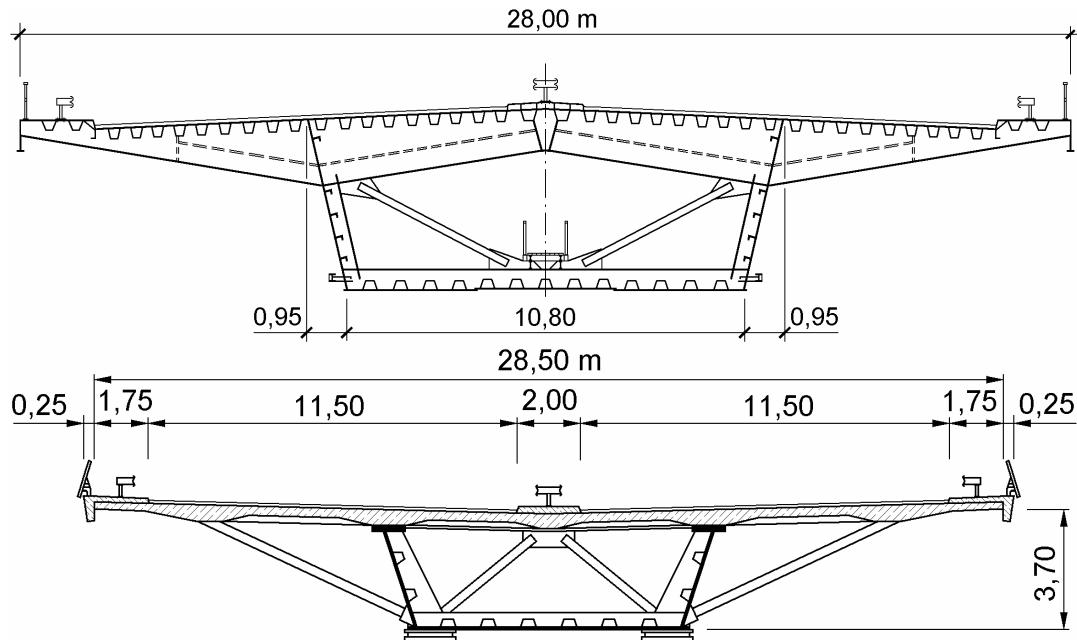


Bild 2.8 Levensauer Hochbrücke in Kiel [47] und Reichenbachtalbrücke [12]

- **Kategorie 3**

Zu dieser Kategorie zählen alle Querschnitte mit mehr als zwei Hauptträgern. Quersysteme mit mehr als zwei Hauptträgern sind statisch unbestimmt. Die Schnittgrößen in Hauptträgern von Brücken mit offenen Querschnitten und mehr als zwei Hauptträgern sollten unter Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung von orthotropen Platten und zusätzlichen Trägerroststrukturen berechnet werden ([22], 5.2.3.2 (1)).

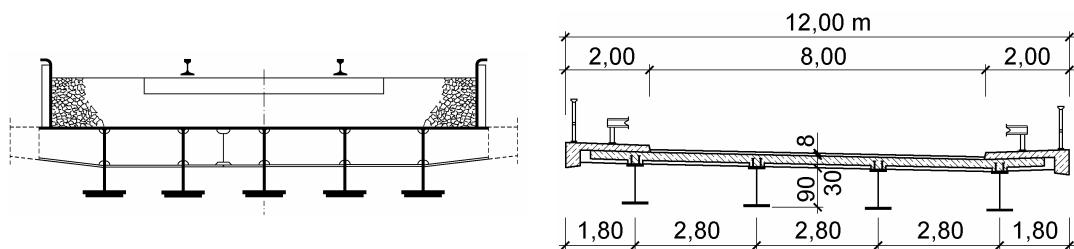


Bild 2.9 Auszug aus Richtzeichnung TRR 10 der Deutschen Bahn [47] und offener Querschnitt mit geschweißten I-Trägern

2.5 Belastungen

Die abzutragenden Hauptlasten eines Brückenüberbaus sind die Vertikallasten aus Eigengewicht und Verkehr. Bei Verbundbrücken sind die Einflüsse aus dem Kriechen und dem Schwinden des Betons beim Lastfall „Eigengewicht“ zu berücksichtigen (s. auch Kapitel 7).

Die Verkehrslasten sind für die unterschiedlichen Brückentypen im DIN-Fachbericht 101 geregelt. Für Fußgängerbrücken bestehen die Verkehrslasten aus einer gleichmäßigen Flächenlast, mit denen die Fahrbahn in ungünstigster Weise zu beladen ist. Bei Straßenbrücken ist das im DIN-Fachbericht 101 definierte Lastmodell 1 (LM 1) maßgebend für die Bemessung. Es besteht aus Flächenlasten (UDL) und aus einem Tandem-System (TS) in ungünstigster Laststellung (Bild 2.10). Die Doppelachsen des Tandem-Systems bestehen aus zwei hintereinander liegenden Achsen auf einem Fahrstreifen. Es ist immer ein komplettes Tandem-System mit zwei nebeneinander liegenden Doppelachsen in der Haupt- und Nebenspur anzutragen. Die Radlasten des Tandem-Systems wirken als quasi Einzellasten. Im LM 1 finden bereits eine Erhöhung der statischen Lasten infolge von dynamischen Beanspruchungen Berücksichtigung. Auch für Eisenbahnbrücken ist ein Lastmodell vorgegeben. Das Lastmodell 71 (LM 71) stellt den statischen Anteil der Einwirkungen aus normalem Eisenbahnverkehr dar (Bild 2.11). Dieses Lastmodell besteht ebenfalls aus Flächenlasten und Radlasten (quasi Einzellasten). Dynamische Beanspruchungen werden über eine Erhöhung der statischen Lasten mit einem dynamischen Beiwert berücksichtigt.

Zusätzlich sind weitere Belastungen wie Wind, Temperatur sowie Stützensenkungen zu berücksichtigen. Bei der Untersuchung des Tragverhaltens in dieser Arbeit wird nur der Anteil aus vertikalen Lasten betrachtet.

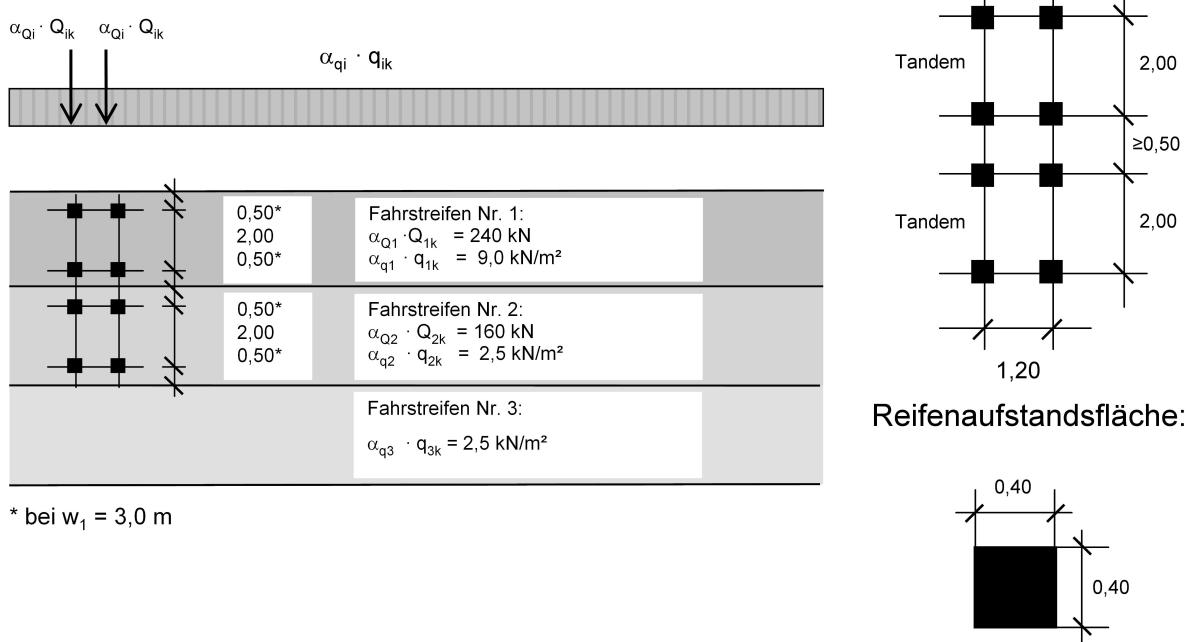


Bild 2.10 Lastmodell LM1 für Straßenbrücken [51]

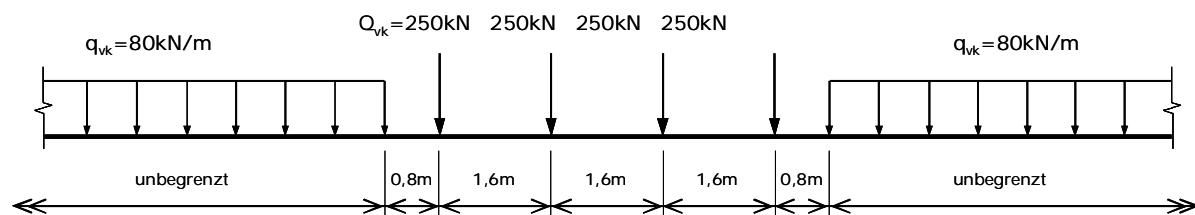


Bild 2.11 Lastmodell LM71 für Eisenbahnbrücken [51]

2.6 Werkstoffe

Für die Verbundquerschnitte werden die Werkstoffe Baustahl, Beton und Betonstahl verwendet. Baustahl und Betonstahl haben ähnliche Werkstoffeigenschaften. Die Werkstoffeigenschaften für Baustahl sind unter Anderem in DIN 18800 und DIN-Fachbericht 103 zusammengestellt. Im Brückenbau dürfen Baustähle der Güte S 235, S 275 und S 355 verwendet werden, bei Straßenbrücken auch S 460. Für gerippte Betonstähle in ihrer Erzeugnisform als Stabstahl (S) und Matte (M) gelten die Regelungen nach DIN 1045, DIN-Fachberichte 102 und 104. Für Verbundtragwerke darf vereinfachend der Elastizitätsmodul des Betonstahls wie für Baustahl angenommen werden. Bild 2.12 zeigt die den Untersuchungen in dieser Arbeit zugrunde gelegten rechnerischen Spannungsdehnungslinien für diese beiden Werkstoffe. Bei plastischer Querschnittsausnutzung darf bei Verbundtragwerken nur Betonstahl mit hoher Duktilität verwendet werden. Die Zugdehnung des Betonstahls ist hierbei auf $\varepsilon_{uk} \leq 0,025$ zu begrenzen. In Tabelle 2.3 sind Streckgrenzen üblicher Baustähle und des Betonstahls, E-Moduli und Teilsicherheitsbeiwerte der Grundkombination angegeben.

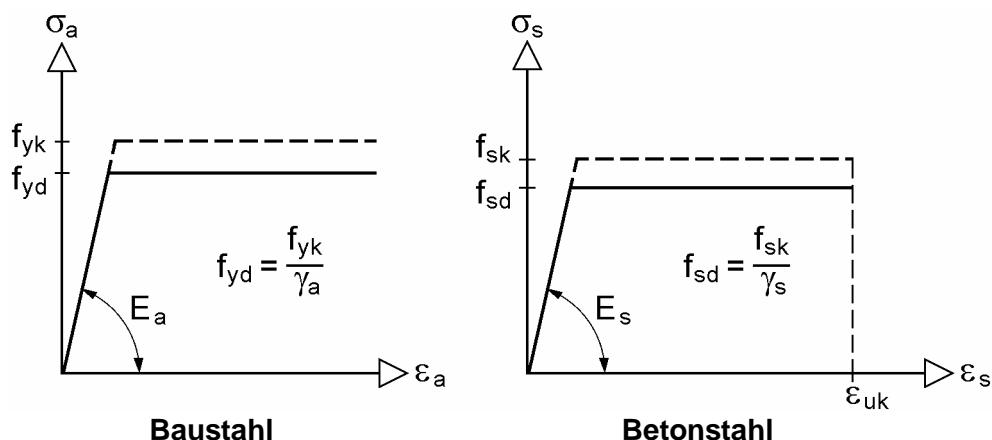
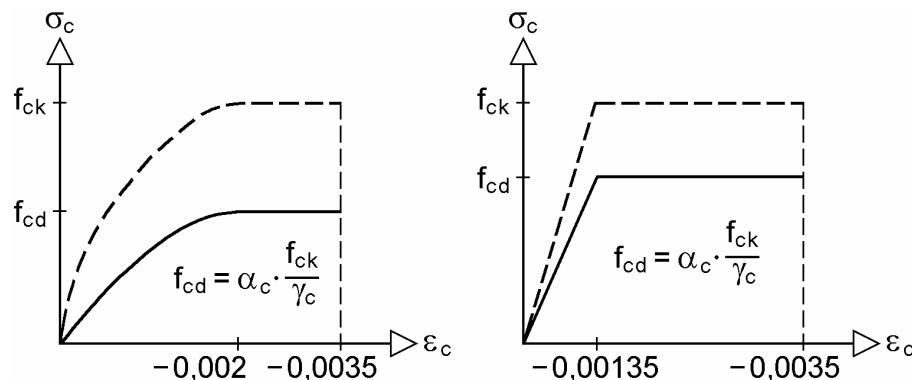


Bild 2.12 Rechnerische Spannungs–Dehnungslinien für Baustahl und Betonstahl

Die Werkstoffeigenschaften für im Verbundbau verwendete Betone sind unter Anderem in DIN 18800-5 und DIN-Fachbericht 102 dargestellt. Eine Zusammenstellung von Betoneigenschaften in Bezug auf die Betonfestigkeitsklasse und den zu verwendenden Teilsicherheitswert in der Grundkombination findet sich in Tabelle 2.4. Für Fahrbahnplatten von Verbundbrücken ist in der Regel Beton der Festigkeitsklasse C 35/45 zu verwenden. Der Elastizitätsmodul hängt nicht nur von der Betonfestigkeitsklasse, sondern auch von den Eigenschaften der verwendeten Betonzuschläge ab. Liegen keine genaueren Angaben vor oder ist eine hohe Genauigkeit nicht erforderlich, kann der Elastizitätsmodul E_{cm} genommen werden. Er ist als Sekantenmodul zwischen den Spannungen $\sigma_c = 0$ und $\sigma_c = 0,4 \cdot f_{ck}$ für ein Betonalter von 28 Tagen definiert. Die Langzeitfestigkeit des Betons ist im Vergleich zur definierten Streckgrenze geringer. Dieser Einfluss wird mit dem Abminderungsbeiwert α_c erfasst. Dieser zusätzliche Beiwert kann für Druck grundsätzlich mit $\alpha_c = 0,85$ angenommen werden.

Tabelle 2.3 E-Modul, Streckgrenzen und Teilsicherheitsbeiwerte für Baustahl und Betonstahl

	Baustahl		Betonstahl	
Streckgrenze f_{yK} (Baustahl) bzw. f_{sk} (Betonstahl) [N/mm ²]	S235, $t \leq 40$ mm:	235 N/mm ²	BSt 500 S	500 N/mm ²
	S235, $40 < t \leq 100$ mm:	215 N/mm ²	BSt 500 M	500 N/mm ²
	S355, $t \leq 40$ mm:	355 N/mm ²		
	S355, $40 < t \leq 100$ mm:	335 N/mm ²		
E-Modul [N/mm ²]	$E_a = 210.000$ N/mm ²		$E_s = 210.000$ N/mm ²	
Teilsicherheitsbeiwerte (Grundkombination)	$\gamma_a = 1,00$ (ohne Stabilitätsgefahr)		$\gamma_s = 1,15$	
	$\gamma_a = 1,10$ (mit Stabilitätsgefahr)			



Parabel-Rechteck-Diagramm

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right)$$

für $0 \geq \varepsilon_c \geq -0,002$

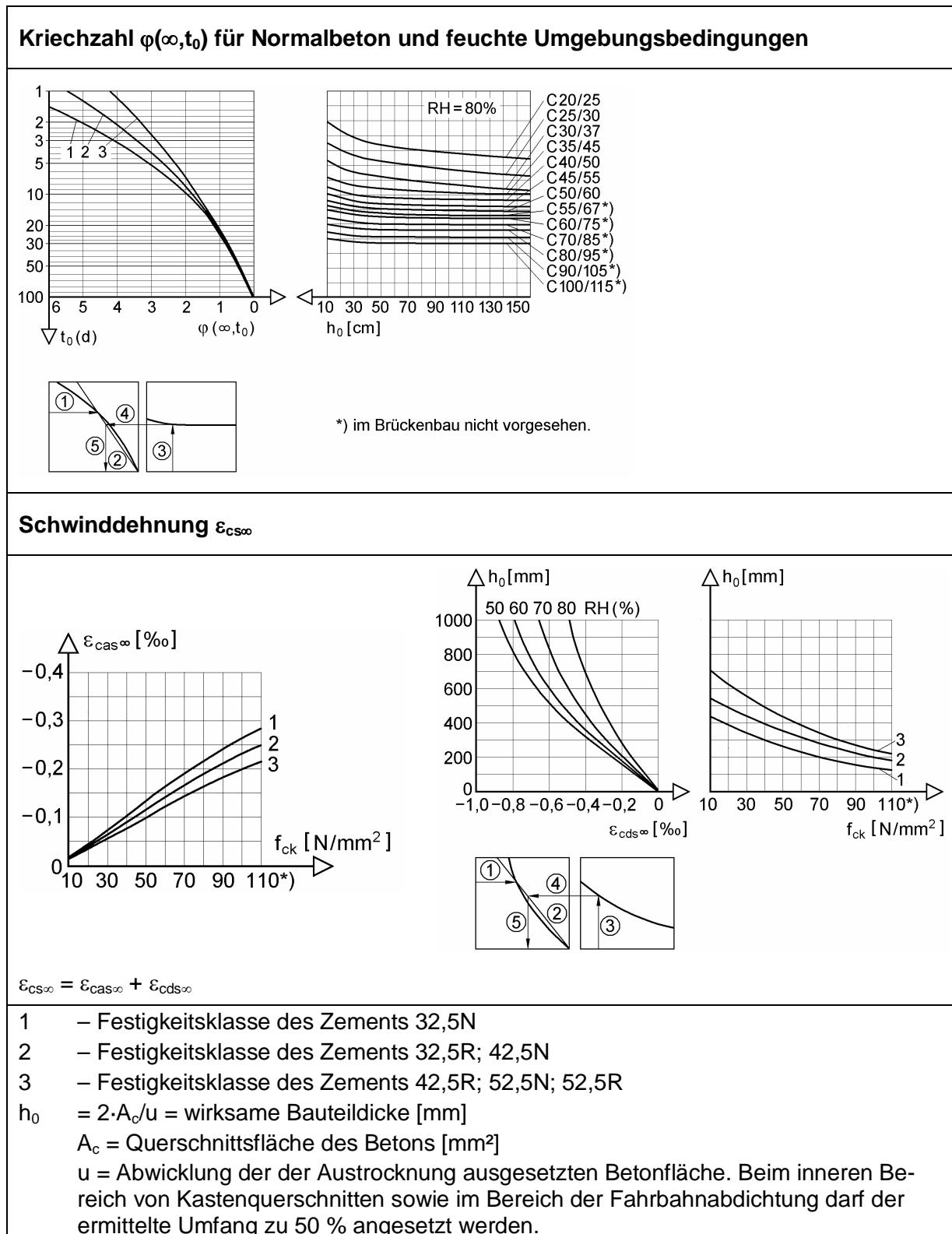
bilineare Spannungs–Dehnungslinie

Bild 2.13 Rechnerische Spannungs–Dehnungslinien für Beton

Tabelle 2.4 Werkstoffeigenschaften und Teilsicherheitsbeiwert für Beton

Tabelle 2.5 Ermittlung der Kriechzahl und Schwinddehnung nach Heft 525 des DAfStB

Ermittlung der Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$																							
$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0)$																							
$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0)$	$\varphi_{RH} = (1 + (1 - RH/100)/\sqrt[3]{0,1 \cdot h_0/100} \cdot \alpha_1) \cdot \alpha_2$																						
Ermittlung der Schwinddehnung $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$																							
$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s)$																							
Schrumpfen	$\varepsilon_{cas0}(f_{ck} + 8) = -\alpha_{as}((f_{ck} + 8)/(f_{ck} + 68))^{2,5} \cdot 10^{-6}$																						
$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{cas0}(f_{ck} + 8) \cdot \beta_{as}(t)$	$\beta_{as}(t) = 1 - e^{-0,2 \cdot \sqrt{t}}$																						
Trocknungsschwinden	$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) = ((220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot e^{-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm} / 10}) \cdot 10^{-6}$																						
$\varepsilon_{cds}(t, t_s) =$	$\beta_{RH}(RH) = \begin{cases} -1,55 \cdot (1 - (RH/100)^3) & \text{für } 40\% \leq RH < 99\% \cdot \beta_{s1} \\ 0,25 & \text{für } RH \geq 99\% \cdot \beta_{s1} \end{cases}$																						
$\varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s)$	$\beta_{ds}(t - t_s) = \sqrt{\frac{t - t_s}{350 \cdot (h_0/100)^2 + t - t_s}}$																						
t	= Betonalter zum betrachteten Zeitpunkt [Tage]																						
t_0	= tatsächliches Betonalter bei Belastungsbeginn [Tage]																						
t_s	= Betonalter zum Beginn der Austrocknung [Tage]																						
RH	= relative Luftfeuchte der Umgebung [%]																						
h_0	= $2 \cdot A_c/u$ = wirksame Bauteildicke [mm]																						
A_c	= Querschnittsfläche des Betons [mm^2]																						
u	= Abwicklung der der Austrocknung ausgesetzten Betonfläche. Beim inneren Bereich von Kastenquerschnitten sowie im Bereich der Fahrbahnabdichtung darf der ermittelte Umfang zu 50 % angesetzt werden.																						
f_{cm}	= mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons im Alter von 28 Tagen $f_{cm} = f_{ck} + 8$ [N/mm^2]																						
$\alpha, \alpha_{as}, \alpha_{ds1}, \alpha_{ds2}$	= Beiwerte zur Berücksichtigung des Zementtyps																						
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Zement</th><th>CEM 32,5</th><th>CEM 32,5R und 42,5</th><th>CEM 42,5R und 52,5</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>α</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr> <td>α_{as}</td><td>800</td><td>700</td><td>600</td></tr> <tr> <td>α_{ds1}</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr> <td>α_{ds2}</td><td>0,13</td><td>0,12</td><td>0,12</td></tr> </tbody> </table>	Zement	CEM 32,5	CEM 32,5R und 42,5	CEM 42,5R und 52,5	α	-1	0	1	α_{as}	800	700	600	α_{ds1}	3	4	6	α_{ds2}	0,13	0,12	0,12		
Zement	CEM 32,5	CEM 32,5R und 42,5	CEM 42,5R und 52,5																				
α	-1	0	1																				
α_{as}	800	700	600																				
α_{ds1}	3	4	6																				
α_{ds2}	0,13	0,12	0,12																				
α_i	$= (35/(f_{ck} + 8))^{n1}$ mit $n1 = 0,7$; $n2 = 0,2$; $n3 = 0,5$																						
β_1	$= (35/f_{cm})^{0,1} \leq 1,0$ = Beiwert zur Berücksichtigung der inneren Austrocknung																						

Tabelle 2.6 Endkriechzahl und Endschröpfmaß nach DIN-Fachbericht 102

Neben den durch kurzzeitige Einwirkungen hervorgerufenen Verformungen treten bei Beton zusätzliche zeitabhängige Verformungen auf. Es ist zu unterscheiden zwischen dem lastabhängigen Kriechen und dem lastunabhängigen Schwinden. Kriechen und Schwinden des Betons hängen im Wesentlichen von der Feuchte der Umgebung, den

Abmessungen des Bauteils und der Zusammensetzung des Betons ab. Das Kriechen wird des Weiteren deutlich vom Reifegrad des Betons beim erstmaligen Aufbringen der Last sowie von der Dauer der Belastung beeinflusst. Für übliche Konstruktionsbetone kann im Bereich bis etwa $\sigma_c = 0,4 \cdot (f_{ck} + 8)$ ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen kriecherzeugender Spannung und Kriechdehnung angenommen werden. Bei der Ermittlung der Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ und der Schwinddehnung $\epsilon_{cs}(t, t_s)$ sind diese Einflüsse zu berücksichtigen. Die Berechnung der Kriechzahl und der Schwinddehnung für einen Zeitpunkt t sind in Heft 525 des DAFStb geregelt und in Tabelle 2.5 dargestellt. Zur Berechnung der Kriechzahl und der Schwinddehnung zum Zeitpunkt $t = \infty$ finden sich in DIN-Fachbericht 102 Diagramme, mit denen diese in Abhängigkeit der Geometrie des Querschnitts abgelesen werden können (Tabelle 2.6). Da Brückenbauten in der Regel für eine Nutzungsdauer von 100 Jahren zu planen sind, ist nach DIN-Fachbericht 102 $t = \infty$ mit 30.000 Tagen anzusetzen.

2.7 Ideelle Querschnittskennwerte

2.7.1 Vorbemerkungen

Sind die Voraussetzungen zur Idealisierung des Trägers als Stab nicht erfüllt, muss das System mit Platten–Scheiben–Elementen modelliert werden. Um dies zu vermeiden, sind Modelle entwickelt worden, so dass auch Querschnitte mit großen Abmessungen, Verbundquerschnitte und aufgelöste Querschnitte über den Ansatz ideeller Querschnittskennwerte in der Stabstatik Berücksichtigung finden können:

- In Querschnitten mit breiten Gurten muss der Einfluss der Scheibenwirkung (Schubweichheit der Gurte) über das Modell der mittragenden Breiten berücksichtigt werden.
- Der Beton in Verbundquerschnitten mit oben liegender Betonplatte findet mit auf den Baustahl bezogenen ideellen Querschnittskennwerten Berücksichtigung.
- Der Einfluss aufgelöster Querschnittswände auf die Torsionssteifigkeit kann über ideelle Bleckdicken erfasst werden.
- Auch die Schubsteifigkeit von Queraussteifungen kann über eine ideelle Schubfläche erfasst werden.

2.7.2 Mittragende Breiten – Schubverzerrung

Die Einflüsse aus Schubverzerrungen auf die Steifigkeit müssen berücksichtigt werden, falls diese die Schnittgrößenverläufe und die Querschnittstragfähigkeit signifikant beeinflussen. Da im Rahmen der Stabtheorie die Scheibenwirkung einzelner Querschnittsteile nicht erfasst werden kann, wird der Einfluss der Schubweichheit bei einer Modellierung mit Stäben durch das Modell der mittragenden Gurtbreiten berücksichtigt. Hierbei wird der veränderliche Verlauf der Längsspannungen in Querrichtung durch einen konstanten σ_x –Verlauf der Größe $\max \sigma_x$ ersetzt. Damit die

Gurtkraft in beiden Fällen identisch ist, muss die bei der Berechnung berücksichtigte Gurtbreite auf eine mittragende Breite reduziert werden. Die mittragende Gurtbreite ist von folgenden Parametern abhängig:

- Verhältnis der Breite des Gurtes zur Länge des Trägers
- statisches System
- Art der Beanspruchung
- vom Ort des betrachteten Querschnitts (Feldmitte, Auflager, etc.)

Querschnitte mit breiten Gurten finden sich vor allem im Brückenbau. In Bild 2.14 sind die mittragenden Breiten eines Querschnitts mit zwei Hauptträgern, wie er häufig im Brückenbau vorkommt, dargestellt. Zur Berechnung der mittragenden Breiten finden sich Angaben in DIN-Fachbericht 103 (Stahlbrücken) und DIN-Fachbericht 104 (Verbundbrücken) sowie im EC 3 Teil 1-5 (Plattenförmige Bauteile) und im EC4 Teil 2 (Verbundbrücken). Die mittragenden Breiten beeinflussen einerseits die Steifigkeit der Bauteile in der statischen Berechnung des Tragwerks und andererseits die Querschnittstragfähigkeit. Der Einfluss hängt vom betrachteten Grenzzustand ab. Im Allgemeinen sollte für alle Grenzzustände, d. h. Grenzzustand der Tragfähigkeit, der Gebrauchstauglichkeit und der Ermüdung, dieselben mittragenden Breiten verwendet werden. In Bild 2.15 sind die geometrischen und mittragenden Breiten b_{eff} für eine Stahl- und für einen Betongurt dargestellt.

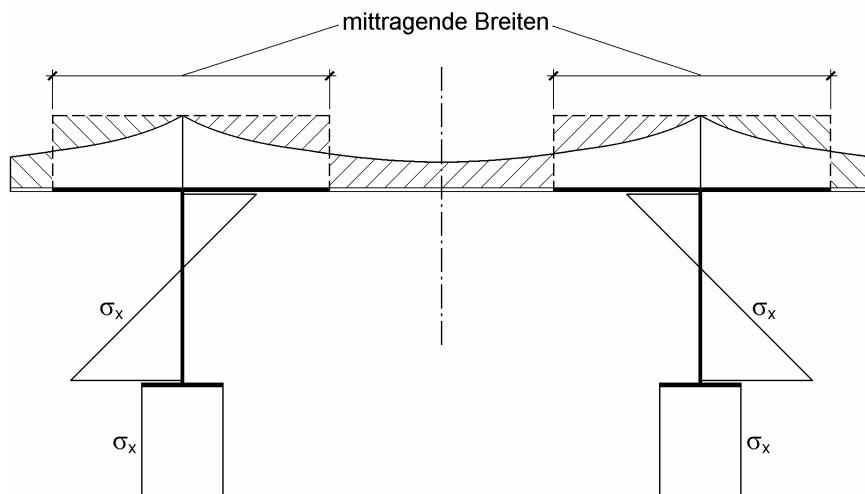


Bild 2.14 Mittragende Gurtbreite [46]

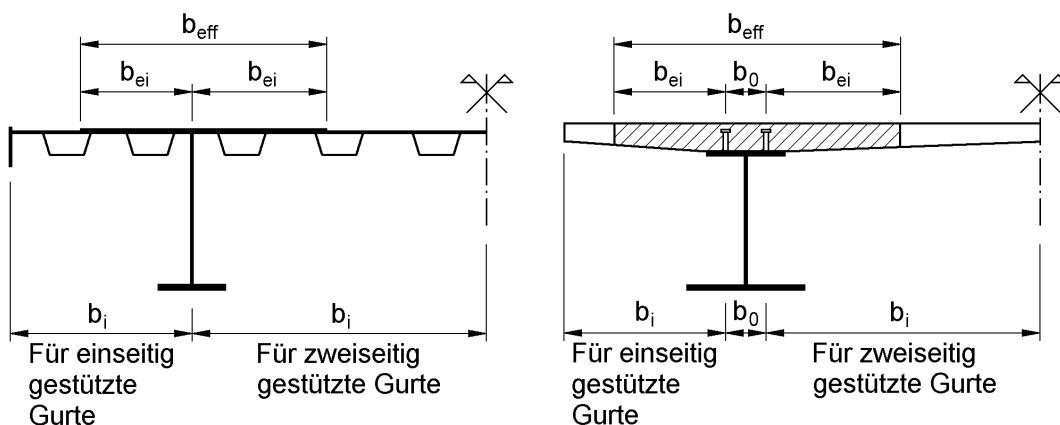


Bild 2.15 Definition und Bezeichnung der geometrischen Breite

Mittragende Breite für die Schnittgrößenermittlung nach den DIN-Fachberichten 103 und 104

Bei einer elastischen Schnittgrößenermittlung darf vereinfachend eine konstante mittragende Breite b_{eff} über die gesamte Stützweite angenommen werden. Es gilt:

- für Stahlgurte:

$$b_{\text{eff}} = \sum_i b_{ei} \text{ mit } b_{ei} = \min\left(\frac{\ell}{8}, b_i\right) \quad (2.8)$$

- für Betongurte:

$$b_{\text{eff}} = b_0 + \sum_i b_{ei} \text{ mit } b_{ei} = \min\left(\frac{\ell_{e,\text{Feld}}}{8}, b_i\right) \quad (2.9)$$

Die Länge ℓ bezeichnet den Abstand zwischen 2 Stützungen bzw. bei Kragarmen die doppelte Kragarmlänge. $\ell_{e,\text{Feld}}$ bezeichnet die effektive Länge im Feldbereich und wird mit dem Abstand zwischen zwei Momentennullpunkten abgeschätzt. Sind alle Spannweiten kleiner als das 1,5fache einer benachbarten Spannweite und die Kragarme kürzer als die halbe Länge des benachbarten Feldes, so darf die effektive Länge ℓ_e nach Bild 2.16 angenommen werden.

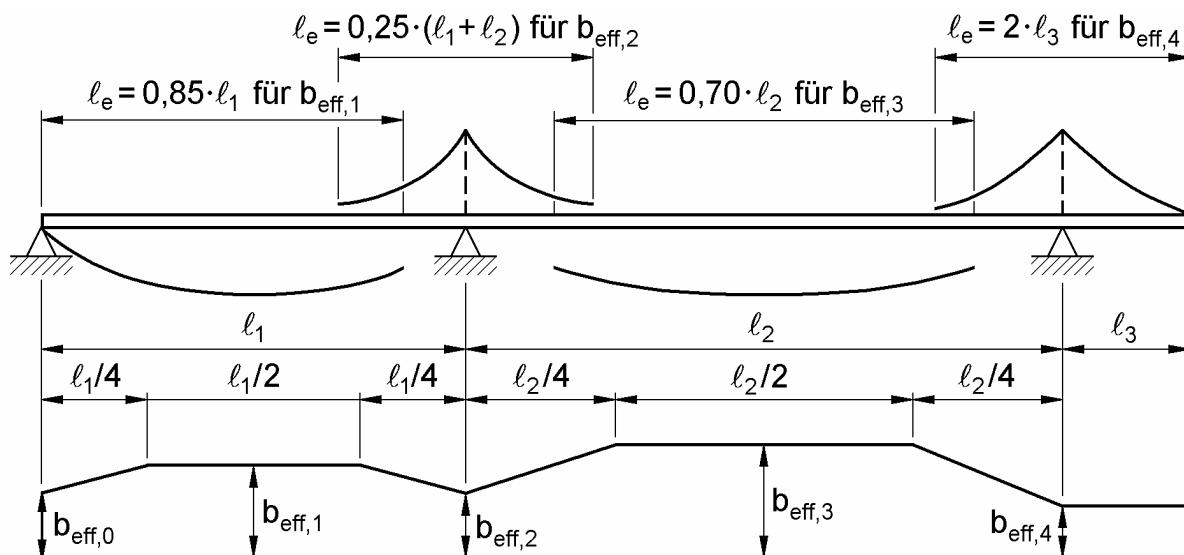


Bild 2.16 Mittragende Breiten und äquivalente Spannweiten [22]

Mittragende Breite für die Ermittlung der Bauteilbeanspruchung nach den DIN-Fachberichten 103 und 104

Da die Wahl der mittragenden Breiten größere Auswirkungen bei der Betrachtung der Querschnittstragfähigkeit hat, ist in diesem Fall eine genauere Berechnung durchzuführen. Einschnürungen der mittragenden Breiten sind nach Bild 2.16 in Bereichen von Auflagern, dort wo Lasten konzentriert eingeleitet werden, zu berücksichtigen. Des Weiteren findet bei Stahlgurten der Einfluss des Verhältnisses der Breite b_i zur Länge ℓ_e über den Faktor κ Berücksichtigung.

Er ermittelt sich wie folgt:

$$\kappa = \frac{\alpha_i \cdot b_i}{\ell_e} \text{ mit } \alpha_i = \sqrt{1 + \frac{A_{sl}}{b_i \cdot t_i}} \quad (2.10)$$

Hierbei entspricht A_{sl} der Querschnittsfläche aller Längsseiten innerhalb der Breite b_i und t_i die Blechdicke. Die weiteren Bezeichnungen sind in Bild 2.15 definiert. Es gilt:

- für Stahlgurte:

$$b_{eff} = \sum_i \beta_i \cdot b_i \text{ mit } \beta_i \text{ nach Tabelle 2.7} \quad (2.11)$$

- für Betongurte:

$$b_{eff} = b_0 + \sum_i b_{ei} \text{ und } b_{eff,0} = b_0 + \sum_i \beta_i \cdot b_{ei} \quad (2.12)$$

$$\text{mit } b_{ei} = \min\left(\frac{\ell_e}{8}, b_i\right) \text{ und } \beta_i = (0,55 + 0,025 \cdot \ell_e / b_i) \leq 1$$

Ist eine genauere Berechnung der Spannungsverteilung im Obergurt erforderlich, beispielsweise bei Beul- oder Ermüdungsnachweisen, kann die Spannungsverteilung in Stahl- und Betongurten nach Bild 2.17 angesetzt werden.

Tabelle 2.7 Faktor β für die mittragende Breite

$\kappa = \frac{\alpha_i b_i}{\ell_e}$	Nachweisort	β -Wert
$\leq 0,02$		$\beta_i = 1,0$
$0,02 \text{ bis } 0,70$	Feldmoment	$\beta_i = \beta_{i,Feld} = \frac{1}{1 + 6,4 \kappa^2}$
	Stützmoment	$\beta_i = \beta_{i,Stütz} = \frac{1}{1 + 6,0 \left(\kappa - \frac{1}{2500 \kappa} \right) + 1,6 \kappa^2}$
$> 0,70$	Feldmoment	$\beta_i = \beta_{i,Feld} = \frac{1}{5,9 \kappa}$
	Stützmoment	$\beta_i = \beta_{i,Stütz} = \frac{1}{8,6 \kappa}$
alle κ	Endauflager	$\beta_i = (0,55 + 0,025 / \kappa) \beta_1, \text{ jedoch } \beta_i < \beta_1$
alle κ	Kragarm	$\beta_i = \beta_{i,Stütz} \text{ am Auflager, } \beta_i = 1,0 \text{ am Ende}$

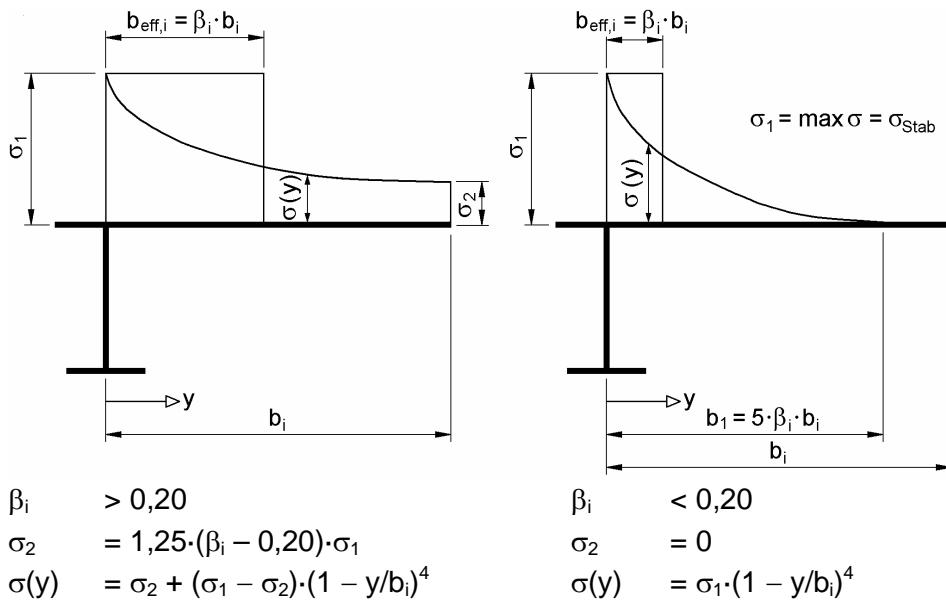


Bild 2.17 Verteilung der Längsspannungen in breiten Gurten

2.7.3 Ideelle Querschnittskennwerte im Verbundbau

Betrachtet wird ein Verbundquerschnitt mit Baustahl und oben liegender Betonplatte nach Bild 2.18. Die Betonplatte steht im starren Verbund mit dem Baustahl. Wenn kein genaueres Berechnungsverfahren angewandt wird, sollten die elastischen Querschnittseigenschaften von Verbundquerschnitten mit Hilfe von auf den Baustahl bezogenen ideellen Querschnittskenngrößen ermittelt werden. Der Verbundquerschnitt wird in einen ideellen Gesamtquerschnitt überführt. Von der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes für Beton und Stahl wird ausgegangen.

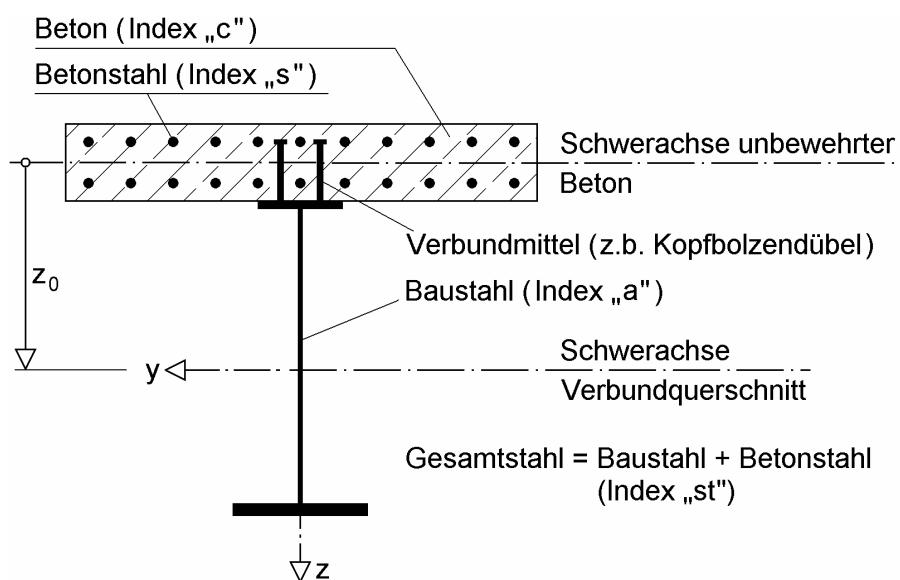
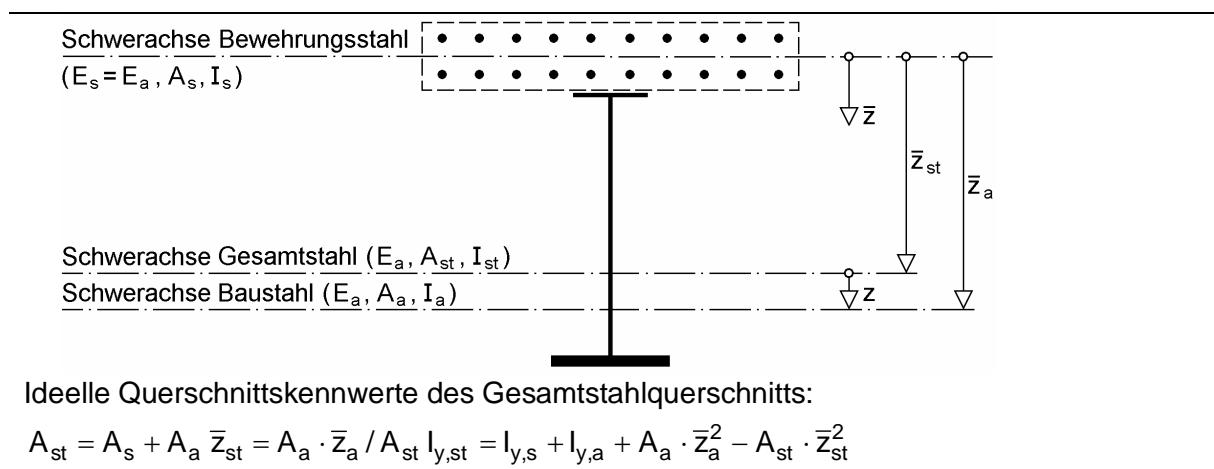


Bild 2.18 Verbundquerschnitt mit oben liegender Betonplatte – Bezeichnungen [51]

Ideelle Fläche A_i und ideelles Trägheitsmoment $I_{y,i}$

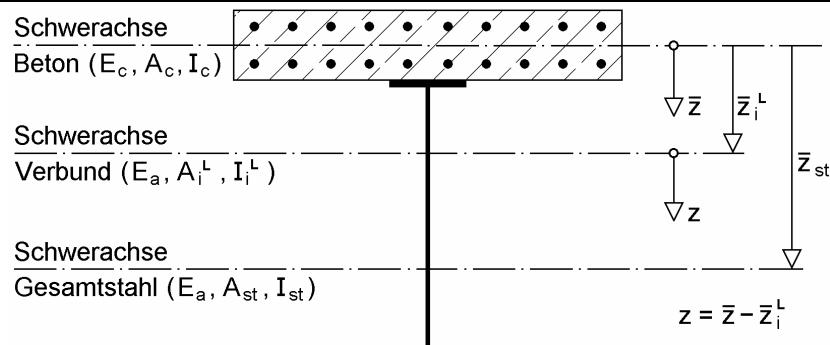
Wie allgemein in der Stabtheorie üblich, wird das Ebenbleiben des Gesamtquerschnitts vorausgesetzt. Im Verbundbau werden in der Regel zwei Zustände unterschieden. Im Zustand I werden die ideelle Fläche und das ideelle Trägheitsmoment des Verbundquerschnitts unter der Annahme berechnet, dass zugbeanspruchte Betonquerschnittsteile ungerissen sind. Im Zustand II wird davon ausgegangen, dass der mittragende Betongurt vollständig gerissen ist. Der Querschnitt im Zustand II wird auch als Gesamtstahlquerschnitt (Index „st“) bezeichnet. Die Querschnittskennwerte sind in Tabelle 2.8 zusammengestellt.

Tabelle 2.8 Ideelle Fläche A_{st} und ideelles Trägheitsmoment $I_{y,st}$ (Zustand II) [46]



Beim Verbundquerschnitt im Zustand I liegen der Baustahl in der Zugzone und der Betongurt in der Druckzone. Die Ermittlung der ideellen Fläche A_i und des ideellen Trägheitsmomentes $I_{y,i}$ erfolgt über lastfallabhängige Reduktionszahlen n_L , dem Verhältnis des lastfallabhängigen Elastizitätsmoduls des Betons E_c zum Elastizitätsmodul des Baustahls E_a . Der Bezugsfaktor zur Ermittlung von n_L ist das Verhältnis $n_0 = E_a/E_{cm}$. Der Elastizitätsmodul des Betons E_{cm} entspricht hierbei dem mittleren Sekantenmodul nach 28 Tagen (s. Abschnitt 2.6).

Für kurzzeitig wirkende Beanspruchungen aus Verkehr, Wind und Temperatur entspricht die Reduktionszahl $n_L = n_0$. Das materialspezifische Verhalten des Betons (linear-viskoelastischer Werkstoff) führt zu einer zeit- und lastfallabhängigen Reduktion des Elastizitätsmoduls. Der Einfluss auf die Reduktionszahl n_L wird über einen von der Beanspruchungsart abhängigen Kriechbeiwert ψ_L und der Kriechzahl $\phi_t(t,t_0)$ bestimmt. Da die Auswirkungen des zeitabhängigen Verhaltens sich hinsichtlich der Wirkung einer Betonnormalkraft und eines Betonbiegemomentes unterscheiden, müsste korrekterweise jeweils eine Reduktionszahl bezogen auf die Betonfläche und eine bezogen auf das Betonträgheitsmoment berechnet werden. Nach DIN-Fachbericht 104 und DIN 18800-5 darf aber vereinfachend in beiden Fällen mit dergleichen Reduktionszahl gerechnet werden. Die zugehörigen Kriechbeiwerte und die Berechnung der ideellen Fläche A_i und des ideellen Trägheitsmomentes $I_{y,i}$ sind in Tabelle 2.9 zusammengestellt.

Tabelle 2.9 Ideelle Fläche A_i und ideelles Trägheitsmoment $I_{y,i}$ (Zustand I) [46]

Transformierte Querschnittskennwerte des Betonteils:

$$A_c^L = A_c / n_L \quad \text{mit } n_L = n_0 \cdot (1 + \psi_L \cdot \varphi_t) \quad \text{und } n_0 = \frac{E_a}{E_{cm}}$$

$$I_{y,c}^L = I_{y,c} / n_L$$

Ideelle Querschnittskennwerte des Verbundquerschnitts:

$$A_i^L = A_c^L + A_{st} \quad \bar{z}_i^L = A_{st} \cdot \bar{z}_{st} / A_i^L \quad I_{y,i}^L = I_{y,c}^L + I_{y,st} + \bar{z}_{st}^2 \cdot A_{st} \cdot A_c^L / A_i^L$$

Kriechbeiwerte ψ_L nach DIN-Fachbericht 104 bzw. DIN 18800-5:

Kurzzeitlasten	ψ_0	= 0
ständige Einwirkungen	ψ_P	= 1,10
zeitlich veränderliche Einwirkungen	ψ_{PT}	= 0,55
Schwinden	ψ_{Sh}	= 0,55
Absenken	ψ_D	= 1,50

Ideelles Torsionsträgheitsmoment $I_{T,i}$

Die primären Schubspannungen infolge Torsion beschreiben einen reinen Schubspannungszustand in der Querschnittsfläche, der ohne zusätzliche Normalspannungen in Längsrichtung im Gleichgewicht steht. Das primäre Torsionsmoment im geraden Stab lautet $M_{xp} = G \cdot I_T \cdot \vartheta'$. Es setzt sich zusammen aus einer werkstoff- und lastabhängigen Größe $G \cdot \vartheta'$ und der Querschnittsgröße I_T . Bei Annahme, dass die Querschnittsform erhalten bleibt, muss die Verdrillung ϑ' in jedem Punkt des Querschnitts gleich sein. Die ideelle Torsionssteifigkeit $I_{T,i}$ des Verbundquerschnitts bezogen auf den Stahlquerschnitt berechnet sich somit über das Verhältnis der Schubmoduln:

$$n_G = \frac{G_a}{G_c} = \frac{\eta_c + 1}{\eta_a + 1} \cdot \frac{E_a}{E_c} = \frac{\eta_c + 1}{\eta_a + 1} \cdot n_L \quad (2.13)$$

Bei der Berechnung des ideellen Torsionsträgheitsmomentes sind der offene und der geschlossene Querschnitt zu unterscheiden (Bild 2.19). In offenen Querschnitten ist die Schubspannungsverteilung linear veränderlich. Das ideelle Torsionsträgheitsmoment des Verbundquerschnitts sollte als Summe des Torsionsträgheitsmomentes $I_{T,a}$ des Stahlquerschnitts und $I_{T,c}$ des Stahlbetonquerschnitts bezogen auf den Baustahl ermittelt werden:

$$I_{T,i,\text{offen}} = I_{T,a} + \frac{I_{T,c}}{n_G} \quad (2.14)$$

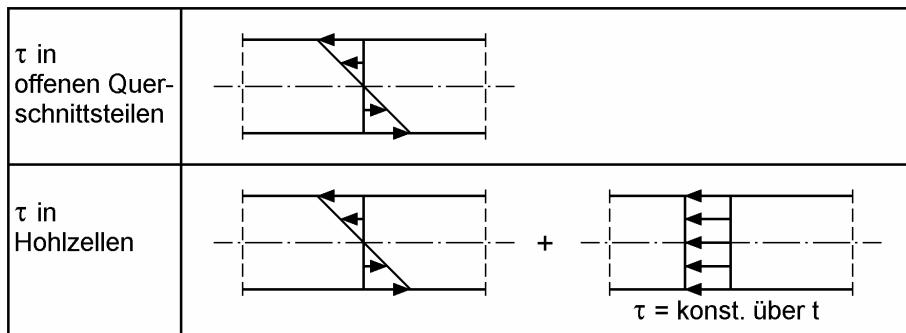


Bild 2.19 Schubspannungsverlauf infolge primärer Torsion

Beim geschlossenen Querschnitt setzt sich der Schubspannungsverlauf aus einem konstanten und einem linear veränderlichen Verlauf zusammen. Zur Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes wird der Querschnitt vereinfachend in ein Mittellinienmodell überführt. Die Dicke der Betonplatte wird auf den Baustahl bezogen und ergibt sich zu $t_{c,i} = t_c/n_G$. Mit diesem Modell lässt sich nun das Torsionsträgheitsmoment des Kastenquerschnitts $I_{T,i,\text{Hohlzelle}}$ berechnen. Das ideelle Gesamttorsionsträgheitsmoment des geschlossenen Querschnitts setzt sich zusammen aus dem Torsionsträgheitsmoment der Hohlzelle(n) und dem Torsionsträgheitsmomenten der einzelnen Querschnittsteile, wobei allein die massive Betonplatte einen nennenswerten Einfluss hat. Das ideelle Torsionsträgheitsmoment des geschlossenen Querschnitts ergibt sich zu:

$$I_{T,i,\text{geschlossen}} = I_{T,i,\text{Hohlzelle}}(t_a, t_{c,i}) + \frac{I_{T,c}}{n_G} \quad (2.15)$$

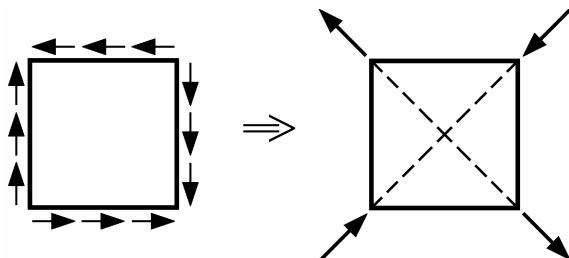


Bild 2.20 Schubbeanspruchtes Element

Betrachtet wird ein unter Schubspannungen stehendes Element (Bild 2.20). In den schrägen Schnittebenen treten Hauptzug- und Druckspannungen auf. Da Beton nur eine geringe Zugfestigkeit aufweist, sind die Voraussetzungen eines linearelastischen Werkstoffverhaltnisses nicht mehr erfüllt. Die Zugkräfte müssen über die Bewehrung aufgenommen werden. Zur Lastabtragung von Schubspannungen in Betonelementen wurden Fachwerkmodelle entwickelt, die das Zusammenspiel zwischen Beton und Bewehrung richtig darstellen. Da nach dem Fachwerkmodell die Zugkomponenten

von der Bewehrung aufgenommen werden, können die für den Zustand I (Beton nicht gerissen) ermittelten Torsionsträgheitsmomente auch für Bereiche im Zustand II (Betonzug vollständig gerissen) Verwendung finden.

Ideeller Wölbwiderstand $I_{\omega,i}$

Die sekundären Schubspannungen infolge Torsion stehen im Gleichgewicht mit den Normalspannungen in Längsrichtung, die sich aus einer Behinderung der Querschnittsverwölbung z. B. durch veränderliche Torsionsbeanspruchungen ergeben. Das sekundäre Torsionsmoment lautet $M_{xs} = -E \cdot I_{\omega} \cdot \vartheta''$ und setzt sich zusammen aus einer werkstoff- und lastabhängigen Größe $E \cdot \vartheta''$ und der Querschnittsgröße I_{ω} . Es ist sofort erkennbar, dass der ideelle Wölbwiderstand $I_{\omega,i}$ abhängig vom Verhältnis der Elastizitätsmoduln ist. Der Wölbwiderstand $I_{\omega} = \int \omega^2 \cdot dA$ ist als Flächenmoment 2. Grades der Wölbordinate ω definiert. Die Wölbordinate ist wiederum abhängig vom Schubmittelpunkt. Der Schubmittelpunkt M ist derjenige Querschnittspunkt, in dem die Querkräfte F_z und F_y angreifen müssen, damit sich der Querschnitt nicht verdreht. Die Lage des Schubmittelpunktes lässt sich über die resultierenden Schubkräfte infolge Querkräfte bestimmen. Da die Schubspannungen nötig sind, um bei Veränderung der Normalspannungen σ_x Gleichgewicht herzustellen, sind auch die resultierenden Schubkräfte vom Verhältnis der Elastizitätsmoduln abhängig.

Im Zustand I kann der auf den Baustahl bezogene ideelle Wölbwiderstand über eine ideelle Dicke der Betonplatte $t_{c,i} = t_c/n_L$ berechnet werden. Da die sekundären Schubspannungen mit Normalspannungen im Gleichgewicht stehen, ist bei der Berechnung des ideellen Wölbwiderstandes im Zustand II der Beton als vollständig gerissen zu betrachten.

2.7.4 Ideelle Torsionssteifigkeit aufgelöster Kastenwände

Zur Berechnung der Torsionssteifigkeit GI_T von Hohlquerschnitten mit aufgelösten Kastenwänden wird eine ideelle Wanddicke t_i eingeführt.

Anstelle eines Bleches ist auch ein Fachwerkverband oder eine Rahmenkonstruktion in der Lage, den in einem Hohlquerschnitt umlaufenden Schubfluss zu übertragen. Die Torsionssteifigkeit GI_T berechnet sich aus der Bedingung, dass die Schubverzerrungen γ des Verbandes den Schubverzerrungen γ eines Bleches mit der gleichen Breite und Höhe und einer ideellen Blechdicke entsprechen (Bild 2.21). Unter Anwendung des Werkstoffgesetzes Gl. (1.8) gilt für die Schubverformung δ_s :

$$\delta_s = \gamma \cdot b = \frac{\tau}{G} \cdot b = \frac{T}{G \cdot t_i} \cdot b \quad (2.16)$$

Beansprucht durch den Einheitsschubfluss $T = „1“$ ergibt sich für die ideelle Blechdicke t_i :

$$t_i = \frac{1}{G \cdot \delta_s(\text{Verband})} \cdot b \quad (2.17)$$

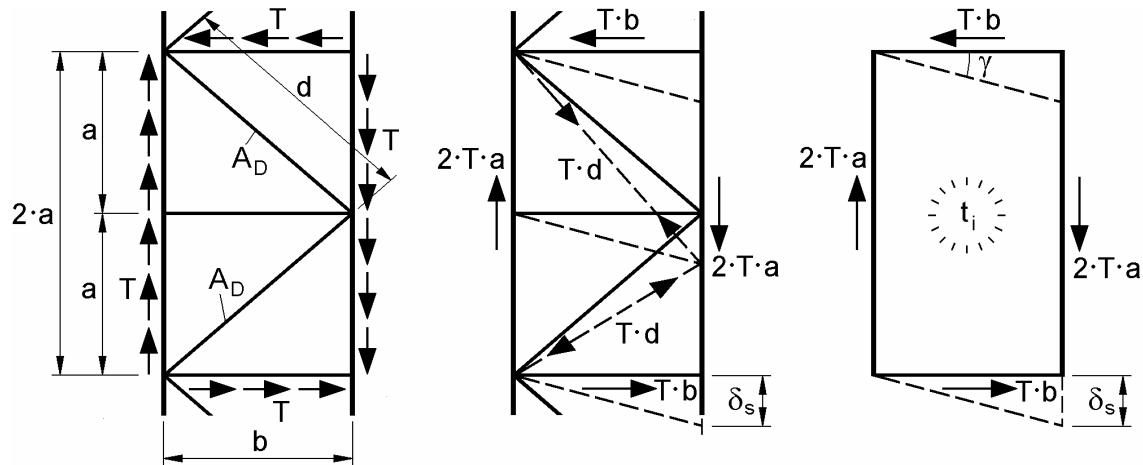
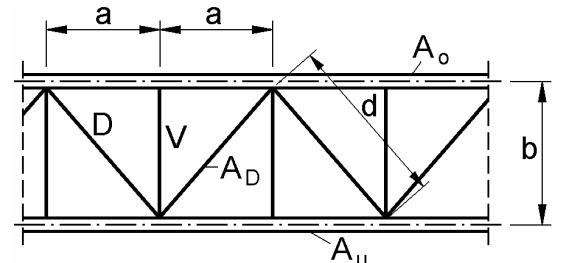


Bild 2.21 Verband und Blech unter Schubbeanspruchung

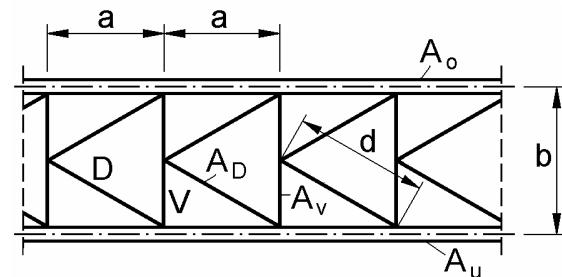
Tabelle 2.10 Ideelle Blechdicken zur Ermittlung von I_T und zugehörige Verbandskräfte



$$t_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a \cdot b}{\frac{d^3}{A_D} + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{A_o} + \frac{1}{A_u} \right)}$$

$$D = T \cdot d$$

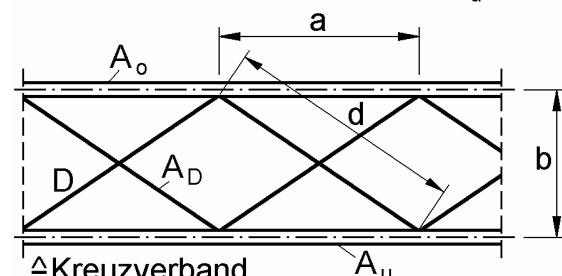
$$V = 0$$



$$t_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a \cdot b}{\frac{2d^3}{A_D} + \frac{b^3}{4A_V} + \frac{a^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{A_o} + \frac{1}{A_u} \right)}$$

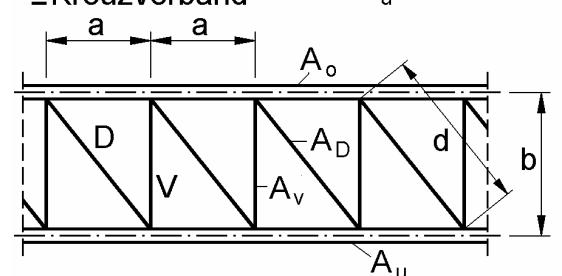
$$D = T \cdot d$$

$$V = T \cdot \frac{h}{2}$$



$$t_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a \cdot b}{\frac{d^3}{2A_D} + \frac{a^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{A_o} + \frac{1}{A_u} \right)}$$

$$D = T \cdot d$$



$$t_i = \frac{E}{G} \cdot \frac{a \cdot b}{\frac{d^3}{A_D} + \frac{b^3}{A_V} + \frac{a^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{A_o} + \frac{1}{A_u} \right)}$$

$$D = T \cdot d$$

$$V = T \cdot h$$

In Tabelle 2.10 findet sich eine Zusammenstellung üblicher Verbandsarten nach [89]. Die Ober- und Untergurtflächen sind enthalten, können jedoch meist als sehr groß betrachtet werden. Es ist zu beachten, dass die ideelle Blechdicke t_i nur Schub, aber keine Normalspannungen aufnehmen kann. Zur Berechnung der Biegesteifigkeit kann sie dementsprechend nicht herangezogen werden. Die Verbandskräfte ermitteln sich aus dem gegebenen Schubfluss der betrachteten „Verbandsscheibe“.

2.7.5 Ideelle Schubsteifigkeit von Queraussteifungen

Queraussteifungen dienen zur Formerhaltung von Querschnitten mit großen Abmessungen, wie sie im Brückenbau üblich sind. Der Einfluss der Profilverformung führt unter Anderem dazu, dass exzentrische Beanspruchungen in Kastenträgern lediglich im Bereich von Queraussteifungen als *St. Venantsche* Torsion in den Träger eingeleitet werden können. Queraussteifungen können als Querverband, Querrahmen oder Querscheibe bzw. Schott ausgebildet sein.

Die vertikale Schubnachgiebigkeit dieser Aussteifungen können über ideelle Schubflächen mit $A_s = f_Q \cdot t_i \cdot h$ erfasst werden. Die ideelle Schubsteifigkeit ergibt sich dann zu $E A_s$. Die ideelle Schubfläche berechnet sich wiederum aus der Bedingung gleicher Schubverzerrungen, t_i bezeichnet hierbei die ideelle Blechdicke und h die geometrische Höhe. Der Faktor f_Q ist querschnittsabhängig. Für offene Querschnitte beträgt $f_Q = 1$. In Kastenquerschnitten reduziert sich die Beanspruchung der Queraussteifung infolge dem *St. Venantschen* Torsionsschubfluss (Bild 2.22). Bei einer Modellierung der Queraussteifung als Stab wird dieser Effekt mit dem Faktor f_Q erfasst.

Die ideelle Blechdicke einer Queraussteifung ermittelt sich an dem in Bild 2.23 dargestellten Ersatzsystem und bezieht sich auf ein Blech der Größe $b_o/2 \cdot h$. Zuerst wird die Schubverformung, d. h. die vertikale Verformung am Knoten 1, unter Berücksichtigung einer Einheitslast „1“ berechnet und die ideelle Blechdicke entsprechend Abschnitt 2.7.4 bestimmt. Um das Verformungsverhalten im Gesamtsystem darzustellen, muss die ideelle Schubfläche mit dem Faktor f_Q multipliziert werden. Für Queraussteifungen mit vertikalen Stegen finden sich in [112] aufbereitete Lösungen (Tabelle 2.11).

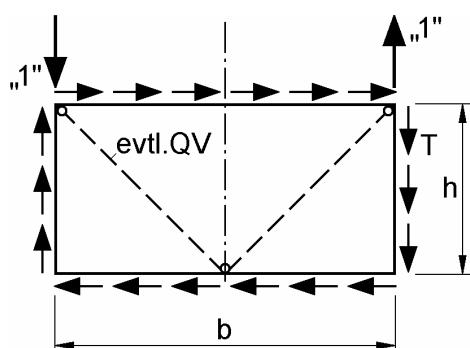


Bild 2.22 Gleichgewichtszustand – Beanspruchung Queraussteifung im Kastenträger

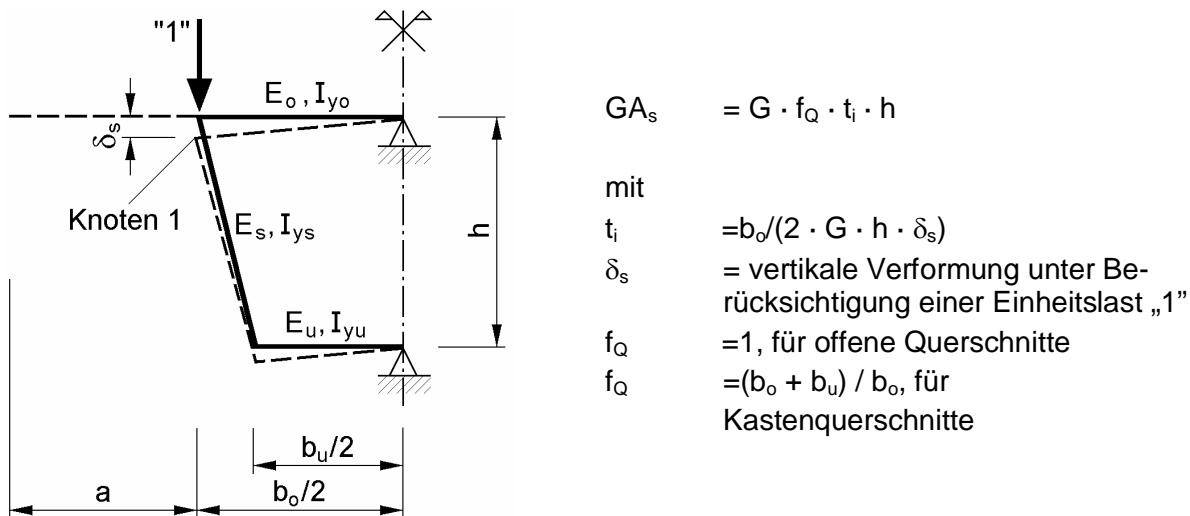
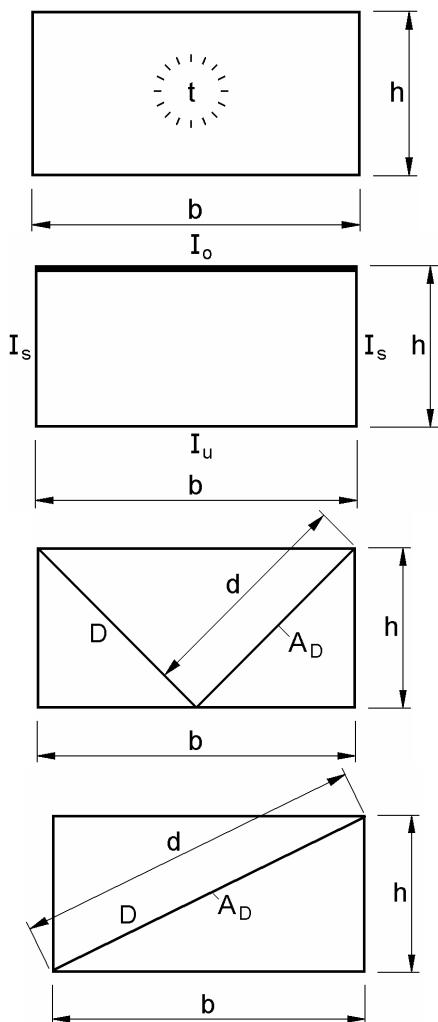


Bild 2.23 Ersatzsystem zur Berechnung der Schubsteifigkeit der Queraussteifung

Tabelle 2.11 Ideelle Blechdicken zur Ermittlung der Schubsteifigkeit von Queraussteifungen und zugehörige Schnittgrößen (V_i entspricht der ideellen Querkraft im Ersatzstab), $f_Q = 1$ für offene Querschnitte und $f_Q = 2$ für einen Kastenquer- schnitt



Querscheibe:

$$t_i = f_Q \cdot t$$

$$V = \frac{1}{f_Q} \cdot V_i$$

Querrahmen:

$$t_i = f_Q \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{12 \cdot I_s \cdot I_u}{I_o \cdot b \cdot h} \cdot \frac{b \cdot I_s \cdot (I_o + I_u) + 6 \cdot h \cdot I_o \cdot I_u}{(6 \cdot a \cdot I_u + b \cdot I_s) \cdot (a \cdot I_u + b \cdot I_s)}$$

$$V = \frac{1}{f_Q} \cdot V_i$$

Querverband (K-Verband):

$$t_i = f_Q \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{b \cdot h \cdot A_D}{2 \cdot d^3}$$

$$D = \frac{1}{f_Q} \cdot \frac{V_i \cdot h}{d}$$

Querverband (Diagonalstab):

$$t_i = f_Q \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{b \cdot h \cdot A_D}{d^3}$$

$$D = \frac{1}{f_Q} \cdot \frac{V_i \cdot h}{d}$$

2.8 Hinweise zur Bemessung

Die Bemessung von Brücken ist seit 2003 in den DIN-Fachberichten, den Nationalen Anwendungsdokumenten der zugehörigen Eurocodes, geregelt [20] – [23]:

- DIN-Fachbericht 101: Einwirkungen im Brückenbau
- DIN-Fachbericht 102: Betonbrücken
- DIN-Fachbericht 103: Stahlbrücken
- DIN-Fachbericht 104: Verbundbrücken

Für die Anwendung bei Straßenbrücken sind zusätzlich die „Allgemeinen Rundschreiben“ und die ZTV-ING [130] zu beachten. Für Eisenbahnbrücken finden sich ergänzende Regelungen in der Richtlinie 804 [87].

Zur Sicherstellung ausreichender Tragfähigkeit und zur Gewährleistung der Gebrauchstauglichkeit wird zwischen den Nachweisen in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit auf Traglastniveau und der Gebrauchstauglichkeit auf Gebrauchslastniveau unterschieden. Zusätzlich müssen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken weitere Betriebsfestigkeitsnachweise geführt werden.

Aktuell ist bei Verbundbrücken die Berücksichtigung von Schnittgrößenumlagerungen infolge von Plastizierungen im Stahl nicht erlaubt. Beim Nachweis der Querschnittstragfähigkeit bei geraden Verbundbrücken sind im Grenzzustand der Tragfähigkeit Plastizierungen zugelassen (Nachweisform „Elastisch–Plastisch“). Eine ausreichende Rotationskapazität muss dabei gewährleistet sein. Querschnitte werden entsprechend ihrer druckbeanspruchten Teile über die Nachweisform

$$\text{vorh}(b/t) \leq \text{grenz}(b/t) \quad (2.18)$$

in 4 Klassen eingeordnet. Querschnitte, die mindestens in Klasse 2 eingeordnet werden können, gelten als kompakte Querschnitte, die eine volle plastische Querschnittstragfähigkeit entwickeln können. Zur Vermeidung von Plastizierungen auf Gebrauchslastniveau ist jedoch zusätzlich der Gebrauchstauglichkeitsnachweis „Begrenzung der Spannungen“ zu führen (Nachweisform „Elastisch–Elastisch“). Das zeitabhängige Verhalten des Betons aus Kriechen + Schwinden muss bei diesem Nachweis berücksichtigt werden.

Bei der Bemessung von gekrümmten Verbundbrücken dürfen bei der Ermittlung der Querschnittsausnutzung keine plastizierten Bereiche im Stahl zugelassen werden.

Weitere zu führende Nachweise auf Gebrauchslastniveau sind das Begrenzen von Verformungen und eventuell die Untersuchung von Schwingungen. Im Beton sind die Rissbreiten zu beschränken.

3 Grundlegende Beziehungen für gekrümmte Träger

3.1 Vorbemerkungen

Die Träger weisen eine gleich bleibende Krümmung auf und sind in z-Richtung oder durch Torsion belastet. Ausgehend vom statisch bestimmten Grundsysteem wird gezeigt, dass der Verlauf der Biege- und Torsionsmomente im beidseits torsionsstarr gelagerten Einfeldträger und bei konstanter Torsionssteifigkeit allein von der Geometrie abhängt. Durch Bilden von Teilsystemen können die Auflagerreaktionen sowie die Biegemomente an der Schnittstelle über Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmt werden. Eine Kontrolle der Auflagerbeanspruchungen liefert immer das Bilden von Gleichgewicht um die Sehne, die die Verbindung der Endauflagerpunkte schafft.

Die Schnittgrößenverläufe des Einfeldträgers mit Gabellagern und die Differentialgleichungen werden in diesem Kapitel angegeben. Weiterhin werden die Beanspruchungen eines gekrümmten Trägers ins Hauptachsensystem transformiert.

3.2 Statisch bestimmter Einfeldträger

Ein System ist statisch bestimmt, wenn die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = \sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \quad (3.1)$$

unter Berücksichtigung aller Rand- und Übergangsbedingungen ausreichen, um die Auflagerreaktionen und Schnittgrößen zu ermitteln. Der gekrümmte Träger ist statisch bestimmt gelagert, wenn ein Auflager torsionsstarr gelagert ist. Dann stehen drei Gleichgewichtsbedingungen drei unbekannten Auflagerreaktionen gegenüber. Der statisch bestimmt gelagerte Einfeldträger nach Bild 3.1 mit R konstant wird durch ein Torsionsmoment M_{xB} am Auflager B beansprucht.

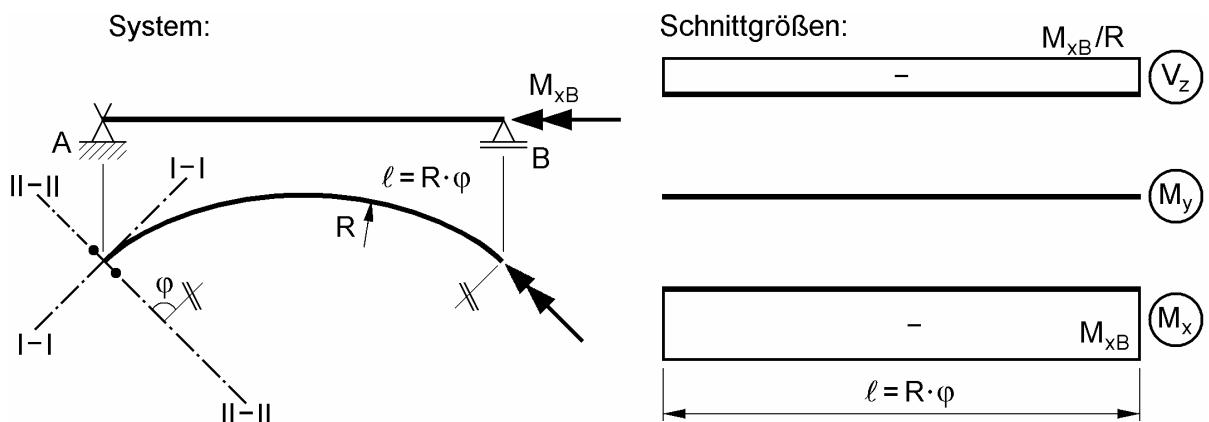


Bild 3.1 Einfeldträger mit einseitiger Torsionseinspannung in Auflager A und Torsionsmoment M_{xB} in Auflager B

Die Schnittgrößen ergeben sich aus $\Sigma F_z = \Sigma M_{I-I} = \Sigma M_{II-II} = 0$ und sind in Bild 3.1 rechts dargestellt. Es ist festzustellen, dass bei der Abtragung des Torsionsmomentes M_{xB} das Biegemoment M_y Null ist. Das Torsionsmoment M_{xB} ist über die gesamte Länge konstant und kann folglich komplett der *St. Venantschen* Torsion zugeordnet werden.

3.3 Beidseitig gabelgelagerter Träger

3.3.1 Vorüberlegung

Betrachtet wird nun der in Bild 3.2 dargestellte beidseits gelagerte Einfeldträger mit dem Radius R , Öffnungswinkel ϕ und konstantem Querschnitt. Untersucht wird der Einfluss der Biegesteifigkeit auf die Torsion. Zu diesem Zweck wird der Träger mit einer Gleichstreckenlast q_z belastet. Der an beiden Seiten gabelgelagerter Träger ist einfach statisch unbestimmt. Über die Gleichgewichtsbedingungen können die Schnittgrößenverläufe nicht eindeutig bestimmt werden. Der Einfluss von Verformungen ist zu berücksichtigen. Dies geschieht an dieser Stelle mithilfe des Kraftgrößenverfahrens. Das statisch bestimmte Ersatzsystem wird nach Bild 3.1 gewählt. Das Torsionsmoment $M_{xB} = „1“$ liefert den Einheitszustand. Die Verdrehung am Auflager B infolge der Last- und Einheitszustände wird mithilfe der Arbeitsgleichung ermittelt. Unter Vernachlässigung der Querkraft lautet der Arbeitssatz:

$$\bar{I} \cdot \delta_i = \int_{\ell} \left(\frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_T} \right) \cdot dx \quad (3.2)$$

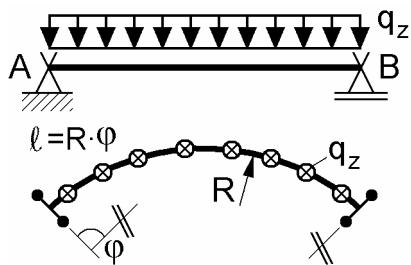


Bild 3.2 Einfeldträger mit beidseitiger Torsionseinspannung

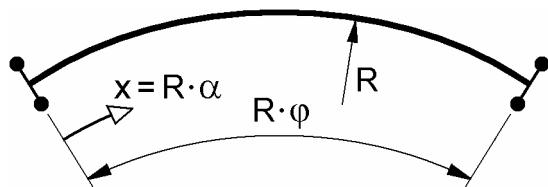
Da das Biegemoment im Einheitszustand Null (s. Bild 3.1) ist, hängt die Verdrehung am Auflager B nur von der Torsionssteifigkeit GI_T ab, d. h. das Biegemoment kann am statisch bestimmten Einfeldträger mit Gabellager berechnet werden. Bei über die Länge konstanter Torsionssteifigkeit GI_T können die Torsionsmomente an Teilsystemen berechnet werden (s. auch Abschnitt 3.3.3).

3.3.2 Schnittgrößen des Einfeldträgers mit Gabellagern

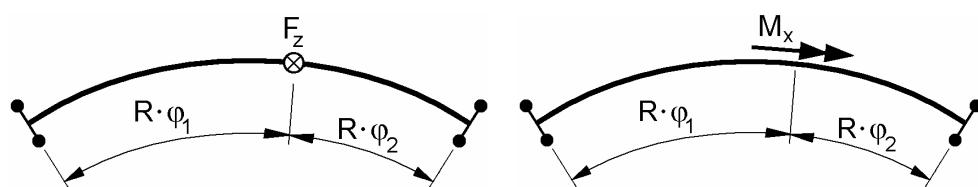
Formeln zur Ermittlung der Schnittgrößen im Sonderfall des kreisförmig gekrümmten Trägers werden bei Dabrowski [14] angegeben. Für den wölbfreien Querschnitt sind sie in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Die Aufteilung des Torsionsmomentes in primäre und sekundäre Torsion sowie das Wölbmoment sind wie auch beim geraden Träger von der Stabkennzahl ε_T abhängig und können nicht mehr allein über Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmt werden. Eine Zusammenfassung dieser Größen findet sich in Tabelle 3.2.

Tabelle 3.1 Schnittgrößen M_y und M_x des gabelgelagerten, kreisförmig gekrümmten Einfeldträgers nach Dabrowski [14]

Grundsystem:



Teil 1:



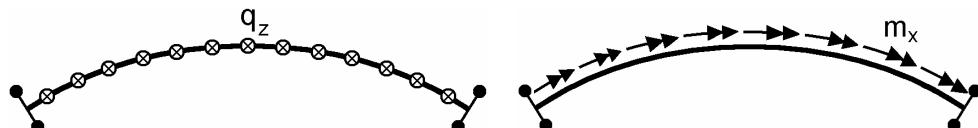
$$M_y \quad \alpha \leq \varphi_1 \quad F_z \cdot R \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \sin \alpha \quad -M_x \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha \geq \varphi_1 \quad F_z \cdot R \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \sin \alpha \quad -M_x \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \sin \alpha$$

$$M_x \quad \alpha \leq \varphi_1 \quad F_z \cdot R \cdot \left(\frac{\varphi_2}{\varphi} - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \cos \alpha \right) \quad M_x \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha \geq \varphi_1 \quad F_z \cdot R \cdot \left(\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \cos(\varphi - \alpha) - \frac{\varphi_1}{\varphi} \right) \quad -M_x \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \cos(\varphi - \alpha)$$

Teil 2:



$$M_y \quad q_z \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} - 1 \right) \quad -m_x \cdot R \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} - 1 \right)$$

$$M_x \quad q_z \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{\cos \alpha - \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} - \frac{2 \cdot \alpha - \varphi}{2} \right) \quad m_x \cdot R \cdot \frac{\cos \alpha - \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$$

Tabelle 3.2 Schnittgrößen M_{xp} , M_{xs} und M_ω des gabelgelagerten, kreisförmig gekrümmten Einfeldträgers nach Dabrowski [14]**Einzellast F_z bzw. M_x entsprechend Tabelle 3.1, Teil 1**

$$\begin{aligned} M_{xs} = M_\omega' \quad \alpha \leq \varphi_1 & \quad (M_x \cdot (1 - \eta) + F_z \cdot R \cdot \eta) \cdot \frac{\sinh(\lambda \cdot R \cdot \varphi_2)}{\sinh \varepsilon_T} \cdot \cosh(\lambda \cdot R \cdot \alpha) \\ & + (M_x - F_z \cdot R) \cdot \eta \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \cos \alpha \\ \alpha \geq \varphi_1 & \quad -(M_x \cdot (1 - \eta) + F_z \cdot R \cdot \eta) \cdot \frac{\sinh(\lambda \cdot R \cdot \varphi_1)}{\sinh \varepsilon_T} \cdot \cosh(\varepsilon_T - \lambda \cdot R \cdot \alpha) \\ & - (M_x - F_z \cdot R) \cdot \eta \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \cos(\varphi - \alpha) \end{aligned}$$

$$M_{xp} = M_x - M_{xs}$$

$$\begin{aligned} M_\omega \quad \alpha \leq \varphi_1 & \quad \frac{(M_x \cdot (1 - \eta) + F_z \cdot R \cdot \eta)}{\lambda} \cdot \frac{\sinh(\lambda \cdot R \cdot \varphi_2)}{\sinh \varepsilon_T} \cdot \sinh(\lambda \cdot R \cdot \alpha) \\ & + (M_x \cdot R - F_z \cdot R^2) \cdot \eta \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi} \cdot \sin \alpha \\ \alpha \geq \varphi_1 & \quad \frac{(M_x \cdot (1 - \eta) + F_z \cdot R \cdot \eta)}{\lambda} \cdot \frac{\sinh(\lambda \cdot R \cdot \varphi_1)}{\sinh \varepsilon_T} \cdot \sinh(\varepsilon_T - \lambda \cdot R \cdot \alpha) \\ & + (M_x \cdot R - F_z \cdot R^2) \cdot \eta \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned}$$

Gleichstrecklast q_z bzw. m_x entsprechend Tabelle 3.1, Teil 2

$$\begin{aligned} M_{xs} = M_\omega' & \quad - \frac{m_x \cdot (1 - \eta) + q_z \cdot R \cdot \eta}{\lambda} \cdot \frac{\cosh(\lambda \cdot R \cdot \alpha) - \cosh(\varepsilon_T - \lambda \cdot R \cdot \alpha)}{\sinh \varepsilon_T} \\ & + (m_x \cdot R - q_z \cdot R^2) \cdot \eta \cdot \frac{\cos \alpha - \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

$$M_{xp} = M_x - M_{xs}$$

$$\begin{aligned} M_\omega & \quad \frac{m_x \cdot (1 - \eta) + q_z \cdot R \cdot \eta}{\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{\sinh(\lambda \cdot R \cdot \alpha) + \sinh(\varepsilon_T - \lambda \cdot R \cdot \alpha)}{\sinh \varepsilon_T} \right) \\ & + (m_x \cdot R^2 - q_z \cdot R^3) \cdot \eta \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{G I_T}{E I_\omega}},$$

$$\varepsilon_T = R \cdot \varphi \cdot \lambda \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{1 + (\lambda \cdot R)^2}$$

3.3.3 Gleichgewicht in Teilsystemen

Durch Transformation der Lasten in den Schnittpunkt der senkrecht zu den gedrehten Auflagerachsen stehenden Polstrahlen und geschicktes Bilden von Teilsystemen können die Auflagerreaktionen und das Biegemoment $M_y(\varphi)$ im Schnitt auf einfache Weise bestimmt werden. Diese Vorgehensweise führt zu einem tiefer gehenden Verständnis des Lastabtrags und des Gleichgewichts im gekrümmten Träger. Voraussetzung ist eine über die Länge konstante Torsionsteifigkeit GI_T . In diesem Fall kann eine torsionsfreie Lagerung an der Schnittstelle angenommen werden.

Betrachtet werden Einfeldträger mit der Belastung F_z , M_x , q_z oder m_x . Die Belastung wird in den Schnittpunkt der senkrecht zu den gedrehten Auflagerachsen stehenden Polstrahlen transformiert. Das resultierende Moment M wird unter Anwendung des Sinussatzes nach Bild 3.3 zerlegt, so dass die entstehenden Momente M_{x1} und M_{x2} in die Wirkungsrichtung der Gabellager zeigen. Die resultierende Kraft F wird im Verhältnis des Öffnungswinkels eines Teilsystems zum einschließenden Winkel der Polstrahlen aufgeteilt. An den statisch bestimmten Teilsystemen können die Auflagerreaktionen und das Biegemoment $M_y(\varphi)$ des beidseits torsionsstarr gelagerten Einfeldträgers bestimmt werden.

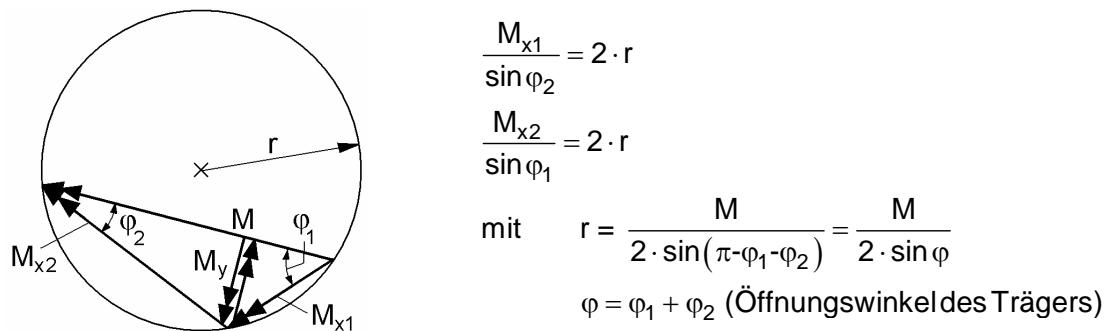
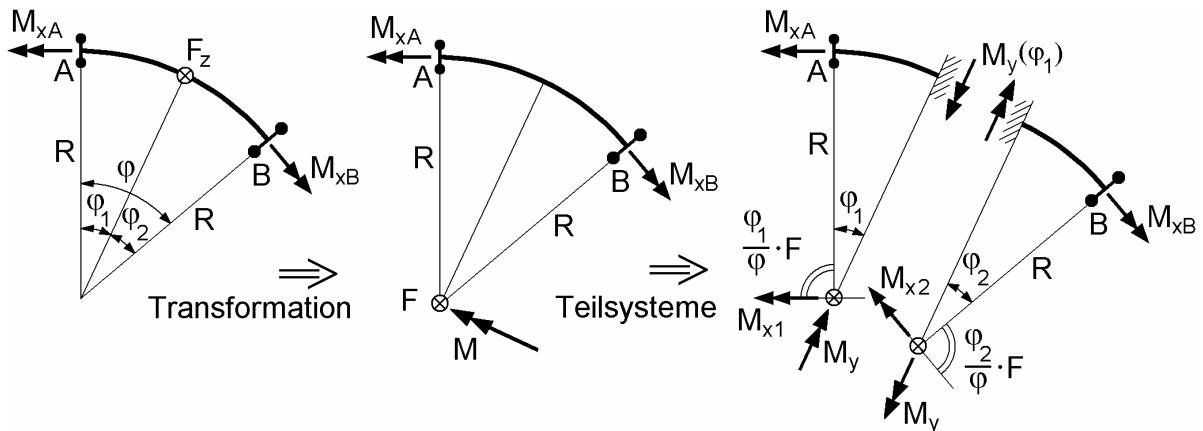


Bild 3.3 Zerlegung des resultierenden Momentes M mithilfe des Sinussatzes

Für den Einfeldträger mit Einzellast F_z bzw. M_x sind die Transformation und die Teilsysteme in Tabelle 3.3 formuliert. Für den Einfeldträger mit konstanter Gleichstreckenlast q_z bzw. m_x sind sie in Tabelle 3.4 angegeben. Die Gleichstreckenlast wird durch die Resultierende in ihrem Schwerpunkt zusammengefasst. Das Streckentorsionsmoment wird in jedem Punkt in die Wirkungsrichtungen der Gabellager zerlegt.

3.3.4 Gleichgewicht um die Sehne

Betrachtet werden vertikal beanspruchte Einfeldträger mit Gabellagern an beiden Auflagern. Durch einfache Überlegungen kann die Beanspruchung abgeschätzt oder die Lösung kontrolliert werden. Dies ist besonders dann wichtig, wenn die Krümmung am geraden Träger durch Ersatzlasten oder Vorverformungen berücksichtigt werden soll.

Tabelle 3.3 Einfeldträger mit Gabellagern und F_z bzw. M_x : Teilsysteme**Transformation**

$$F = F_z$$

$$M = F_z \cdot R$$

Teilsysteme

$$M_{x1} = M \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi}$$

$$M_{x2} = M \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}$$

Auflagerreaktionen und Biegemoment

$$A_z = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot F$$

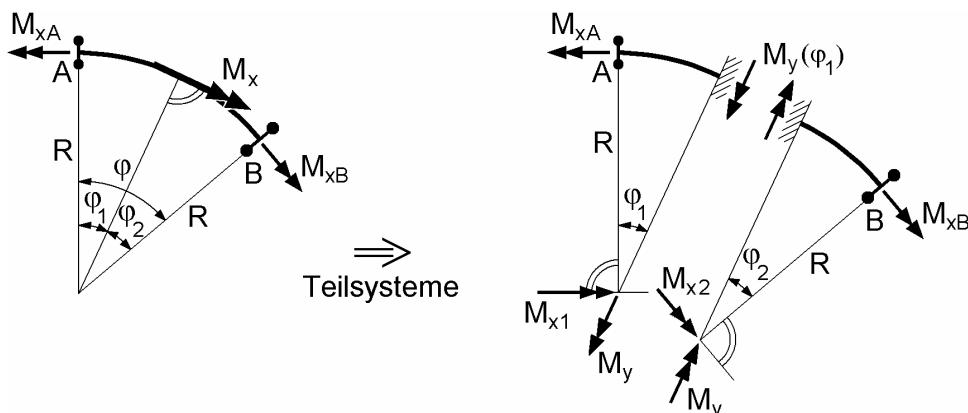
$$B_z = \frac{\varphi_1}{\varphi} \cdot F$$

$$M_{xA} = -M_{x1} + A_z \cdot R$$

$$M_{xB} = M_{x2} - B_z \cdot R$$

$$M_y(\varphi_1) = M_{x1} \cdot \sin \varphi_1$$

$$= M_{x2} \cdot \sin \varphi_2$$

**Teilsysteme**

$$M_{x1} = M_x \cdot \sin \varphi_2 / \sin \varphi$$

$$M_{x2} = M_x \cdot \sin \varphi_1 / \sin \varphi$$

Auflagerreaktionen und Biegemoment

$$A_z =$$

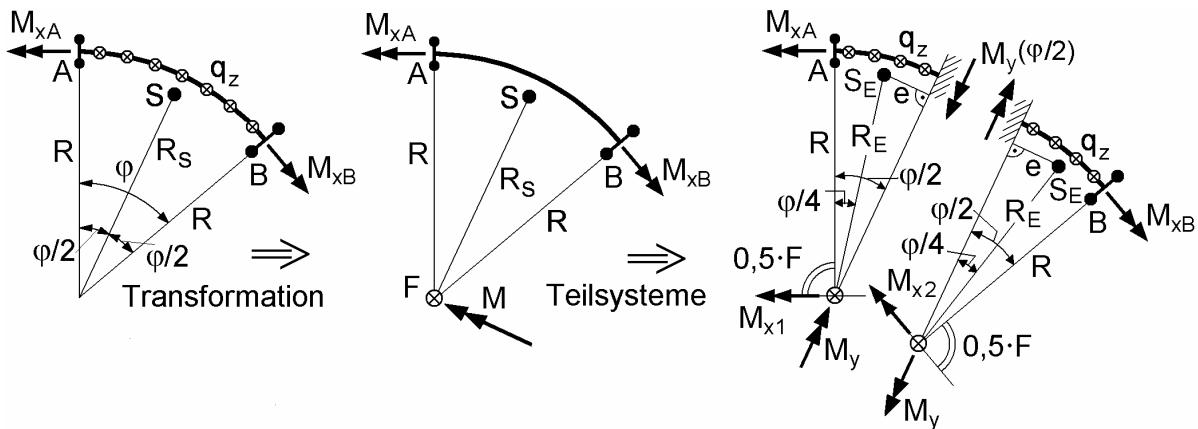
$$B_z = 0$$

$$M_{xA} = M_{x1}$$

$$M_{xB} = -M_{x2}$$

$$M_y(\varphi_1) = -M_{x1} \cdot \sin \varphi_1$$

$$= -M_{x2} \cdot \sin \varphi_2$$

Tabelle 3.4 Einfeldträger mit Gabellagern und q_z bzw. m_x : Teilsysteme**Transformation**

$$F = q_z \cdot R \cdot \varphi$$

$$M = F \cdot R_s = F \cdot \frac{2 \cdot R}{\varphi} \cdot \sin(\varphi/2)$$

Teilsysteme

$$M_{x1} =$$

$$M_{x2} = 2 \cdot q_z \cdot R^2 \cdot \sin^2(\varphi/2) / \sin \varphi$$

Auflagerreaktionen und Biegemoment

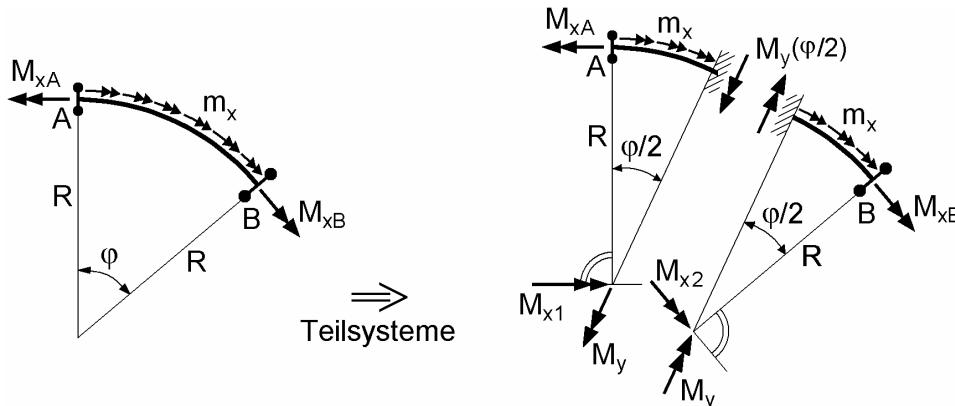
$$A_z =$$

$$B_z = 0,5 \cdot F = 0,5 \cdot q_z \cdot R \cdot \varphi$$

$$M_{xA} = M_{x1} - A_z \cdot R$$

$$M_{xB} = -M_{x2} + B_z \cdot R$$

$$\begin{aligned} M_y(\varphi/2) &= M_{x1} \cdot \sin(\varphi/2) - 2 \cdot q_z \cdot R^2 \cdot \sin^2(\varphi/4) \\ &= M_{x2} \cdot \sin(\varphi/2) - 2 \cdot q_z \cdot R^2 \cdot \sin^2(\varphi/4) \end{aligned}$$

**Teilsysteme**

$$\begin{aligned} M_{x1} = M_{x2} &= \int_{\alpha=0}^{\varphi} m_x \cdot \sin \alpha / \sin \varphi \cdot d\alpha = \int_{x=0}^{R \cdot \varphi} m_x \cdot \sin(x/R) / \sin \varphi \cdot dx \\ &= -\frac{m_x \cdot R}{\sin \varphi} \cdot [\cos(x/R)]_0^{R \cdot \varphi} = \frac{m_x \cdot R}{\sin \varphi} \cdot (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Auflagerreaktionen und Biegemoment

$$A_z = 0$$

$$B_z = 0$$

$$M_{xA} = M_{x1}$$

$$M_{xB} = -M_{x2}$$

$$M_y(\varphi/2) \approx -0,5 \cdot M_{x1} \cdot \sin(\varphi/2) \approx -0,5 \cdot M_{x2} \cdot \sin(\varphi/2)$$

Bei Lasten in z-Richtung entstehen eine durch die Krümmung hervorgerufene Verdrehung des Systems um die Achse, die die Verbindung zwischen den Auflagern darstellt und hier als Achse I-I bezeichnet werden soll. Die Summe der Torsionsmomente an den Auflagern kann durch Gleichgewichtsbildung um die Achse I-I bestimmt und auf die lokale Stabachse des gekrümmten Trägers bezogen werden. Zur Bildung von Gleichgewicht sind die Lasten und ihr Hebelarm zur Achse I-I zu ermitteln. Für den Lastfall „Gleichstreckenlast“ und „Einzellast“ sind die Angaben in Bild 3.4 zusammengestellt. Da der Kreisbogen beim Lastfall „Gleichstreckenlast“ symmetrisch belastet ist, muss sich die Torsion gleichmäßig auf beide Auflager aufteilen. Für die auf die gekrümmte Stabachse bezogene Summe der Torsionsmomente an den Auflagern A und B gilt:

$$-M_{xA} = M_{xB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{qz} \cdot e_{qz}}{\cos(\varphi/2)} = q_z \cdot R^2 \cdot (\tan(\varphi/2) - \varphi/2) \quad (3.3)$$

Für den Lastfall „Einzellast“ ergibt sich die auf die Krümmung bezogene Summe der Torsionsmomente am Auflager zu:

$$-M_{xA} + M_{xB} = \frac{F_z \cdot v_{Fz}}{\cos(\varphi/2)} \quad (3.4)$$

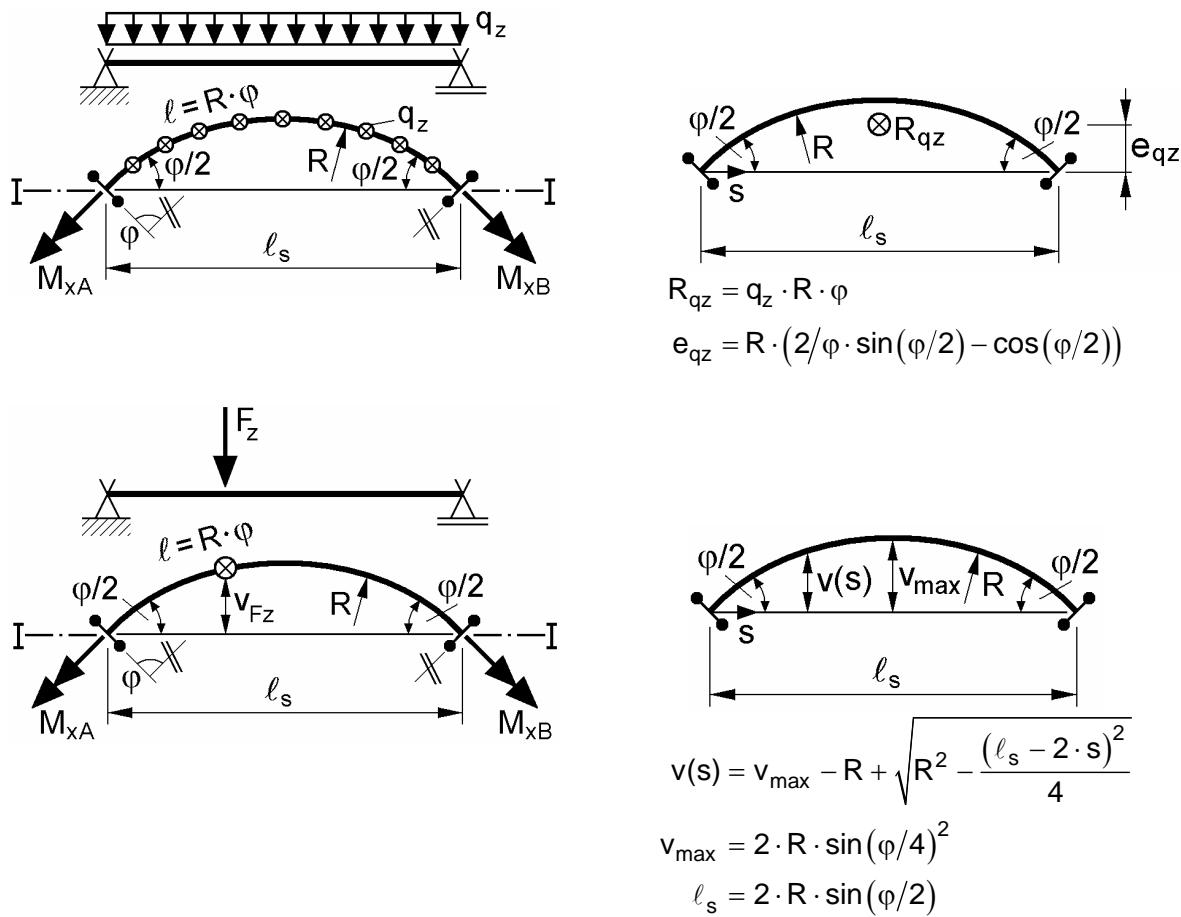


Bild 3.4 Einfeldträger: Belastung und Hebelarm zur Achse I-I

3.4 Zweifeldträger mit Gabellagern in den Endauflagern

Beim Zweifeldträger gibt es eine Schar von Gleichgewichtszuständen. Der äußere Gleichgewichtszustand liefert deshalb noch keine Kontrolle der Lösung. Er zeigt jedoch die gegenseitige Beeinflussung von Biege- und Torsionsmomenten auf. Betrachtet wird ein mit einer Gleichstreckenlast beanspruchter Zweifeldträger mit Gabellagern an den Endauflagern. Auch hier wird das Gleichgewicht um die Achse I-I gebildet. Dabei dreht die Resultierende der Beanspruchung R_{qz} entgegen der Richtung der Auflagerkraft B_z . Die zur Bildung von Gleichgewicht benötigten Berechnungen sind in Bild 3.5 zusammengefasst.

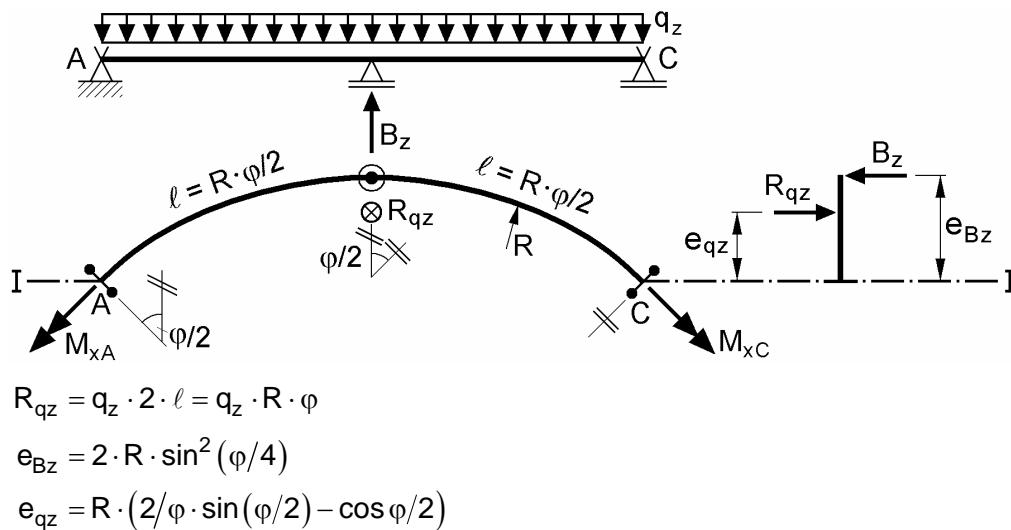


Bild 3.5 Zweifeldträger: Beanspruchung und Hebelarme zur Achse I-I

Die Summe der Torsionsmomente am Auflager bezogen auf die Achse I-I ergibt sich somit zu:

$$-M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I} = R_{qz} \cdot e_{qz} - B_z \cdot e_{Bz} \quad (3.5)$$

Die Auswirkung der Biegung auf die Summe der auf die Achse I-I bezogenen Torsionsmomente am Auflager ($-M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I}$) soll nun durch den Koeffizienten f_{Mx} ausgedrückt werden. Es gilt:

$$f_{Mx} = \frac{-M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I}}{R_{qz} \cdot e_{qz}} = \frac{R_{qz} \cdot e_{qz} - B_z \cdot e_{Bz}}{R_{qz} \cdot e_{qz}} = 1 - \beta \cdot f_B$$

mit $\beta = 2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4} / \left(\frac{2}{\varphi} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \right)$ und $f_B = \frac{B_z}{2 \cdot q_z \cdot l}$

(3.6)

Der obere Grenzwert für f_{Mx} beträgt $f_{Mx} = 1$ und stellt den Beanspruchungszustand des Einfeldträgers dar. Infolge des hinzugefügten Auflagers B reduziert sich die Beanspruchung in den Gabellagern. Der β -Faktor ist ein reiner Geometriefaktor, der mit stärker werdender Krümmung anwächst. Der Faktor f_B stellt die Auflast dar, die vom Auflager B aufgenommen wird. Je größer die Auflagerkraft B_z ist, desto größer wird

der Faktor f_B . Da der Biegemomentenverlauf von der Auflagerkraft B_z abhängt, zeigt der Faktor f_{Mx} den Zusammenhang zwischen Biegung und Torsion auf. Es gilt:

$$\text{Fall 1: } f_{Mx} = 0 \Rightarrow -M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I} = 0$$

$$\text{Fall 2: } f_{Mx} > 0 \Rightarrow -M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I} < 0$$

$$\text{Fall 3: } f_{Mx} < 0 \Rightarrow -M_{xA,I-I} + M_{xC,I-I} > 0$$

Im ersten Fall stehen die Belastung q_z und die Auflagerkraft B_z im Gleichgewicht. Die Gabellager erfahren keine Torsion. Im zweiten Fall hält die Auflagerkraft B_z gegen die durch q_z verursachte Verdrehung in Achse I-I. Eine Vergrößerung der Krümmung bzw. Verstärkung des Zwischenauflagerbereichs wirkt sich reduzierend auf die Belastung in den Gabellagern aus. Im dritten Fall verursacht die Auflagerkraft B_z eine größere Verdrehung um die Achse I-I als die Beanspruchung q_z . Die in den Gabellagern aufzunehmende Torsion dreht nun positiv um die Achse I-I. Eine Vergrößerung der Krümmung bzw. Verstärkung des Zwischenauflagerbereichs wirkt sich vergrößernd auf die Belastung in den Gabellagern aus.

3.5 Lastgrößen im Hauptachsensystem und Transformation

Um eine Berechnung nach der Stabtheorie zu ermöglichen, wird die Stabachse des gekrümmten Trägers in der Regel im Schwer- bzw. Schubmittelpunkt des einfach-symmetrischen Querschnitts angenommen.

Betrachtet wird ein Kreisbogensegment. Die Länge der durch einen beliebigen Querschnittspunkt laufenden Faser hängt von ihrem Abstand zur gewählten Stabachse ab. Wenn der Kreisbogen, den die Faser beschreibt, einen kleineren Radius aufweist als die Stabachse, ist auch die Länge der Faser kürzer. Beschreibt die Faser einen größeren Kreisbogen, ist sie entsprechend länger. Hieraus folgt, dass die Flächenhalbierende des Kreisbogensegments nicht im Schubmittelpunkt des Querschnitts liegt und somit auch nicht in der gewählten Stabachse. Betrachtet wird die Fläche des Kreisbogensegments. Die gekrümmte Schwerachse, d. h. die Achse, die die Fläche in zwei gleich große Flächen teilt, liegt im Abstand e_s zur gewählten Stabachse. In Bild 3.6 ist die Flächenhalbierende des Kreisbogensegments grafisch dargestellt.

Bei einer Berechnung mit Stabelementen werden Strecken- und Flächenlasten in die Achse, die durch den Schubmittelpunkt des Querschnitts führt, transformiert. Bei einem gekrümmten Träger sind die unterschiedlichen Längen der Fasern bei der Transformation zu berücksichtigen. Eine konstante Flächenlast über die gesamte Breite des Querschnitts wird z. B. eine Torsionsbelastung in der Schubmittelpunktsachse hervorrufen. In Tabelle 3.5 ist für ausgewählte Lastfälle die Transformation auf die Schubmittelpunktsachse angegeben.

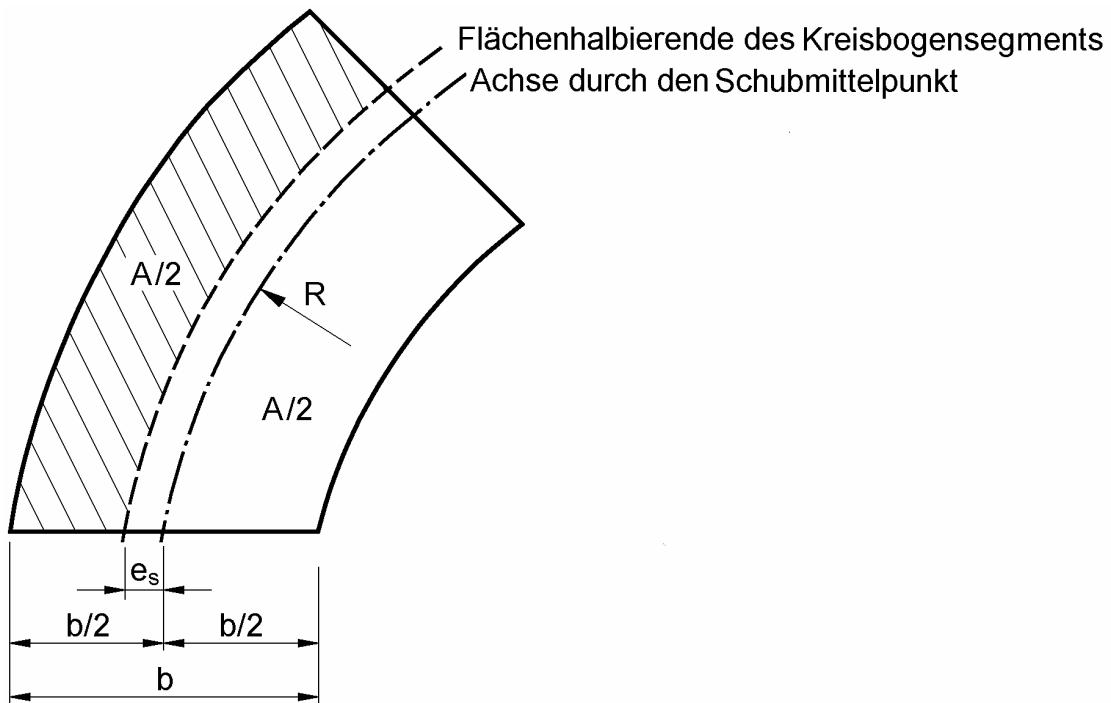


Bild 3.6 Lage der Flächenhalbierenden eines Kreisbogensegment

3.6 Gleichgewichtsgleichungen

Die zu lösenden Differentialgleichungen lassen sich aus der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am gekrümmten Element ablesen. Für zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Torsion sind sie in [14] zusammengestellt (Tabelle 3.6).

In einem gekrümmten Träger ist aus Gleichgewichtsgründen generell Torsion vorhanden. Die Torsion setzt sich zusammen aus:

- einem Anteil $m_{x,I}$, der auch im geraden Träger zur Torsion führt, z. B. aus exzentrisch zum Schubmittelpunkt angreifenden Lasten
- einem Anteil $m_{x,II}$, der aus der Geometrie herrührt

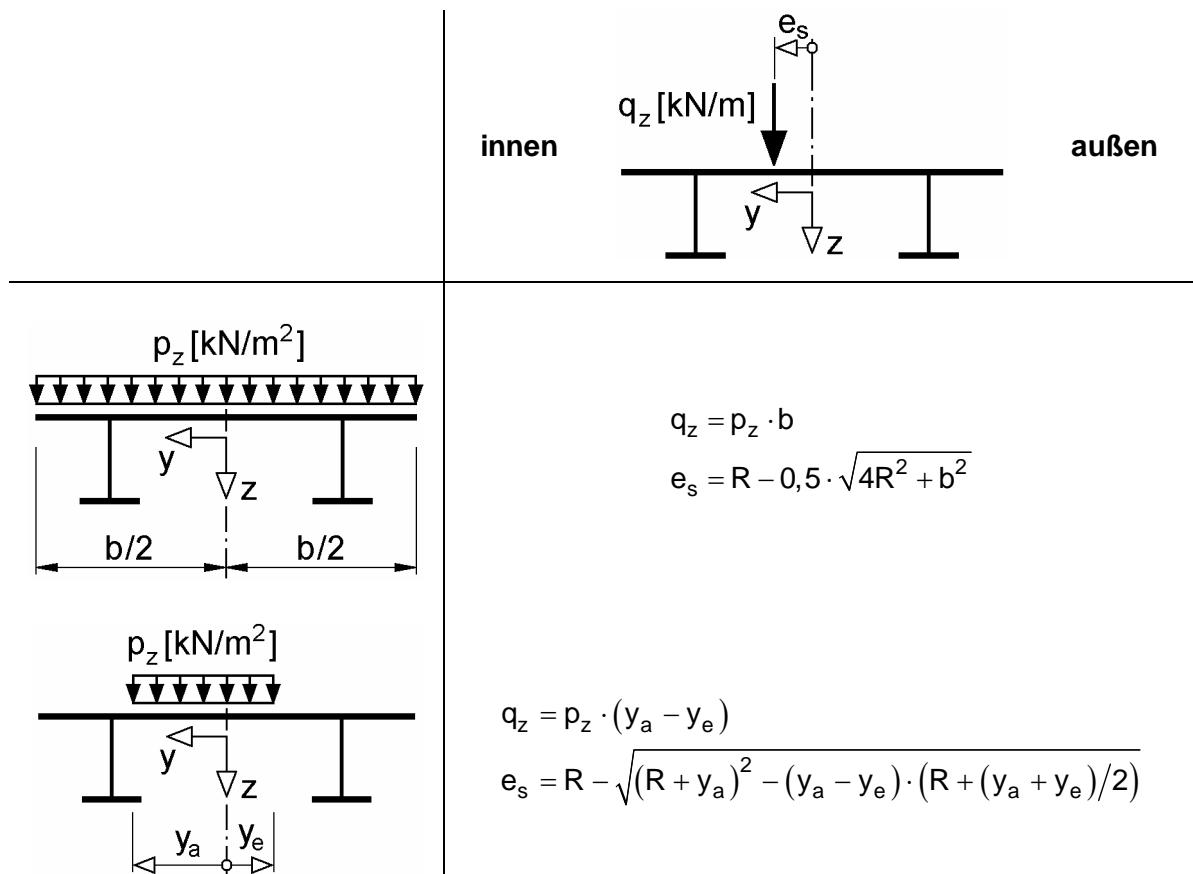
Der Anteil $m_{x,II}$ kann über die Differentialgleichungen in Tabelle 3.6 erfasst werden. Es ist erkennbar, dass Biegemomente und Torsionsmomente miteinander gekoppelt sind. Wenn der Verlauf des Biegemomentes bekannt ist, kann die Torsionsbeanspruchung aus dem Anteil II mithilfe des Biegemomentes ausgedrückt werden. Es gilt:

$$m_{x,II} = -M_y/R \quad (3.7)$$

Positive Biegemomente führen in gekrümmten Trägern zu einer negativen Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$, negative Biegemomente führen zu einer positiven Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$. Der qualitative Verlauf dieser Torsionsbeanspruchung entspricht dem Biegemomentenverlauf.

Tabelle 3.5 Beanspruchungen ausgewählter Lastfälle bezogen auf den Schubmittelpunkt

Umrechnung einer Flächenlast in eine Linienlast und zugehöriger Lastangriffspunkt



Umrechnung einer Linienlast auf den Schubmittelpunkt

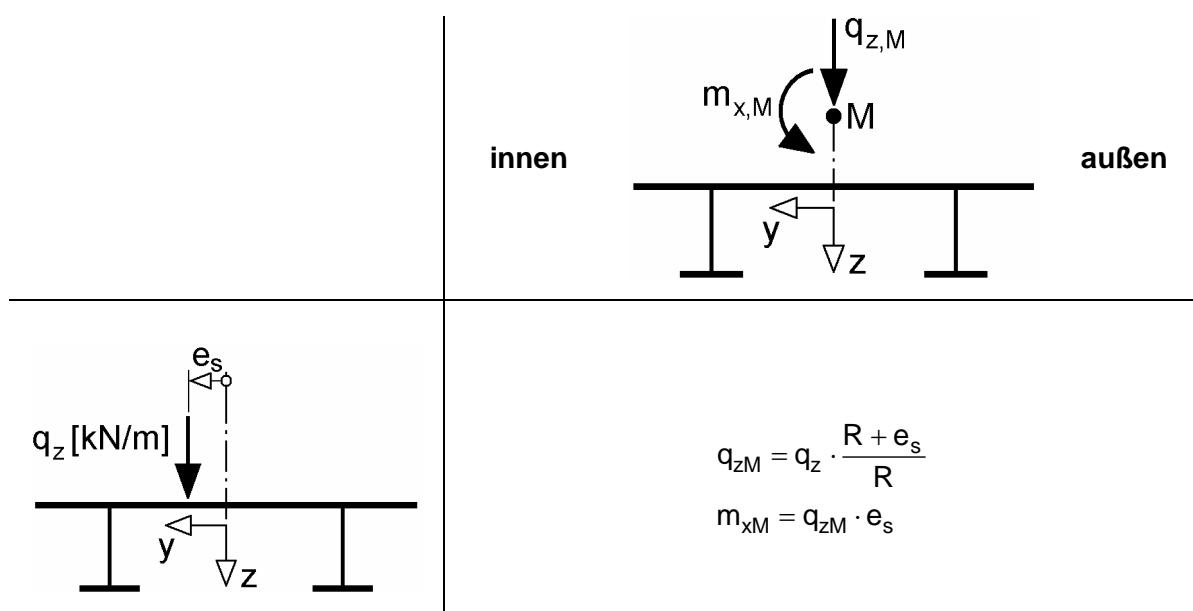
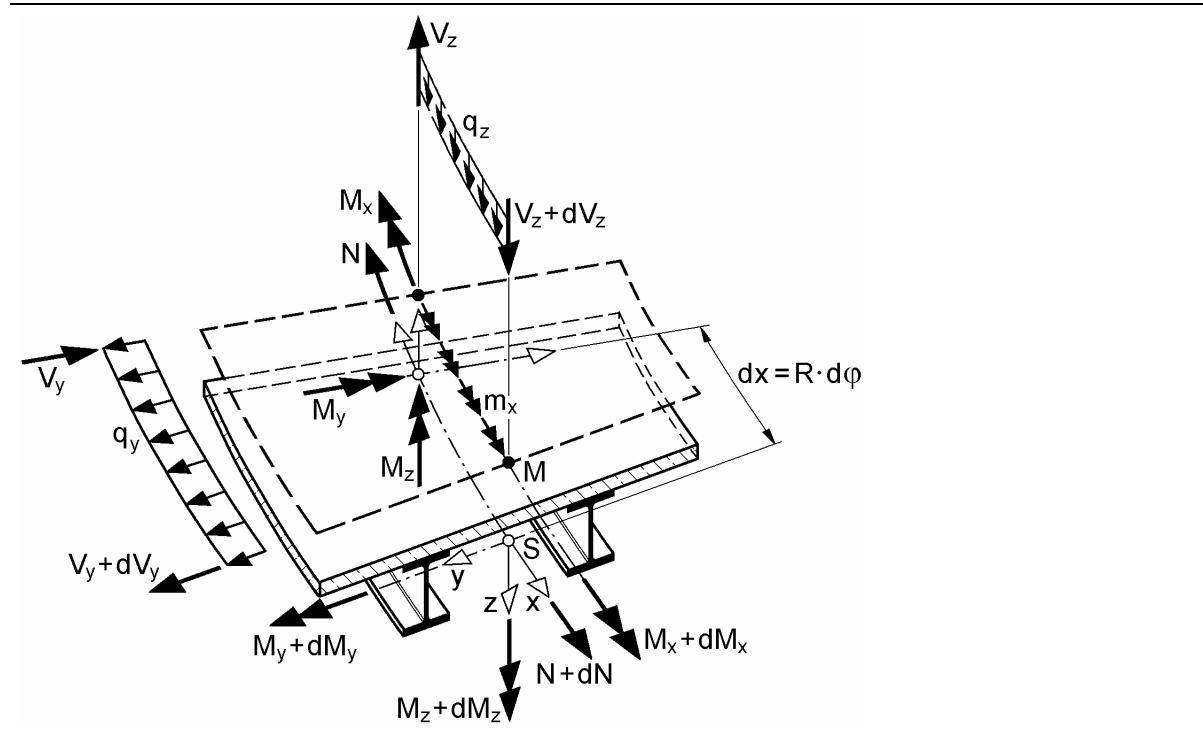


Tabelle 3.6 Gleichgewicht am Kreisbogen und Differentialgleichungen des Kreisbogens mit $(\cdot)' = d/dx$ [14]



$$N' = -q_x + \frac{V_y}{R}$$

$$M_z' = -V_y$$

$$V_y' = -q_y - \frac{N}{R}$$

$$M_y' = V_z - \frac{M_x}{R} - \frac{V_z \cdot z_M}{R}$$

$$V_z' = -q_z$$

$$M_x' = -m_{x,ges} + \frac{M_y}{R} + \frac{N \cdot z_M}{R}$$

Die Torsionsbeanspruchung wird dort, wo das Biegemoment betragsmäßig extrem wird, ebenfalls extremal. An der Stelle des Nulldurchgangs ändert die Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$ ihre Richtung. Somit wird der Schnittgrößenverlauf der Torsion infolge der Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$ an dieser Stelle ein relatives Extremum aufweisen. Die Summe der aufzunehmenden Torsion kann über die vom Biegemoment eingeschlossene Fläche erfasst werden:

$$\sum_m m_{x,II} = \int_x -M_y / R \cdot dx \quad (3.8)$$

Bei durchlaufend gekrümmten Trägern muss ein Biegemomentenverlauf existieren bei dem die vom positiven Biegemoment eingeschlossene Fläche A^+ die der vom negativen Biegemoment eingeschlossenen Fläche A^- entspricht. In diesem Fall wird die Resultierende der Torsionsbeanspruchung aus dem Anteil II: $\sum m_{x,II} = 0$

4 Tragverhalten gekrümmter Träger

4.1 Untersuchte Träger

4.1.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel wird das Tragverhalten gekrümmter Stahl- und Verbundträger untersucht. Hierfür werden Ein- und Zweifeldträger mit konstanter Gleichstreckenlast gewählt.

Zunächst werden die Schnittgrößenverläufe beeinflussende Parameter an Stahlträgern mit konstantem Querschnitt unter Annahmen des elastischen Werkstoffgesetzes herausgearbeitet. Der Einfluss variierender Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen auf die Unterkonstruktion wird untersucht.

In gekrümmten Verbundträgern wird der Einfluss des Betons auf die Tragfähigkeit untersucht. Dabei wird bei der Berechnung der elastischen Grenztragfähigkeit das nichtlineare Materialverhalten des Betons unter Zug berücksichtigt. Die elastische Grenzlast bezeichnet die Beanspruchung, bei der die elastische Grenzdehnung $\varepsilon_{el} = f_{ya} / E_a$ des Stahls erreicht wird. Zur Erlangung eines tiefer gehenden Verständnisses über das Tragverhalten von Verbundträgern wird eine Laststeigerung über die elastische Grenzlast hinaus durchgeführt. Bei der Ermittlung der plastischen Grenzlast werden physikalische und geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt.

4.1.2 Systeme

Die untersuchten Ein- und Zweifeldträger sind in Bild 4.1 dargestellt:

- Betrachtet werden Stahl- und Verbundträger. Die Stahlträger weisen Feldlängen von $\ell = 9,6$ m auf, die Verbundträger Feldlängen von $\ell = 20$ m.
- Die Krümmungsradien sind über die Länge konstant gewählt und werden variiert. Sie liegen in den untersuchten Systemen zwischen dem geraden Stab mit $R = \infty$ und $R = 10$ m.
- Die Träger werden durch eine konstante Gleichstreckenlast über die gesamte Länge beansprucht. Alle Lasten greifen im Schwerpunkt an. In den Verbundträgern wirkt die Belastung kurzzeitig.
- Bei den Zweifeldträgern werden die Lagerung und die Steifigkeit über der Stütze variiert.

4.1.3 Querschnitte

Alle ausgewählten Querschnitte entsprechen der Kategorie 1 nach Abschnitt 2.4.2. Betrachtet werden vier Querschnitte und zwar jeweils ein offener und ein geschlossener Querschnitt für den Stahlträger ebenso wie für den Verbundträger.

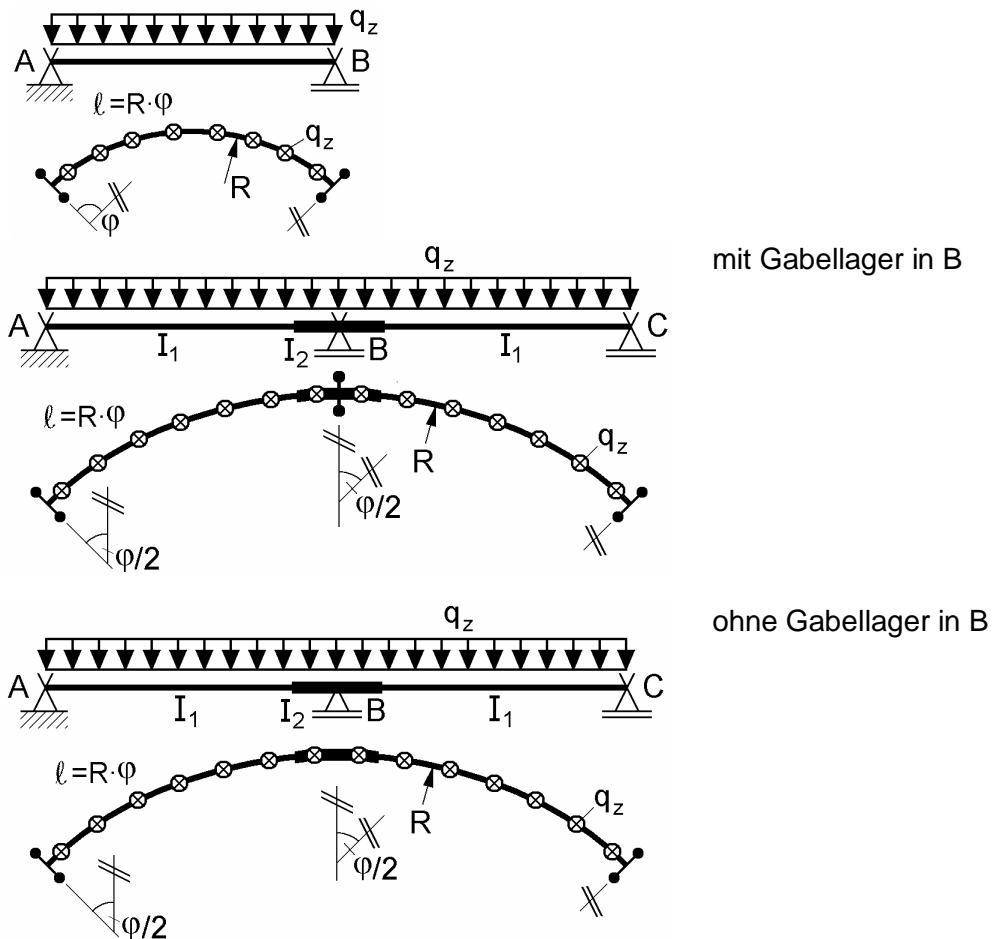


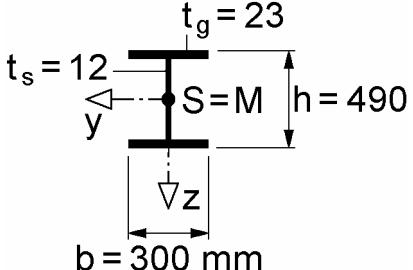
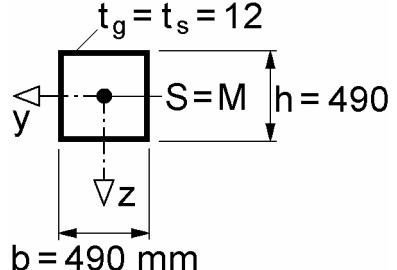
Bild 4.1 Untersuchte Ein- und Zweifeldträger

Die korrespondierenden Querschnitte sind so gewählt, dass sie annähernd die gleiche Biegesteifigkeit EI_y aufweisen. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen beim Lastabtrag infolge Torsion, die über die Stabkennzahl ε_T erfasst werden kann. Die Stabkennzahl $\varepsilon_T = \ell \cdot \lambda = \ell \cdot \sqrt{GI_T/EI_\omega}$ ist ein Indikator für die Lastabtragungsmechanismen der Torsion. Bei Stabkennzahlen $\varepsilon_T > 10$ wird die Torsion überwiegend über primäre Torsion, d. h. St. Venantsche Torsion, abgetragen. Zusätzliche Längsspannungen infolge Verwölbung sind vernachlässigbar gering. Der Abklingungsbeiwert λ hängt allein von der Querschnittsform ab. In die Stabkennzahl ε_T geht zusätzlich die Systemlänge ein. Lange Stäbe begünstigen einen optimalen Lastabtrag von Torsionslasten.

Für die Stahlträger werden der I-Querschnitt HE-A 500 und das Quadrathohlprofil Q RO 490 x 12 gewählt. In beiden Querschnitten liegt der Schubmittelpunkt im Schwerpunkt. Zur Berechnung der Stabsteifigkeiten werden die Querschnitte vereinfacht in Mittellinienmodelle überführt. Die für die Berechnung benötigten Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Der I-Querschnitt (Q1) wird den offenen Querschnitten zugeordnet, die Torsionslasten vorwiegend durch Wölkrafttorsion abgetragen. Für die untersuchten Systeme ergibt sich bei einer Feldlänge von $\ell = 9,60$ m für die Träger mit I-Querschnitt Q1 eine Stabkennzahl von $\varepsilon_{T,Q1} = 960 \cdot 4,3 \cdot 10^{-3} =$

$4,1 < 10$. Der Einfluss der Wölkrafttorsion ist bei diesen Trägern zu berücksichtigen. Das Quadrathohlprofil (Q2) ist ein wölfreier Querschnitt. Torsionslasten werden ausschließlich durch *St. Venantsche* Torsion abgetragen, d. h. die Stabkennzahl beträgt $\varepsilon_{T,Q2} = \infty$ und es ist $M_\omega = 0$.

Tabelle 4.1 Querschnittskennwerte (Mittellinienmodell)

Querschnitt Q1: HE-A 500	Querschnitt Q2: Q RO 490 x 12
	
$A = 194,0 \text{ cm}^2$ $I_y = 85.486 \text{ cm}^4$ $I_z = 10.357 \text{ cm}^4$ $I_T = 270 \text{ cm}^4$ $I_\omega = 5.643.053 \text{ cm}^6$	$A = 229,4 \text{ cm}^2$ $I_y = 87.372 \text{ cm}^4$ $I_z = 87.372 \text{ cm}^4$ $I_T = 131.168 \text{ cm}^4$ $I_\omega = 0$

Die Längsabmessungen und die Wahl der Querschnitte bei den Verbundträgern sind an die Ausführung von Fußgängerbrücken angelehnt. Auch hier werden ein offener und ein geschlossener Querschnitt mit nahezu gleicher Biegesteifigkeit EI_y gewählt. Der Schubmittelpunkt liegt in der Symmetriechse. Die Querschnitte sind in Tabelle 4.2 dargestellt und benötigte Querschnittskennwerte zusammengefasst. Die gewählten Verbundquerschnitte Q3 und Q4 haben jeweils eine Gesamthöhe von $h = 1,00 \text{ m}$. Die Betonplatte hat eine Breite von $b = 3,00 \text{ m}$. Der Abstand der Stege beträgt $1,90 \text{ m}$. Gewählt werden der Baustahl S 235 mit $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$ und Beton C 35/45 mit $f_{ck} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$. Bei der Betrachtung des Einfeldträgers wird die Bewehrung vernachlässigt. Für den Durchlaufträger wird eine obere und untere Längsbewehrung BST 500 S mit $f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$ angesetzt. Zur Überprüfung der Ergebnisse aus ANSYS und zur Analysierung von Traganteilen werden vorab die ideellen Querschnittskennwerte mithilfe von Mittellinienmodellen ohne Überlappungen bestimmt. Bei der Berechnung der ideellen Querschnittskennwerte wird zwischen dem Feldbereich (Zustand I) und dem Stützbereich (Zustand II) unterschieden (Abschnitt 7.2.2). Die Querschnittskennwerte werden mit „QSW-Verbundträger-el“ und „QSW-FE ML“ [83] berechnet. Der Verbundquerschnitt wird hierbei ideell in einen Stahlquerschnitt überführt (Abschnitt 2.7.3). Zur Ermittlung des ideellen Trägheitsmomentes und des ideellen Wölbwiderstandes wird der Beton ideell über die Reduktionszahl n_0 , die das Verhältnis der E-Moduli darstellt, erfasst. Bei der Ermittlung des ideellen Torsionsträgheitsmomentes wird die Reduktionszahl n_G mit dem Verhältnis der Schubmoduli bestimmt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{E_a}{E_{cm}} = \frac{21000}{3330} = 6,31 \\ n_G &= \frac{G_a}{G_c} = \frac{\eta_c + 1}{\eta_a + 1} \cdot n_0 = \frac{1,2}{1,3} \cdot 6,31 = 5,82 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit wird über die Länge konstant angenommen. Es wird demnach nicht zwischen Zustand I und Zustand II unterschieden. Der ideelle Wölbwiderstand wird über die ideelle Betondicke $t_{c,i} = t_c/n_0$ berechnet. Da die Wölbsteifigkeit EI_ω in einem geschlossenen Träger von untergeordneter Bedeutung ist, wird die Wölbsteifigkeit in diesem Fall ebenfalls konstant angesetzt. Beim offenen Querschnitt Q3 hat die Wölbsteifigkeit einen großen Einfluss auf die Tragfähigkeit des Systems. Der Einfluss des gerissenen Betons muss bei der Bestimmung der Wölbsteifigkeit über ideelle Betondicken erfasst werden.

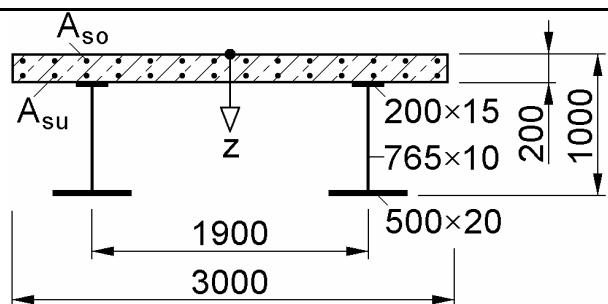
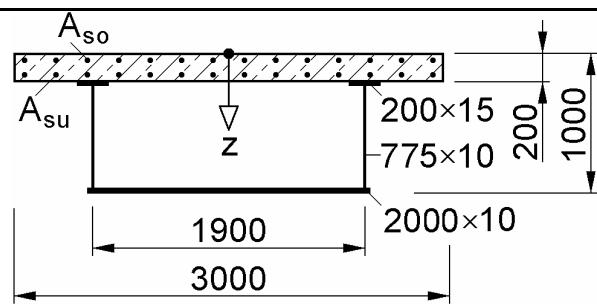
Die Stabkennzahl ε_T für die betrachteten Systeme ergibt sich für die Träger mit dem offenen Verbundquerschnitt Q3 zu $\varepsilon_{T,Q3} = 2000 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3} = 3,88$. Berücksichtigt man bei der Berechnung der Stabkennzahl im Durchlaufträger einen gerissenen Bereich von maximal 15 % der Feldlänge über der Stütze erhöht sich die Stabkennzahl auf $\varepsilon_{T,Q3} = 4,1$. Dies deutet darauf hin, dass durch den gerissenen Stützbereich ein etwas größerer Anteil der Torsion über primäre Torsion abgetragen wird. Für Träger mit dem geschlossenen Verbundquerschnitt Q4 ergibt sich die Stabkennzahl für Torsion zu $\varepsilon_{T,Q4} = 2000 \cdot 0,07877 = 157,5$.

Mit dem Programm „QST-Verbundträger-layer“ [121] werden die elastischen und plastischen Grenzmomente bei reiner Biegung um die y-Achse ermittelt. Da Tragphänomene herausgearbeitet werden sollen, werden in den nachfolgenden Untersuchungen alle Sicherheitsfaktoren $\gamma = 1,00$ gesetzt. Die Biegetragfähigkeit der Querschnitte wird mit definierten Grenzdehnungen iterativ bestimmt. Die Bruchdehnung des Betons wird bei der Berechnung des maximalen Momentes auf $\varepsilon_c \leq 0,0035$ und die Zugdehnung des Bewehrungsstahls bei der Ermittlung des minimalen Momentes auf $\varepsilon_{uk} \leq 0,025$ begrenzt. Die Unterschiede in den ermittelten Grenzmomenten für die Verbundquerschnitte Q3 und Q4 betragen maximal 2 %. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.3 dargestellt.

4.2 Idealisierung der Träger

4.2.1 BOGEN2008

Die Stahlträger werden mit dem innerhalb dieser Arbeit entwickeltem Programm BOGEN2008 [122] berechnet. BOGEN2008 beruht auf dem Weggrößenverfahren unter Verwendung eines gekrümmten Stabelementes (Kapitel 5). Die Berechnung erfolgt linear. Bei den Verbundträgern, die mit ANSYS untersucht werden, werden Vergleichsrechnungen mit BOGEN2008 durchgeführt.

Tabelle 4.2 Verbundquerschnitte Q3 und Q4: Ideelle Querschnittskennwerte**Querschnitt Q3****Querschnitt Q4**

$A_{so} = A_{su} = 0$ für die Querschnittskennwerte des Einfeldträgers

$$z_{i,0} = 29,1 \text{ cm}$$

$$z_{M,i,0} = -10,5 \text{ cm}$$

$$I_{y,i,0} = 157,8616 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,i,0} = 1.418.643 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,i,0} = 13,7783 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

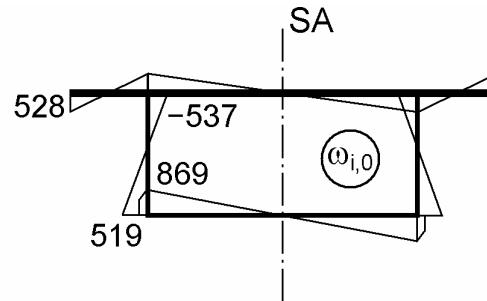
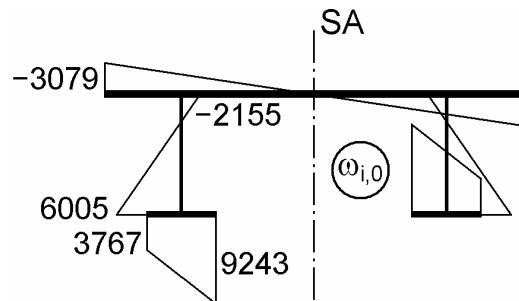
$$z_{i,0} = 29,3 \text{ cm}$$

$$z_{M,i,0} = 29,2 \text{ cm}$$

$$I_{y,i,0} = 160,2189 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,i,0} = 17.803 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,i,0} = 286,4107 \text{ cm}^2\text{m}^2$$



$$A_{so} = A_{su} = \emptyset 16, a = 10 \text{ cm} (20,1 \text{ cm}^2/\text{m})$$

für die Querschnittskennwerte des Zweifeldträgers

$$z_{i,0} = 27,8 \text{ cm}$$

$$z_{M,i,0} = -10,5 \text{ cm}$$

$$z_{st} = 58,8 \text{ cm}$$

$$z_{M,st} = -36,6 \text{ cm}$$

$$z_{i,0} = 27,9 \text{ cm}$$

$$z_{M,i,0} = 29,2 \text{ cm}$$

$$z_{st} = 59,2 \text{ cm}$$

$$I_{y,i,0} = 161,9396 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,i,0} = 1.418.643 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,i,0} = 13,7783 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{y,i,0} = 164,3605 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,i,0} = 17.803 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,i,0} = 286,4107 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{y,st} = 77,9636 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,st} = 821.321 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,st} = 13,7783 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{y,st} = 79,0757 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

$$I_{\omega,st} = 17.803 \text{ cm}^4\text{m}^2$$

$$I_{T,st} = 286,4107 \text{ cm}^2\text{m}^2$$

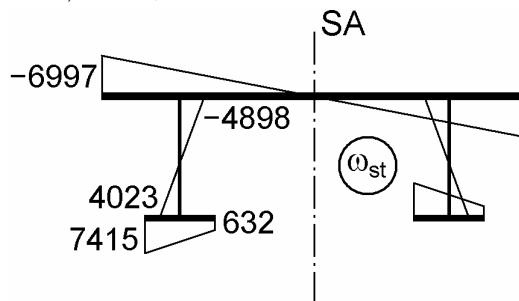


Tabelle 4.3 Verbundquerschnitte Q3 und 4 nach Tabelle 4.2: elastische und plastische Biegetragfähigkeiten

Querschnitt Q3	Querschnitt Q4
$M_{y,el,max} = 5213,6 \text{ kNm}$	$M_{y,el,max} = 5304,6 \text{ kNm}$
$M_{y,pl,max} = 6632,9 \text{ kNm}$	$M_{y,pl,max} = 6698,3 \text{ kNm}$
Querschnitt Q3 incl. Bewehrung	Querschnitt Q4 incl. Bewehrung
Maximale Grenzmomente (Feldbereich, Zustand I)	
$M_{y,el,max} = 5261,9 \text{ kNm}$	$M_{y,el,max} = 5352,6 \text{ kNm}$
$M_{y,pl,max} = 7084,9 \text{ kNm}$	$M_{y,pl,max} = 7148,5 \text{ kNm}$
Minimale Grenzmomente (Stützbereich, Zustand II, Beton gerissen)	
$M_{y,el,min} = -4450,4 \text{ kNm}$	$M_{y,el,min} = -4550,9 \text{ kNm}$
$M_{y,pl,min} = -5682,9 \text{ kNm}$	$M_{y,pl,min} = -5738,2 \text{ kNm}$

4.2.2 ANSYS

Zur Analysierung des Tragverhaltens werden die Verbundträger mit dem FEM–Programmsystem *ANSYS* [27] berechnet. Für eine Berechnung mit Stäben unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion bietet *ANSYS* die Stabelemente BEAM188 und BEAM189 an. Beide Stabelemente wurden unter Verwendung eines isoparametrischen Ansatzes entwickelt – BEAM188 als zweiknotiges Stabelement und BEAM189 als ein dreiknotiges krummliniges Stabelement. Bei den folgenden Untersuchungen wurde zur richtigen Darstellung der Geometrie des gekrümmten Trägers das Element BEAM189 gewählt.

Stabelement BEAM189

Mit dem dreiknotigen Stabelement BEAM189 von *ANSYS* wird ein schubweicher Stab nach Timoshenko beschrieben, der geeignet ist für die Idealisierung schlanker Querschnitte. Die Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion über die Festlegung eines siebten Freiheitsgrades ($9'$) ist möglich. Der Faktor $\alpha = G A_s \cdot \ell^2 / (E I_y)$ deutet auf die Auswirkungen der Schubweichheit im betrachteten System hin. Die Länge ℓ bezeichnet eine Systemlänge, d. h. den Abstand zwischen zwei Auflagern. Für die betrachteten Verbundquerschnitte ist $\alpha \geq 145$. Es kann davon ausgegangen werden, dass das Verhalten des Trägers nahezu einem schubstarren Träger entspricht [27]. Die numerische Integration der Schnittgrößen und Verformungen erfolgt in den Gaußschen Integrationspunkten des Stabelementes. Die Ausgabe dieser Größen erfolgt nach Extrapolation in den Endknoten.

Querschnitt / Werkstoffe

BEAM189 ist geeignet für die Berechnung von Trägern mit Verbundquerschnitten. Vorausgesetzt wird ein schubstarrer Verbund zwischen den unterschiedlichen Werkstoffen. Bei der numerischen Integration werden die Spannungen in den Gaußschen

Integrationspunkten des Querschnitts ermittelt. Bei der grafischen Darstellung werden die Spannungen an den Elementgrenzen gemittelt. Dies führt zu einer verzerrten Darstellung in Bereichen, in denen zwei Materialien aufeinander treffen. Die Querschnitte werden unter Anwendung 9-knotiger Elemente ohne Überlappung mit den Werkstoffen des Verbundquerschnitts Baustahl, Beton und Bewehrung idealisiert. Für die Stahlwerkstoffe werden bilineare Werkstoffgesetze zugrunde gelegt. Für den Werkstoff Beton wurde das Parabel-Rechteck-Diagramm nach Bild 2.13 unter Berücksichtigung der Rissbildung unter Zug ($E_{cm} = 0$) in ANSYS programmiert.

Lastangriffspunkt / Lagerung

Der Lastangriffspunkt liegt im Schwerpunkt. Die Lasten werden auf die Endknoten des Elementes umgerechnet und aufgebracht. Die Lager werden in das lokale Koordinatensystem des jeweils betrachteten Knotens auf der Stabachse gedreht.

Lösungsverfahren

Die Gleichgewichtsiteration bei nichtlinearem Tragverhalten (physikalisch und/oder geometrisch) erfolgt mit dem Newton–Raphson–Verfahren, bei dem die Belastung in jedem Iterationsschritt inkrementell gesteigert wird. Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand und der zugehörigen tangentialen Steifigkeitsmatrix wird durch Aufbringen eines Lastinkrementes das Verschiebungsinkrement ermittelt. Die inneren Kraftgrößen werden aufgrund von nichtlinearen Spannungs–Dehnungs–Beziehungen nicht mit den äußeren Kräften übereinstimmen. Die Differenz wird als äußere Last erneut aufgebracht und ausgehend von der bezüglich der aktuellen Verschiebungskomponente neu berechneten Steifigkeitsmatrix ein weiteres Verschiebungsinkrement ermittelt. Ein Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn die Differenz zwischen inneren und äußeren Kräften ausreichend klein ist. Voraussetzung zur Anwendung dieses Verfahrens ist, dass der E–Modul als Verhältnis von Spannungen zu Dehnungen bei größer werdenden Dehnungen konstant bleibt bzw. abnimmt.

4.3 Gekrümmte Einfeldträger

4.3.1 Schnittgrößen

In diesem Abschnitt werden die im Einführungsbeispiel in Bild 1.7 dargestellten kreisförmig gekrümmten Einfeldträger untersucht. Zusätzlich zu den dort betrachteten Trägern werden Einfeldträger mit den Radien $R = 20$ und 40 m ausgewertet (Bild 4.2). Der Öffnungswinkel in kreisförmig gekrümmten Trägern ergibt sich zu $\varphi = \ell/R$. Bei einem minimalen Radius von $R = 10$ m beträgt der Öffnungswinkel somit maximal $\varphi = 0,96$ rad. Dies entspricht einem Winkel von 55° .

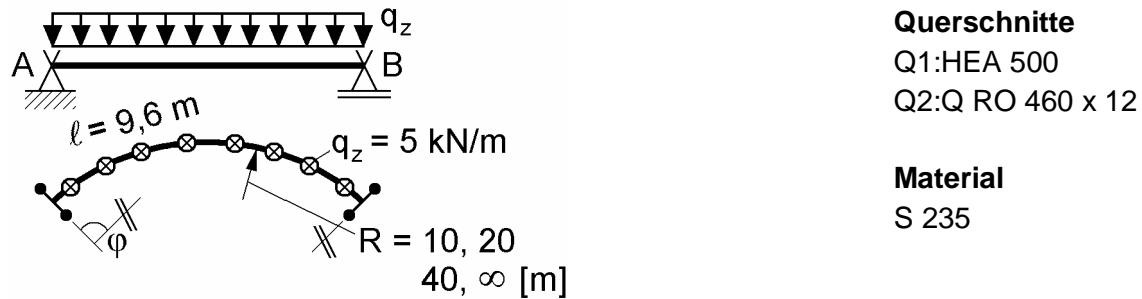


Bild 4.2 Einfeldträger aus Stahlprofilen

Im Folgenden wird die Veränderung der Schnittgrößenverläufe infolge stärker werdender Krümmung bei gleich bleibender Feldlänge und Belastung untersucht. In Bild 4.4 sind die Auflagerkräfte A_z in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ aufgetragen. Aus den Differentialgleichungen des kreisförmig gekrümmten Stabelementes in Tabelle 3.6 lässt sich ablesen, dass die Summe der Auflagerkräfte gleich der Resultierenden der Belastung sein muss. Sie beträgt $\sum F_z = q_z \cdot \ell = 48$ kN. Die Auflagerkraft A_z beträgt in allen Systemen $A_z = \sum F_z / 2 = 24$ kN, entspricht also der Auflagerkraft des geraden Trägers. Demgegenüber besteht nach den Differentialgleichungen des gekrümmten Stabelementes eine Abhängigkeit von Biege- und Torsionsschnittgrößen. Der gekrümmte Einfeldträger mit q_z -Lasten weist Biege- und Torsionsmomente auf (Bild 4.3, $M_{x,A}$ und $M_{y,max}$). Beim geraden Träger berechnet sich das maximale Biegemoment zu $M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2 / 8$. Im gekrümmten Einfeldträger führt die Krümmung zu einer Vergrößerung des maximalen Biegemomentes. Das Verhältnis soll mit $f_{My} = M_{y,max}/M_{y,0}$ ausgedrückt werden. Es liegt bei einem Öffnungswinkel von $\varphi \approx 0,5$ rad bei $f_{My} \leq 1,03$. Der Verlauf des Biegemomentes kann in diesem Fall näherungsweise am geraden Träger mit der Länge des Bogens bestimmt werden. Bei einem Öffnungswinkel von $\varphi \approx 1$ rad beträgt die Vergrößerung des Biegemomentes bereits 11 % ($f_{My} = 1,11$) und ist unbedingt zu berücksichtigen. Die Momentenverläufe sind, wie bereits in Abschnitt 3.2 erläutert, unabhängig vom gewählten Querschnitt.

Wie auch beim geraden Träger muss die Torsion in einen primären und einen sekundären Anteil aufgeteilt werden. Werden in dem Träger Lasten über sekundäre Torsionsmomente, d. h. Wölbkrafttorsion, abgetragen, treten in Stablängsrichtung veränderliche Normalspannungen σ_x auf. Diese werden in der Stabtheorie zum Wölbmoment zusammengefasst und haben einen großen Einfluss auf die elastische Querschnittstragfähigkeit. Die Aufteilung des Torsionsmomentes hängt von der Stabkennzahl ε_T ab. Beim wölfreien Quadrathohlprofil Q2 wird die Torsion ausschließlich durch die Schubspannungen der St. Venantschen Torsion abgetragen. Beim I-Querschnitt Q1 tritt die St. Venantsche Torsion (M_{xp}) mit der Wölbkrafttorsion (M_{xs} und M_{ω}) in Kombination auf (Bild 4.3, $M_{xp,A}$ und $M_{xs,A}$).

Die unterschiedliche Querschnittsform führt bei gleichen Schnittgrößen zu unterschiedlichen Verformungsverläufen bei den Querschnitten Q1 und Q2 (Bild 4.4). Eine durch Torsion hervorgerufene ϑ -Verdrehung führt zu zusätzlichen Verschiebungen w_M , die wiederum Auswirkungen auf die Verdrehung ϑ haben.

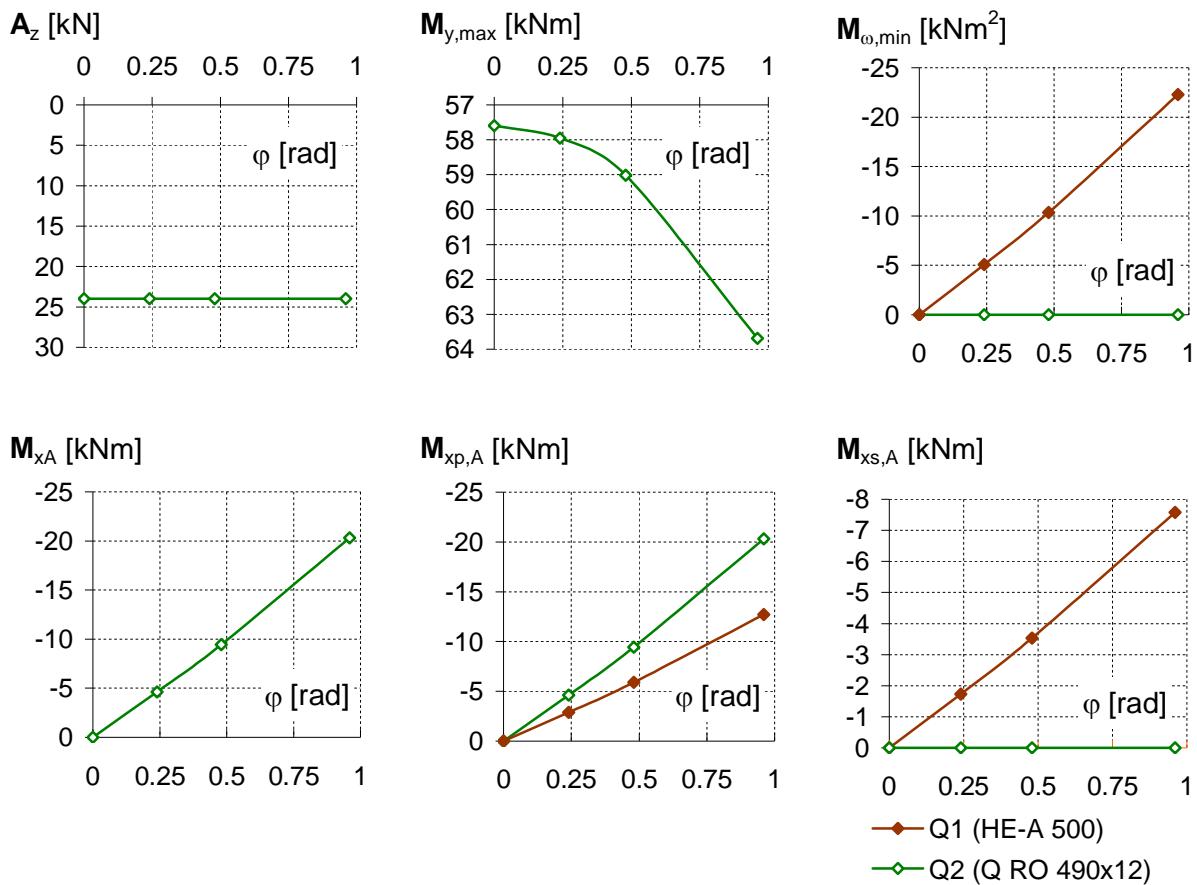


Bild 4.3 Einfeldträger aus Stahlprofilen: Auflagerreaktionen, Schnittgrößen

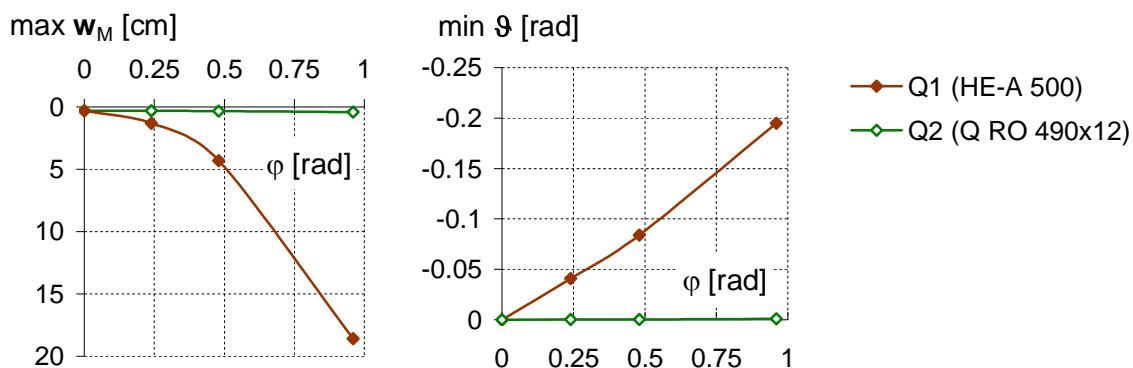


Bild 4.4 Einfeldträger aus Stahlprofilen: Verformungen

Auch hier wird die Kopplung von Torsion und Biegung deutlich. Die Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformungsgrößen im gekrümmten Stabelement sind in Abschnitt 6.3.3 aufgestellt. Der Einfeldträger mit offenem Querschnitt weist ein sehr ungünstiges Verformungsverhalten auf. Eine Vergrößerung der Krümmung führt zu einem starken Anstieg der Verformungsgrößen w_M und θ . Beim wölbefreien Querschnitt führt eine Vergrößerung der Krümmung ebenfalls zu einem Anstieg von w_M und θ , jedoch fällt dieser eher moderat aus. So ist die betragsmäßig größte Verdrehung beim Querschnitt Q1 mit $R = 10 \text{ m}$ 195fach größer als die Verdrehung beim

Quadrathohlprofil Q2 mit gleichem Krümmungsradius. Das Verhältnis der maximalen Verformungen $\max w_{Q1} / \max w_{Q2}$ beträgt immerhin 44.

Maßgebende Parameter

Bei Einfeldträgern mit vertikaler Beanspruchung, konstantem Querschnitt und Gabellagern an beiden Auflagern ergeben sich die Schnittgrößenverläufe aus Gleichgewichtsbetrachtungen. Der Träger verdreht sich infolge Belastung um seine Sehne, wobei er von den torsionsstarren Lagern, die den Träger um die lokale x-Achse halten, zurückgehalten wird. Aus Gleichgewichtsbetrachtungen folgt hieraus eine Vergrößerung des Biegemomentes in Feldmitte. Der Faktor

$$f_{My} = M_{y,p} / M_{y,0} \quad \text{mit} \quad M_{y,p} = \frac{M_y(x=0) + M_y(x=\ell)}{2} + M_y(x=\ell/2)$$

$$M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2 / 8$$

zeigt den Einfluss der Krümmung des Trägers auf das Biegemoment auf. Die Veränderung des Biegemomentes ausgehend vom geraden Träger kann als Biegemoment infolge Krümmung betrachtet werden. Beim Einfeldträger hängt der Faktor f_{My} nur vom Öffnungswinkel $\varphi = \ell / R$ ab. Je kleiner der Krümmungsradius ist, desto größer wird der Faktor f_{My} .

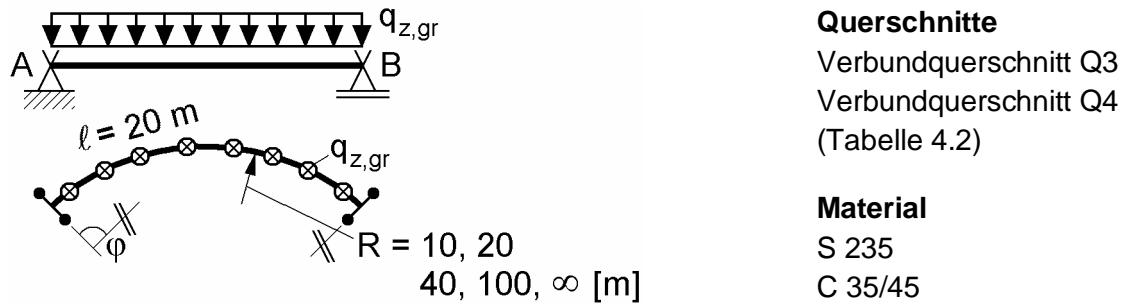
Einfluss auf die Querschnittstragfähigkeit hat neben dem Biegemoment das Wölbbimoment, welches an der Stelle des größten Biegemomentes ebenfalls maximal wird. Das Wölbbimoment resultiert aus der Wölkrafttorsion und wird über die Stabkennzahl ε_T erfasst. Für $\varepsilon_T > 10$ ist der Einfluss der Wölkrafttorsion vernachlässigbar.

4.3.2 Tragfähigkeit gekrümmter Verbundträger

Untersucht wird der Einfluss der Krümmung auf die elastische und plastische Grenztragfähigkeit von Einfeldträgern in Verbund. Betrachtet werden die kreisförmig gekrümmten Einfeldträger mit Feldlängen von $\ell = 20$ m mit kurzzeitig wirkenden Lasten nach Bild 4.5.

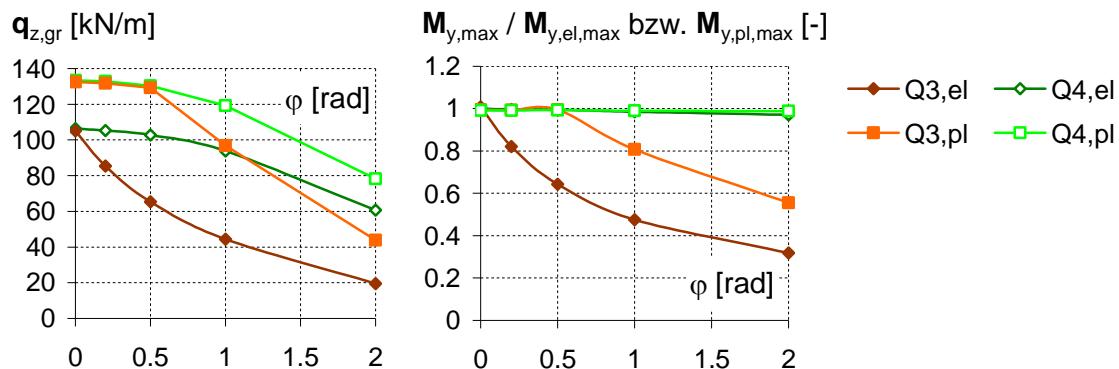
Untersucht werden die Radien $R = 10, 20, 40, 100$ m und der gerade Stab jeweils mit dem offenen Verbundquerschnitt Q3 und dem geschlossenen Verbundquerschnitt Q4 (Tabelle 4.2). Bei einem minimalen Radius $R = 10$ m beträgt der Öffnungswinkel maximal $\varphi = 2$ rad. Dies entspricht einem Kreisbogen der zwischen einem Viertel- und einem Halbkreis liegt. In Bild 4.6 sind die elastischen bzw. plastischen Grenzlasten $q_{z,gr}$ und das Verhältnis $M_{y,max} / M_{y,el,max}$ bzw. $M_{y,max} / M_{y,pl,max}$ in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ dargestellt.

Beim Kastenquerschnitt Q4 beträgt die aufnehmbare elastische Grenzlast $q_{z,gr}$ bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 2$ rad ca. 57 % der maximalen elastischen Grenzlast. Die Minderung der elastischen Grenzlast entspricht in dieser Variante in etwa dem aus der Krümmung hervorgerufenem Anstieg des Biegemomentes (Abschnitt 4.3.1). Das elastische Grenzmoment kann in allen Fällen erreicht werden ($M_{y,max} / M_{y,el,max} = 1$).

**Grenzlasten**

$g_{z,gr,el}$ = Elastische Grenzlast unter Berücksichtigung materieller Nichtlinearitäten (Abbruchkriterium $\varepsilon_{el} = f_{ya}/E_a$)

$g_{z,gr,pl}$ = Plastische Grenzlast unter Berücksichtigung materieller und geometrischer Nichtlinearitäten

Bild 4.5 Einfeldträger in Verbundbauweise**Bild 4.6** Einfeldträger in Verbundbauweise: Grenzlasten und Verhältnis des maximalen Biegemomentes zum Grenzmoment

Beim offenen Querschnitt Q3 entstehen zusätzliche Wölbmomente in Feldmitte, die ebenfalls Einfluss auf die elastische Grenztragfähigkeit des Systems haben. In Tabelle 4.4 sind die Schnittgrößen in Feldmitte dargestellt. Die Ergebnisse aus ANSYS sind einer Vergleichsrechnung mit BOGEN2008 gegenübergestellt. Die Berechnung mit BOGEN2008 wurde mit den ermittelten Grenzlasten und den in Tabelle 4.2 zusammengestellten Querschnittskennwerten durchgeführt. Es ist festzustellen, dass die Biegemomente in Feldmitte in allen Fällen gut übereinstimmen. Sie ergeben sich aus Gleichgewichtsbetrachtungen (Abschnitt 3.3.3). Die Wölbmomente stimmen bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 1$ rad ebenfalls gut überein. Bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 2$ rad liegt das mit BOGEN2008 ermittelte Wölbmoment 11,36 % über dem mit ANSYS ermittelten Wölbmoment. Wenn der Einfluss des Wölbmomentes auf die Längsspannungen σ_x überwiegt (Tabelle 4.4, unten), stehen Bereiche des Betons unter Zug. Die Rissbildung im Beton führt zu einer Reduktion der Biegesteifigkeit EI_y ebenso wie der Wölbsteifigkeit EI_w . Durch das veränderte Verhältnis Torsionssteifigkeit GI_T zur Wölbsteifigkeit EI_w wird ein größerer Anteil der Torsion durch St. Venantsche Torsion abgetragen, das Wölbmoment in Feldmitte wird kleiner. Gleichzeitig beeinflusst die Reduktion von EI_y und EI_w die Größe der Längsspannungen. Die maximalen σ_x -Spannungen im Stahl ergeben sich in Feldmitte.

te an der Innenkante des äußeren Hauptträgers. Für den größten Öffnungswinkel $\varphi = 2$ rad wird bei einer Berechnung der maximalen Spannung mit den Querschnittskennwerten aus Tabelle 4.2, d. h. den Querschnittskennwerten ohne Berücksichtigung von Rissbildung, die Grenzlast $f_y = 23,5 \text{ kN/cm}^2$ infolge der reduzierten Steifigkeiten nur zu 95 % erreicht.

Tabelle 4.4 Schnittgrößen und Spannungen in Feldmitte (offener Querschnitt Q3)

Schnittgrößen in Feldmitte (offener Querschnitt Q3)

φ	$q_{z,\text{gr},\text{el}}$	$M_y(\ell/2) [\text{kNm}]$			$M_\omega(\ell/2) [\text{kNm}^2]$		
		ANSYS	BOGEN	RF in %	ANSYS	BOGEN	RF in %
[rad]	[kN/m]						
2	19,4	1650	1650	0	-2259	-2549	11,36
1	44,4	2477	2477	0	-1919	-1926	0,38
0,5	65,9	3381	3383	0,03	-1313	-1317	0,31
0,2	85,3	4282	4283	0,04	-672	-668	-0,60
0	105,1	5254	5256	0,04	0	0	0,00

RF = Relativer Fehler ANSYS / BOGEN2008 in %

Spannungen [kN/cm^2]*) (offener Querschnitt Q3)

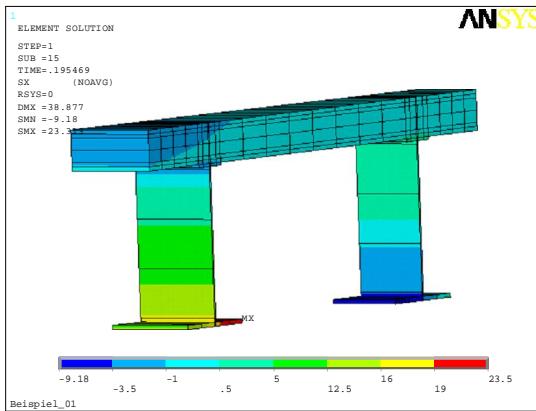
φ	$q_{z,\text{gr},\text{el}}$	Stahluntergurt			Betonobergurt			Beanspruchung	
		$\sigma_{M_y,u}$	$\sigma_{M_\omega,u}$	σ_u	$\sigma_{M_y,o}$	$\sigma_{M_\omega,o}$	σ_o	aus M_y	aus M_ω
[rad]	[kN/m]								
2	19,4	7,41	14,72	22,13	-0,48	0,78	0,29	33,49%	66,51%
1	44,4	11,12	12,50	23,63	-0,72	0,66	-0,06	47,08%	52,92%
0,5	65,9	15,19	8,55	23,74	-0,99	0,45	-0,54	63,96%	36,04%
0,2	85,3	19,23	4,38	23,61	-1,25	0,23	-1,02	81,46%	18,54%
0	105,1	23,59	0	23,59	-1,53	0	-1,53	100%	0

*) Schnittgrößen aus ANSYS, Querschnittskennwerte nach Tabelle 4.2

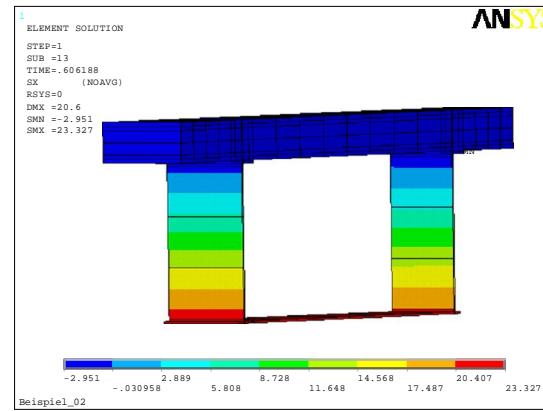
Die maximale plastische Grenzlast kann bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,5$ rad nahezu erreicht werden. Bei größeren Öffnungswinkeln fällt die plastische Grenzlast für beide Varianten ab. Der Abfall beim wölbarmen Kastenquerschnitt Q4 resultiert aus dem Anstieg des Biegemomentes infolge der Krümmung ($M_{y,\text{max}} / M_{y,\text{pl,max}} = 1$). Beim offenen Querschnitt Q3 fällt die plastische Grenzlast stärker ab. Gleichzeitig kann das plastische Grenzmoment $M_{y,\text{pl,max}}$ nicht mehr erreicht werden. In Bild 4.7 sind die Längsspannungen im Querschnitt Q3 und Q4 bei elastischer und plastischer Querschnittsausnutzung in Feldmitte für $\varphi = 2$ rad dargestellt.

Die elastische und plastische Spannungsverteilung im Querschnitt Q4, dargestellt in Bild 4.7 rechts, entsprechen reinen Biegespannungsverläufen. Die rechnerische Druckzone im Betongurt bei Ermittlung der vollplastischen Momententragsfähigkeit beträgt $z_{\text{pl}} = 9,24 \text{ cm}$. Dies entspricht dem dunkelblauen Bereich im Bild 4.7 rechts unten. Beim offenen Querschnitt Q3 werden die auftretenden Torsionsmomente überwiegend durch Wölkrafttorsion abgetragen. Aus der Verwölbung entstehen zusätzliche Längsspannungen, die die Grenztragfähigkeit des Systems beeinflussen.

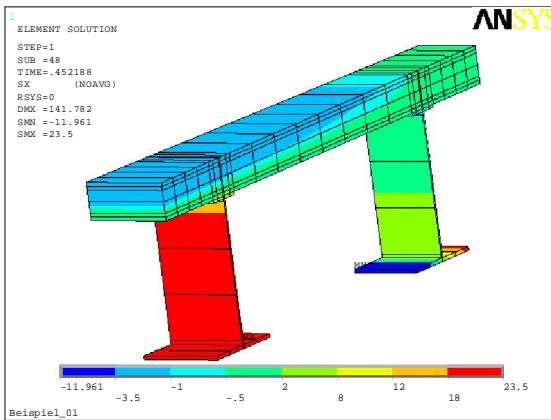
Q3, elastische Grenztragfähigkeit



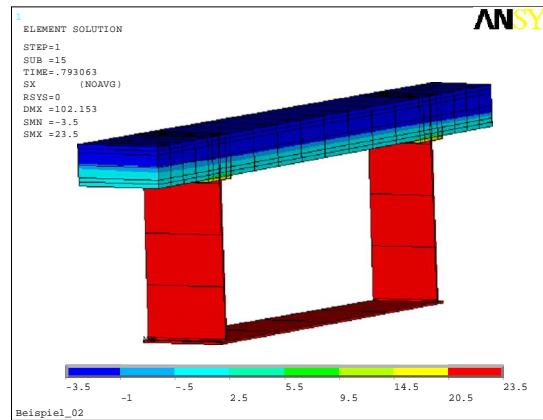
Q4, elastische Grenztragfähigkeit



Q3, plastische Grenztragfähigkeit



Q4, plastische Grenztragfähigkeit

**Bild 4.7** Einfeldträger: Längsspannungen in Feldmitte für $\varphi = 2$ rad ($R = 10$ m)

Die in Tabelle 4.2 abgebildete $\omega_{i,0}$ -Ordinate des Querschnitts Q3 stellt die Verwölbung des Querschnitts im Zustand I dar. Die elastische Grenzspannung im Stahl kann nur in einem einzelnen Punkt an der Innenkante des äußeren Hauptträgers erreicht werden. Dies ist auch in der Darstellung der σ_x -Spannungen in Bild 4.7 links oben, erkennbar. Im äußeren Hauptträger wechseln die Spannungen von rot nach grün. Dies entspricht einem Zugspannungsverlauf mit maximaler Zugspannung im roten Bereich. Im inneren Hauptträger wechseln die Spannungen von dunkelblau nach hellblau. Dies entspricht einem Druckspannungsverlauf mit minimaler Druckspannung im dunkelblauen Bereich. Bei Laststeigerung über die elastische Grenzlast hinaus plastiziert der Querschnitt von Feldmitte ausgehend vom äußeren Träger zum inneren Träger. Betrachtet man in den Zuständen der Laststeigerung den elastischen Restquerschnitt, lässt sich beobachten, dass sich die Querschnittsform des Restquerschnitts vom offenen Hutzerschnitt hin zum I-Querschnitt ändert. Der elastische Restquerschnitt weist somit eine andere Verwölbung auf als der offene Querschnitt des Grundzustandes. In Bild 4.7 links unten ist der σ_x -Spannungsverlauf zum Zeitpunkt des Versagens dargestellt. Die Spannungen im Untergurt des inneren Hauptträgers wechseln entsprechend der Verwölbung des elastischen Restquerschnitts von der

Innenkante zur Außenkante ihr Vorzeichen. Der Stahlquerschnitt plastiziert nicht vollständig.

Bild 4.8 zeigt die maximalen Durchbiegungen $\max w_M$ und die minimalen Verdrehungen $\min \vartheta$ in Feldmitte zum Zeitpunkt der elastischen bzw. plastischen Grenztragfähigkeit. Die Verdrehungen steigen bei kleiner werdendem Krümmungsradius trotz kleiner werdender Grenzlast $q_{z,gr}$ (Bild 4.6) stetig an. Die Verdrehungen beim offenen Querschnitt Q3 sind bei einer elastischen ebenso wie bei einer plastischen Berechnung größer als die Verdrehungen beim Kastenquerschnitt Q4. Beim offenen Querschnitt wird ein größerer Anteil der Torsion durch Wölbkrafttorsion abgetragen. Dies führt zu deutlich größeren Verdrehungen im Träger. Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 erläutert haben die Verdrehungen im gekrümmten Träger Auswirkungen auf die w_M -Verschiebungen. Somit werden auch die Verschiebungen w_M mit größer werdendem Öffnungswinkel größer.

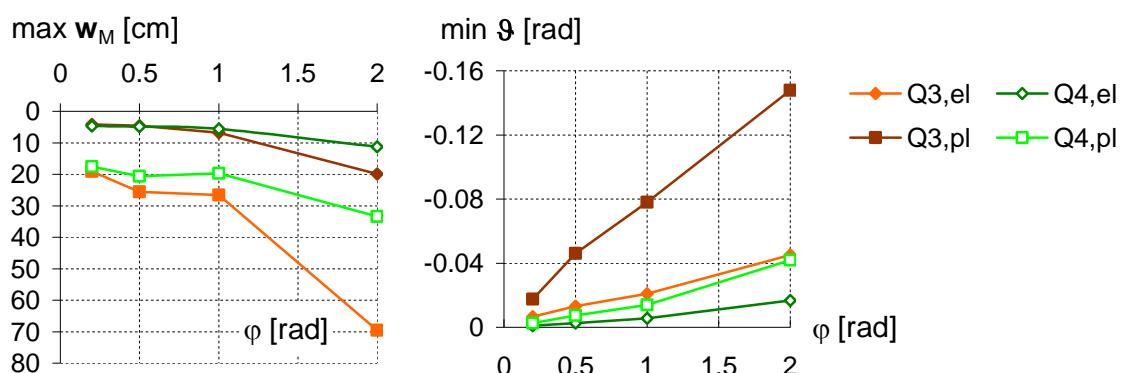


Bild 4.8 Einfeldträger in Verbundbauweise: Verformungen in Feldmitte

4.4 Gekrümmte Zweifeldträger

4.4.1 Schnittgrößen

In diesem Abschnitt werden die im Einführungsbeispiel in Bild 1.8 dargestellten kreisförmig gekrümmten Zweifeldträger behandelt. Zusätzlich werden Zweifeldträger mit Radien $R = 20, 40$ und 100 m ausgewertet (Bild 4.9). Bei einem minimalen Radius von $R = 10$ m beträgt der Öffnungswinkel des Zweifeldträgers maximal $\varphi = 1,92$ rad. Dies entspricht einem Kreisbogen von 110° , d. h. einem Kreisbogen, der zwischen einem Viertel- und einem Halbkreis liegt. Die betrachteten Träger sind in ihrer Krümmungsebene statisch bestimmt gelagert.

In Bild 4.10 sind die Auflagerreaktionen an den Auflagern A und B sowie das Biegemomente $M_{y,Stütz}$ und das Wölbmoment $M_{\omega,Stütz}$ in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ aufgetragen.

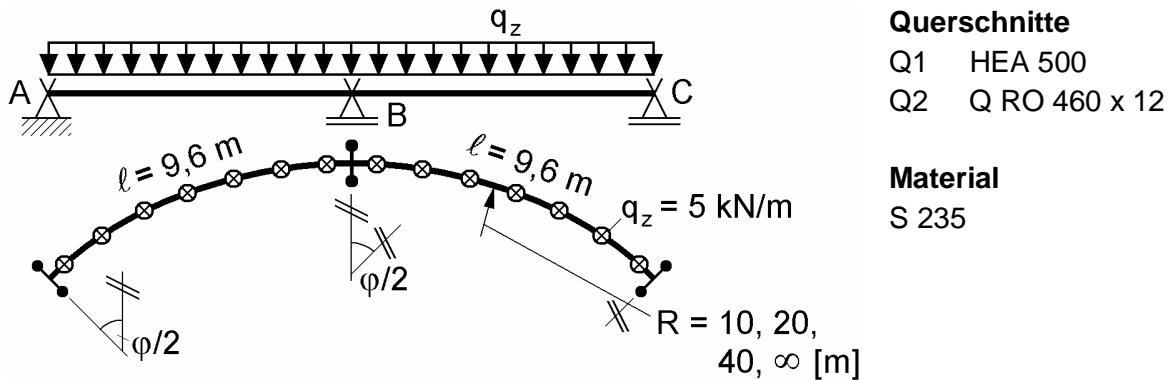


Bild 4.9 Zweifeldträger aus Stahlprofilen

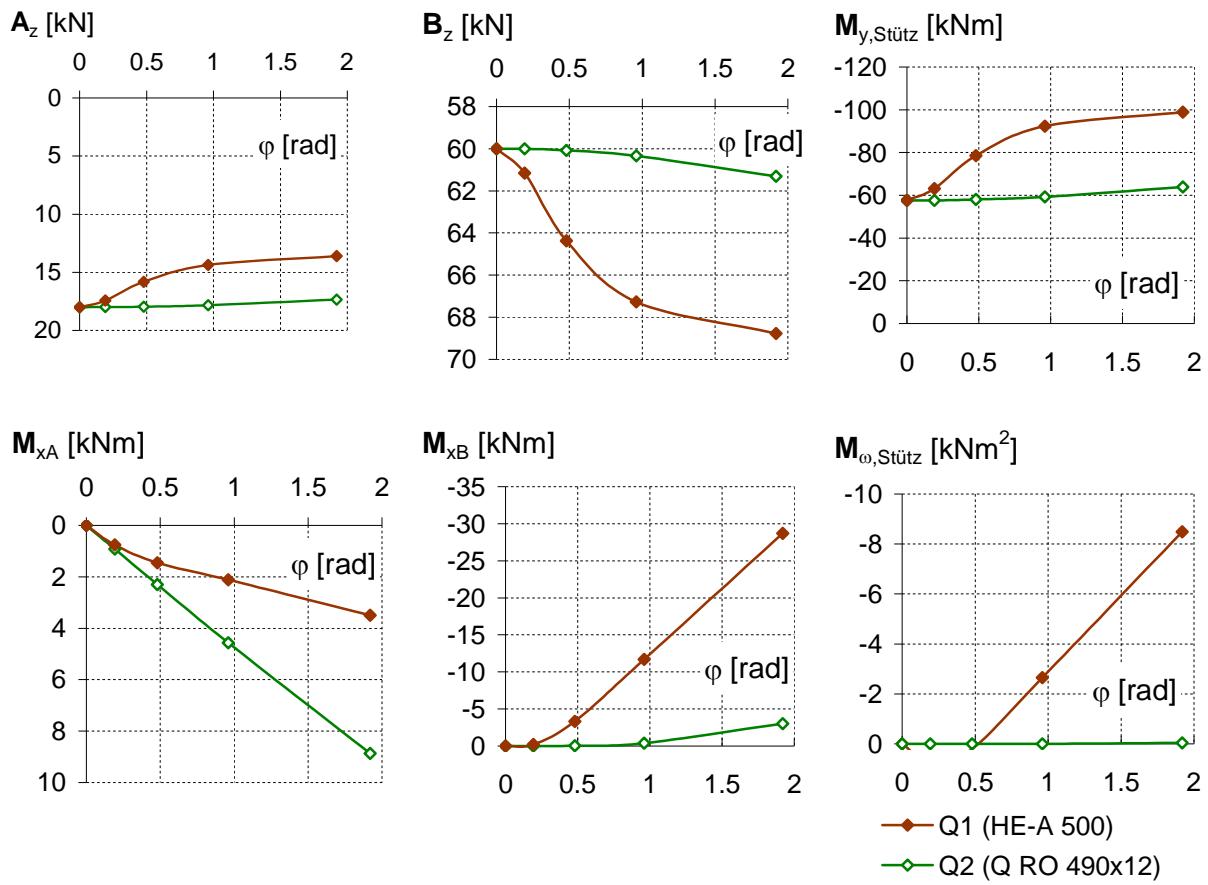


Bild 4.10 Zweifeldträger aus Stahlprofilen: Auflagerreaktionen und Schnittgrößen

Beim Zweifeldträger entspricht die Verteilung der Auflagerkräfte des gekrümmten Trägers nicht mehr der Auflagerkraftverteilung des geraden Trägers. Die Summe der Auflagerkräfte muss aber weiterhin der Summe der Belastung q_z entsprechen. In diesem Beispiel beträgt die resultierende Beanspruchung $\Sigma F_z = 2 \cdot \ell \cdot q_z = 96$ kN. Veränderungen bei den Auflagerkräften ergeben sich aus der Krümmung des Trägers und dem gewählten Querschnitt. Die Auflagerkräfte A_z am Auflager A werden mit zunehmendem Öffnungswinkel tendenziell kleiner, B_z am Auflager B größer. Beim Quadrathohlprofil Q2 beträgt die maximale Änderung der Auflagerkraft am linken Auflager $A_z = -0,7$ kN (-4 %). Beim I-Querschnitt Q1 beträgt die maximale Ände-

rung der Auflagerkraft bereits $A_z = -4,4 \text{ kN}$ (-32%). Die aus der Krümmung resultierenden Auflagertorsionsmomente sind ebenfalls abhängig vom Krümmungsradius und von der Querschnittsform. Beim Querschnitt Q1 steigt das Torsionsmoment M_{xB} am Auflager B mit größer werdendem Öffnungswinkel stärker an als das Torsionsmoment M_{xA} am Auflager A. Beim Querschnitt Q2 wird die Torsion überwiegend über die Auflager A und C abgetragen.

Der aus der veränderten Aufteilung der Lagerkräfte abzulesende Querkraftverlauf stellt den veränderten Verlauf des Biegemomentes dar. Das Moment $M_{y,Stütz}$ wird mit zunehmendem Öffnungswinkel tendenziell größer. Beim Quadrathohlprofil Q2 beträgt die maximale Änderung des Stützmomentes $M_y = -6,28 \text{ kNm}$ ($+11\%$), beim offenem Querschnitt Q1 $M_y = -41,24 \text{ kNm}$ ($+72\%$). Der Einfluss der Krümmung auf das Moment $M_{y,Stütz}$ kann besonders bei offenen Querschnitten beachtlich sein und kann am Verhältnis der Biegesteifigkeit EI_y zur Torsionssteifigkeit GI_T abgelesen werden. Es gilt nach [14]:

$$\kappa_T = EI_y / GI_T \quad (4.2)$$

Das Verhältnis κ_T hängt einzig von der Querschnittsform ab. Für den offenen Querschnitt Q1 ist $\kappa_T = 820$ und für das wölfreie Quadrathohlprofil Q2 ist $\kappa_T = 1,73$. Je geringer die Torsionssteifigkeit des Systems, d. h. je größer κ_T , desto größer sind die zu erwartenden Stützmomente.

Der Faktor $f_{My} = M_{y,P} / M_{y,0}$ mit $M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2 / 8$ in Bild 4.11 zeigt die Abweichung der Momentenlinie gegenüber der $q \ell^2 / 8$ -Parabel an (Abschnitt 4.3.1). In diesem Beispiel liegt die Abweichung zum Parabelstich in allen Varianten unter 4 % ($0,99 \leq f_{My} \leq 1,04$). Der Anstieg des Stützmomentes resultiert also hauptsächlich aus einem veränderten Querkraftverlauf. Beim offenen Querschnitt Q1 nimmt das Verhältnis f_{My} nach einem Anstieg bis zu $f_{My} = 1,001$ bei $\varphi = 0,48 \text{ rad}$ wieder ab und liegt bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 1,92 \text{ rad}$ sogar unter 1,0.

Der Faktor α (Bild 4.11) zeigt das Verhältnis Stützmoment zu Feldmoment an. Je größer der Faktor α ist, desto größer ist der negative Stützbereich. Der Nulldurchgang des Biegemomentes wandert in Richtung Feld. Dies führt zu einer Verschiebung des relativen Extremums im Schnittgrößenverlauf der Torsion. An dieser Stelle ändert der Schnittgrößenverlauf seine Richtung. Wählt man einen über die Länge konstanten Querschnitt ist bei einem schubstarren Träger $\alpha \geq 1,78$. Bei $\alpha \approx 1,85$ (s. auch Abschnitt 7.3.2) führt die Ausdehnung des negativen Stützbereichs bei einer konstanten Gleichstreckenlast dazu, dass M_{xB} in B entgegengesetzt von M_{xA} in A wirkt.

In Bild 4.12 sind die maximalen Verformungen $\max w_M$ und die minimalen Verdrehungen $\min \vartheta$ in Feldmitte angegeben. Beim Quadrathohlprofil Q2 ändern sich die Verformungen gegenüber einer Berechnung am geraden Träger auch bei großen Öffnungswinkeln nur unwesentlich. Beim offenen Querschnitt Q1 vergrößert sich die vertikale Verschiebung w_M bei einem Radius von $R = 10 \text{ m}$ auf das 5fache (s. hierzu Abschnitt 5.2.3.2). Das Verhältnis $\max w_{Q1} / \max w_{Q2}$ beträgt beim Zweifeldträger 4,3 (Einfeldträger: 44fach). Das Zwischenuflager wirkt sich wie zu erwarten günstig auf das Verformungsverhalten des offenen Querschnitts Q1 aus.

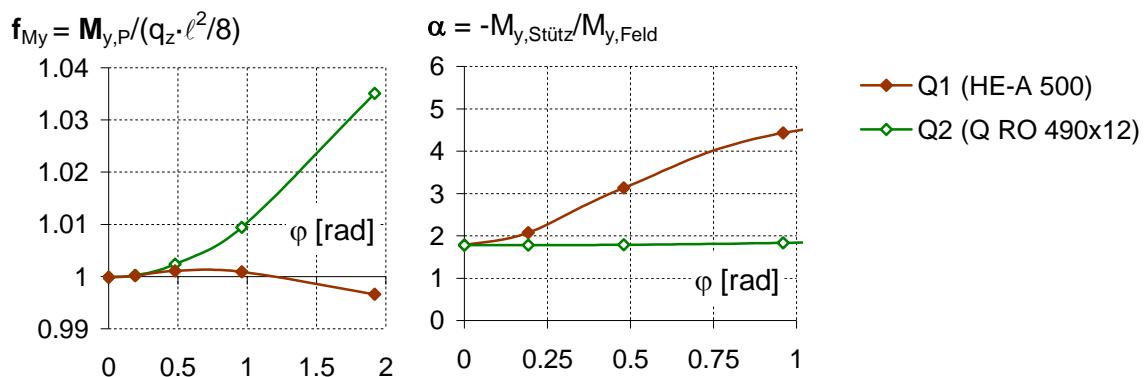


Bild 4.11 Zweifeldträger aus Stahlprofilen: Koeffizienten f_{My} und α

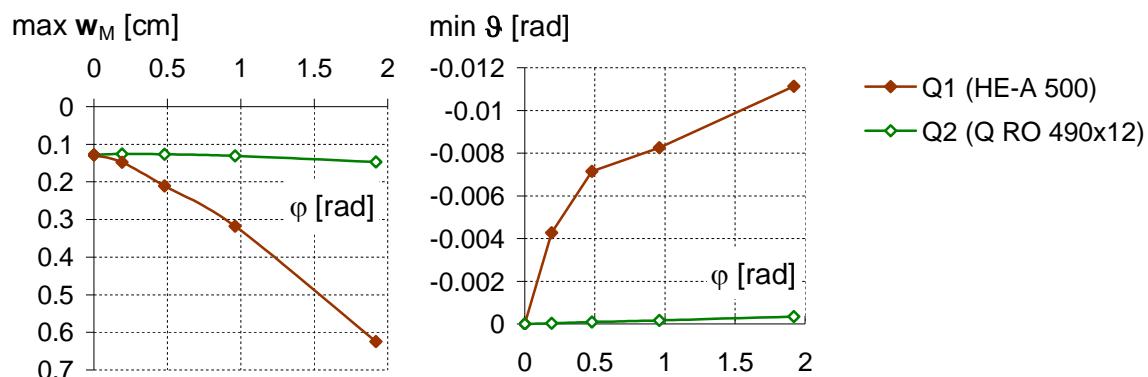


Bild 4.12 Zweifeldträger aus Stahlprofilen: Verformungen $\max w_M$ und $\min \theta$

Maßgebende Parameter

In durchlaufend gekrümmten Trägern wird für die richtige Ermittlung der Schnittgrößenverläufe eine zusätzliche Verformungsbetrachtung an den Zwischenauflagern erforderlich. Gleichgewicht wird überwiegend durch eine Veränderung des Querkraftverlaufs erreicht. Der Faktor f_{My} ist bei der Betrachtung von durchlaufend gekrümmten Trägern vernachlässigbar.

Die sich aus dem veränderten Querkraftverlauf ergebenen Stützmomente an den Zwischenauflagern lassen sich in zwei Anteile aufteilen:

- (1) Stützmoment infolge vertikaler Beanspruchung am geraden Ersatzstab der Bogenlänge ℓ
 $\rightarrow \kappa_{My} = EI_{y,Stuetz} / EI_{y,Feld}$
- (2) Stützmoment infolge der sich aus der Geometrie des Trägers ergebenden Torsionsbeanspruchungen
 $\rightarrow \kappa_T = EI_y / GI_T$

Im Anteil (2) bildet die Biegesteifigkeit EI_y die Steifigkeit gegenüber einer Verdrehung um die y-Achse und die Torsionssteifigkeit GI_T die Steifigkeit gegenüber einer Verdrehung um die x-Achse ab. Beide Anteile der Verdrehung sind über die Krüm-

mung miteinander gekoppelt (Abschnitt 5.2.3.2). Je größer der Faktor κ_T ist, desto größer wird das Stützmoment.

Bei Querschnitten mit kleiner Torsionssteifigkeit, d. h. mit kleinen Stabkennzahlen ε_T , kann es sinnvoll sein, ebenfalls die der Verdrehung um die x-Achse einen Widerstand entgegenbringende Wölbsteifigkeit EI_{ω} mit hinzuzuziehen. Das Verhältnis Biegesteifigkeit zur Wölbsteifigkeit kann über den Faktor $\varepsilon_T^2 \cdot \kappa_T = \ell^2 \cdot EI_y / EI_{\omega}$ erfasst werden. Je größer der Faktor $\varepsilon_T^2 \cdot \kappa_T$ ist, desto größer wird das Stützmoment.

Die Resultierende der sich aus der Geometrie ergebenden Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$ ergibt sich aus den vom Biegemoment eingeschlossenen Flächen (Abschnitt 3.6). Der Faktor

$$\alpha = -M_{y,\text{Stütz}} / M_{y,\text{Feld}}$$

zeigt den Einfluss des Biegemomentes auf diesen Anteil der Torsionsbeanspruchung an, da der Biegemomentenverlauf bestimmt für den Verlauf und die Größe der Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$ ist, der wiederum Einfluss auf den Biegemomentenverlauf hat. Ein tiefer gehendes Verständnis für die Auswirkungen von Steifigkeitsverhältnissen auf den Schnittgrößenverlauf ist notwendig bei der Konzeption von durchlaufend gekrümmten Trägern.

4.4.2 Einfluss der Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen auf die Auflagerreaktionen

Von der Unterkonstruktion auf zunehmende Größen sind die vertikalen Auflagerlasten und an Gabellagern zusätzliche Torsionsmomente. Die Auflagerlasten sind abhängig von:

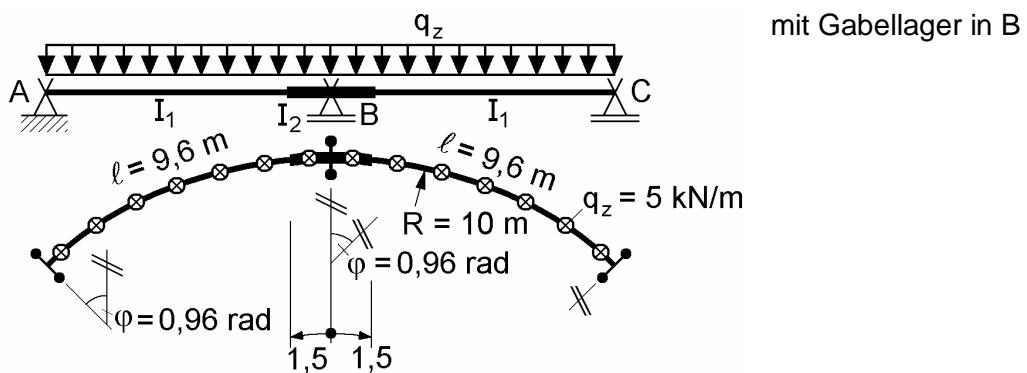
- dem statischen System
- der Belastung
- den (zeitabhängigen) Steifigkeitsverhältnissen im Träger
- der Querschnittsform

In diesem Abschnitt wird auf die Systeme im Abschnitt 4.4.1 mit einem Krümmungsradius von $R = 10$ m zurückgegriffen. Die Steifigkeiten im Stützbereich werden über eine Länge von $\ell = 3$ m mit dem Verhältnisfaktoren $I_2 / I_1 = [0,5 \ 1,0 \ 1,5]$ variiert und die Auswirkungen von Systemen mit und ohne Gabellagerung in B untersucht. In Bild 4.13 sind die gewählten Parameter angegeben. Die Ergebnisse sind in Bild 4.14 zusammengefasst. Dargestellt sind die Auflagerreaktionen A_z und M_{xA} am Auflager A und B_z , M_{xB} am Auflager B, der Faktor α und die Summe der Torsionsbeanspruchungen $\sum |m_{x,II}|$ (Abschnitt 3.6). Weiterhin werden die Verschiebungsgrößen $\max w_M$ und $\min \vartheta$ angeben.

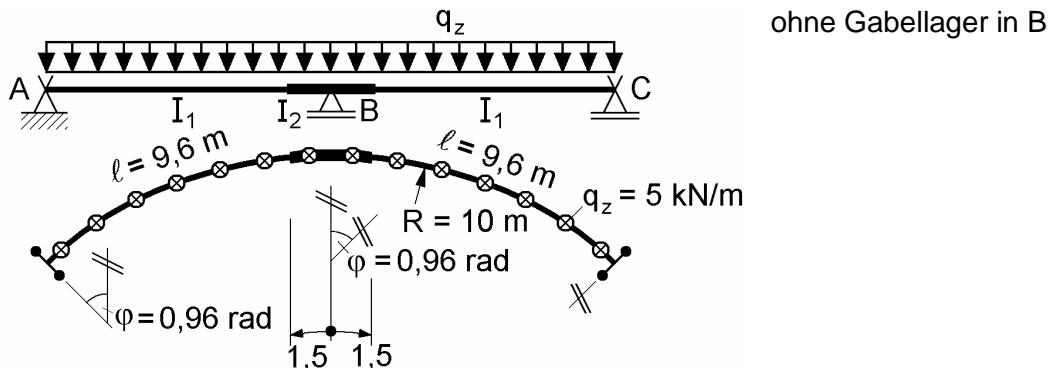
Bei geraden Zweifeldträgern (schubstarr) mit gleichen Feldlängen und Gleichstreckenlast q_z beträgt das Stützmoment bei der Wahl eines konstanten Querschnitts $M_{y,\text{Stütz}} = -q_z \cdot \ell^2 / 8$. Infolge veränderter Biegesteifigkeiten im Stützbereich ändern

sich das Stützmoment und folglich auch der Biegemomenten- sowie der Querkraftverlauf im geraden Träger. Ein steiferer Stützbereich führt zu größeren Stützmomenten, eine Reduktion der Biegesteifigkeit über der Stütze führt zu kleineren Stützmomenten. Die Größe des Stützmomentes $M_{y,\text{Stütz}}$ kann an der Auflagerkraft B_z abgelesen werden. Je größer B_z ist, desto größer ist das Stützmoment $M_{y,\text{Stütz}}$.

System 1 (S1)



System 2 (S2)



Steifigkeit im Feld I_1

Querschnitte Q1 (HE-A 500) und Q2 (Q RO 460x12)

Steifigkeit im Stützbereich I_2 (Varianten)

$$VA \Rightarrow I_2 = 0,5 \cdot I_1$$

$$VB \Rightarrow I_2 = 1,0 \cdot I_1$$

$$VC \Rightarrow I_2 = 1,5 \cdot I_1$$

Bild 4.13 Zweifeldträger: Darstellung der gewählten Parameter

Der Biegemomentenverlauf beeinflusst im gekrümmten Träger die sich aus der Krümmung ergebenden Torsionsbeanspruchungen (Abschnitt 3.6). Die Torsionsbeanspruchungen führen zu Verdrehungen ϑ , die, infolge der Krümmung, mit den Verschiebungen w_M gekoppelt sind (Abschnitt 6.3.2) und somit wiederum den Biegemomentenverlauf beeinflussen. Am Zwischenauflager müssen die gegenseitigen Verdrehung um die y-Achse φ_y und die gegenseitigen Verdrehung um die x-Achse ϑ Null werden (Herstellen der Verträglichkeit). Die aus der Umlenkung von ϑ resultierenden Verdrehungen φ_y führen dabei zu einer Vergrößerung des Stützmomentes, s. auch Abschnitt 5.2.3.2.

Bei wölbarmen Querschnitten sind die Verdrehungen infolge von Torsionsbeanspruchungen generell kleiner als bei offenen Querschnitten (Abschnitt 4.3.1). Ein Vergleich der betrachteten Systeme zeigt außerdem, dass bei den Systemen S1 mit Gabellager in B die Verformungen kleiner sind als bei den zugehörigen Systemen S2. Da in den Systemen S1 die Verdrehungen ϑ in B jedoch bis auf Null ($\vartheta = 0$) abgebaut werden, sind die aus der Umlenkung resultierenden Verdrehungen φ_y tendenziell größer als bei den Systemen S2, wodurch sich zur Herstellung der Verträglichkeit größere Stützmomente ergeben. Die kleineren Verformungen bei Anordnung des Gabellagers in B werden folglich durch einen Anstieg des Biegemomentes am Zwischenauflager erreicht. Bei den Systemen S2 mit torsionsfreier Lagerung in B genügt das Herstellen der Verträglichkeit in B ($\vartheta \neq 0$).

Verglichen werden die Träger mit offenem Querschnitt Q1 und wölfreiem Querschnitt Q2. Die größeren Unterschiede im Biegemomentenverlauf ergeben sich wie erwartet im System S1. Beim offenen Querschnitt Q1 ist wegen der größeren Verdrehungen infolge der sich aus der Krümmung ergebenden Torsionsbeanspruchungen ein größeres Stützmoment nötig, um die Verträglichkeit in B ($\vartheta = 0$) zu erreichen. Bei der Betrachtung des Systems S2 ist auffällig, dass beim offenen Querschnitt Q1 eine Veränderung der Steifigkeit im Stützbereich nur eine geringe Auswirkung auf den Schnittgrößenverlauf hat, sich jedoch unterschiedliche Verformungsverläufe einstellen. Eine Untersuchung der Verdrehung am Auflager B zeigt, dass ein steiferer Stützbereich sich positiv auf die Verdrehung in B auswirkt. Die Verdrehung am Auflager B beträgt für die Variante VA $\vartheta_B = 0,0856$ rad, für die Variante VC $\vartheta_B = 0,0258$ rad.

Der Faktor α zeigt das Verhältnis Stützmoment zu Feldmoment an und damit die Ausdehnung des negativen Stützbereiches (Abschnitt 4.4.1). Bei den untersuchten Systemen S1 beträgt der Faktor α minimal $\alpha = 1,43$ und maximal $\alpha = 5,47$. Bei $\alpha = 1,43$ wirkt M_{xA} bei Anordnung eines Gabellagers in B in die Wirkungsrichtung von M_{xA} . Ab einem Faktor $\alpha \approx 1,85$ wirkt M_{xB} entgegengesetzt dem Auflagertorsionsmoment M_{xA} . Die betragsmäßige Summe der von den Gabellagern aufzunehmenden Torsion $2 \cdot |M_{xA}| + |M_{xB}|$ ist dann größer als bei der entsprechenden Ausführung gemäß System S2. In Variante VA ($\alpha = 1,43$) mit wölfreiem Querschnitt Q2 scheint eine Ausführung gemäß System S1 sinnvoll, um die Auflagertorsionsmomente gleichmäßig auf die Auflager zu verteilen. Bei der Wahl eines steiferen Stützquerschnitts (Variante VB mit $\alpha = 1,99$ und VC mit $\alpha = 2,34$) wirkt der sich einstellende Biegemomentenverlauf ungünstig auf die Verteilung der Torsionsmomente an den Auflagern aus. Da die Unterschiede bei den Verformungen bei den Ausführungen System S1 und S2 gering sind, ist in diesen Fällen eine torsionsfreie Lagerung in B günstiger für den Lastabtrag. Beim offenen Querschnitt Q1 stellt sich bei Ausbildung entsprechend System S1 ein sehr ungünstiger Biegemomentenverlauf mit $4,69 \leq \alpha \leq 5,47$ ein. Bei diesen Systemen sollte auf ein Gabellager in B verzichtet werden. Die vergrößerten Verformungen sind dann aber zu berücksichtigen.

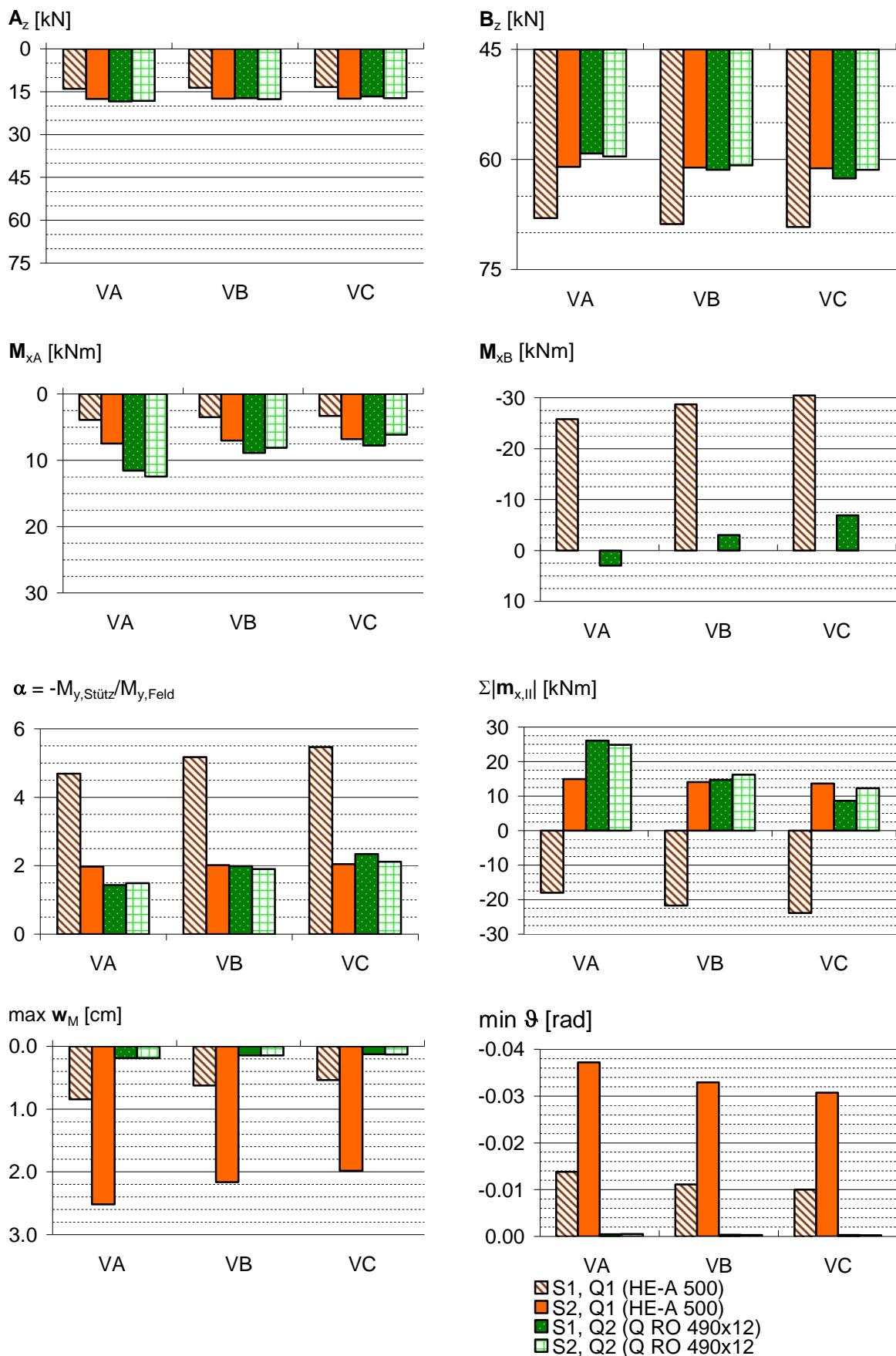


Bild 4.14 Einfluss unterschiedlicher Steifigkeiten bei den Zweifeldträgern in Bild 4.13

Bei den Systemen S2 müssen die gesamten sich aus der Krümmung ergebenden Torsionsbeanspruchungen zu den Endauflagern abgetragen werden. Eine Verstärkung des Stützbereichs wirkt sich günstig auf die Summe der Torsionsbeanspruchungen $\sum |m_{x,II}|$ aus. Die Auflagergröße M_{xA} wird kleiner. Da im System S2 der Einfluss der Biegesteifigkeiten auf den Verlauf der Schnittgrößen beim wölbefreien Querschnitt Q2 größer ist als beim offenen Querschnitt Q1 wirkt sich eine Verstärkung des Stützbereichs (Variante VC) in diesem Fall auch stärker aus.

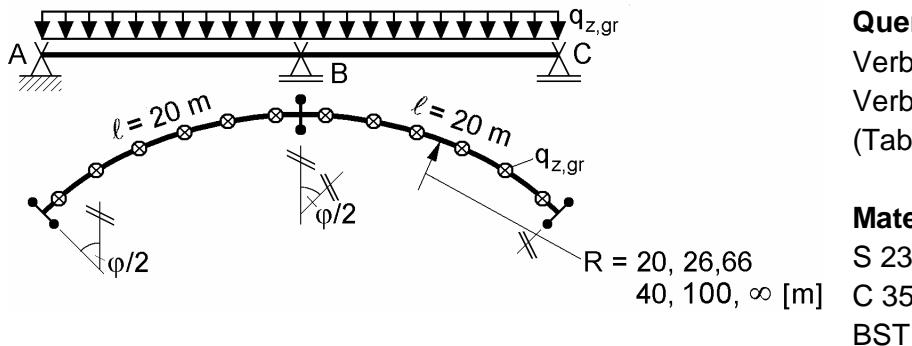
Zusammenfassend lässt sich für die betrachteten Systeme feststellen:

- Beim offenen Querschnitt sind die Verformungen generell größer als beim wölbarmen Querschnitt.
- Durch die Anordnung eines Gabellagers in B können die Verformungen reduziert werden. Die kleineren Verformungen werden dabei durch teilweise sehr große Stützmomente am Mittelauf Lager erreicht.
- Die betragsmäßig aufzunehmende Summe der Torsionsmomente $2 \cdot |M_{x,A}| + |M_{x,B}|$ an den Auflagern ist bei Anordnung eines Gabellagers in B tendenziell größer.
- Der wölbarme Querschnitt trägt die Torsion infolge der sich einstellenden Torsionsbeanspruchungen überwiegend zu den Endauflagern ab.
- Bei Anordnung von Gabellagern in B trägt der offene Querschnitt die Torsion infolge der sich einstellenden Torsionsbeanspruchungen überwiegend zum Auflager B ab.
- Beim wölbarmen Querschnitt wirkt sich eine Verstärkung im Stützbereich günstig auf die Torsionsbeanspruchungen infolge Krümmung aus, d. h. die Summe der Torsionsbeanspruchungen $\sum |m_{x,II}|$ wird kleiner.
- Beim offenen Querschnitt und torsionsfreier Lagerung in B hat eine Veränderung der Steifigkeit über der Stütze nur geringen Einfluss auf die Schnittgrößenverläufe, jedoch auf die Verformungen.

4.4.3 Tragfähigkeit gekrümmter Verbundträger

Untersucht werden die kreisförmig gekrümmten Zweifeldträger mit Spannweiten von $\ell = 2 \cdot 20 \text{ m}$ mit einer kurzzeitig wirkenden Gleichstreckenlast $q_{z,gr}$ nach Bild 4.15. Die Träger sind in ihrer Krümmungsebene statisch bestimmt gelagert. Untersucht werden die Radien $R = 20, 26,66, 40, 100 \text{ m}$ und der gerade Stab. Wie auch beim Einfeldträger beträgt der maximale Öffnungswinkel des Systems $\varphi = 2 \text{ rad}$.

In Bild 4.16 sind die Ergebnisse aus den Berechnungen der elastischen und plastischen Grenzlasten zusammengefasst. Dargestellt sind die Grenzlast $q_{z,gr}$, das Verhältnis α und der Koeffizient f_{My} sowie die bezogene Auflagerkraft f_B , die bezogenen Größen $M_{xA}/(q_{z,gr} \cdot \ell^2)$, $M_{xB}/(q_{z,gr} \cdot \ell^2)$ und $M_{o,Stütz}/(q_{z,gr} \cdot \ell^2)$, weiterhin das auf das Grenzmoment bezogene minimale Stützmoment und das maximale Feldmoment.

**Querschnitte**

Verbundquerschnitt Q3

Verbundquerschnitt Q4

(Tabelle 4.2)

Material

S 235

C 35/45

BST 500 S

Grenzlasten

$g_{z,gr,el}$ = Elastische Grenzlast unter Berücksichtigung materieller Nichtlinearitäten (Abbruchkriterium $\varepsilon_{el} = f_{ya}/E_a$)

$g_{z,gr,pl}$ = Plastische Grenzlast unter Berücksichtigung materieller und geometrischer Nichtlinearitäten

Bild 4.15 Zweifeldträger in Verbundbauweise

Infolge von Rissbildung über der Stütze weist der Verbundträger über der Stütze und im Feld unterschiedliche Biegesteifigkeiten auf. Bei Annahme abgeschlossener Rissbildung beträgt für beide Querschnitte das Verhältnis $\kappa_{My} = E_a I_{y,st} / E_a I_{y,i,0} = 0,48$. Im geraden Träger ergibt sich ein Stützmoment von $M_{y,Stütz} = -0,092 \cdot q_z \cdot \ell^2$ mit einem Verhältnis $\alpha = -M_{y,Stütz} / M_{y,Feld} = 1,13$. Das Auflager B muss dabei 60 % ($f_B = 0,6$) der Beanspruchung aufnehmen. Der Stützquerschnitt ist zum Zeitpunkt des Versagens zu 100 % ($M_{y,Stütz} / M_{y,el,min}$) ausgenutzt, der Feldquerschnitt zu ca. 75% ($M_{y,Feld} / M_{y,el,max}$).

Die elastische Grenzlast nimmt mit zunehmendem Öffnungswinkel ab. Beim Kastenquerschnitt beträgt sie bei $\varphi = 2$ rad 85 % der maximalen elastischen Grenzlast. Die Reduzierung resultiert aus einer Vergrößerung des Stützmomentes infolge Krümmung, wobei der Anteil der Krümmung am Stützmoment 15 % entspricht. Wie bereits in Abschnitt 4.4.1 erläutert resultiert der Anstieg des Stützmomentes hauptsächlich aus einem veränderten Querkraftverlauf. Die Abweichung des Parabolstichs zu $M_0 = q_z,gr \cdot \ell^2 / 8$ beträgt maximal 6 % ($1,0 \leq f_{My} \leq 1,06$). Beim offenen Querschitt setzen sich die Traganteile, die die Querschnittstragfähigkeit an der Stütze beeinflussen, aus drei Anteilen zusammen – dem Anteil aus dem vergleichbaren geraden Stab, dem Anteil aus Krümmung sowie dem Anteil Wölbmoment aus Krümmung. Die elastische Grenzlast reduziert sich bei $\varphi = 2$ rad auf 52 %. Dies entspricht dem Anteil aus dem vergleichbaren geraden Stab. Der Anteil der Krümmung am Stützmoment beträgt 22 %. Der Anteil des Stützmomentes an der Beanspruchung an der Stütze liegt $M_{y,Stütz} / M_{y,el,min}$ nur noch bei 74 %. Der Anteil der Längsspannung aus Verwölbung beträgt somit 26 %.

Mit den in ANSYS ermittelten Schnittgrößen und den vorab ermittelten Querschnittskennwerten (Tabelle 4.2) ergibt sich die minimale Grenzspannung σ_{min} an der Innenkante des äußeren Hauptträgers zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= \frac{M_{y,\text{Stütz}}}{I_y} \cdot z_u + \frac{M_{\omega,\text{Stütz}}}{I_\omega} \cdot \max \omega_u \\ &= -\frac{329.525}{779.636} \cdot (100 - 58,8) + \frac{6369880}{8.213.210.000} \cdot (-7415) \\ &= -17,41 - 5,75 = -23,2 \text{ kN/cm}^2 \approx -23,5 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}\quad (4.3)$$

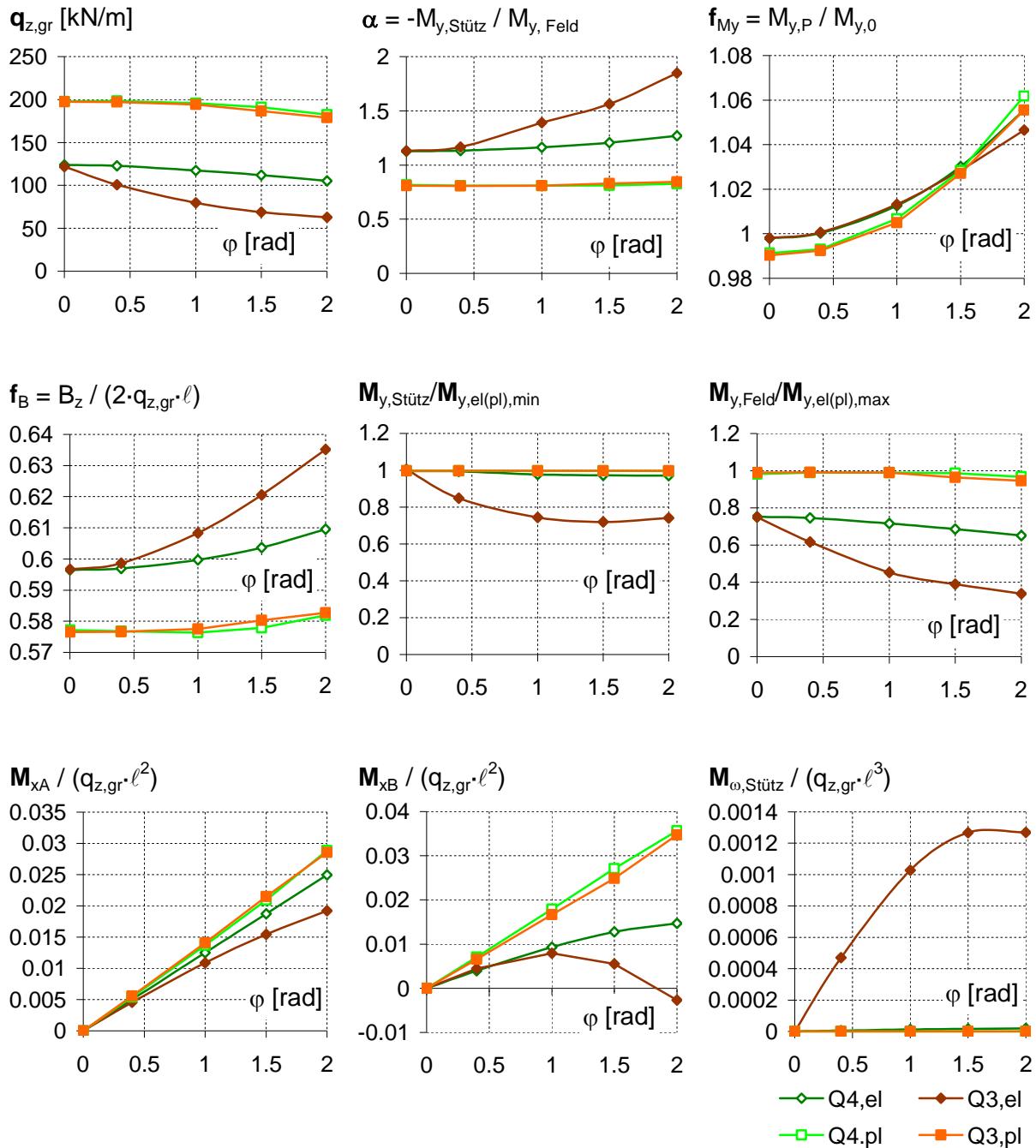


Bild 4.16 Zweifeldträger in Verbundbauweise: bezogene Auflagerreaktionen und Schnittgrößen

Der Zusammenhang der Schnittgrößen M_y , M_x und M_ω wird in Bild 4.17 am offenen Querschnitt Q3 veranschaulicht. Der Einfluss auf die Grenztragfähigkeit soll erläutert werden. Durch die Krümmung vergrößert sich das Verhältnis $\alpha = -M_{\text{Stütz}} / M_{\text{Feld}}$. Der Nulldurchgang im Biegemomentenverlauf wandert in Richtung Feld. Hierdurch nimmt das Torsionsmoment M_{xB} am Auflager B mit zunehmendem Öffnungswinkel ab. Bis $\varphi \approx 1,65$ rad ist die Wirkungsrichtung von M_{xB} am Auflager B positiv, das Wölbmoment $M_{\omega,\text{Stütz}}$ ist ebenfalls positiv und wird mit größer werdendem Öffnungswinkel ebenfalls größer. Die wölbeinspannende Wirkung von M_{xB} wirkt sich bei positiver Wirkungsrichtung verstärkend auf das Wölbmoment $M_{\omega,\text{Stütz}}$ aus. Im Schnittgrößenverlauf M_ω kann man dies an einer ausgeprägten Spitze über der Stütze erkennen. Da M_{xB} mit zunehmenden Öffnungswinkel kleiner wird, wird auch die wölbeinspannende Wirkung von M_{xB} kleiner. Bei $\varphi \geq 1,65$ rad ändert sich die Wirkungsrichtung von M_{xB} . Mit negativem M_{xB} wirkt sich die wölbeinspannende Wirkung reduzierend auf das Wölbmoment $M_{\omega,\text{Stütz}}$ aus. Dies zeigt sich durch eine Einschnürung im M_ω -Verlauf über der Stütze. Mit zunehmendem Öffnungswinkel wird bei einer betragsmäßigen Vergrößerung von M_{xB} die Einschnürung größer. Dies führt mit größer werdendem Öffnungswinkel dazu, dass der Anteil der Verwölbung an der Auslastung kleiner wird und somit der Abfall der Grenzlast $q_{z,\text{gr}}$ reduziert werden kann.

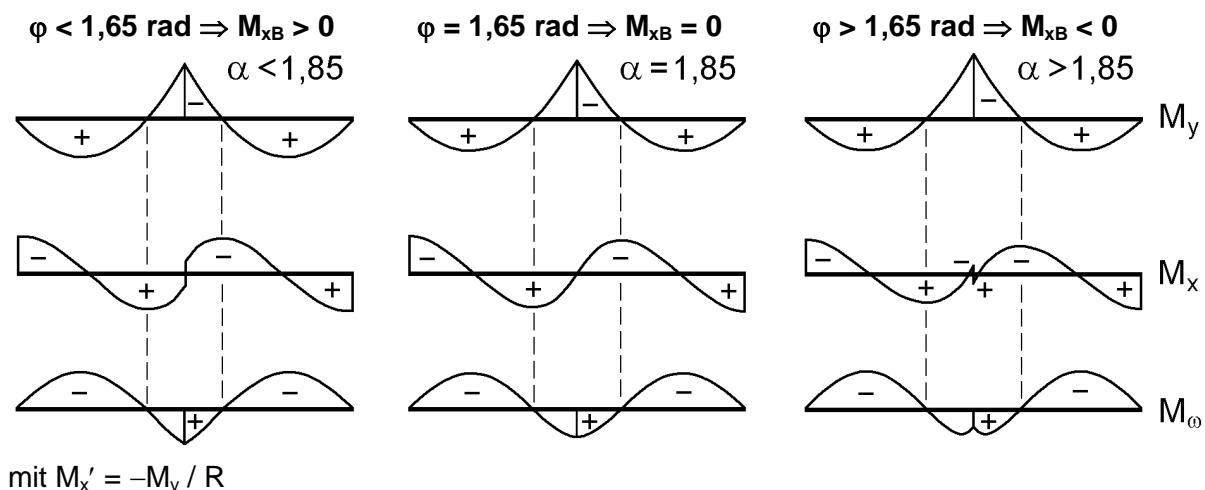


Bild 4.17 Zweifeldträger in Verbundbauweise, Q3: Schematische Darstellung der Schnittgrößenverläufe aus q_z -Lasten in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ

Die bezogenen Torsionsmomente $M_{xA}/(q_{z,\text{gr}} \cdot \ell^2)$ am Auflager A steigen mit größer werdendem Öffnungswinkel stetig an. Beim Kastenquerschnitt Q4 sind sie jedoch größer als beim offenen Querschnitt Q3 (Bild 4.16). Wegen des größeren Stützmomentes beim offenen Querschnitt Q3 stellt sich ein günstigerer Verlauf der Torsionsbeanspruchungen ein. Die resultierende Torsionsbeanspruchung, die von den Auflagern aufgenommen werden muss, wird reduziert. Beim Kastenquerschnitt Q4 ist die Summe der bezogenen Auflagertorsionsmomente bei $\varphi = 2$ rad dreimal so groß wie beim offenen Querschnitt Q3.

Beim Kastenquerschnitt Q4 könnte durch eine Vergrößerung des Stützmomentes durch eine Veränderung des Verhältnisses $\kappa_{My} = E_a I_{y,st} / E_a I_{y,i,0} > 0,48$ der Biegemomentenverlauf so optimiert werden, dass die Resultierende der Torsionsbeanspruchung und somit auch die Torsionsmomente an den Auflagern minimal werden, s. hierzu Abschnitt 4.4.2.

Bei einer plastischen Berechnung wird der Biegemomentenverlauf von der Begrenzung des minimalen Stützmomentes auf das minimale plastische Grenzmoment $M_{y,pl,min}$ und dem maximalen Feldmoment auf das maximale plastische Grenzmoment $M_{y,pl,max}$ nach Tabelle 4.3 bestimmt. Der Faktor f_{My} ergibt sich für diesen Verlauf am geraden Trägern zu $f_{My} = 0,99$ (Abschnitt 4.3.1). Biegemomentenbeanspruchungen infolge Krümmung führen zu einer Vergrößerung von f_{My} .

Beim Kastenquerschnitt Q4 können die plastischen Grenzmomente bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 1,5$ rad erreicht werden. Bei $\varphi = 2$ rad kann das plastische Grenzmoment in Feldmitte immerhin noch zu 98 % ausgenutzt werden. Die Reduzierung der Grenzlast $q_{z,gr}$ um 7,7 % resultiert hauptsächlich aus der Vergrößerung von f_{My} um 6,1 %.

Beim offenen Querschnitt Q3 können die plastischen Grenzmomente bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 1$ rad erreicht werden. Bei $\varphi = 2$ rad wird nur noch 95 % des plastischen Grenzmomentes in Feldmitte erreicht. Dies erklärt die Abweichungen beim f_{My} -Faktor gegenüber dem Kastenquerschnitt Q4. Die Vergrößerung des Biegemomentes beträgt bei $\varphi = 2$ rad lediglich 5,6 %. Die Reduzierung der Grenzlast um 9,3 % resultiert beim Querschnitt Q3 einerseits aus dem Nichterreichen des plastischen Grenzmomentes in Feldmitte und andererseits aus der Vergrößerung von f_{My} .

5 Erfassung der Krümmung durch Ersatzsysteme

5.1 Vorbemerkungen

In der Praxis stehen dem Ingenieur eindimensionale Stabwerksprogramme mit geraden Stabelementen unter Beachtung der Wölbkrafttorsion zur Verfügung (z. B. *KSTAB* [83]). Ziel ist es, die den Einfluss der Krümmung berücksichtigenden Anteile mithilfe von Ersatzlasten oder -verformungen so zu erfassen, dass eine Berechnung am geraden Träger durchführbar ist. In diesem Kapitel werden Ersatzsysteme für schwach und stark gekrümmte Träger entwickelt, die ausgehend vom geraden Träger die zusätzlichen Einflüsse aus der Krümmung über Ersatzlasten erfassen. Eine Berechnung dieser Ersatzsysteme unter Verwendung z. B. von *KSTAB* führt unweigerlich zur richtigen Aufteilung der Torsion in *St. Venantsche* Torsion und Wölbkrafttorsion und somit zur richtigen Erfassung der Wölbmomente, die bei offenen Querschnitten einen großen Anteil an der Querschnittsausnutzung haben können. Weiterhin können die Verformungen mit dem Ersatzsystem ermittelt werden.

Große FEM–Programmsysteme wie *ANSYS* [27] bieten gerade oder krummlinige Stabelemente an, mit denen die Wölbkrafttorsion bei einer räumlichen Berechnung berücksichtigt werden kann. Kommerzielle räumliche Stabwerkprogramme (z. B. *RSTAB* [82]) verwenden in der Regel gerade Stabelemente, in denen der Freiheitsgrad 9' nicht eingearbeitet ist. Wird in diesem Fall der gekrümmte Träger als polygonal angenäherter Stabzug idealisiert, ist zu beachten, dass bei offenen Querschnitten die Verformungen nicht richtig erfasst werden können. Das führt bei durchlaufend gekrümmten Trägern, bei denen die Verformungen einen großen Einfluss auf die Verläufe von Biege- und Torsionsmomenten haben, zu falschen Ergebnissen, s. auch Abschnitt 4.4.2. Die Größe der möglichen Abweichungen wird an einem Beispiel verdeutlicht.

Im letzten Abschnitt wird ein von Ramberger [86] entwickeltes Trägerrostmodell zur richtigen Erfassung der Schnittgrößenverläufe in gekrümmten Trägern mit offenen Querschnitten und bei Verwendung von Stabelementen mit 6 Freiheitsgraden (ohne 9') vorgestellt und beurteilt.

5.2 Gerader Stab mit Ersatzlasten

5.2.1 Ersatzlasten

Betrachtet werden Ein- und Zweifeldträger mit Belastungen q_z und F_z . Die hierfür benötigten Gleichungen lauten nach Tabelle 3.6:

$$\frac{V_z}{dx} = -q_z \quad (5.1)$$

$$\frac{M_y}{dx} = V_z - \frac{M_x}{R} \quad (5.2)$$

$$\frac{M_x}{dx} = -m_{x,ges} + \frac{M_y}{R} \quad (5.3)$$

Zieht man an beiden Enden des gekrümmten Trägers erhält man einen geraden Stab mit der Länge ℓ . Die Länge ℓ entspricht der Bogenlänge des gekrümmten Trägers. Es ist sofort erkennbar, dass die Gleichungen des gekrümmten Trägers den zugehörigen Gleichungen des geraden Trägers mit der Länge ℓ und zusätzlichen Anteilen, die den Einfluss der Krümmung darstellen, entsprechen.

Die Abhängigkeiten zwischen den Biege- und Torsionsmomenten sind bei Betrachtung der Gln. (5.1) bis (5.3) erkennbar. Unter der Annahme $m_{x,ges} = 0$ kann die Ersatzbelastung \bar{m}_x , die den Einfluss der Krümmung auf die Torsion ausdrückt, direkt abgelesen werden:

$$\begin{aligned} M_x' &= \frac{M_y}{R} \\ \Rightarrow \bar{m}_x &= -\frac{M_y}{R} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Ersatzlast \bar{m}_x ist die sich aus der Krümmung ergebende Torsionsbeanspruchung $m_{x,II}$ (s. Abschnitt 3.6). Der Einfluss der Krümmung auf die Biegung kann über eine Ersatzlast \bar{q}_z erfasst werden. Diese Ersatzlast stellt die Vergrößerung des Biegemomentes gegenüber dem geraden Träger dar, hat jedoch keinen Einfluss auf den Querkraftverlauf. Es gilt:

$$\begin{aligned} M_y'' &= V' - \frac{M_x'}{R} \\ &= q_z + \bar{q}_z(M_y) \\ \Rightarrow \bar{q}_z(M_y) &= \frac{M_y}{R^2} \quad \text{für die Berechnung von } M_y \end{aligned} \quad (5.5)$$

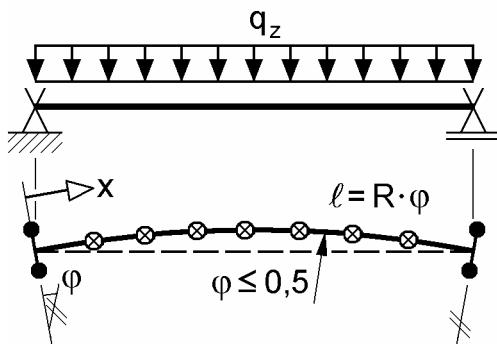
$$\begin{aligned} V_z' &= -q_z \\ \Rightarrow \bar{q}_z(V_z) &= 0 \quad \text{für die Berechnung von } V_z \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Ersatzlast \bar{q}_z ist eine sich aus der Krümmung ergebende Biegebeanspruchung. Es ist festzustellen, dass bei in z-Richtung beanspruchten Trägern der Einfluss der Torsionsbeanspruchung aus Krümmung größere Auswirkungen auf den Schnittgrößenverlauf hat als die Biegebeanspruchung aus Krümmung.

5.2.2 Träger mit schwacher Krümmung

Betrachtet wird der schwach gekrümmte gabelgelagerte Einfeldträger mit einer Belastung q_z . Das System und das zugehörige Ersatzsystem mit Länge des Bogens und der Ersatzlasten nach Gl. (5.4) sind in Bild 5.1 dargestellt.

System:



Ersatzsystem:

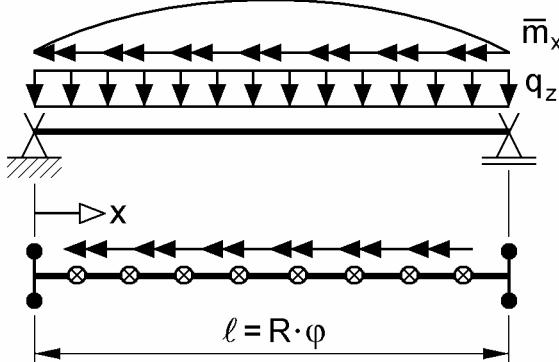


Bild 5.1 Schwach gekrümmter Einfeldträger mit Gleichstreckenlast q_z und zugehöriges Ersatzsystem

Da die Ersatzlast \bar{m}_x größere Auswirkungen auf den Schnittgrößenverlauf hat als \bar{q}_z wird bei schwach gekrümmten Trägern der Einfluss des Torsionsmomentes auf das Biegemoment vernachlässigt. Nach Xanthakos [128] stellt diese vereinfachte Vorgehensweise für Öffnungswinkel $\varphi = \ell/R \leq 0,5$ rad eine gute Näherung dar. Der schwach gekrümmte Einfeldträger mit Einzellast F_z kann auf die gleiche Weise mithilfe eines geraden Stabes mit der Länge des Bogens und der Ersatzbelastung \bar{m}_x erfasst werden.

5.2.3 Träger mit starker Krümmung

5.2.3.1 Einfeldträger

Betrachtet wird der stark gekrümmte gabelgelagerte Einfeldträger mit der Belastung q_z nach Bild 5.2. Eine Ersatzbelastung \bar{m}_x nach Gl. (5.4) mit dem am Ersatzsystem ermitteltem Biegemoment $M_{y,0} = q_z \cdot \ell^2/8$ kann nur eine erste Näherung sein, da das Torsionsmoment wiederum Einfluss auf das Biegemoment hat. Für die Bestimmung der Biegemomente wird eine zusätzliche Ersatzbelastung \bar{q}_z nach Gl. (5.5) erforderlich. Die Abhängigkeiten zwischen den Torsions- und Biegemomenten kann in einem iterativen Vorgang nach Bild 5.3 erfasst werden.

Die Ersatzlasten \bar{m}_x und \bar{q}_z sollen nun direkt ermittelt werden. Hierfür wird auf die Lösungen von Dabrowski zurückgegriffen, s. Tabelle 3.1. Mithilfe der dort angegebenen Formeln werden lastbezogene Vergrößerungsfaktoren f_v bestimmt, die die Vergrößerung des Biegemomentes in Feldmitte aufzeigen.

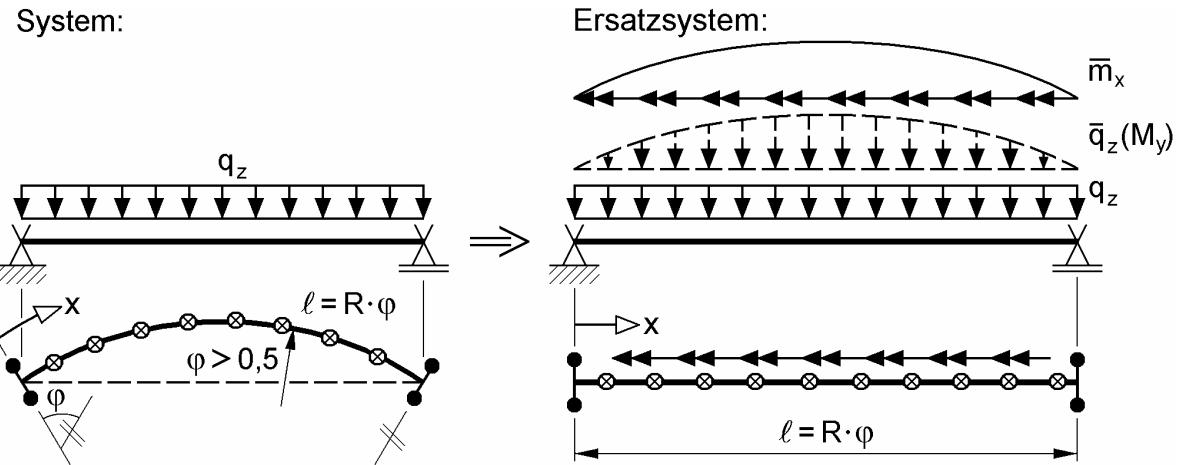


Bild 5.2 Stark gekrümmter Einfeldträger mit Gleichstreckenlast q_z und zugehöriges Ersatzsystem

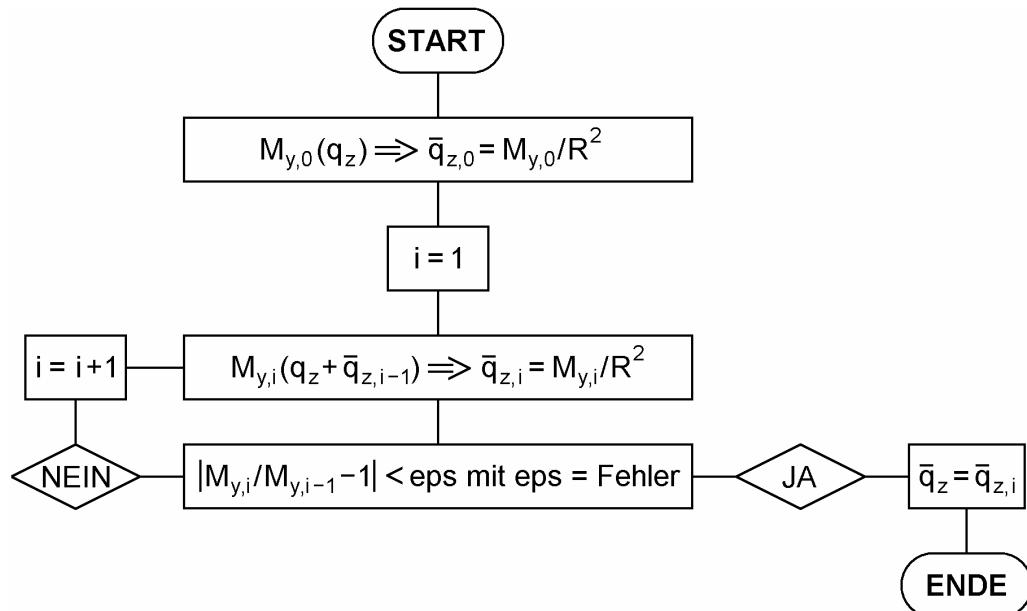


Bild 5.3 Iterative Berechnung der Ersatzbelastung \bar{q}_z

Wenn die Ersatzlasten bestimmt sind, können die Schnittgrößen, insbesondere die Aufteilung der Torsion in St. Venantsche Torsion und Wölbkrafttorsion und die Verformungen am Ersatzsystem ermittelt werden.

Betrachtet wird ein stark gekrümmter Einfeldträger mit einer Belastung q_z . Das System und die Schnittgrößenverläufe aufgetragen über die Bogenlänge ℓ sind in Bild 5.4 dargestellt. Die Schnittgrößen S werden in zwei Anteile aufgeteilt. S_0 entspricht den am Ersatzsystem ohne Ersatzbelastung ermittelten Schnittgrößen – dem 0–System. Die Veränderung der Schnittgrößen infolge der Krümmung wird mit ΔS ausgedrückt. Die Ersatzlasten ergeben sich somit nach Gln. (5.4) und (5.5) zu:

$$\bar{q}_z = \frac{M_y}{R^2} = \frac{M_{y,0} + \Delta M_y}{R^2} \quad (5.7)$$

$$\bar{m}_x = -\frac{M_y}{R} = -\frac{M_{y,0} + \Delta M_y}{R} \quad (5.8)$$

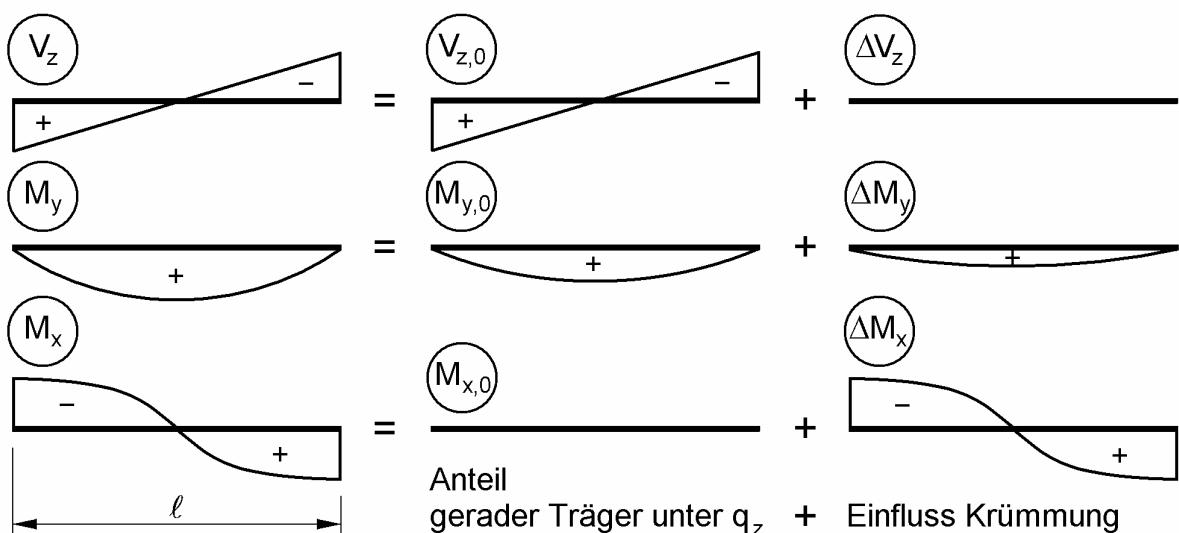
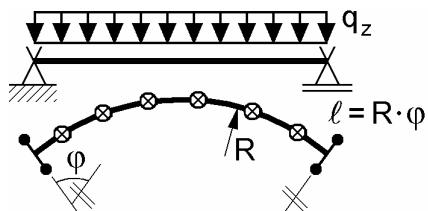


Bild 5.4 Stark gekrümmter Einfeldträger mit Gleichstreckenlast q_z

Das Verhältnis des aus der Krümmung hervorgerufenen Momentenzuwachses $\Delta M_y(\ell/2)$ zum dem am 0–System ermittelten Feldmoment $M_{y,0}(\ell/2)$ wird mit dem Vergrößerungsfaktor f_v bezeichnet. Es gilt:

$$f_v = \frac{\Delta M_y(\ell/2)}{M_{y,0}(\ell/2)} = \frac{M_y(\ell/2) - M_{y,0}(\ell/2)}{M_{y,0}(\ell/2)} \quad (5.9)$$

Für das Moment in Feldmitte ergibt sich folglich:

$$M_y(\ell/2) = (1 + f_v) \cdot M_{y,0}(\ell/2) \quad (5.10)$$

Mit dem Faktor f_v lässt sich nun der bei der Ermittlung der Biege- und Torsionsmomente gemachte Fehler bei der Berechnung mit einem Ersatzsystem ohne Berücksichtigung von \bar{q}_z (Berechnung für schwach gekrümmte Träger) abschätzen.

Für den mit einer Gleichstreckenlast q_z belasteten Einfeldträger mit variablem Öffnungswinkel φ ergibt sich der Vergrößerungsfaktor f_v mit dem Feldmoment $M_y(\varphi/2)$

nach Dabrowski (Tabelle 3.1) und dem Parabelstich $M_{y,0}(\ell/2) = q_z \cdot \ell^2/8$ für das 0-System zu:

$$f_v = f_{v,qz} = \frac{16 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} - 8 \cdot \sin \varphi}{\varphi^2 \cdot \sin \varphi} - 1 \quad (5.11)$$

In Bild 5.5 ist der Faktor $f_{v,qz}$ über den Öffnungswinkel $\varphi = \ell/R$ aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass die Auswirkungen der Krümmung auf das Biegemoment für kleine Öffnungswinkel gering sind. Für Öffnungswinkel $\varphi \leq 0,5$ rad liegt die Vergrößerung des Biegemomentes in Feldmitte unter 5 %.

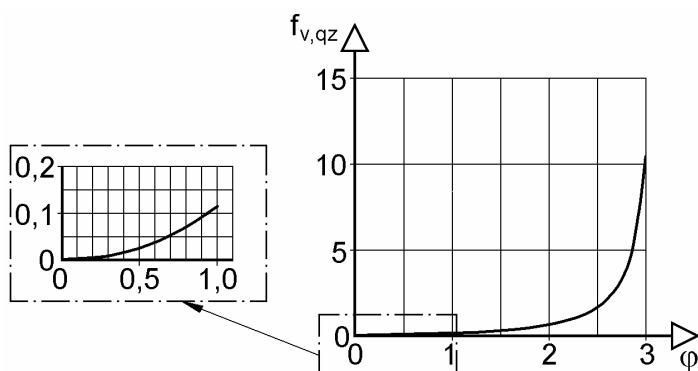


Bild 5.5 Faktor $f_{v,qz}$

Bei Annahme eines parabelförmigen Biegemomentenverlaufs ΔM_y ergeben sich die Ersatzlasten \bar{q}_z und \bar{m}_x für eine Berechnung am Ersatzsystem von der Länge des Bogens ℓ und einer äußeren Belastung q_z zu:

$$\bar{q}_z(x) = \frac{M_{y,0}(x) + f_{v,qz} \cdot M_{y,0}(\ell/2) \cdot \frac{4 \cdot x(\ell-x)}{\ell^2}}{R^2} \quad (5.12)$$

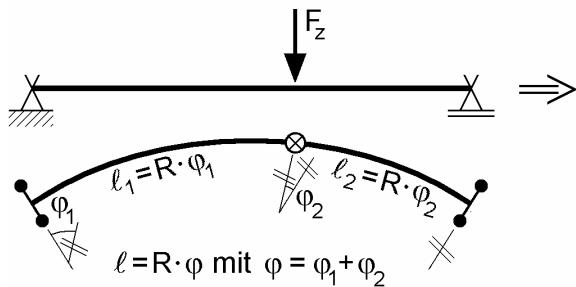
$$\bar{m}_x(x) = -\frac{M_{y,qz+\bar{q}z}(x)}{R} \quad (5.13)$$

Es ist festzustellen, dass bei dieser Annahme allein der Vergrößerungsfaktor f_v lastfallabhängig ist. Für den Lastfall Einzellast F_z ist der Vergrößerungsfaktor f_v in Bild 5.6 angegeben. Das vorgestellte Ersatzsystem mit Ersatzlasten \bar{m}_x und \bar{q}_z stellt für Öffnungswinkel $\varphi = \ell/R < \pi$ eine gute Näherung dar.

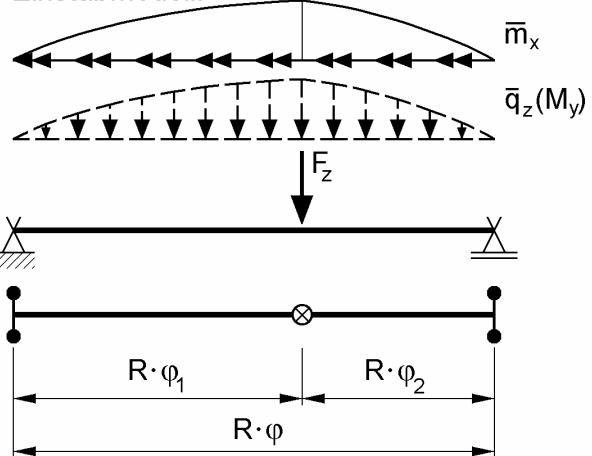
5.2.3.2 Zweifeldträger

Betrachtet wird der gabelgelagerte Zweifeldträger mit Spannweiten von $2 \cdot \ell$ als Kreisbogen mit einer Belastung q_z . Beim geraden Zweifeldträger mit $R = \infty$ hängt der Verlauf der Biegemomente von der Verteilung der Biegesteifigkeiten im Träger ab.

System:



Einstabmodell:



Vergrößerungsfaktor $f_v = f_{v,F_z}$:

$$\varphi_1 \leq \frac{\varphi}{2} : f_v = f_{v,F_z} = \frac{2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi_1 \cdot \sin \varphi} - 1$$

$$\varphi_1 \geq \frac{\varphi}{2} : f_v = f_{v,F_z} = \frac{2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi_2 \cdot \sin \varphi} - 1$$

Ersatzlasten:

$$\bar{q}_z(x) = \frac{M_{y,0}(x) + f_{v,F_z} \cdot M_{y,0}(\ell/2) \cdot \frac{4 \cdot x(\ell-x)}{\ell^2}}{R^2}$$

$$\bar{m}_x(x) = -\frac{M_{y,F_z+\bar{q}_z}(x)}{R}$$

Bild 5.6 Stark gekrümmter Einfeldträger mit Einzellast F_z und zugehöriges Ersatzsystem

Bei der Wahl eines konstanten Querschnitts beträgt das Stützmoment bekannterweise $M_{y,\text{Stütz}} = -0,125 \cdot q_z \cdot \ell^2$. Mit ansteigender Krümmung, d. h. kleiner werdendem Radius R , vergrößert sich der Betrag des Stützmomentes in Abhängigkeit vom Querschnitt. Bei der Wahl eines offenen Querschnitts mit einem ungünstigen Verhältnis von Biegesteifigkeit EI_y zur Torsionssteifigkeit GI_T , d. h. einem großen Verhältniswert κ_T nach Gl. (4.2) fällt das Stützmoment bei ansonst gleichen Systemparametern betragsmäßig größer aus als bei einem geschlossenen Querschnitt mit kleinerem κ_T .

Zur Veranschaulichung wird auf den gabelgelagerten Einfeldträger zurückgegriffen. Eine Verdrehung ϑ_0 führt in dem gekrümmten Träger in einem Abstand $d\varphi$ zu einer zusätzlichen Verdrehung $\Delta\varphi_{y,0}$ quer zur Stabachse (Bild 5.7). Wenn man den Träger in ausreichend viele Abschnitte unterteilt, lässt sich, unter der Annahme dass die Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$ an der Stelle der Verdrehung ϑ_0 einen Nulldurchgang hat, durch Aufsummieren der Verdrehungsanteile $\Delta\varphi_y$ die zusätzliche Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$ bestimmen. Bei einer Aufteilung des Winkels ϑ in n Bereiche ermittelt sich die zusätzliche Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$ am Auflager des Einfeldträgers zu:

$$\varphi_y(\vartheta) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\varphi_{y,i} = \sum_{i=0}^{n-1} -\vartheta_i \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{n}\right) \approx \sum_{i=0}^{n-1} -\vartheta_i \cdot \frac{\vartheta}{n} \quad (5.14)$$

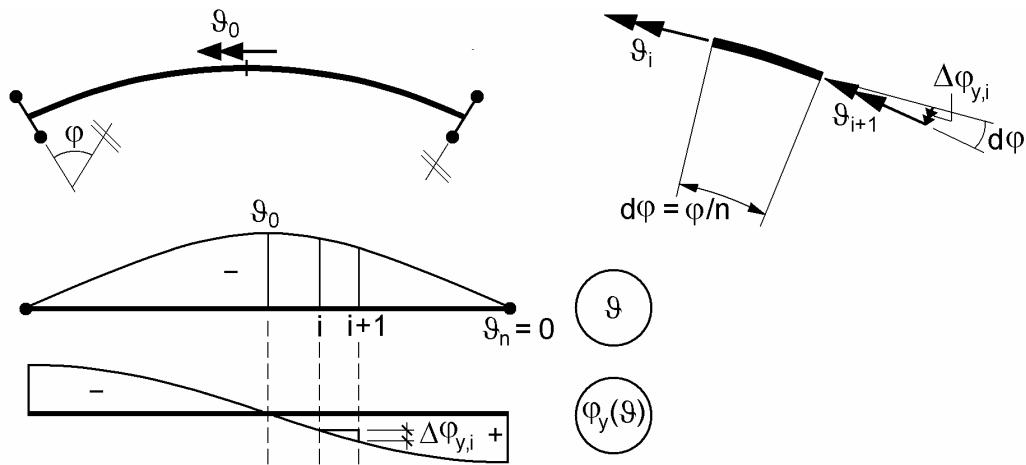


Bild 5.7 Zusätzliche Verdrehung $\varphi_y(\theta)$ am Auflager des gabelgelagerten Einfeldträgers

Beim Zweifeldträger mit torsionsstarrer Lagerung am Zwischenauflager können sich die Verdrehungen nicht mehr frei einstellen. Die gegenseitige Verdrehung φ_y am Zwischenauflager muss Null sein. Dies führt dazu, dass sich bereits bei kleinen Öffnungswinkeln ($\varphi \leq 0,5$) eine Erhöhung des Stützmomentes $M_{y,0,\text{Stütz}}$ um ein zusätzliches Stützmoment $\bar{M}_{y,\text{Stütz}}$ im Vergleich zum geraden Zweifeldträger einstellt. In Bild 5.8 ist das vorgeschlagene Ersatzsystem für den symmetrisch beanspruchten und gekrümmten Zweifeldträger mit gleichen Feldlängen und Gabellagern dargestellt. Zur Bestimmung der Ersatzlasten ist folgendermaßen vorzugehen:

1. Ermittlung des Stützmomentes am geraden Ersatzträger mit Feldlängen entsprechend den Bogenlängen ℓ des gekrümmten Zweifeldträgers und der Belastung q_z
 $\Rightarrow M_{y,0}$
2. Bestimmung der Ersatzlasten nach Gln. (5.4) und (5.5)
 $\Rightarrow \bar{m}_{x,0} = -M_{y,0}/R$ und $\bar{q}_{z,0} = M_{y,0}/R^2$
3. Einfügen eines Biegemomentengelenkes über der Stütze (Bei dem hier betrachteten System kann vereinfacht mit einem Einfeldträger mit Randmoment weitergerechnet werden, da infolge der Symmetrie die Verdrillung am Zwischenauflager $\theta' = 0$ wird.)
4. Schätzen des zusätzlichen Stützmomentes $\bar{M}_{y,\text{Stütz}}$
5. Bestimmung der zusätzlichen Ersatzlasten nach Gln. (5.4) und (5.5)
 $\Rightarrow \Delta\bar{m}_x = -\bar{M}_y/R$ und $\Delta\bar{q}_z = \bar{M}_y/R^2$
6. Aufbringen der zusätzlichen Lasten
 $M_{y,0,\text{Stütz}} + \bar{M}_{y,\text{Stütz}}$
 $\bar{m}_x = \bar{m}_{x,0} + \Delta\bar{m}_x$
 $\bar{q}_z = \bar{q}_{z,0} + \Delta\bar{q}_z$
7. Die Verdrehung $\varphi_y(M_y)$ am Zwischenauflager infolge Biegung kann direkt am Ersatzsystem abgelesen werden. Die Verdrehung $\varphi_y(\theta)$ am Zwischenauflager

infolge der Verdrehung ϑ muss entsprechend Gl. (5.14) aus der Umlenkung der Verdrehung ϑ berechnet werden.

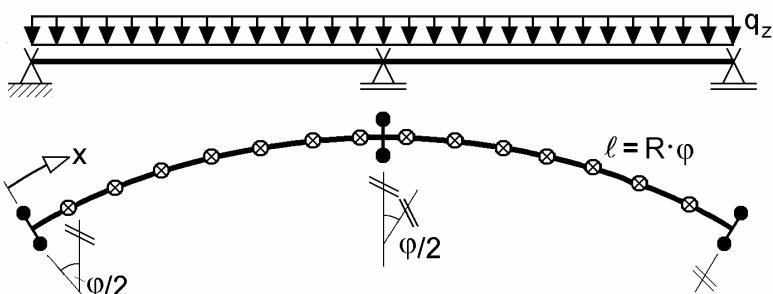
8. Bestimmen des Faktors $f_\varphi = -\varphi_y(M_y) / \varphi_y(\vartheta)$ am Zwischenuflager

$f_\varphi = 1 \Rightarrow \text{Lösung gefunden}$

$f_\varphi < 1 \Rightarrow |\bar{M}_{y,\text{Stütz}}|$ vergrößern, weiter mit Schritt 5

$f_\varphi > 1 \Rightarrow |\bar{M}_{y,\text{Stütz}}|$ verkleinern, weiter mit Schritt 5

System:



Ersatzsystem:

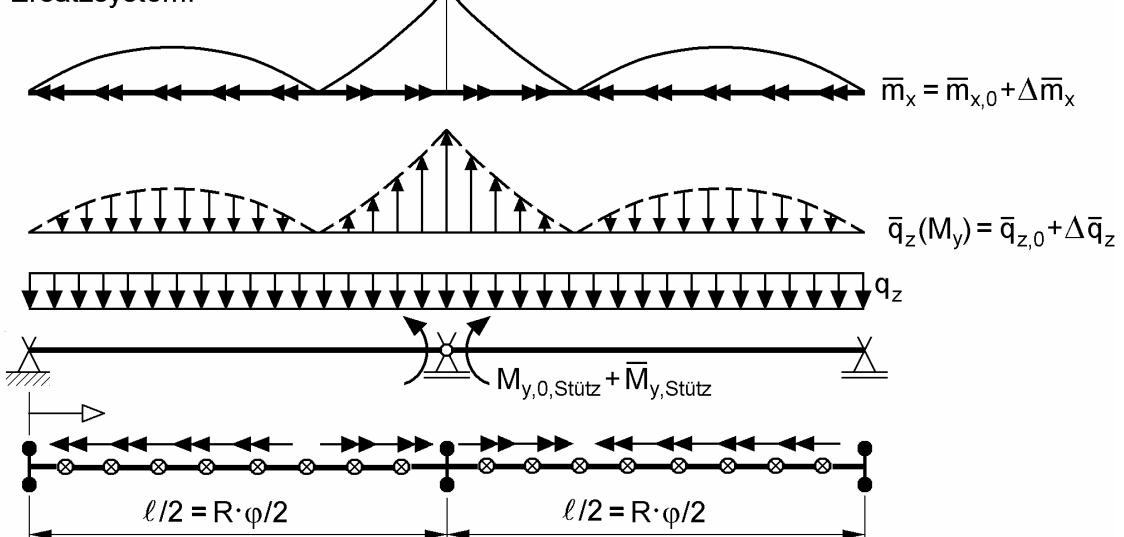


Bild 5.8 Gekrümmter Zweifeldträger mit Gleichstreckenlast q_z und zugehöriges Ersatzsystem

Die gegenseitige Beeinflussung von Biegung und Torsion wird bei diesem Modell nicht vollständig erfasst, da die Verdrehung φ_y auch Auswirkungen auf die Verdrehung ϑ hat. Die Abweichungen gegenüber einer Berechnung mit BOGEN2008 wird mit größer werdendem κ_T auch größer. Als erste Näherung zur Abschätzung, in welchem Maße sich der Momentenverlauf infolge der Krümmung gegenüber dem am geraden Stab berechneten Momentenverlauf ändert, ist das Modell praktikabel.

5.2.4 Beispiele

5.2.4.1 Einfeldträger mit starker Krümmung

Gegeben sei ein mit einer Wanderlast $F_z = 100 \text{ kN}$ belasteter Kreisringbogen mit einem Öffnungswinkel von $\varphi = 2 \text{ rad}$. Der Träger hat einen Krümmungsradius von $R = 2,50 \text{ m}$ und ist an beiden Enden gabelgelagert. Der Querschnitt sei über die Länge konstant.

Untersucht werden Laststellungen $\varphi_1 = \{0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8 \ 1\} \text{ rad}$. Die Schnittgrößen werden mit den Ersatzsystemen nach Abschnitt 5.2.2 und 5.2.3.1 unter Anwendung von *KSTAB* [83] ermittelt und einer Vergleichsrechnung mit BOGEN2008 gegenübergestellt:

- Variante A:
Ersatzsystem für Einfeldträger mit schwacher Krümmung, s. Abschnitt 5.2.2
- Variante B:
Ersatzsystem für Einfeldträger mit starker Krümmung, s. Abschnitt 5.2.3.1

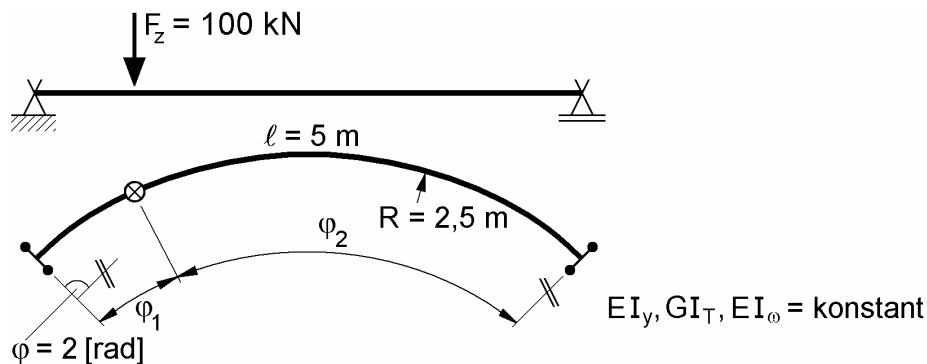


Bild 5.9 Draufsicht Kreisbogen mit Wanderlast F_z

In Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Dargestellt sind die Auflager-torsionsmomente an den Stabenden M_{xA} und M_{xB} , die Biegemomente in Feldmitte $M_y(\ell/2)$, am Lastangriffspunkt $M_y(\varphi_1)$ und das maximale Moment $\max M_y$ für die untersuchten Laststellungen. Die Abweichungen gegenüber den mit BOGEN2008 ermittelten Schnittgrößen sind angegeben.

Mit einem Öffnungswinkel von $\varphi = 2 \text{ rad}$ wird in diesem Beispiel ein Träger mit starker Krümmung untersucht. Es wird noch einmal sehr deutlich, dass die Vernachlässigung der Torsion auf das Biegemoment bei der Ermittlung der Schnittgrößen in Variante A zu einem Fehler von bis zu 46 % führt. Variante B führt zu einer sehr guten Übereinstimmung mit den mit BOGEN2008 ermittelten Schnittgrößen. Für Einfeldträger mit Einzellast sind die Formeln zur Ermittlung der Ersatzlasten in Bild 5.6 zusammengestellt. Für den Fall „Einzellast in Feldmitte“ ($\varphi_1 = 1 \text{ rad}$) werden die Ersatzlasten exemplarisch berechnet und in Bild 5.10 dargestellt.

Tabelle 5.1 Einfeldträger mit starker Krümmung: Zusammenstellung ausgewählter Schnittgrößen

Schnittgrößen- ermittlung nach	$\varphi_1 =$	0,2 rad	RF in %	0,4 rad	RF in %	0,6 rad	RF in %	0,8 rad	RF in %	1 rad	RF in %	
BOGEN2008	M_{xA}	4725		7482		9594		10625		10635		
	M_{xB}	2962		5707		8024		9723		10635		
	$M_y(\ell/2)$	4596		9009		13063		16596		19468		
	$M_y(\varphi_1)$	5319		10702		15298		18382		19468		
	max M_y	5462		10702		15298		18382		19468		
Ersatz- system	Variante A nach 5.4.2	M_{xA}	2850	-40	-800	-36	5950	-38	6400	-40	6250	-41
		M_{xB}	1650	-44	3200	-44	4550	-43	5600	-42	6250	-41
		$M_y(\ell/2)$	2500	-46	5000	-44	7500	-43	10000	-40	12500	-36
		$M_y(\varphi_1)$	4500	-15	8000	-25	10500	-31	12000	-35	12500	-36
		max M_y	4500	-18	8000	-25	10500	-31	12000	-35	12500	-36
	Variante B nach 5.4.3.1	M_{xA}	4727	0,0	7494	0,2	9626	0,3	10684	0,6	10711	0,7
		M_{xB}	2975	0,4	5736	0,5	8074	0,6	9792	0,7	10711	0,7
		$M_y(\ell/2)$	4607	0,2	9037	0,3	13117	0,4	16681	0,5	19569	0,5
		$M_y(\varphi_1)$	5314	-0,1	10698	0,0	15324	0,2	18457	0,4	19569	0,5
		max M_y	5454	-0,1	10703	0,0	15324	0,2	18457	0,4	19569	0,5

RF = Relativer Fehler in % (Ersatzsystem / BOGEN2008)

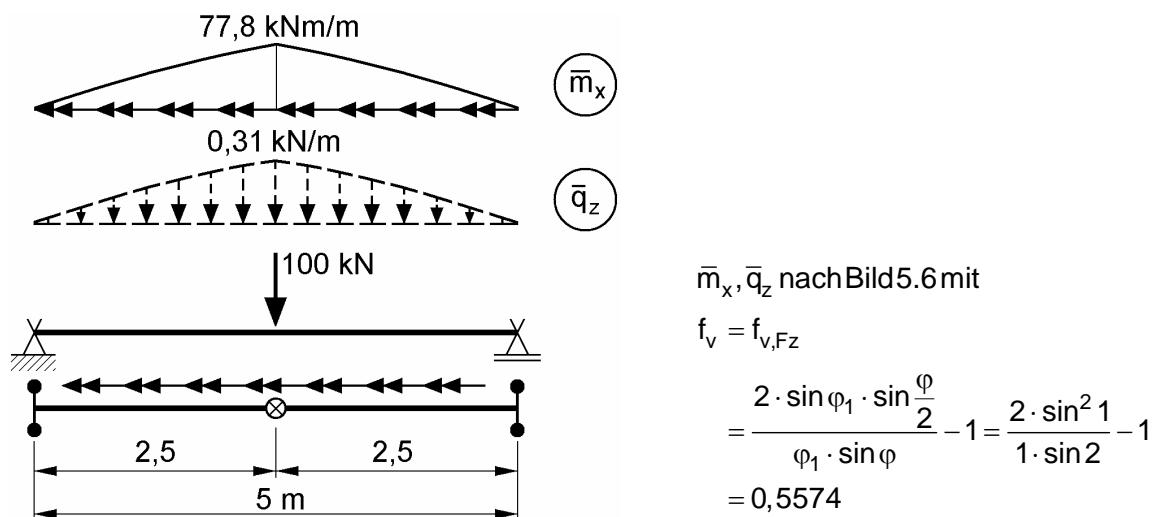


Bild 5.10 Ersatzsystem mit Ersatzlasten \bar{m}_x und \bar{q}_z für die Laststellung F_z in Feldmitte ($\varphi_1 = 1 \text{ rad}$)

5.2.4.2 Zweifeldträger aus Stahlprofilen

In diesem Beispiel wird auf den Zweifeldträger in Bild 4.9 zurückgegriffen. Alle Varianten werden vergleichsweise mit dem geradem Stab mit Ersatzlasten nach Abschnitt 5.2.3.2 durchgerechnet. Die Schnittgrößenverläufe für den Zweifeldträger mit $R = 10 \text{ m}$ und dem Querschnitt HE-A 500 sind in Bild 1.8 links grafisch dargestellt. Exemplarisch wird für diesen Fall die Berechnung der Ersatzlasten dargestellt und die

Schnittgrößenverläufe ermittelt. Im ersten Schritt wird das Stützmoment am geraden Ersatzstab von der Bogenlänge ℓ ermittelt. Es ergibt sich $M_{y,\text{Stütz}} = -0,125 \cdot q_z \cdot \ell^2 = -0,125 \cdot 5 \cdot 9,6^2 = -57,6 \text{ kNm}$. Die Ersatzlasten $\bar{m}_{x,0}$ und $\bar{q}_{z,0}$ nach Bild 5.8 können nun bestimmt werden. Aus Symmetriegründen braucht für die weitere Berechnung nur noch ein Feld mit Randmoment betrachtet zu werden. Beim Einfeldträger mit Randmoment am rechten Rand muss dann die Verwölbung eingespannt werden ($\vartheta' = 0$). Das zusätzlich zum Stützmoment $M_{y,\text{Stütz}}$ aufzubringende Randmoment $\bar{M}_{y,\text{Stütz}}$ ergibt sich aus der Bedingung, dass die zusätzliche Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$, die sich aus der Umlenkung der Verdrehung ϑ ergibt, durch Umlagerungen bei den Biegemomenten wieder zurückgedreht werden muss. Für das betrachtete Beispiel ergibt sich $f_\varphi = -\varphi_y(M) / \varphi_y(\vartheta) = 1$ bei Aufbringen eines zusätzlichen Randmoments von $\bar{M}_{y,\text{Stütz}} = -42,75 \text{ kNm}$, womit die zusätzlichen Ersatzlasten $\Delta\bar{m}_x$ und $\Delta\bar{q}_z$ bestimmt werden können. Die aus der Umlenkung der Verdrehung ϑ hervorgerufene Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$ wird durch die aus dem zusätzlichen Randmoment hervorgerufene Verdrehung $\varphi_y(M_y)$ zurückgedreht (Bild 5.11). Alle im Ersatzsystem angreifenden Lasten sind in Bild 5.12 dargestellt.

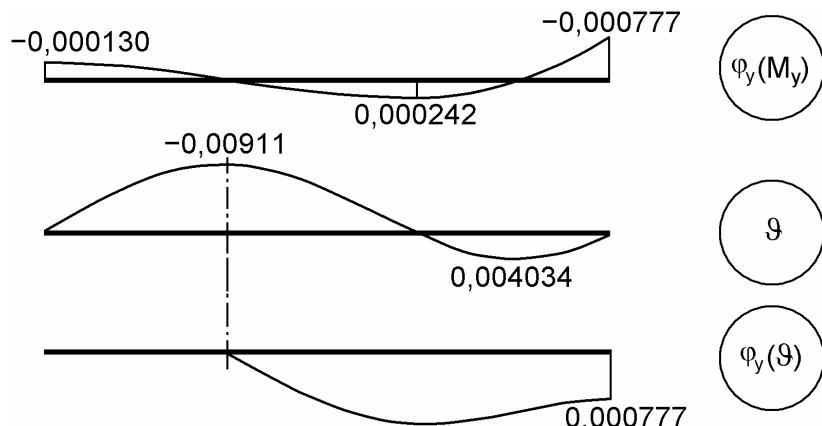


Bild 5.11 Verdrehung $\varphi_y(M)$ aus dem Biegemoment und entgegen gesetzte Verdrehung $\varphi_y(\vartheta)$ aus der Umlenkung von ϑ

Die Schnittgrößenverläufe werden nun am geraden Stab mit den ermittelten Ersatzlasten unter Verwendung von *KSTAB* berechnet. In Bild 5.13 sind sie mit durchgezogenen Linien gezeichnet. Die Ergebnisse der exakten Lösung sind in Klammern mit angegeben. Es ist eine gute Übereinstimmung der Näherungslösung mit der exakten Lösung feststellbar.

Das gleiche Beispiel wird mit einem kommerziellen Stabwerkprogramm (*RSTAB*) mit geraden Stabelementen ohne Berücksichtigung der Wölkrafttorsion (ϑ') nachgerechnet. Dabei wird der Bogen polygonal angenähert. Mit 100 Elementen ist eine sehr feine Einteilung gewählt worden. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Bild 5.13 gestrichelt dargestellt. Sie weichen teilweise bis zu 70 % von der exakten Lösung ab. Eine Berechnung mit *BOGEN2008* und $I_o = 0$ führt zu einem Stützmoment von $M_{\text{Stütz}} = -87,48 \text{ kNm}$. Dies entspricht in etwa dem Ergebnis aus *RSTAB*.

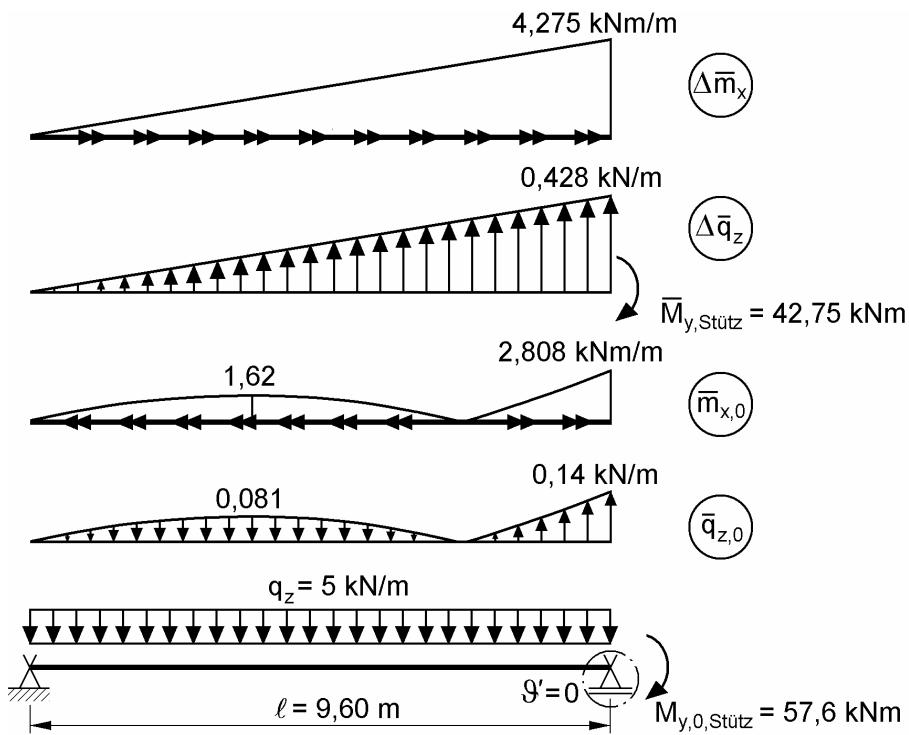


Bild 5.12 Zweifeldträger mit $R = 10 \text{ m}$, HE-A 500: Zusammenstellung der im Ersatzsystem angreifenden Ersatzlasten

Die Unterschiede der Ergebnisse lassen sich folglich auf die Vernachlässigung der Wölbkrafttorsion zurückführen.

Die maximale Verschiebung in der Feldmitte beträgt bei BOGEN2008 $w_M = 0,63 \text{ cm}$, bei RSTAB ergibt sich eine maximale Verschiebung von $w_M = 2,43 \text{ cm}$. Die maximale Verschiebung bei RSTAB ist fast viermal größer als bei BOGEN2008. Bei gekrümmten Trägern mit offenen Querschnitten führt die Vernachlässigung der Wölbkrafttorsion (ohne ϑ') nicht nur zu falschen Ergebnissen bei den Verdrehungen, sondern durch die Kopplung der Verschiebung w_M und der Verdrehung ϑ ebenfalls zu falschen Ergebnissen bei den Verschiebungen und in statisch unbestimmten Systemen somit zu falschen Schnittgrößenverläufen.

In Bild 5.14 sind mit dem Stützmoment über der Mittelstütze $M_{y,\text{Stütz}}$ und dem Torsionsmoment am linken Trägerrand $M_{x,A}$ ausgewählte Schnittgrößen der Näherungslösung im Verhältnis zu den mit BOGEN2008 ermittelten Ergebnissen über den Öffnungswinkel φ aufgetragen. Bei den HE-A-Trägern liegt die Abweichung gegenüber einer genauen Berechnung mit BOGEN2008 erwartungsgemäß höher als bei den Trägern mit Quadrathohlprofil. Beim Stützmoment beträgt der Fehler maximal 4 %, beim Torsionsmoment $M_{x,A}$ bereits 10 %. Die Momentenumlagerungen zur Mittelstütze hin werden bei den HE-A-Trägern überschätzt, bei den Trägern mit Quadrathohlprofil werden sie unterschätzt. Dennoch sind die Ergebnisse auch bei größeren Öffnungswinkeln als Näherung brauchbar.

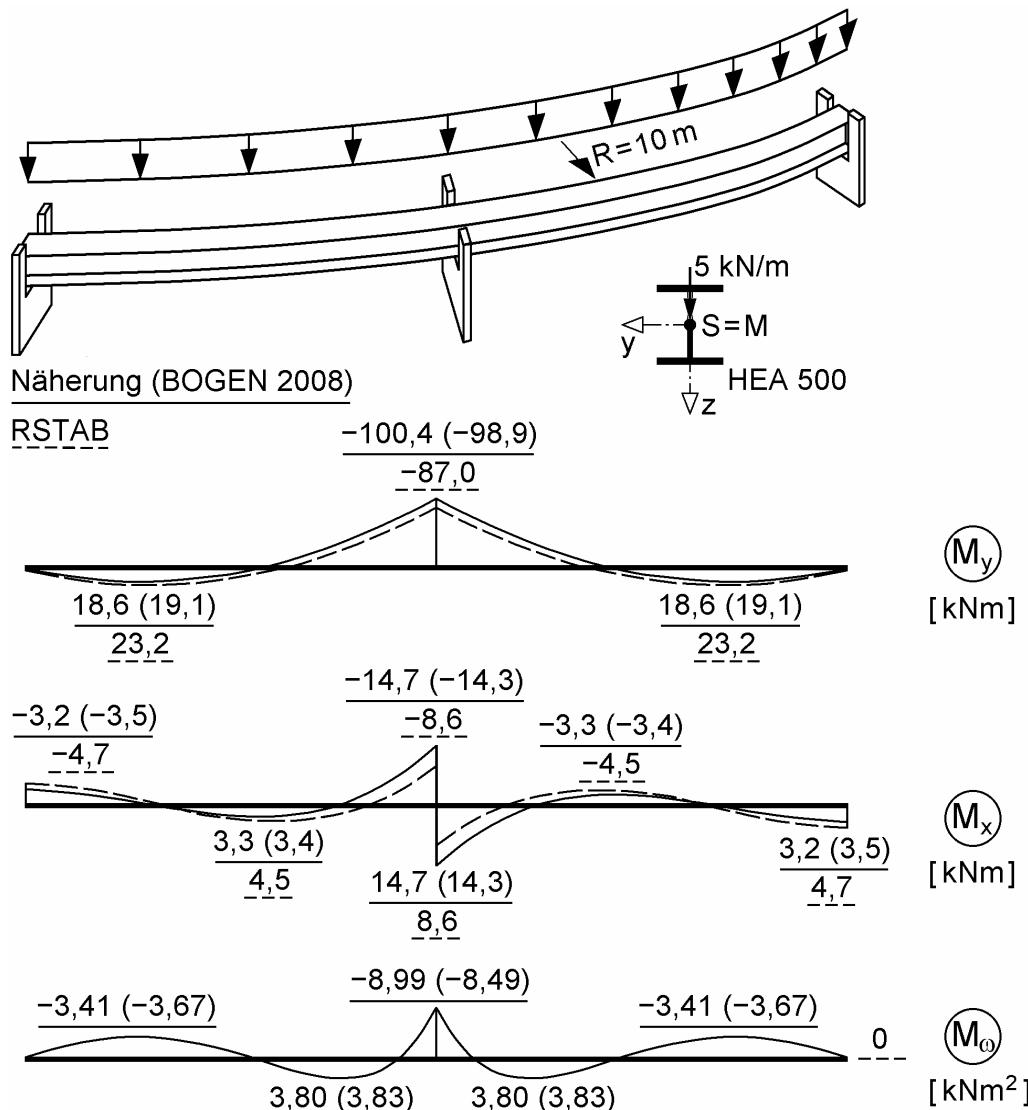


Bild 5.13 Zweifeldträger mit $R = 10 \text{ m}$ und HE-A 500 mit Gleichstreckenlast q_z : M_y , M_x und M_ω (Näherungslösung im Vergleich zu BOGEN2008 und RSTAB)

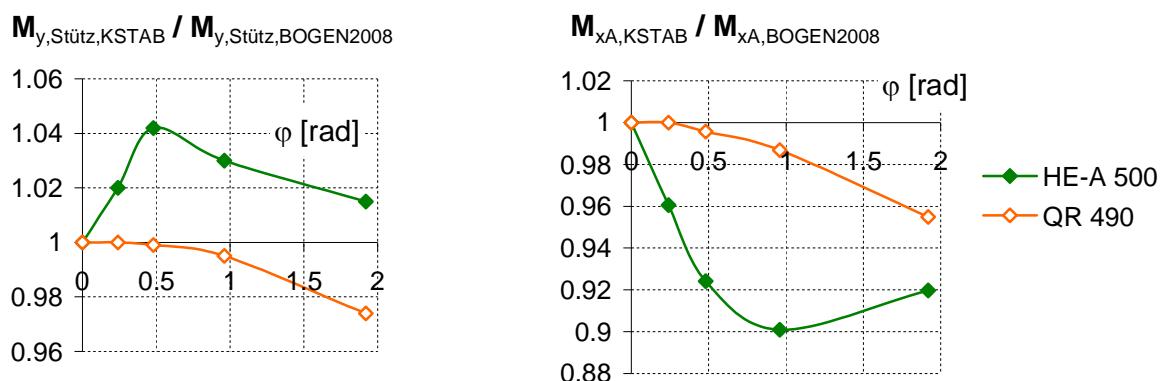


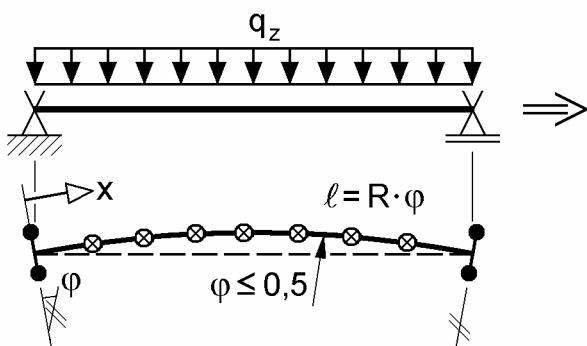
Bild 5.14 Relativer Fehler der mit KSTAB berechneten Näherungslösung am Ersatzsystem im Vergleich zu den Ergebnissen aus BOGEN2008

5.3 Gerade Träger mit Vorverformungen

5.3.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel soll die Anwendbarkeit einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit Vorverformung zur Erfassung eines im Grundriss gekrümmten Trägers mit Belastung q_z sowie F_z untersucht werden. Der gekrümmte Träger wird zu diesem Zweck in einen geraden Träger der Länge ℓ_s nach Bild 5.15 überführt und die Krümmung über die Funktion der Vorverformung v_0 mit einem Parabelstich von $v_{0,m} = 2 \cdot R \sin^2(\varphi/4)$ erfasst. Die Funktion v_0 wird so gewählt, dass die zweifache Differenzierung der Krümmung $1/R$ entspricht.

System:



Ersatzsystem:

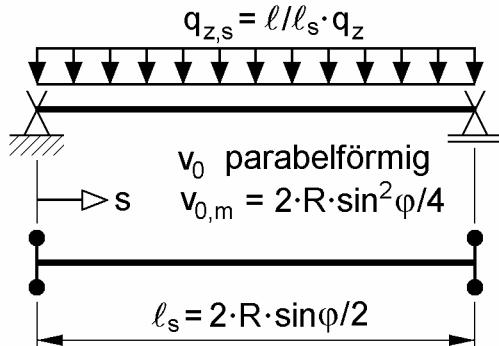


Bild 5.15 Schwach gekrümmter Einfeldträger und zugehöriges Ersatzsystem mit Vorverformung

Über einen Vergleich der Arbeitsanteile des geraden Stabelementes nach Theorie II. Ordnung und des mäßig gekrümmten Stabelementes nach Abschnitt 6.3.3 soll die Gleichwertigkeit der Ansätze überprüft werden. Hierzu wird die in dieser Arbeit hergeleitete virtuelle Arbeit des mäßig gekrümmten Stabelementes an dieser Stelle angegeben und in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

5.3.2 Theorie II. Ordnung mit Vorverformungen

Zur Berücksichtigung des physikalisch und geometrisch nichtlinearen Verhaltens werden in der Praxis im Allgemeinen die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung unter Anwendung des Weggrößenverfahrens berechnet. Bei der Herleitung der virtuellen Arbeit für die Theorie II. Ordnung werden die Verzerrungen ε_x für die verformte Lage bestimmt und lauten im Sinne einer Näherung nach Theorie II. Ordnung:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} \cdot (v'^2 + w'^2) \quad (5.15)$$

Tabelle 5.2 Virtuelle Arbeit $\delta W = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$ für den mäßig gekrümmten Stab nach Kapitel 6

Lineare Stabtheorie (Theorie I. Ordnung):

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{ext}} &= \int_{\ell} \left(\delta u_s \cdot q_x + \delta v_M \cdot q_y + \delta w_M \cdot q_z + \delta \vartheta \cdot m_x \right) \cdot dx \\ &\quad + \delta u_s \cdot F_x + \delta v_M \cdot F_y + \delta w_M \cdot F_z \\ &\quad + \delta v'_M \cdot M_{zL} - \delta w'_M \cdot M_{yL} + \delta \vartheta \cdot M_{xL} - \delta \vartheta' \cdot M_{\omega L} \\ \delta W_{\text{int}} &= - \int_{\ell} \left(\delta u'_s \cdot EA \cdot u'_s - \delta u'_s \cdot EA \cdot \frac{v_M}{R} - \frac{\delta v_M}{R} \cdot EA \cdot u'_s + \frac{\delta v_M}{R} \cdot EA \cdot \frac{v_M}{R} \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} \left(\delta v''_M \cdot EI_z \cdot v''_M + \delta v''_M \cdot EI_z \cdot \frac{u'_s}{R} + \frac{\delta u'_s}{R} \cdot EI_z \cdot v''_M + \frac{\delta u'_s}{R} \cdot EI_z \cdot \frac{u'_s}{R} \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} \left(\delta w''_M \cdot EI_y \cdot w''_M - \delta w''_M \cdot EI_y \cdot \frac{\vartheta}{R} - \frac{\delta \vartheta}{R} \cdot EI_y \cdot w''_M + \frac{\delta \vartheta}{R} \cdot EI_y \cdot \frac{\vartheta}{R} \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} \left(\delta \vartheta'' \cdot EI_{\omega} \cdot \vartheta'' + \delta \vartheta'' \cdot EI_{\omega} \cdot \frac{w''_M}{R} + \frac{\delta w''_M}{R} \cdot EI_{\omega} \cdot \vartheta'' + \frac{\delta w''_M}{R} \cdot EI_{\omega} \cdot \frac{w''_M}{R} \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} \left(\delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \frac{w'_M}{R} + \frac{\delta w'_M}{R} \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \frac{\delta w'_M}{R} \cdot GI_T \cdot \frac{w'_M}{R} \right) \cdot dx\end{aligned}$$

Für die einzelnen Verschiebungsanteile werden maximal zweifache Produkte der Verformungsfunktionen berücksichtigt. In einer weiteren Näherung wird von einem schwach verformten System ausgegangen und es werden bei den wirklichen Verzerrungen die linearen kinematischen Beziehungen nach Gl. (1.4) verwendet. Für die virtuellen Verzerrungen $\delta \varepsilon_x$ werden dagegen die linearisierten kinematischen Beziehungen nach Gl. (5.15) verwendet. Die virtuelle Arbeit nach [52] mit den zusätzlichen Anteilen für die Theorie II. Ordnung findet sich in Tabelle 5.3. Die Anteile der inneren Arbeit aus der linearen Stabtheorie (Theorie I. Ordnung) werden in der Steifigkeitsmatrix \underline{K} , die zusätzlichen Anteile der Theorie II. Ordnung in der geometrischen Steifigkeitsmatrix \underline{G} zusammengefasst. Die Stabilität von Biegeträgern gegenüber Biegedrillknicken wird beim Ersatzimperfektionsverfahren mit einer Schnittgrößenermittlung nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung einer über die Stablänge definierten Vorverformungsfunktion v_0 nachgewiesen. Die Vorverformungen und auch die Verdrehungen der Vorverformungsfunktion werden in den lokalen Koordinatensystemen, die den Stabelementen zugeordnet sind, ermittelt und durch Multiplikation mit der Geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix \underline{G}_e in eine Ersatzbelastung $\underline{p}_{0,e}$ überführt. Da in \underline{G}_e Schnittgrößen eingehen, kann die Berechnung des Lastvektors infolge von Vorverformungen $\underline{p}_{0,e}$ erst im Anschluss an eine Systemberechnung nach Theorie I. Ordnung erfolgen.

Tabelle 5.3 Virtuelle Arbeit $\delta W = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$ für gerade Stäbe [52]

Lineare Stabtheorie (Theorie I. Ordnung):

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{ext}} &= \int_{\ell} (\delta u_s \cdot q_x + \delta v_M \cdot q_y + \delta w_M \cdot q_z + \delta \vartheta \cdot m_x) \cdot dx \\ &\quad + \delta u_s \cdot F_x + \delta v_M \cdot F_y + \delta w_M \cdot F_z + \delta v'_M \cdot M_{zL} - \delta w'_M \cdot M_{yL} + \delta \vartheta \cdot M_{xL} - \delta \vartheta' \cdot M_{\omega L} \\ \delta W_{\text{int}} &= - \int_{\ell} (\delta u'_s \cdot EA \cdot u'_s + \delta v''_M \cdot EI_z \cdot v''_M + \delta w''_M \cdot EI_y \cdot w''_M) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} (\delta \vartheta'' \cdot EI_{\omega} \cdot \vartheta'' + \delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \vartheta') \cdot dx\end{aligned}$$

Zusätzliche Arbeitsanteile für die Theorie II. Ordnung:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{ext}} &= - \int_{\ell} (\delta \vartheta \cdot q_y \cdot (y_q - y_M) \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot q_z \cdot (z_q - z_M) \cdot \vartheta) \cdot dx \\ &\quad - \delta \vartheta \cdot F_y \cdot (y_F - y_M) \cdot \vartheta - \delta \vartheta \cdot F_z \cdot (z_F - z_M) \cdot \vartheta \\ &\quad + \delta v'_M \cdot F_x \cdot z_F \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot F_x \cdot z_F \cdot v'_M - \delta w'_M \cdot F_x \cdot y_F \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot F_x \cdot y_F \cdot w'_M \\ \delta W_{\text{int}} &= - \int_{\ell} N \cdot (\delta v'_M \cdot v'_M + \delta w'_M \cdot w'_M) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} N \cdot (\delta v'_M \cdot z_M \cdot \vartheta' + \delta \vartheta' \cdot z_M \cdot v'_M - \delta w'_M \cdot y_M \cdot \vartheta' - \delta \vartheta' \cdot y_M \cdot w'_M) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} (\delta v''_M \cdot M_y \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot M_y \cdot v''_M) \cdot dx \\ &\quad - \int_{\ell} (\delta w''_M \cdot M_z \cdot \vartheta + \delta \vartheta \cdot M_z \cdot w''_M + \delta \vartheta' \cdot M_{rr} \cdot \vartheta') \cdot dx\end{aligned}$$

$$\text{mit: } M_{rr} = \int_A \sigma_x \cdot ((z - z_M)^2 + (y - y_M)^2) \cdot dA = N \cdot i_M^2 - M_z \cdot r_y + M_y \cdot r_z + M_{\omega} \cdot r_{\omega}$$

$$i_M^2 = i_P^2 + y_M^2 + z_M^2 \quad i_P^2 = \frac{i_y + i_z}{A} \quad r_{\omega} = \frac{1}{I_{\omega}} \cdot \int_A \omega \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA$$

$$r_y = \frac{1}{I_z} \cdot \int_A y \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA - 2 \cdot y_M \quad r_z = \frac{1}{I_y} \cdot \int_A z \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA - 2 \cdot z_M$$

5.3.3 Analogiebetrachtung

Um einen Vergleich der zusätzlichen Arbeitsanteile nach Theorie II. Ordnung nach Tabelle 5.2 und den Arbeitsanteilen des mäßig gekrümmten Stabelementes nach Tabelle 5.1 durchführen zu können, wird die Berechnung nach Theorie II. Ordnung nach der 1. Iteration gestoppt. Bei den hier betrachteten Belastungen q_z und F_z treten bei einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung im geraden Stab nur Biegemomente und zugehörige Querkräfte auf ($M_y^I \neq 0; M_{rr}^I \neq 0; N^I = M_z^I = 0$). Im Anschluss an die Systemberechnung nach Theorie I. Ordnung wird die Ersatzbelastung p_0 für eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung mit den Schnittgrößen M_y^I, M_{rr}^I , den Vorver-

formungen v_0 und den zugehörigen Verdrehungen $\varphi_{z,0}$ berechnet. In Tabelle 5.4 sind die korrespondierenden Arbeitsanteile bei einer Berechnung mit geraden Stabelementen unter Berücksichtigung der Ersatzlast p_0 zu einer Berechnung mit mäßig gekrümmten Stabelementen nach Theorie I. Ordnung zusammengestellt. Es gilt $v''_0 = 1/R$ nach Abschnitt 5.3.1.

Tabelle 5.4 Analogiebetrachtung: Erfassung der Krümmung mithilfe einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung

Korrespondierende Arbeitsanteile bei einer Berechnung	
mit geraden Stabelementen und der Ersatzlast p_0	mit mäßig gekrümmten Stabelementen
	$-\int_{\ell} \left(-\delta w_M'' \cdot EI_y \cdot \frac{\vartheta}{R} \right) \cdot dx$
$-\int_{\ell} \left(\delta \vartheta \cdot M_y^l \cdot v''_0 \right) \cdot dx$ $= -\int_{\ell} \left(-\frac{\delta \vartheta}{R} \cdot EI_y \cdot w_M''^l \right) \cdot dx$	$-\int_{\ell} \left(-\frac{\delta \vartheta}{R} \cdot EI_y \cdot w_M'' \right) \cdot dx$
	$-\int_{\ell} \left(\frac{\delta \vartheta}{R} \cdot EI_y \cdot \frac{\vartheta}{R} \right) \cdot dx$
	$-\int_{\ell} \left(\delta \vartheta'' \cdot EI_{\omega} \cdot \frac{w_M''}{R} + \frac{\delta w_M''}{R} \cdot EI_{\omega} \cdot \vartheta'' + \frac{\delta w_M''}{R} \cdot EI_{\omega} \cdot \frac{w_M''}{R} \right) \cdot dx$
	$-\int_{\ell} \left(\delta \vartheta' \cdot GI_T \cdot \frac{w_M'}{R} + \frac{\delta w_M'}{R} \cdot GI_T \cdot \vartheta' + \frac{\delta w_M'}{R} \cdot GI_T \cdot \frac{w_M'}{R} \right) \cdot dx$

Der Vergleich mit den die Steifigkeit EI_y beinhaltenden Arbeitsanteilen in Tabelle 5.4 zeigt auf, dass der Einfluss des Biegemomentes auf das Torsionsmoment bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung über den Ansatz von Vorverformungen **in erster Näherung** erfasst werden kann. Der Einfluss der Torsion auf das Biegemoment, der aus der Kopplung der Verdrehung ϑ und der Verschiebung w im gekrümmten Träger herröhrt, findet keine Berücksichtigung in den Arbeitsanteilen der Theorie II. Ordnung. Für schwach gekrümmte Einfeldträger bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi \leq 0,5$ rad (Abschnitt 5.2.2) liefert diese Annahme für die Belastungen q_z und F_z brauchbare Ergebnisse. Bei stärkerer Krümmung und bei Durchlaufträgern führt das Ersatzsystem „Gerader Stab mit Vorverformung“ zu falschen Ergebnissen. In Bild 5.15 wurde die Gleichstreckenlast $q_{z,s}$ für das Ersatzsystem so gewählt, dass die aufgebrachte Belastung der Summe der Auflagerlasten entspricht. Für die Berechnung der Biegemomente wird von der Länge des Ersatzstabes ℓ_s ausgegangen. Unter der Annahme $\varphi \leq 0,5$ rad beträgt der Unterschied der Länge ℓ_s zur Bogenlänge ℓ maximal 1 %. Der Fehler bei der Berechnung der Biegemomente am Ersatzsystem ist somit vernachlässigbar.

5.4 Leitermodell zur Erfassung der Wölbkrafttorsion in gekrümmten Trägern

Im Folgendem wird eine Möglichkeit aufgezeigt, die Wölbkrafttorsion in herkömmlichen räumlichen Stabwerkprogrammen (ohne 9') über den Ansatz eines Trägerrostes einzuarbeiten. Die Stabtheorie behält ihre Gültigkeit, d. h. es wird weiterhin von der Erhaltung der Querschnittsform ausgegangen. Die Vorgehensweise hat Ramberger in [85] für den geraden Träger mit offenem Querschnitt entwickelt und für den gekrümmten Träger in [86] erweitert. Der Träger ist vertikal in z-Richtung beansprucht. Der Träger wird in ein ebenes leiterförmiges Trägerrostsystem mit zwei konzentrisch gekrümmten Holmen und einer ausreichend großen Anzahl von fiktiven Quersprossen, die als Verbindung der beiden Holme fungieren, überführt. Die Qualität des Leitermodells ist maßgeblich abhängig von der Aufteilung der Steifigkeiten auf die einzelnen Stäbe, dem Abstand der Holme und dem Aufbringen der Lasten.

In Bild 5.16 ist das Leitermodell dargestellt. Die Modellierung einer stetigen Krümmung ist mit geraden Stabelementen nicht möglich. Bei Vorgabe einer endlichen Anzahl von Quersprossen werden die Holme als umschriebener Polygonzug zwischen den Quersprossen angenähert. Die Endfelder werden mit halbem Quersprossenabstand angeordnet. Die Einzelholme des Polygonzugs tangieren die gekrümmten Holmachsen.

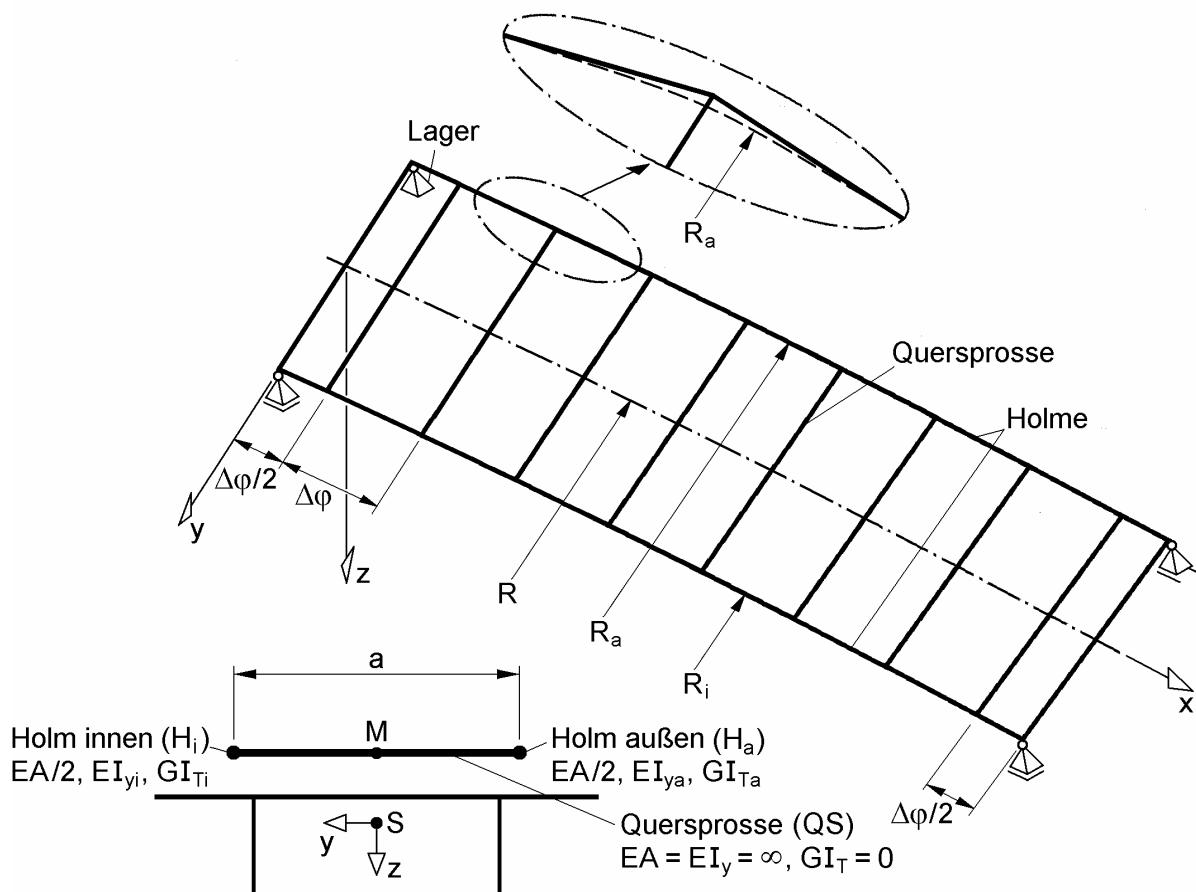


Bild 5.16 Leitermodell nach Ramberger (umschriebener Polygonzug)

Tabelle 5.5 Leitermodell nach Ramberger: Holmabstand, Steifigkeiten und q_z -Lasten für den inneren (i) und äußeren (a) Holm

$a = 2 \cdot \sqrt{\frac{I_\omega}{I_y + I_\omega / R^2}}$	$EA_i = EA_a = EA/2$
$EI_{y,i} = \frac{EI_y}{2} \cdot \frac{R_i^2}{R^2}$	$EI_{y,a} = \frac{EI_y}{2} \cdot \frac{R_a^2}{R^2}$
$EI_{z,i} = \frac{EI_z}{2} \cdot \frac{R_i^2}{R^2}$	$EI_{z,a} = \frac{EI_z}{2} \cdot \frac{R_a^2}{R^2}$
$GI_{T,i} = \frac{GI_T}{2} \cdot \frac{R_i^3}{R^3}$	$GI_{T,a} = \frac{GI_T}{2} \cdot \frac{R_a^3}{R^3}$
$q_{z,i} = \frac{R}{R_i} \cdot \left(\frac{q_z}{2} + \frac{m_{x,ges}}{a} \right)$	$q_{z,a} = \frac{R}{R_a} \cdot \left(\frac{q_z}{2} - \frac{m_{x,ges}}{a} \right)$

Tabelle 5.6 Leitermodell nach Ramberger: Gesamtschnittgrößen und Verformungen

$V_z = V_{z,i} + V_{z,a}$	$M_y = M_{y,i} + M_{y,a}$
$M_{xp} = M_{xp,i} + M_{xp,a}$	
$M_{xs} = (V_{z,i} - V_{z,a}) \cdot \frac{a}{2}$	$M_\omega = \left(\frac{M_{y,i}}{R_i} - \frac{M_{y,a}}{R_a} \right) \cdot \frac{R \cdot a}{2}$
$w = \frac{w_i + w_a}{2}$	$\vartheta = \vartheta_i = \vartheta_a = \frac{w_i - w_a}{a}$

Die Längssteifigkeit EA , Biegesteifigkeit EI_y und die *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit GI_T werden auf die beiden Holme als Haupttragelemente aufgeteilt. Die Querspuren sind biegesteif unter Annahme von $EA = EI_y = \infty$ und $GI_T = 0$ mit den Holmen verbunden. Im Zusammenspiel mit der Torsionssteifigkeit GI_T der Holme wird der Einfluss der *St. Venantschen* Torsion erfasst. Das gesamte Torsionsmoment setzt sich zusammen aus der *St. Venantschen* und der Wölbkrafttorsion. Die Anteile der Wölbkrafttorsion werden im Leitermodell als entgegengesetzte Gurtbiegung der beiden Holme verstanden. Der Holmabstand a ergibt sich hierbei nicht aus der Geometrie des Querschnitts, sondern aus den Querschnittskennwerten des Gesamtstabes. Beim gekrümmten Träger ist der Einfluss unterschiedlicher Bogenlängen der Holme bei der Aufteilung der Steifigkeiten und Lasten auf die beiden Holme zu berücksichtigen. Die Aufteilungen ergeben sich aus den Differentialgleichungen des kreisförmig gekrümmten Trägers und der Annahme, dass die Verdrehung in jedem Querschnittspunkt gleich ist. In Tabelle 5.5 sind die Formel zur Berechnung des Holmabstandes a und die Aufteilung der Gesamtsteifigkeiten und Lasten auf die Leiterholme zusammengefasst dargestellt. Die in den Holmen ermittelten Teilschnittgrößen werden zu den Schnittgrößen des Stabes zusammengefasst und die Tragfähigkeit am Gesamtquerschnitt untersucht. Die Auswertung erfolgt an den Schnittpunkten der polygonal angenäherten Einzelholme mit dem Holm. Die Stabschnittgrößen und -verformungen können Tabelle 5.6 entnommen werden. Die möglichen Verformungszustände sind in

Bild 5.17 dargestellt. Es ist noch einmal festzustellen, dass die Querschnittsform im vorgestellten System erhalten bleibt.

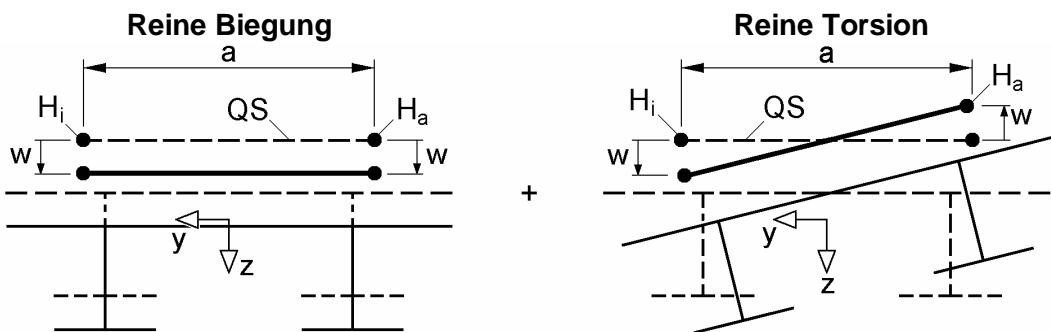


Bild 5.17 Verformungszustände im Leitermodell

Die Güte der mithilfe des Leitermodells berechneten Ergebnisse ist abhängig von der Stabkennzahl ε_T und von der Anzahl der Quersprossen n_Q . Mit wachsender Stabkennzahl und mit abnehmender Anzahl der Querprossen nimmt der Fehler gegenüber einer Berechnung mit gekrümmten Stabelementen zu. Die Anzahl der Quersprossen sollte für den geraden Stab $n_Q > 2 \cdot \varepsilon_T + 1$ sein. Für den gekrümmten Träger schlägt Ramberger vor, dass die Anzahl der Quersprossen bei der Modellierung 10 bis 20 betragen sollte. Die Querschnittskennwerte der Quersprossen sollen einerseits die Annahme des Leitermodells nach unendlich großer Biegesteifigkeit und fehlender Torsionssteifigkeit erfüllen, haben anderseits aber auch Einfluss auf die numerische Stabilität der Berechnung. Zur Abbildung einer unendlichen Steifigkeit der Quersprossen muss nach Ramberger die einzugebende Biegesteifigkeit der Quersprossen nicht größer sein als jene der Holme, d. h. $EI_{y,QS} = (EI_{y,i} + EI_{y,a})/2$. Die Schubsteifigkeit setzt er zu $EA_{QS} = 5 \cdot EA$ und die Torsionssteifigkeit zu $GI_{T,QS} = (GI_{Ti} + GI_{Ta})/2000$. Der gekrümmte Träger mit $R = 10$ m aus dem Beispiel in Abschnitt 5.2.4.2 wurde mit dem Leitermodell nachgerechnet. Der Holmabstand ist $a = 12,61\text{cm}$. Das Leitermodell wurde mit 10 Quersprossen je Feld idealisiert. Das minimale Stützmoment liegt mit $M_{\text{Stütz}} = -96,8 \text{ kNm}$ ca. 2 % unter dem mit BOGEN2008 berechneten Stützmoment. Das Leitermodell von Ramberger ist geeignet, die Wölbkrafttorsion in einem gekrümmten Träger mit geraden Stabelementen mit 6 Freiheitsgraden ohne ϑ' zu modellieren.

6 Mäßig gekrümmtes Stabelement für FE-Berechnungen

6.1 Vorbemerkungen

Die dem Statiker zur Verfügung stehenden räumlichen Stabwerkprogramme verwenden im Allgemeinen gerade Stabelemente ohne Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion (ohne Ψ'). Gekrümmte Träger können in diesen Programmen nur als Polygonzug modelliert werden. Weiterhin kann das Verformungsverhalten von Trägern mit offenen Querschnitten nicht richtig erfasst werden (Abschnitt 5.2.4.2). In diesem Kapitel wird eine Steifigkeitsbeziehung, die mit den bekannten Querschnittskennwerten für die Berechnung mit geraden Stabelementen nach Theorie I. Ordnung auskommt, für das kreisförmig gekrümmte zweiknotige Bogenelement nach Bild 6.1 für zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Torsion hergeleitet. Diese Elementbeziehung ist im Rahmen dieser Arbeit in dem Programm BOGEN2008 implementiert worden.

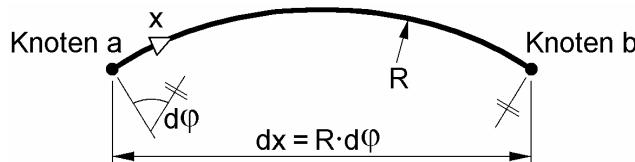


Bild 6.1 Draufsicht eines kreisförmigen Bogenelementes

Das Konvergenzverhalten wird an einem stark gekrümmten Einfeldträger untersucht und die Ergebnisse mit den Formeln in Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 überprüft. An ausgewählten Beispielen werden die mit BOGEN2008 ermittelten Schnittgrößen mit den Ergebnissen aus einer Berechnung mit ANSYS verglichen.

6.2 Weggrößenverfahren

Beim Weggrößenverfahren wird das System in finite Elemente unterteilt, die in Knoten miteinander verbunden sind. Das gerade Stabelement weist in der Regel zwei Knoten an den Enden des Elementes auf. Die Verformungsgrößen in den Endknoten werden über die Elementsteifigkeitsmatrix mit den korrespondierenden Schnittgrößen in Beziehung gesetzt. Durch Formulierung des Gleichgewichts in jedem Knoten lässt sich ein Gleichungssystem der Dimension Anzahl der Knoten multipliziert mit den Verformungsgrößen des Knotens aufstellen und nach Einarbeitung der Randbedingungen lösen. Nach Theorie I. Ordnung (lineare Stabtheorie) ergibt sich stets ein Gleichungssystem in folgender Form:

$$\underline{K} \cdot \underline{v} = \underline{p} \quad (6.1)$$

mit: \underline{K} = Gesamtsteifigkeitsmatrix

\underline{v} = Vektor der Knotenverformungen

p = Vektor der Lastgrößen

Die korrespondierenden Schnittgrößen an den Stabenden eines Elementes können mit den ermittelten Verformungsgrößen direkt bestimmt werden:

$$\underline{s}_e = \underline{K}_e \cdot \underline{v}_e - \underline{p}_e \quad (6.2)$$

mit: \underline{s}_e = Vektor der korrespondierenden Schnittgrößen in den Knoten

\underline{K}_e = Elementsteifigkeitsmatrix

\underline{v}_e = Vektor der Verformungsgrößen in den Knoten

\underline{p}_e = Vektor der Lastgrößen infolge q_x, q_y, q_z und $m_{x,ges}$

6.3 Kreisförmig gekrümmte Träger

6.3.1 Voraussetzungen

Zur Herleitung der für das Weggrößenverfahren benötigten Steifigkeitsmatrix für das kreisförmig gekrümmte zweiknotige Stabelement nach Bild 6.1 muss die virtuelle Arbeit der linearen Stabtheorie um Terme, die die geometrischen Zusammenhänge zwischen Durchbiegung und Verdrehung berücksichtigen, erweitert werden. Betrachtet werden beliebige Lastfälle, d. h. zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Torsion. Zusätzlich zu den allgemeinen Voraussetzungen gelten folgende Annahmen:

- Die Querschnittsbreite sei klein im Verhältnis zum Krümmungsradius ($b/R \leq 0,1$). Unterschiedliche Längen einzelner Querschnittsfasern werden nicht berücksichtigt.
- Der Schubmittelpunktsabstand z_M sei klein im Verhältnis zum Radius R ($z_M/R \leq 0,1$).

6.3.2 Verschiebungen u, v, w und Dehnung in Längsrichtung

In dem im Grundriss gekrümmten Stabelement werden die lokalen Verschiebungen des gekrümmten Stabelementes u, v und w in den Knoten a und b auf das Bezugskoordinatensystem x, y und z nach Bild 6.2 bezogen. Das Bezugskoordinatensystem $x-y-z$ entspricht dem lokalen Koordinatensystem des gekrümmten Stabelementes im Knoten a. Die z -Achse entspricht in allen Punkten der lokalen z -Achse des gekrümmten Stabelementes. Die lokale x -Achse folgt der Stabachse und wird folglich über die Länge des Stabelementes entsprechend der Krümmung gedreht. Wenn das gekrümmte Stabelement klein genug gewählt wird, vorgeschlagen wird ein Öffnungswinkel von $d\varphi \leq 0,1$ rad, können folgende Annahmen getroffen werden:

- $\cos(d\varphi) \approx 1$ und $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$ mit $d\varphi = dx / R$

Der relative Fehler bei dieser Annahme ist in Tabelle 6.1 dargestellt.

Tabelle 6.1 Funktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ sowie relativer Fehler RF für $\cos \varphi \approx 1$ und $\sin \varphi \approx \varphi$

φ in -rad	$\cos \varphi$	RF in %	$\sin \varphi$	RF in %
0,01	0,99995	0,005	0,01000	0,002
0,02	0,99980	0,020	0,02000	0,007
0,04	0,99920	0,080	0,03999	0,027
0,06	0,99820	0,180	0,05996	0,060
0,08	0,99680	0,320	0,07991	0,107
0,10	0,99500	0,500	0,09983	0,167
0,12	0,99281	0,719	0,11971	0,240
0,14	0,99022	0,978	0,13954	0,326
0,16	0,98723	1,277	0,15932	0,426
0,18	0,98384	1,616	0,17903	0,539
0,20	0,98007	1,993	0,19867	0,665

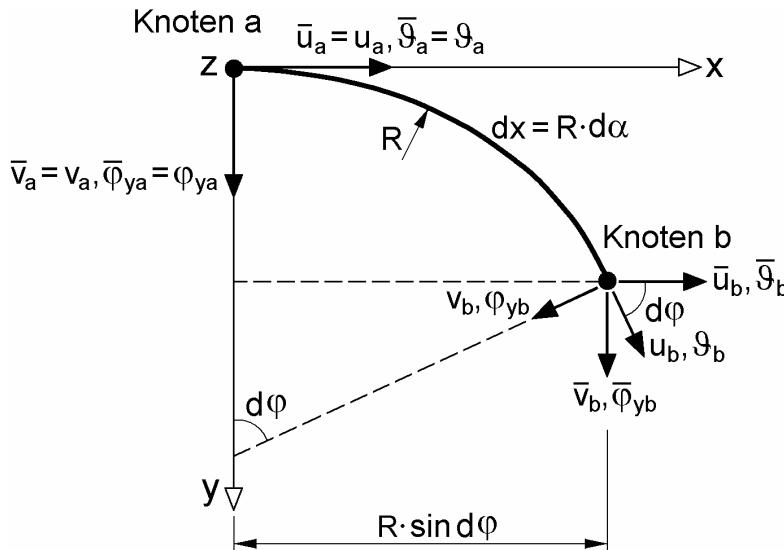


Bild 6.2 Bezugskoordinatensystem für das gekrümmte Stabelement

Die Dehnung in Längsrichtung des gekrümmten Stabelementes wird näherungsweise mithilfe der bezogenen Stablängsverschiebung $d\bar{u}$ in Richtung der bezogenen x-Achse in a bestimmt. Die Stablängsverschiebung $d\bar{u}$ eines beliebigen Querschnittspunktes wird nach Gl. (1.1) berechnet. Es gilt näherungsweise:

$$d\bar{u} \approx d\bar{u}_s - y \cdot d\bar{\varphi}_z + z \cdot d\bar{\varphi}_y - \omega \cdot d\bar{\psi} \quad (6.3)$$

Zur Bestimmung der Anteile $d\bar{u}_s$, $d\bar{\varphi}_z$, $d\bar{\varphi}_y$ und $d\bar{\psi}$ werden die lokalen Verschiebungen u und v bzw. die lokalen Verdrehungen ϑ und φ_y an den Endknoten a und b auf das x-y-z-Koordinatensystem im Knoten a bezogen. Es folgt:

$$\begin{aligned} d\bar{u}_s &= \bar{u}_{sb} - \bar{u}_{sa} \\ &= u_{sb} \cdot \cos(d\varphi) - v_{Mb} \cdot \sin(d\varphi) - u_{sa} \\ &= du_s - v_{Mb} \cdot \frac{dx}{R} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
 d\bar{u}_s &\approx du_s - \frac{v_M \cdot dx}{R} \\
 d\bar{v}_M &= \bar{v}_{Mb} - \bar{v}_{Ma} \\
 &= v_{Mb} \cdot \cos(d\varphi) + u_{sb} \cdot \sin(d\varphi) - v_{Ma} \\
 &= dv_M + u_{sb} \cdot \frac{dx}{R} \\
 d\bar{v}_M &\approx dv_M + \frac{u_s \cdot dx}{R}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
 d\bar{\varphi}_z &\approx \frac{dv_M}{dx} + \frac{u_s}{R} \\
 d\bar{\varphi}_y &= \bar{\varphi}_{yb} - \bar{\varphi}_{ya} \\
 &= \varphi_{yb} \cdot \cos(d\varphi) + \vartheta_b \cdot \sin(d\varphi) - \varphi_{ya} \\
 &= d\varphi_y + \vartheta_b \cdot \frac{dx}{R}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
 d\bar{\varphi}_y &\approx d\varphi_y + \frac{\vartheta \cdot dx}{R} \\
 d\bar{\vartheta} &= \bar{\vartheta}_b - \bar{\vartheta}_a \\
 &= \vartheta_b \cdot \cos(d\varphi) - \varphi_{yb} \cdot \sin(d\varphi) - \vartheta_a \\
 &= d\vartheta - \varphi_{yb} \cdot \frac{dx}{R}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$d\bar{\vartheta} \approx d\vartheta - \frac{\varphi_y \cdot dx}{R} = d\vartheta + \frac{w_M' \cdot dx}{R}$$

$$d\bar{\psi} \approx \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\varphi_y}{R} = \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{w_M'}{R}$$

Die Dehnung $\bar{\varepsilon}_x$ bezeichnet die Längenänderung einer Faser in der auf den Knoten a bezogenen x-Richtung. Sie entspricht der ersten Ableitung der Verschiebung in x-Richtung. Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_x &= \frac{d\bar{u}}{dx} \\
 &= \frac{d\bar{u}_s}{dx} - y \cdot \left(\frac{d\bar{\varphi}_z}{dx} \right) + z \cdot \left(\frac{d\bar{\varphi}_y}{dx} \right) - \omega \cdot \left(\frac{d\bar{\psi}}{dx} \right) \\
 &= u'_s - \frac{v_M}{R} - y \cdot \left(v''_M + \frac{u'_s}{R} \right) + z \cdot \left(-w''_M + \frac{\vartheta}{R} \right) - \omega \cdot \left(\vartheta'' + \frac{w''_M}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Bei der Ermittlung der Dehnung wurde von einer mittleren Elementlänge von $dx = R \cdot d\varphi$ ausgegangen. In einem gekrümmten Stabelement sind die Längen der Querschnittsfasern jedoch nicht in jedem Punkt gleich sondern abhängig von ihrem

Abstand zur Stabachse. Die äußere Querschnittsfaser eines symmetrischen Querschnitts weist bei einer Querschnittsbreite b eine Elementlänge von $\ell_a = (R + b/2) \cdot d\varphi$ auf. Die mit Gl. (6.8) ermittelte Dehnung dieser äußeren Querschnittsfaser müsste bei einer genaueren Berechnung mit dem Faktor $f = R / (R + b/2) \leq 1$ multipliziert werden. Die Annahme eines maximalen Fehlers von 5 % bei der Ermittlung der Dehnung in dieser Querschnittsfaser führt zu der Begrenzung der Querschnittsbreite $b \leq 0,1 \cdot R$.

6.3.3 Virtuelle Arbeit

Ein Tragwerk befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten nach Gl. (1.10) gleich Null ist. Die innere virtuelle Arbeit nach Gl. (1.11) beinhaltet die Arbeitsanteile infolge von Normalspannungen σ_x und Schubspannungen τ . Unter Verwendung der Gln. (1.7) und (6.8) bestimmen sich die Arbeitsanteile aus σ_x zu:

$$\begin{aligned} \delta W_{int}(\sigma_x) &= - \iint_A \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dA \cdot dx \\ &= - \int_A \left(\delta \left(u'_s - \frac{v_M}{R} \right) \cdot EA \cdot \left(u'_s - \frac{v_M}{R} \right) \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_A \left(\delta \left(-w''_M + \frac{\vartheta}{R} \right) \cdot EI_y \cdot \left(-w''_M + \frac{\vartheta}{R} \right) \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_A \left(\delta \left(v''_M + \frac{u'_s}{R} \right) \cdot EI_z \cdot \left(v''_M + \frac{u'_s}{R} \right) \right) \cdot dx \\ &\quad - \int_A \left(\delta \left(-\vartheta'' - \frac{w''_M}{R} \right) \cdot EI_\omega \cdot \left(-\vartheta'' - \frac{w''_M}{R} \right) \right) \cdot dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

Bei Vernachlässigung der Schubanteile aus Querkraft (*Bernoulli*-Hypothese) und Wölbkrafttorsion (*Wagner*-Hypothese) gehen in die Arbeitsanteile aus τ nur Schubspannungen infolge primärer Torsion (*St. Venantscher* Torsion) ein:

$$\begin{aligned} \delta W_{int}(\tau) &= - \iint_A \left(\delta \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy} + \delta \gamma_{zx} \cdot \tau_{zx} \right) \cdot dA \cdot dx \\ &= - \int_A \left[\delta \left(\vartheta' + \frac{w'_M}{R} \right) \cdot GI_T \cdot \left(\vartheta' + \frac{w'_M}{R} \right) \right] \cdot dx \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Schnittgrößen für das kreisförmig gekrümmte Element können nach Tabelle 1.1 zusammengefasst werden. Angaben zu den Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen finden sich auch bei Wlassow [125], Dabrowski [14], Becker [3] und Bogensperger [7]. Dabei wurden unterschiedlichen Näherungen eingeführt. Es gilt hier:

$$\begin{aligned}
 N &= EA \cdot \left(u'_s - \frac{v_M}{R} \right) \\
 M_y &= -EI_y \cdot \left(w''_M - \frac{\vartheta}{R} \right) & M_z &= EI_z \cdot \left(v''_M + \frac{u_s}{R} \right) \\
 M_\omega &= -EI_\omega \cdot \left(\vartheta'' + \frac{w''_M}{R} \right) & M_{xs} &= M'_\omega = -EI_\omega \cdot \left(\vartheta'' + \frac{w''_M}{R} \right)' \\
 M_x &= M_{xp} + M_{xs} & M_{xp} &= GI_T \cdot \left(\vartheta' + \frac{w'_M}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Für die äußere Arbeit gilt Gl. (1.12). Streckenlasten und Einzellastgrößen leisten an den korrespondierenden Verschiebungen Arbeit. Da die Gleichstreckenlasten q_y und q_z häufig nicht im Schubmittelpunkt wirken, sondern in einem beliebigen Angriffspunkt (y_q, z_q), werden beim Streckentorsionsmoment entsprechende Zusatzanteile berücksichtigt:

$$m_{x,ges} = m_x + q_z \cdot (y_q - y_M) - q_y \cdot (z_q - z_M) \tag{6.12}$$

Die äußere Arbeit ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \delta W_{ext} &= \int_{\ell} \left(\delta u_s \cdot q_x + \delta v_M \cdot q_y + \delta w_M \cdot q_z + \delta \vartheta \cdot m_{x,ges} \right) \cdot dx \\
 &\quad + \delta u_s \cdot F_x + \delta v_M \cdot F_y + \delta w_M \cdot F_z \\
 &\quad + \delta v_M' \cdot M_{zL} - \delta w_M' \cdot M_{yL} + \delta \vartheta \cdot M_{xL} - \delta \vartheta' \cdot M_{\omega L}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.3.4 Differentialgleichungen und Randbedingungen

Mithilfe einer partiellen Integration wird die virtuelle Arbeit so umgeformt, dass die Differentialgleichungen des kreisförmig gekrümmten Elementes und die zu den Verformungen korrespondierenden Lastgrößen direkt abgelesen werden können. Die Differentialgleichungen entsprechen den Gleichungen in Tabelle 3.6 und lauten:

$$\begin{aligned}
 N' + \frac{M'_z}{R} + q_x &= 0 \Leftrightarrow N' = \frac{V_y}{R} - q_x \\
 M''_z - \frac{N}{R} - q_y &= 0 \Leftrightarrow V'_y = -\frac{N}{R} - q_y \\
 M''_y + \frac{M''_\omega}{R} + \frac{M'_{xp}}{R} + q_z &= 0 \Leftrightarrow M'_y = -V_z - \frac{M_x}{R} \\
 \frac{M_y}{R} - M''_\omega - M'_{xp} - \bar{m}_{x,ges} &= 0 \Leftrightarrow M'_x = -\bar{m}_{x,ges} + \frac{M_y}{R}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Aus den Randbedingungen ergeben sich die zu den sieben unbekannten Verschiebungsgrößen $\underline{v}_k^T = [u_s \ v_M \ v'_M \ w_M \ (-w'_M) \ \vartheta \ (-\vartheta')]$ im Knoten korrespondieren Gleichgewichtsschnittgrößen:

$$\hat{\underline{S}}_k^T = \left[\begin{pmatrix} \hat{N} + \frac{\hat{M}_z}{R} \\ \hat{V}_y \ \hat{M}_z \ \hat{V}_z \ \left(\hat{M}_y + \frac{\hat{M}_\omega}{R} \right) \ \hat{M}_x \ \hat{M}_\omega \end{pmatrix} \right] \quad (6.15)$$

Querkräfte, Biegemomente um die z–Achse, Torsionsmomente und Wölbmomente können direkt aus dem Gleichgewichtsvektor $\hat{\underline{S}}_k$ abgelesen werden. Zur Berechnung der Normalkräfte und der Biegemomente um die y–Achse wird eine Umformulierung notwendig. Es folgt:

$$N = \hat{N} - \frac{\hat{M}_z}{R} \quad M_y = \hat{M}_y - \frac{\hat{M}_\omega}{R} \quad (6.16)$$

6.3.5 Elementsteifigkeitsmatrix und -lastvektor

Zur Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix werden die virtuellen Arbeitsanteile nach Gln. (6.9) und (6.10) verwendet. Die prinzipielle Belegung mit Darstellung der Null–Elemente der Matrix ist in Tabelle 6.2 dargestellt. Zum Lösen der Integralform der virtuellen Arbeit muss der Verlauf der Verschiebungen bekannt sein. Ein häufig gewählter Ansatz zur Beschreibung der Verformungen sind die *Hermite'schen* Interpolationspolynome. Die Verschiebungen $v_M(x)$ und $w_M(x)$ sowie die Verdrehung $\vartheta(x)$ werden durch kubische Parabeln approximiert. Für die Verschiebung $w_M(x)$ erhält man beispielsweise:

$$w_M(x) = \left(1 - 3 \cdot \frac{x^2}{\ell^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{\ell^3} \right) \cdot w_{Ma} - \left(\frac{x}{\ell} - 2 \cdot \frac{x^2}{\ell^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{\ell^3} \right) \cdot \ell \cdot w'_{Ma} + \left(3 \cdot \frac{x^2}{\ell^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{\ell^3} \right) \cdot w_{Mb} - \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right) \cdot \ell \cdot w'_{Mb} \quad (6.17)$$

Für die Verschiebung $u_s(x)$ ist bei einem geraden Stabelement ein linearer Ansatz ausreichend. Da das Bogenelement primär für Probleme mit Belastungen in z–Richtung und Torsion konzipiert werden soll, soll auch an dieser Stelle auf diesen Ansatz zurückgegriffen werden. Die exakte Lösung für die Verdrehung $\vartheta(x)$ im Stabelement enthält Hyperbelfunktionen \sinh und \cosh . Die Anwendung der Polynomfunktion für die Verdrehung $\vartheta(x)$ setzt voraus, dass eine entsprechend feine FE–Modellierung vorgenommen wird. Die Elementlänge sollte daher so gewählt werden, dass die Bedingung $\epsilon_T \leq 1,0$ eingehalten wird [49]:

$$\ell \leq \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_T}} = 1,61 \cdot \sqrt{\frac{I_\omega}{I_T}} \quad (6.18)$$

Tabelle 6.2 Steifigkeitsbeziehung des Kreisbogenelementes (ohne Elementlastvektor)

$N_a + M_{za}/R$	(1,1) (1,2) (1,3) 0 0 0 (1,8) (1,9) (1,10) 0 0 0 0	u_{sa}	
V_{ya}	(2,2) (2,3) 0 0 0 0 (2,8) (2,9) (2,10) 0 0 0 0	v_{Ma}	
M_{za}	(3,3) 0 0 0 0 (3,8) (3,9) (3,10) 0 0 0 0	$v_{Ma'}$	
V_{za}	(4,4) (4,5) (4,6) (4,7) 0 0 0 (4,11) (4,12) (4,13) (4,14)	w_{Ma}	
$M_{ya} + M_{\omega a}/R$	(5,5) (5,6) (5,7) 0 0 0 (5,11) (5,12) (5,13) (5,14)	$w_{Ma'}$	
M_{xa}	(6,6) (6,7) 0 0 0 (6,11) (6,12) (6,13) (6,14)	ϑ_a	
$M_{\omega a}$	(7,7) 0 0 0 (7,11) (7,12) (7,13) (7,14)	ϑ_a'	
$N_b + M_{zb}/R$	(8,8) (8,9) (8,10) 0 0 0 0 0	u_{sb}	
V_{yb}	(9,9) (9,10) 0 0 0 0 0 0	v_{Mb}	
M_{zb}	(10,10) 0 0 0 0 0 0 0	$v_{Mb'}$	
V_{zb}	sym.	(11,11) (11,12) (11,13) (11,14)	w_{Mb}
$M_{yb} + M_{\omega b}/R$		(12,12) (12,13) (12,14)	$w_{Mb'}$
M_{xb}		(13,13) (13,14)	ϑ_b
$M_{\omega b}$		(14,14)	ϑ_b'

In der Matrix der Tabelle 6.2 kennzeichnen die Zahlen in Klammern die Nummerierung der Elemente (Zeile, Spalte). Der Wert „0“ bedeutet, dass das Matrixelement $k_{i,j} = 0$ ist. Die folgende Zusammenstellung ist eine Auflistung aller Matrixelemente für die Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K}_e für ein kreisförmig gekrümmtes Stabelement, die ungleich Null sind:

$$\begin{aligned}
 k(1,1) &= -k(1,8) = k(8,8) = EA/\ell + 2 \cdot EI_z/\ell/R^2 \\
 k(1,2) &= k(1,9) = -k(2,8) = -k(8,9) = 1/2 \cdot EA/R \\
 k(1,3) &= -k(1,10) = -k(3,8) = k(8,10) = 1/12 \cdot EA \cdot \ell/R + EI_z/\ell/R \\
 k(2,2) &= k(9,9) = 12 \cdot EI_z/\ell^3 + 13/35 \cdot EA \cdot \ell/R^2 \\
 k(2,3) &= -k(9,10) = 6 \cdot EI_z/\ell^2 + 11/210 \cdot EA \cdot \ell^2/R^2 \\
 k(2,9) &= -12 \cdot EI_z/\ell^3 + 9/70 \cdot EA \cdot \ell/R^2 \\
 k(2,10) &= -k(3,9) = 6 \cdot EI_z/\ell^2 - 13/420 \cdot EA \cdot \ell^2/R^2 \\
 k(3,3) &= k(10,10) = 4 \cdot EI_z/\ell + 1/105 \cdot EA/R^2 \cdot \ell^3 \\
 k(3,10) &= 2 \cdot EI_z/\ell - 1/140 \cdot EA/R^2 \cdot \ell^3 \\
 k(4,4) &= -k(4,11) = k(11,11) = 12 \cdot EI_y/\ell^3 + 12 \cdot EI_o/\ell^3/R^2 + 6/5 \cdot GI_T/\ell/R^2 \\
 k(4,5) &= -6 \cdot EI_y/\ell^2 - 6 \cdot EI_o/\ell^2/R^2 - 1/10 \cdot GI_T/R^2 \\
 k(4,6) &= -k(4,13) = -k(6,11) = k(11,13) \\
 &= 6/5 \cdot EI_y/\ell/R + 12 \cdot EI_o/\ell^3/R + 6/5 \cdot GI_T/\ell/R \\
 k(4,7) &= k(4,14) = -k(7,11) = -k(11,14) \\
 &\quad - 1/10 \cdot EI_y/R - 6 \cdot EI_o/\ell^2/R - 1/10 \cdot GI_T/R \\
 k(4,12) &= -k(11,12) = -6 \cdot EI_y/\ell^2 - 6 \cdot EI_o/\ell^2/R^2 - 1/10 \cdot GI_T/R^2 \\
 k(5,5) &= k(12,12) = 4 \cdot EI_y/\ell + 4 \cdot EI_o/\ell/R^2 + 2/15 \cdot GI_T \cdot \ell/R^2 \\
 k(5,6) &= -k(12,13) = -11/10 \cdot EI_y/R - 6 \cdot EI_o/\ell^2/R - 1/10 \cdot GI_T/R \\
 k(5,7) &= k(12,14) = 2/15 \cdot EI_y \cdot \ell/R + 4 \cdot EI_o/\ell/R + 2/15 \cdot GI_T \cdot \ell/R \\
 k(5,11) &= -k(6,12) = 6 \cdot EI_y/\ell^2 + 6 \cdot EI_o/\ell^2/R^2 + 1/10 \cdot GI_T/R^2 \\
 k(5,12) &= 2 \cdot EI_y/\ell + 2 \cdot EI_o/\ell/R^2 - 1/30 \cdot GI_T \cdot \ell/R^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k(5,13) &= 1/10 \cdot EI_y/R + 6 \cdot EI_\omega/\ell^2/R + 1/10 \cdot GI_T/R \\
 k(5,14) &= k(7,12) = -1/30 \cdot EI_y \cdot \ell/R + 2 \cdot EI_\omega/\ell/R - 1/30 \cdot GI_T \cdot \ell/R \\
 k(6,6) &= k(13,13) = \mathbf{12 \cdot EI_\omega/\ell^3} + \mathbf{6/5 \cdot GI_T/\ell} + 13/35 \cdot EI_y \cdot \ell/R^2 \\
 k(6,7) &= -k(13,14) = -\mathbf{6 \cdot EI_\omega/\ell^2} - \mathbf{1/10 \cdot GI_T} - 11/210 \cdot EI_y/R^2 \cdot \ell^2 \\
 k(6,13) &= -\mathbf{12 \cdot EI_\omega/\ell^3} - \mathbf{6/5 \cdot GI_T/\ell} + 9/70 \cdot EI_y \cdot \ell/R^2 \\
 k(6,14) &= -k(7,13) = -\mathbf{6 \cdot EI_\omega/\ell^2} - \mathbf{1/10 \cdot GI_T} + 13/420 \cdot EI_y/R^2 \cdot \ell^2 \\
 k(7,7) &= k(14,14) = \mathbf{4 \cdot EI_\omega/\ell} + \mathbf{2/15 \cdot GI_T \cdot \ell} + 1/105 \cdot EI_y/R^2 \cdot \ell^3 \\
 k(7,14) &= \mathbf{2 \cdot EI_\omega/\ell} - \mathbf{1/30 \cdot GI_T \cdot \ell} - 1/140 \cdot EI_y/R^2 \cdot \ell^3
 \end{aligned}$$

Die fettmarkierten Anteile in der Elementsteifigkeitsmatrix entsprechen der Elementsteifigkeitsmatrix des geraden Stabes (Theorie I. Ordnung). Zur Elementsteifigkeitsmatrix gemäß Tabelle 6.2 gehört ein Lastvektor \underline{p}_e mit $2 \cdot 7 = 14$ Vektorelementen.

Er wird entsprechend dem Lastvektor \underline{p}_e des geraden Stabelementes und unter Berücksichtigung der Gl. (6.15) gesetzt:

$$\begin{array}{lll}
 p(1) &= +q_x \cdot \ell/2 + q_y \cdot \ell^2/12/R & p(8) &= +q_x \cdot \ell/2 - q_y \cdot \ell^2/12/R \\
 p(2) &= +q_y \cdot \ell/2 & p(9) &= +q_y \cdot \ell/2 \\
 p(3) &= +q_y \cdot \ell^2/12 & p(10) &= -q_y \cdot \ell^2/12 \\
 p(4) &= +q_z \cdot \ell/2 & p(11) &= +q_z \cdot \ell/2 \\
 p(5) &= -q_z \cdot \ell^2/12 - m_{x,ges} \cdot \ell^2/12/R & p(12) &= +q_z \cdot \ell^2/12 + m_{x,ges} \cdot \ell^2/12/R \\
 p(6) &= +m_{x,ges} \cdot \ell/2 & p(13) &= +m_{x,ges} \cdot \ell/2 \\
 p(7) &= -m_{x,ges} \cdot \ell^2/12 & p(14) &= +m_{x,ges} \cdot \ell^2/12
 \end{array}$$

6.3.6 Gleichgewicht in den Knoten

Die Knotenfreiwerthe eines Stabelementes nach Abschnitt 6.3.5 entsprechen den lokalen Verschiebungsgrößen an den Knoten des Elements. Beim Zusammenbau der Stabelemente zu einem statischen System, wird das Gleichgewicht in allen Knoten mit Hilfe der virtuellen Arbeit formuliert. Beim Zusammenbau der mäßig gekrümmten Stabelemente bezieht sich das Gleichgewicht in jedem Knoten auf das lokale tangential zum Stab gerichtete Koordinatensystem in dem betrachteten Knoten. Die Wirkungsrichtung aller an dem Knoten angreifenden Einzellastgrößen sowie die Auflagerbedingungen werden ebenfalls auf dieses lokale Koordinatensystem bezogen. Die Krümmung des Bogens kann dann ohne weitere Transformation erfasst werden. Bei der linearen Stabtheorie entsprechen die Gleichgewichtsgrößen an den Stabenden den Schnittgrößen. Beim gekrümmten Stabelement sind die Schnittgrößen definitionsgemäß von gekoppelten Verformungsgrößen abhängig. Die Schnittgrößen ergeben sich aus den Gleichgewichtsgrößen entsprechend Gl. (6.16). In Bild 6.3 ist ein gekrümmter Einfeldträger und seine Diskretisierung in drei Elemente mit Angabe der lokalen Verschiebungen u und v für eine Berechnung nach dem Weggrößenverfahren dargestellt.

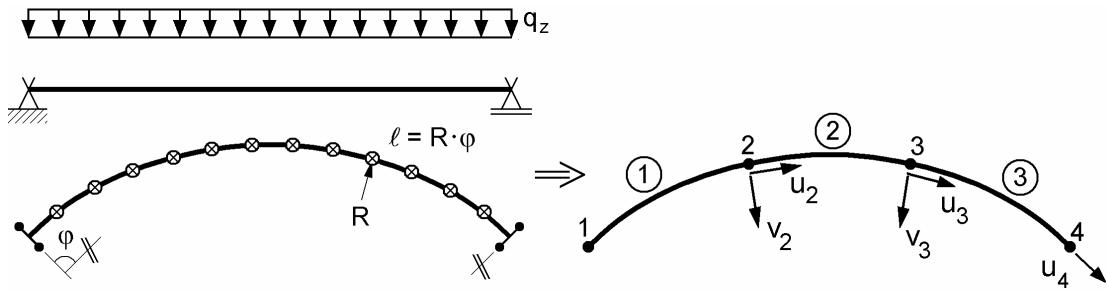


Bild 6.3 Zusammenbau gekrümmter Stabelemente zu einem statischen System

6.4 Beispiele

6.4.1 Vorbemerkungen

Die in Abschnitt 6.3 aufgestellte Elementsteifigkeitsmatrix für das mäßig gekrümmte Stabelement wurde in das Programm BOGEN2008 implementiert. Zur Begutachtung der Qualität von BOGEN2008 wird das Konvergenzverhalten am Beispiel des Einfeldträgers nach Bild 4.2 für den Radius $R = 10$ m untersucht. In den folgenden Abschnitten werden zwei Beispiele mit BOGEN2008 und vergleichsweise mit ANSYS durchgerechnet. Das erste Beispiel wurde der Literatur [40] entnommen und betrachtet eine Stahlbrücke unter Eigengewicht. Im zweiten Beispiel wird ein Zweifeldträger mit horizontaler Belastung nachgerechnet und die Ergebnisse mit ANSYS verglichen.

6.4.2 Gekrümmter Einfeldträger aus Stahlprofilen

In diesem Abschnitt wird auf das Beispiel in Bild 4.2 zurückgegriffen. Untersucht wird das Konvergenzverhalten bei einem Radius von $R = 10$ m ($\varphi = 0,96$ rad) für die Querschnitte Q1 (HE-A 500) und Q2 (Q RO 490x12). Betrachtet werden das Biegemoment in Feldmitte und das Torsionsmoment am Auflager A und die Aufteilung in *St. Venantsche* Torsion und Wölbkrafttorsion.

Das Konvergenzverhalten ist in Bild 6.4 dargestellt. Der offene Querschnitt Q1 weist nach Abschnitt 4.1.3 eine Stabkennzahl von $\varepsilon_T = 4,1$ auf. Nach Gl. (6.18) sollte der Stabzug mindestens in 5 Elemente aufgeteilt werden. Bei 6 Elementen ($d\varphi = 0,192$ rad) weist das sekundäre Torsionsmoment $M_{xs,A}$ lediglich eine Abweichung von 0,92 % zu den mit den Formeln nach Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 ermittelten Ergebnissen auf. Bei einem Öffnungswinkel $d\varphi = 0,1$ für das gekrümmte Stabelement (ca. 10 Elemente) beträgt die maximale Abweichung nur noch 0,12 %.

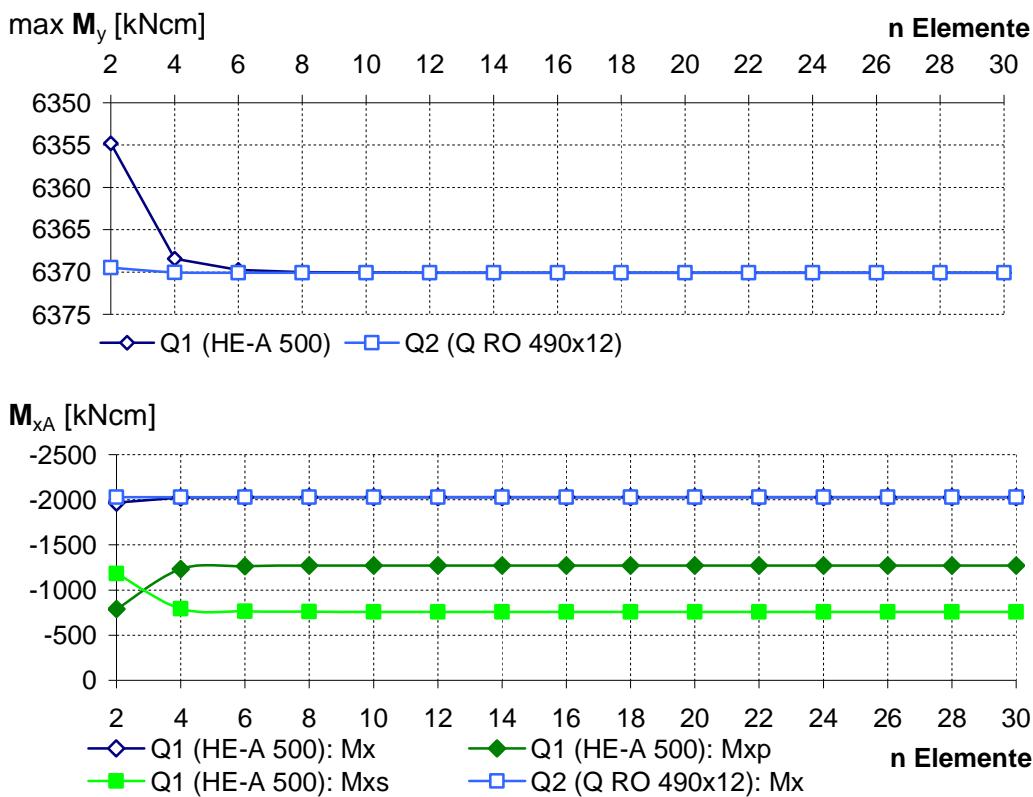


Bild 6.4 Konvergenzverhalten der Lösung aus BOGEN2008 am Beispiel des Biegemomentes in Feldmitte und der Torsion am Auflager A

6.4.3 Zweifeldrige Fußgängerbrücke

Die in Bild 6.5 dargestellte über zwei Felder durchlaufende Fußgängerbrücke in Stahl wurde von Heil [40] unter Anwendung des Kraftgrößenverfahrens für den Lastfall Volllast untersucht. Die dort verwendeten Formeln berücksichtigen einachsige Biegung mit Torsion inklusive Wölbkrafttorsion. Die Belastung wird direkt aus diesem Beispiel übernommen und kann Bild 6.5 entnommen werden. Der dargestellte Querschnitt wird in ANSYS über ein FE-Netz mit 9-knotigen Querschnittselementen eingegeben. Der Faktor $\alpha = G A_s \cdot \ell^2 / (E I_y)$ nach Abschnitt 4.2.2 beträgt $\alpha \geq 186$. Es ist von einem annähernd schubstarren Verhalten auszugehen. Die berechneten Querschnittskennwerte sind in Bild 6.5 rechts angegeben und werden bei der Berechnung mit BOGEN2008 übernommen. Die in Abschnitt 6.3.1 getroffenen Voraussetzungen für eine Berechnung mit BOGEN2008 werden mit $b/R = 4 / 40 = 0,1 \leq 0,1$ und $z_M/R = 0,534 / 40 = 0,013 \leq 0,1$ eingehalten. Die Elementierung wird mit 100 Elementen relativ fein gewählt. Das dargestellte System wird mit BOGEN2008 und ANSYS durchgerechnet. Die Schnittgrößenverläufe V_z , M_y , M_x und M_ω sind in Bild 6.6 grafisch dargestellt. Die Ergebnisse aus ANSYS sind jeweils in Klammern angegeben. Es ist festzustellen, dass die Ergebnisse beider Berechnungen sehr gut übereinstimmen. Beim Querkraftverlauf und beim Biegemoment liegen die Abweichungen unter 0,05 %. Beim Torsionsmoment liegen die Abweichungen im-

mer noch unter 0,5 %. Die maximalen Abweichungen sind beim Wölbmoment und liegen bei 2,6 %. Die Abweichungen zu den bei Heil angegebenen Ergebnissen sind ebenfalls gering.

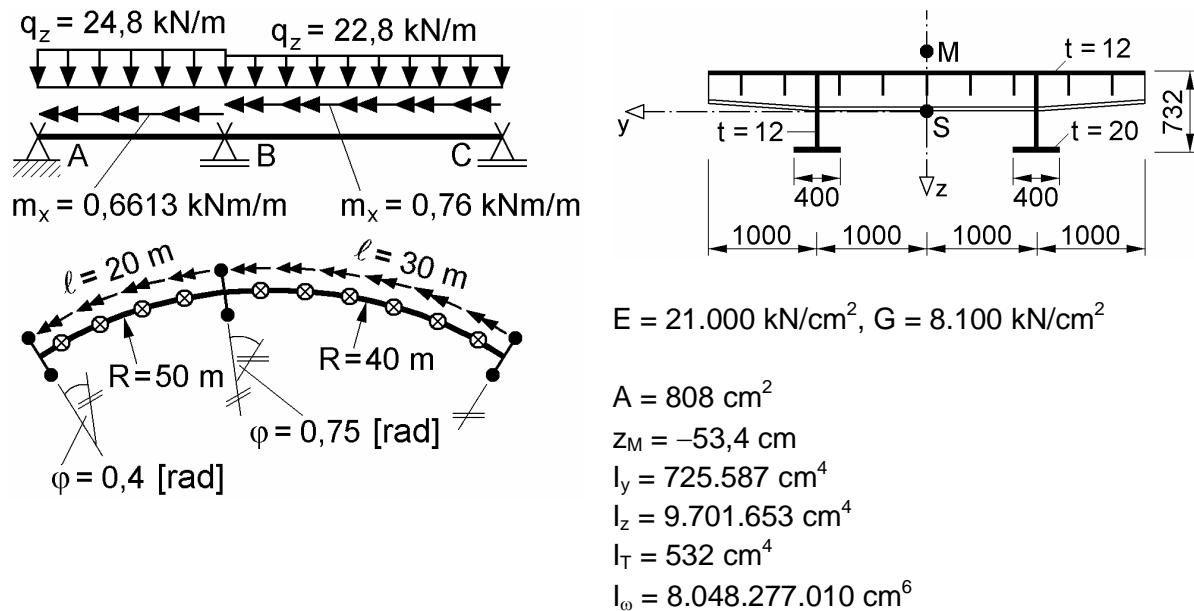


Bild 6.5 Fußgängerbrücke nach Heil [40]

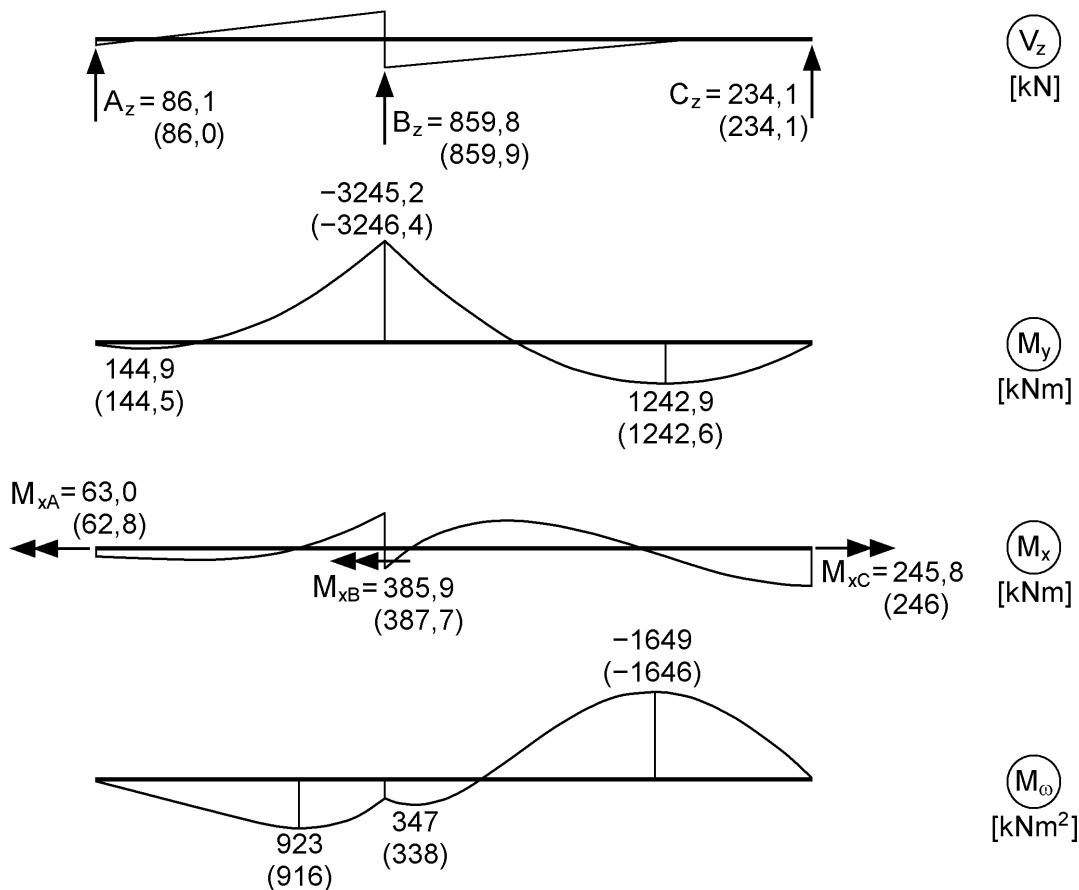


Bild 6.6 Schnittgrößenverläufe Fußgängerbrücke ermittelt mit BOGEN2008 und vergleichweise mit ANSYS (Klammerwerte)

6.4.4 Zweifeldträger mit horizontalen Lasten

Im Folgenden wird die Schnittgrößenberechnung eines Zweifeldträgers mit Gleichstreckenlast q_y und Lagerbedingungen nach Bild 6.7 unter Anwendung von BOGEN2008 und ANSYS durchgeführt und verglichen. Der Zweifeldträger weist bei gleichen Feldlängen von $\ell = 2 \cdot 2 \text{ m}$ einen Radius von $R = 10 \text{ m}$ auf. Als Querschnitt wird ein Quadrat mit Außenkanten von 100 mm gewählt. Schwerpunkt und Schubmittelpunkt liegen dementsprechend in einer Achse. Die Voraussetzungen für eine Berechnung mit BOGEN2008 nach Abschnitt 6.3.1 sind eingehalten. Ausgewählte Schnittgrößen sind in Bild 6.7 grafisch dargestellt. Die Klammerwerte entsprechen den Ergebnissen aus ANSYS. Obwohl das in BOGEN2008 verwendete Bogenelement primär für Probleme mit Belastungen in z-Richtung und Torsion konzipiert ist, ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus ANSYS festzustellen.

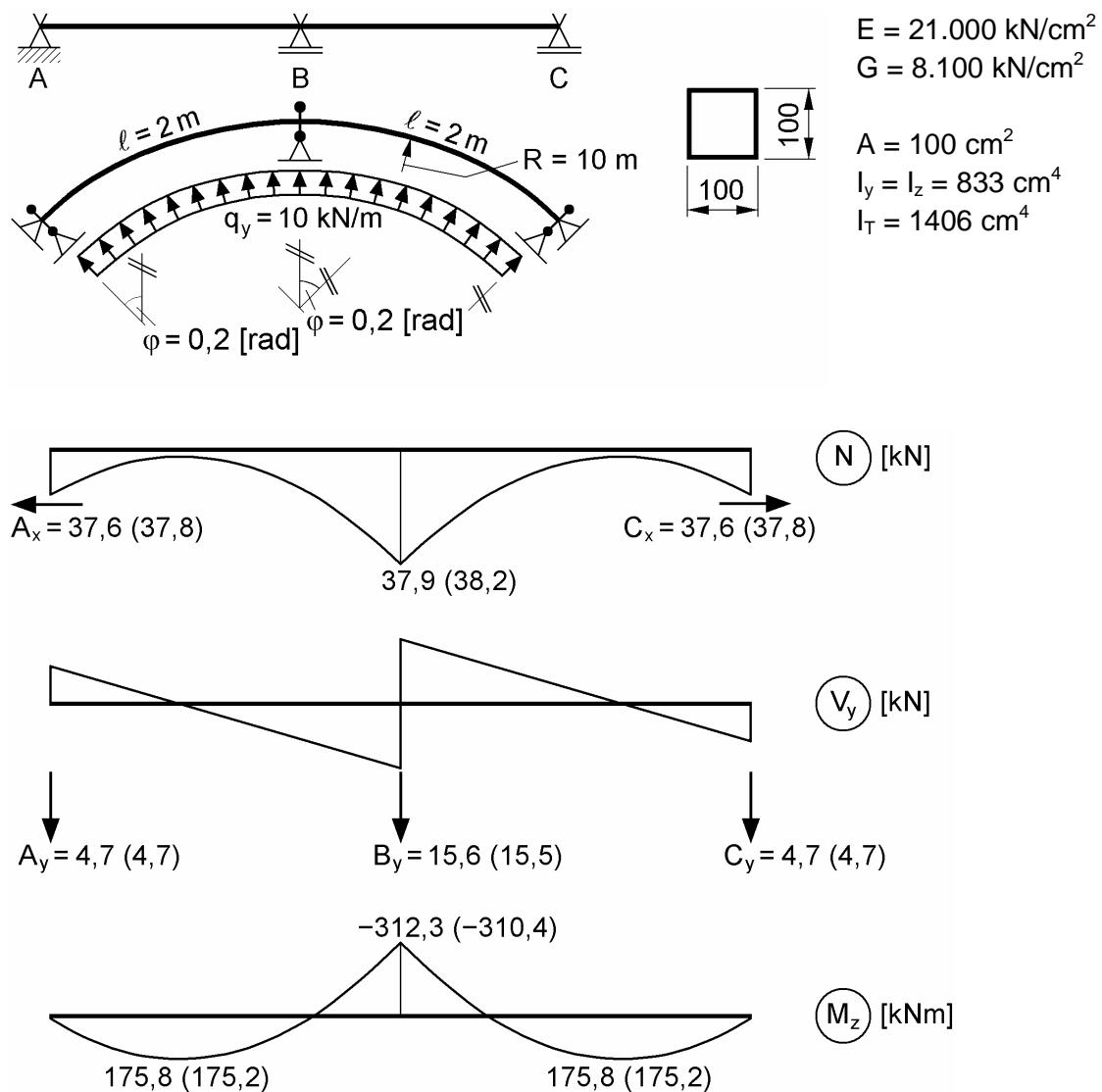


Bild 6.7 Zweifeldträger mit horizontaler Gleichstreckenlast q_y und ausgewählte Schnittgrößenverläufe

7 Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens bei gekrümmten Verbundträgern

7.1 Vorbemerkungen

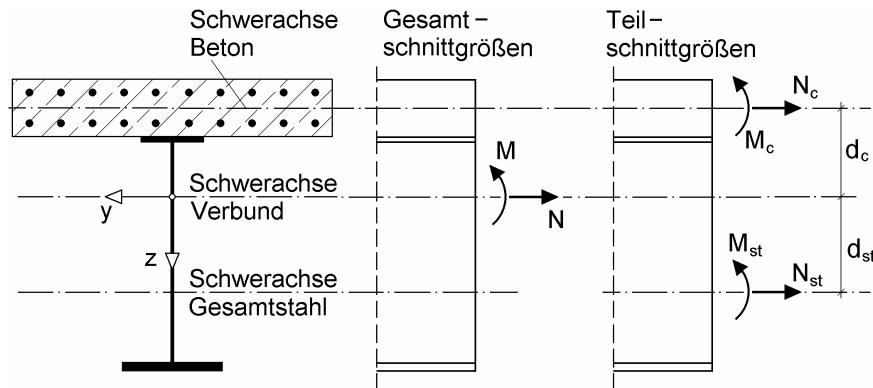
In diesem Kapitel werden die Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons in gekrümmten Trägern mit oben liegender Betonplatte untersucht. Die Berechnung der ideellen Querschnittskennwerte unter Berücksichtigung der Belastung erfolgt nach Abschnitt 2.7.3. Die Ermittlung der Kriechzahlen und der Schwinddehnung findet sich in Abschnitt 2.6.

Die Einflüsse des zeitabhängigen Betonverhaltens bei der Ermittlung der Schnittgrößen und der Spannungen werden für den geraden Träger erläutert. Es wird untersucht, inwieweit die vorgestellten Methoden auf den gekrümmten Träger übertragen werden können. Auf Besonderheiten, die aus der Krümmung herrühren, wird eingegangen. Anhand von Beispielen werden die Auswirkungen auf die Schnittgrößenverläufe, Spannungen und Auflagerreaktionen untersucht. Hierfür wird auf die Ein- und Zweifeldträger aus Abschnitt 4.3.2 und 4.4.3 zurückgegriffen. Des Weiteren werden ausgewählte Beanspruchungszustände infolge Eigengewicht einer mit einem Kastenquerschnitt ausgebildeten dreifeldrigen Fußgängerbrücke untersucht.

7.2 Kriechen und Schwinden

7.2.1 Vorüberlegungen

Die Gesamtschnittgrößen M und N im Verbundquerschnitt können auf die Teilschnittgrößen M_c und N_c des Betons und M_{st} und N_{st} des Gesamtstahlquerschnitts zurückgeführt werden (Bild 7.1). Bei länger andauernder Belastung treten im Werkstoff Beton zeitabhängige Kriechverformungen auf. Der Beton entzieht sich teilweise der Lastaufnahme, was zu zeitabhängigen Umlagerungen der Teilschnittgrößen führt. Die Beanspruchung für den Gesamtstahlquerschnitt erhöht sich bei gleich bleibenden Gesamtschnittgrößen. Die zeitabhängigen Kriechverformungen führen zu zeitabhängigen Verformungen im Gesamtquerschnitt. Hieraus resultieren in statisch unbestimmten Systemen Schnittgrößenumlagerungen infolge von Zwängungen. Gleichzeitig treten im Beton belastungsunabhängige Schwindverkürzungen auf, die durch das Zusammenwirken der Betonplatte mit dem Stahlquerschnitt behindert werden und zu weiteren Beanspruchungen im Verbundquerschnitt führen. Mit dem Gesamtquerschnittsverfahren kann der Einfluss des Kriechens und Schwindens mithilfe von lastfallabhängige Reduktionszahlen n_L nach Abschnitt 2.7.3 erfasst werden. Der Verbundquerschnitt wird dabei unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Betonverhaltens ideal in einen Stahlquerschnitt überführt.



$$\text{Gleichgewicht: } N = N_c + N_{st} \text{ und } M = M_c + M_{st} + N_{st} \cdot d_{st} + N_c \cdot d_c$$

Bild 7.1 Gesamtschnittrößen und Teilschnittrößen im Verbundquerschnitt

7.2.2 Schnittgrößenermittlung

Gerade Durchlaufträger in Verbundbauweise

Die Schnittgrößenermittlung erfolgt im Allgemeinen nach der Elastizitätstheorie unter Berücksichtigung mittragender Breiten nach Abschnitt 2.7.2. Zur Berücksichtigung des gerissenen Betons in der Zugzone von Durchlaufträgern werden zwei Methoden verwendet, s. Bild 7.2.

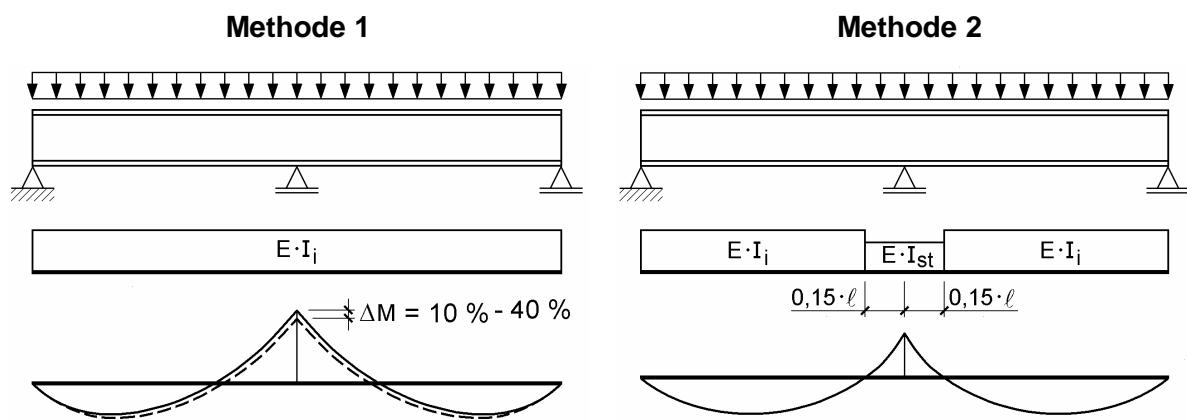


Bild 7.2 Methoden zur Schnittgrößenermittlung von Verbundträgern [51]

Methode 1 ist die übliche Methode der Schnittgrößenermittlung im Hochbau. Die Schnittgrößen werden mit den Steifigkeiten der ungerissenen Querschnitte ermittelt. Auf den Verbundquerschnitt wirkende negative Biegemomente an den Zwischenauflagern dürfen unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen um mindestens 10 % abgemindert werden. Bei ausreichender Rotationskapazität, die über die Einhaltung von b/t -Verhältnissen (Querschnittsklassifizierung) gewährleistet wird, dürfen in Abhängigkeit von der Querschnittsklasse (s. Abschnitt 2.8) weitere Schnittgrößenumlagerungen bis zu maximal 40 % des Stützmomentes angesetzt werden.

Methode 2 ist die vorrangig verwendete Methode im Brückenbau. In einem Bereich von 15 % der angrenzenden Feldlängen links und rechts vom Mittelauflager werden die Querschnittskennwerte des Verbundquerschnitts mit gerissener Betonplatte (Gesamtstahlquerschnitt, Zustand II) angesetzt.

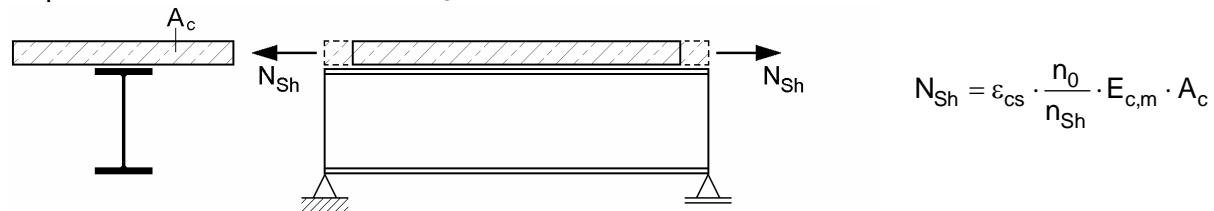
Im Grenzzustand der Tragfähigkeit brauchen bei Querschnitten der Klasse 2 Kriech- und Schwindeinflüsse bei der Schnittgrößenermittlung nicht berücksichtigt werden. Bei der Berechnung von Schnittgrößen im Grenzzustand der Ermüdung oder bei dem im Brückenbau erforderlichen Nachweis „Begrenzung der Spannungen“ (Nachweisformat „Elastisch–Elastisch“) sind die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden stets zu beachten.

Zur Ermittlung der Beanspruchungen aus Schwinden wird von der Modellvorstellung nach Tabelle 7.1 ausgegangen. Die Betonplatte verkürzt sich beim Austrocknen um die Länge $\Delta\ell = \varepsilon_{cs} \cdot \ell$. Mit der Schwindnormalkraft N_{sh} wird die Betonplatte wieder auf die Trägerlänge ℓ gezogen (Tabelle 7.1, Schritt 1). In diesem Zustand wird die Betonplatte starr mit dem Stahlträger verbunden. Hieraus resultiert das Schwindmoment M_{sh} in der ideellen Schwerachse des Verbundquerschnitts gemäß Tabelle 7.1, Schritt 2.

Tabelle 7.1 Modellvorstellung zur Berechnung der Schwindgrößen N_{sh} und M_{sh} [51]

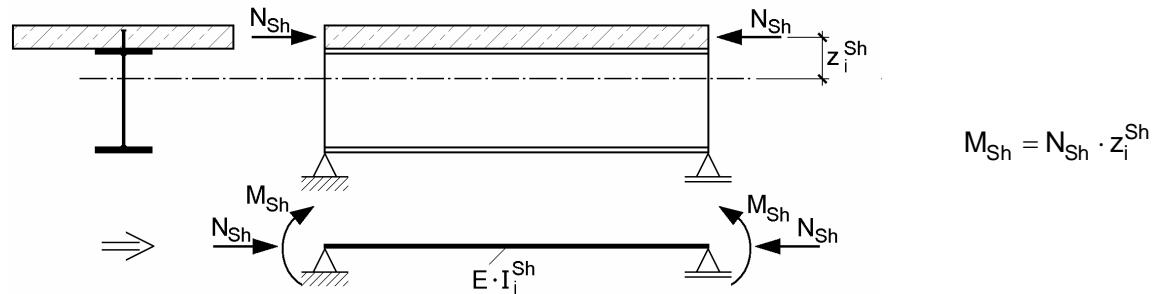
1. Schritt: Betongurt losgelöst vom Stahlträger

Die Schwindverkürzung der Betonplatte wird gedanklich durch die Zugkraft N_{sh} verhindert.
→ primäre Schwindnormalkraft N_{sh}



2. Schritt: Betongurt im starren Verbund mit dem Stahlträger

Die primäre Schwindnormalkraft N_{sh} wirkt als Druckkraft auf den Verbundträger.
→ primäres Schwindmoment M_{sh}



Zur Berechnung der Schnittgrößen infolge Schwinden werden die in der Modellvorstellung ermittelten Schwindgrößen als äußere Lasten auf das System aufgebracht. Dabei dürfen N_{sh} und M_{sh} in Bereichen, in denen der Beton als gerissen gilt, gleich

Null gesetzt werden. Bei Ansatz eines affinen Verlaufs von Schwinden und Kriechen ist eine direkte Berechnung mit dem Gesamtquerschnittsverfahren und dem Reduktionsfaktor n_{Sh} möglich. In statisch unbestimmten Systemen resultieren aus den mit der Modellvorstellung ermittelten Schwindgrößen weitere Zwangsschnittgrößen.

Gekrümmte Durchlaufträger in Verbundbauweise

Bei im Grundriss gekrümmten Druchlaufträgern in Verbund ist der Biegemomentenverlauf nicht allein abhängig von dem Steifigkeitsverhältnis $\kappa_{My} = E_a I_{y,st} / E_a I_{y,i}$ sondern auch vom:

- Krümmungsradius R
- κ_T , dem Verhältnis der Biegesteifigkeiten $EI_{y,i}$ zur Torsionssteifigkeit $GI_{T,i}$ (Abschnitt 4.4.1)
- Wölbwiderstand $EI_{\omega,i}$ sowie vom Verhältnis $EI_{\omega,st}$ zu $EI_{\omega,i}$

Aus diesem Grunde sollte bei gekrümmten Durchlaufträgern in Verbundbauweise die Berechnung der Schnittgrößen stets unter Annahme eines gerissenen Bereichs (Zustand II) über der Stütze durchgeführt werden. Die Querschnittskennwerte des Verbundquerschnitts im Zustand II (Gesamtstahlquerschnitt) sollten dabei nach Abschnitt 2.7.3 berechnet werden.

An den Zweifeldträgern in Abschnitt 4.4.3 soll die Entwicklung der Rissbildung in Abhängigkeit vom Krümmungsradius und Querschnitt untersucht werden. Die Beanspruchung wird mit $q_z = 50 \text{ kN/m}$ als kurzzeitige Belastung angenommen. Die Untersuchung wird mit BOGEN2008 und den Querschnittskennwerten aus Abschnitt 4.1.3 durchgeführt. Das Verhältnis κ_{My} beträgt bei allen Beispielen konstant $\kappa_{My} \approx 0,48$.

Der bei der Modellierung des Systems verwendete Rissbereich $\ell_{Riss,Modell}$ wird bis zu einer Länge von 50 % der Feldlänge ℓ jeweils links und rechts vom Zwischenuflager (entsprechend Methode 2, Bild 7.2) variiert. Der Rissbereich $\ell_{Riss,cal}$ wird daraufhin in Abhängigkeit vom Biegemomentenverlauf ermittelt. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Beton im Bereich von negativen Biegemomenten vollständig gerissen ist.

In Bild 7.3 rechts ist der Rissbereich $\ell_{Riss,cal}$ in Abhängigkeit von dem jeweils verwendeten Rissbereich $\ell_{Riss,Modell}$ aufgetragen. Zunächst ist festzustellen, dass der Rissbereich mit kleiner werdendem Krümmungsradius R größer wird. Ebenso ist die Ausbreitung des Rissbereichs bei Wahl eines offenen Querschnitts (Q3) im Vergleich zu einem geschlossenen Querschnitt (Q4) größer. Die diagonale Trendlinie in Bild 7.3, $\ell_{Riss,cal}$ stellt die Übereinstimmung des in der Systemmodellierung verwendeten Rissbereichs $\ell_{Riss,Modell}$ mit dem ermittelten Rissbereich $\ell_{Riss,cal}$ dar. Beim geraden Träger liegt die Übereinstimmung bei ca. 19 % der Feldlänge. Der Träger mit offenem Querschnitt Q3 und einem Krümmungsradius von $R = 20 \text{ m}$ weist den größten Rissbereich auf, die Übereinstimmung liegt hier bei ca. 27% der Feldlänge.

Betrachtet wird nun das zu dem ermittelten Rissbereich $\ell_{Riss,cal}$ zugehörige Stützmoment $M_{Stütz}$. Die Veränderung des Stützmomentes in Abhängigkeit vom verwendeten Rissbereich $\ell_{Riss,Modell}$ ist zunächst groß, nimmt jedoch ab $\ell_{Riss,Modell} = 15 \% \cdot \ell$ bis zum

Erreichen des kleinsten negativen Stützmomentes $\min M_{\text{Stütz}}$ ab. $\min M_{\text{Stütz}}$ wird erreicht, wenn der verwendete Rissbereich $\ell_{\text{Riss,Modell}}$ mit dem ermittelten Rissbereich $\ell_{\text{Riss,cal}}$ übereinstimmt (Bild 7.3, $\min M_{\text{Stütz}}$). Nach Erreichen von $\min M_{\text{Stütz}}$ wächst das negative Stützmoment wieder leicht an.

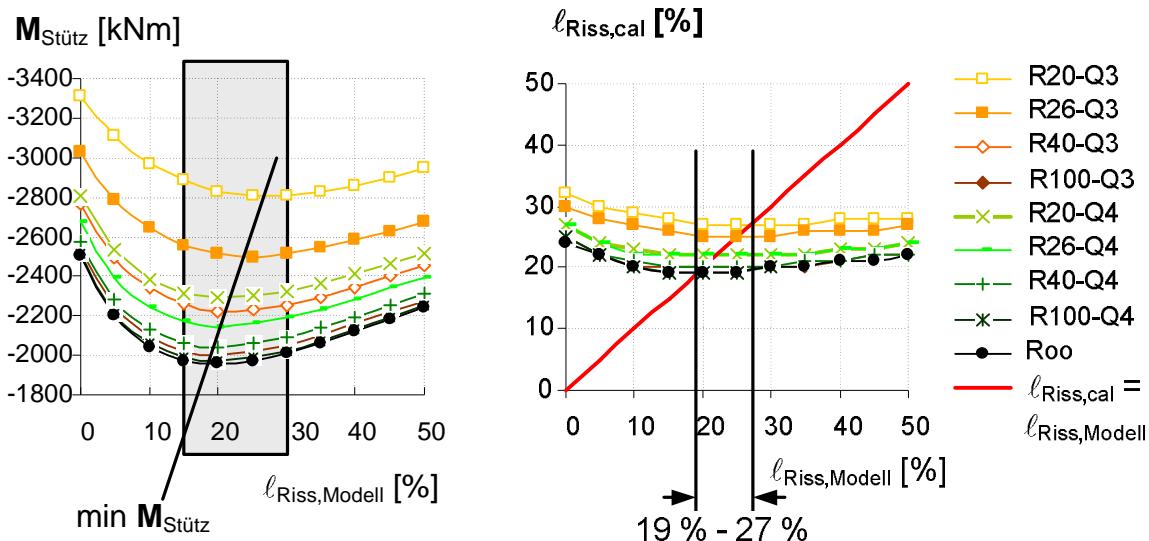


Bild 7.3 Beispiel nach Bild 4.15, $q_z = 50 \text{ kN/m}$: Stützmoment $M_{\text{Stütz}}$ sowie $\ell_{\text{Riss,cal}}$ in Abhängigkeit von $\ell_{\text{Riss,Modell}}$

Aus den vorangegangenen Erläuterungen folgt, dass bei Ansatz eines Rissbereichs zwischen $15 \% \cdot \ell$ und $30 \% \cdot \ell$ die Auswirkungen auf die Schnittgrößenermittlung gering sind (s. Bild 7.3, $M_{\text{Stütz}}$, markierter Bereich). Aus diesem Grunde führt die Anwendung von Methode 2 mit Annahme $\ell_{\text{Riss,Modell}} = 15 \% \cdot \ell$ weiterhin zu brauchbaren Ergebnissen. Für die Untersuchungen in diesem Kapitel wird deshalb weiterhin die Methode 2 verwendet. Die Abweichungen bei Verwendung der Methode 2 werden noch einmal für das Stützmoment in Bild 7.4 ($M_{\text{Stütz,Meth2}} / \min M_{\text{Stütz}}$) in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ für den offenen Querschnitt Q3 und den geschlossenen Querschnitt Q4 dargestellt. Es ist festzustellen, dass auch bei großen Krümmungen die Abweichungen unter 3 % liegen. Mit größer werdendem Öffnungswinkel wird die Abweichung ebenfalls größer, wobei die Auswirkungen beim offenen Querschnitt Q3 größer sind als beim geschlossenen Querschnitt Q4.

Bei Anwendung der Methode 1 unter Berücksichtigung einer Umlagerung von 10 % des Stützmomentes liegt die Abweichung in allen untersuchten Systemen über 6 %. Durch die Krümmung setzt sich das Stützmoment aus einem Anteil infolge κ_{M_y} und einem Anteil infolge κ_T zusammen. Da der zweite Anteil nicht so stark von der Rissbildung des Betons beeinflusst wird, nimmt die Abweichung bei Anwendung der Methode 1 mit größer werdendem Öffnungswinkel ab. Bei Methode 1 ist zu beachten, dass auch Torsionsmomente und eventuell Wölbmomente entsprechend dem Biegemomentenverlauf umgelagert werden müssen.

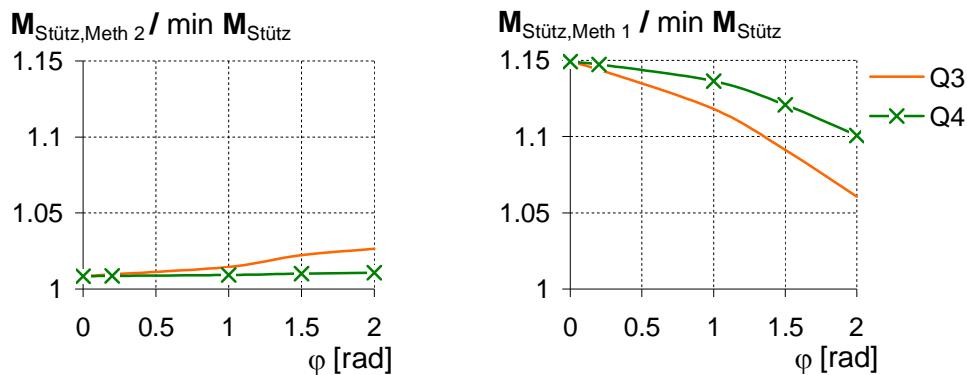


Bild 7.4 Beispiel nach Bild 4.15: Abweichungen des Stützmomentes bei einer Berechnung nach Methode 2 (1)

Berücksichtigung des Kriechens in gekrümmten Durchlaufträgern

Mit der Zeit verliert der Verbundquerschnitt infolge von zeitabhängigen Einflüssen aus dem Kriechen des Betons an Steifigkeit. Die Steifigkeitsverhältnisse im Durchlaufträger ändern sich, was zu zeitabhängigen Umlagerungen der Schnittgrößenverläufe führt. Für Werkstoffe mit linear viskoelastischem Verhalten wie dem Beton gilt das Superpositionsprinzip nach Boltzmann, wonach die Spannungsgeschichten zerlegt und die zugehörigen einzelnen Dehnungsverläufe addiert werden dürfen [8]. Das Kriechen des Betons hat bei der Betrachtung kurzzeitiger Einwirkungen folglich keine Auswirkung auf die Schnittgrößenverläufe.

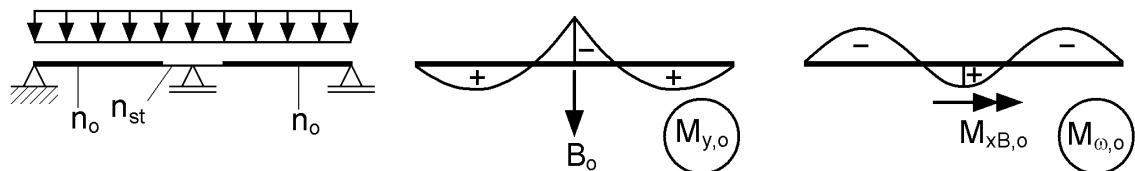
Betrachtet wird ein Durchlaufträger unter einem ständigen Beanspruchungszustand. Die Schnittgrößenverläufe werden mit den Steifigkeiten zum Zeitpunkt $t = t_0$ ($n_L = n_0$) berechnet. Zur Berechnung der sich über die Zeit aufbauenden Umlagerungsschnittgrößen wird im Allgemeinen das Kraftgrößenverfahren verwendet. Der Durchlaufträger wird in ein statisch bestimmtes System, das Grundsystem, überführt. Bei geraden Durchlaufträgern werden im Allgemeinen Momentengelenke an den Zwischenauflagern eingeführt. Häufig ist aber auch die Bildung eines statisch bestimmten Systems durch Entfernen der Zwischenauflager sinnvoll.

Der zum Zeitpunkt $t = t_0$ mit den ständig wirkenden Einwirkungen berechnete Beanspruchungszustand wird als ständig wirkender Beanspruchungszustand auf das Grundsystem mit den veränderten Steifigkeitsverhältnissen für zeitlich konstante Beanspruchung ($n_L = n_p$) aufgebracht. Die hieraus resultierenden Verformungen δ_{i0}^P werden berechnet. Die sich über die Zeit aufbauenden Umlagerungen werden als zeitlich veränderliche Einwirkungen betrachtet. Die Verträglichkeit muss folglich mit den Steifigkeiten für veränderliche Einwirkungen ($n_L = n_{PT}$) hergestellt werden.

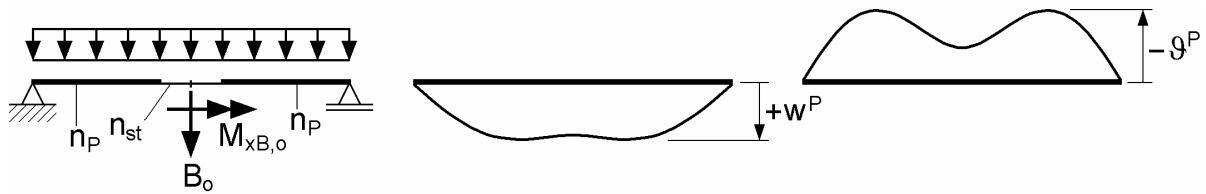
Der im Grundriss gekrümmte Zweifeldträger mit Gabellagern ist dreifach statisch unbestimmt. Bei der Überführung in das einfach statisch unbestimmte Grundsystem (Abschnitt 3.3.1) müssen dementsprechend zwei Unbekannte eingeführt werden. Dies kann durch das Entfernen des Zwischenauflagers realisiert werden.

Schnittgrößenumlagerungen in gekrümmten Zweifeldträgern

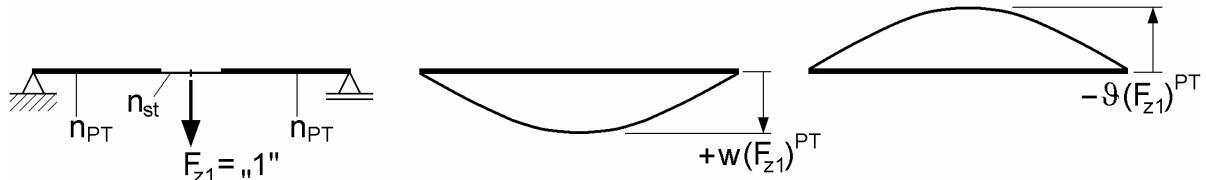
a) Schnittgrößen zum Zeitpunkt $t = t_0$ (n_0 / n_{st})



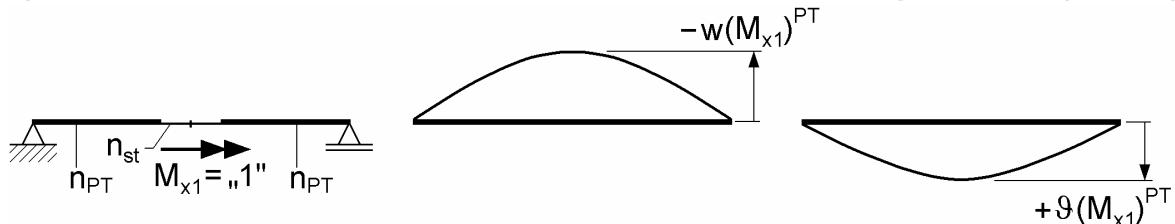
b) zeitlich konstanter Lastzustand bis zum Zeitpunkt $t = t_\infty$ (n_P / n_{st}) – zugehöriger Schnittgrößenverlauf entspricht a)



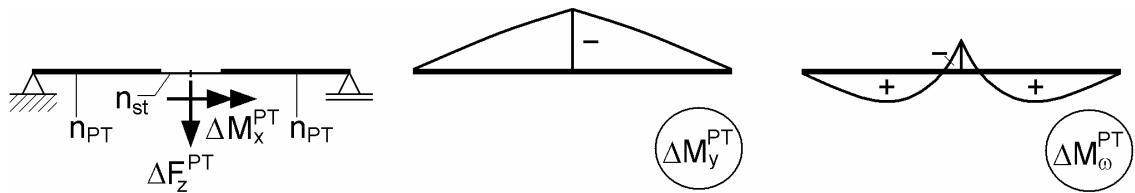
c) zeitlich veränderlicher Einheitszustand $F_{z1} = „1“$ bis zum Zeitpunkt $t = t_\infty$ (n_{PT} / n_{st})



d) zeitlich veränderlicher Einheitszustand $M_{x1} = „1“$ bis zum Zeitpunkt $t = t_\infty$ (n_{PT} / n_{st})



e) Schnittgrößenumlagerungen bis zum Zeitpunkt $t = \infty$ (Umlagerungsschnittgrößen)



$$\begin{bmatrix} \Delta F_z^{\text{PT}} \\ \Delta M_x^{\text{PT}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(F_{z1})^{\text{PT}} & g(F_{z1})^{\text{PT}} \\ w(M_{x1})^{\text{PT}} & g(M_{x1})^{\text{PT}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -w^P \\ -g^P \end{bmatrix}$$

Bild 7.5 Kriechen infolge von ständigen Einwirkungen

Bei der Berechnung des Lastzustands reicht es nun nicht mehr aus, allein die Biegemomentenverläufe (Querkraftverläufe) zu betrachten. Gleichzeitig müssen auch Momentenumlagerungen bei den Wölbmomenten (Torsionsmomenten) berücksichtigt werden.

werden. Das für die Ermittlung der Kraftgrößen zu lösende Gleichungssystem für das zweifach statisch unbestimmte System lautet allgemein:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Für den Zweifeldträger ergeben sich die mit der Zeit aufbauenden Kraftgrößen nach Bild 7.5. Durch Aufbringen der Kraftgrößen F_z^{PT} und M_x^{PT} auf das Grundsystem mit den Steifigkeiten für veränderliche Einwirkungen ($n_L = n_{\text{PT}}$) können nun die sich über die Zeit aufbauenden Schnittgrößenverläufe infolge Zwängung berechnet werden.

Berücksichtigung des Schwindens in gekrümmten Verbundträgern

In gekrümmten Verbundträgern wird sich die Betonplatte beim Schwinden wegen des starren Verbunds mit dem gekrümmten Stahlträger tangential zur Stabachse verkürzen. Hieraus folgt, dass die Schwindmomente M_{Sh} aus Gleichgewichtsgründen zusätzliche Torsions- sowie Biegemomente (s. auch Abschnitt 3.3.3) erzeugen. Für einen gekrümmten Träger mit einem Öffnungswinkel $\varphi = \ell / R$ sind die zusätzlichen Beanspruchungen in Bild 7.6 dargestellt. Bei offenen Querschnitten ist zu beachten, dass die Torsionsmomente in Abhängigkeit von der Stabkennzahl ε_T zu weiteren Wölbmomenten führen.

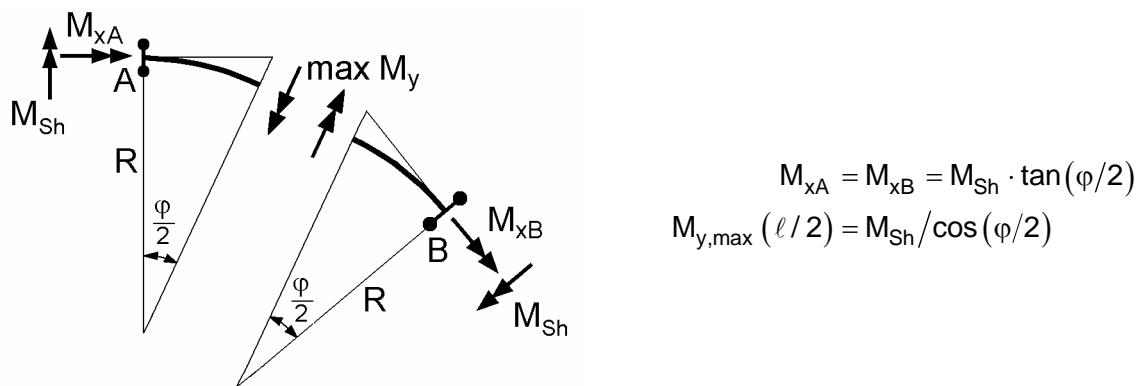


Bild 7.6 Zusätzliche Schnittgrößen infolge des primären Schwindmomentes in gekrümmten Einfeldträgern

Bei Ansatz eines affinen Verlaufs von Schwinden und Kriechen können in statisch unbestimmten Systemen die Auswirkungen aus Zwängungen direkt berechnet werden (s. auch „Gerader Träger“).

7.2.3 Querschnittstragfähigkeit

In Bild 7.7 ist der Einfluss des Herstellungsverfahrens auf die Tragfähigkeit des geraden Verbundträgers dargestellt. Die unterschiedlichen Herstellungsverfahren führen im elastischen Bereich zu unterschiedlichen Verformungen und daraus resultierend zu unterschiedlichen Tragfähigkeiten. Der Einfluss des Herstellungsverfahrens ist

folglich beim Spannungsnachweis (Nachweis „Elastisch–Elastisch“) stets zu berücksichtigen. Das plastische Grenzmoment kann unabhängig vom Herstellungsverfahren erreicht werden. Es werden drei Bauabläufe unterschieden, die Einfluss auf das Tragverhalten des Verbundträgers haben:

(A) Verkehrsverbund

Der Stahlträger wird während des Betonierens nicht unterstützt. Das Eigengewicht des Frischbetons (und eventuell auch der Schalung) wird vom reinen Stahlträger aufgenommen.

(B) Eigengewichtsverbund

Der Stahlträger wird während des Betonierens durch Hilfsstützen unterstützt. Nach Entfernen der Hilfsstützen wirken alle Lasten auf den Verbundquerschnitt.

(C) Anheben des Stahlträgers im Bauzustand

Der Stahlträger wird während des Betonierens angehoben und erhält somit in diesem Zustand ein negatives Biegemoment.

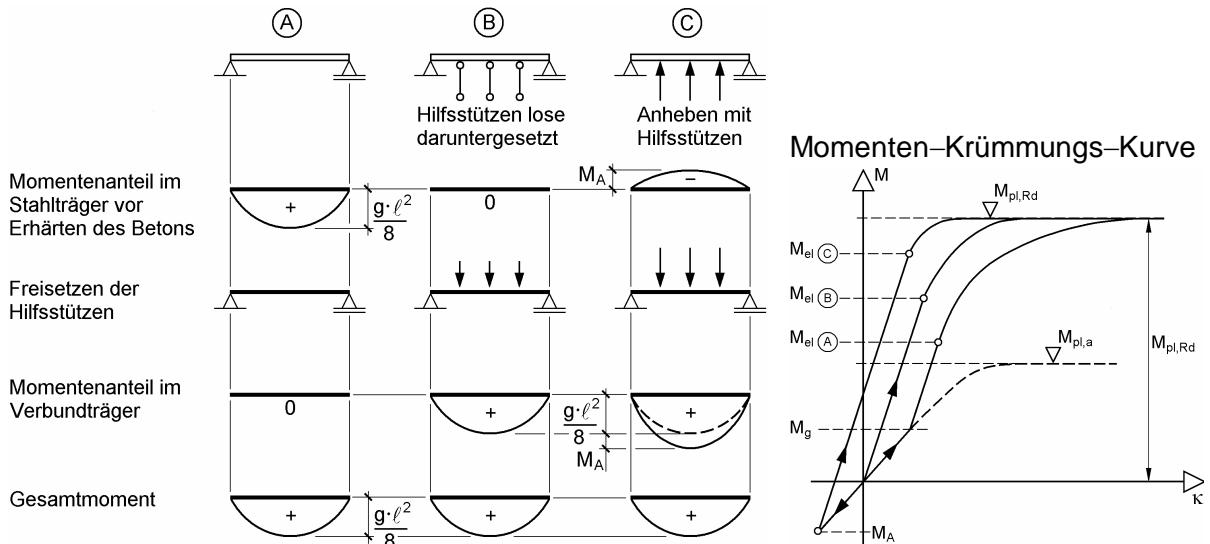


Bild 7.7 Einfluss des Herstellungsverfahrens auf die Tragfähigkeit von Verbundträgern [88]

In gekrümmten Trägern resultieren aus dem Bauablauf zusätzliche Torsionsmomente und, abhängig von der Querschnittsform, Wölbmomente. Die Querschnittstragfähigkeit wird mit den nach Abschnitt 7.2.2 berechneten Schnittgrößen nachgewiesen. In gekrümmten Trägern sollte bei der Verwendung der Stabtheorie die Ausnutzung der Querschnittstragfähigkeit auf die elastische Tragfähigkeit begrenzt werden, da aus der Lasteinleitung zusätzliche lokale Spannungen resultieren, die nicht mit der Stabtheorie erfasst werden können (s. Kapitel 8).

Die elastische Spannungsermittlung für Biegung ist für ein mit einem positiven Biegemoment beanspruchten Verbundträger unter Berücksichtigung des Schwindens in Tabelle 7.2 und für ein mit einem negativen Biegemoment beanspruchten Verbundträger mit gerissener Betonplatte in Tabelle 7.3 zusammengestellt. Bei Vernachlässigung

gung des Betons im Zugbereich (Zustand II) muss die Mitwirkung des Betons unter Zug nachträglich berücksichtigt werden („tension stiffening“, s. Tabelle 7.3).

In geraden Trägern mit Beanspruchung in z–Richtung resultieren die maßgebenden Längsspannungen im Allgemeinen aus Biegemomenten. Bei gekrümmten Trägern entstehen durch die Krümmung hervorgerufene planmäßige Torsionsbeanspruchungen. Bei Trägern mit geschlossenem Querschnitt kann davon ausgegangen werden, dass die Torsionsmomente überwiegend über primäre Torsion M_{xp} , d. h. allein über Schubspannungen, abgetragen werden. Bei Trägern mit offenem Querschnitt resultieren aus der Torsion zusätzliche Wölbmomente, die die Tragfähigkeit des Querschnitts wesentlich beeinflussen können. Die Längsspannungen aus Wölbmommenten müssen im Zustand I zu den Längsspannungen in Tabelle 7.2 und im Zustand II zu den Längsspannungen in Tabelle 7.3 addiert werden. Ebenfalls resultieren aus den sekundären Torsionsmomenten M_{xs} weitere Schubbeanspruchungen. Für die Spannungen aus M_ω und M_{xs} gilt:

Zustand I (s. Tabelle 7.2)

$$\begin{aligned}\sigma_{x,a} &= M_{\omega,a,Ed} / I_{\omega,a} \cdot \omega_a + M_{\omega,i,Ed}^L / I_{\omega,i}^L \cdot \omega_i^L \\ \tau_{Steg} &= -M_{xs,a,Ed} / I_{\omega,a} \cdot A_{\omega,a,Steg} - M_{xs,i,Ed} / I_{\omega,i}^L \cdot A_{\omega,i,Steg} \\ \sigma_{x,c} &= M_{\omega,i,Ed}^L / (n_L \cdot I_{\omega,i}^L) \cdot \omega_i^L\end{aligned}\quad (7.2)$$

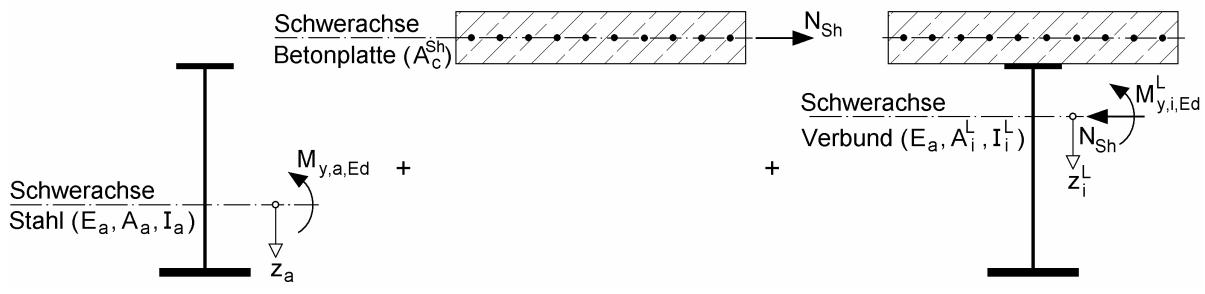
Zustand II (s. Tabelle 7.3)

$$\begin{aligned}\sigma_{x,a} &= M_{\omega,a,Ed} / I_{\omega,a} \cdot \omega_a + M_{\omega,i,Ed}^L / I_{\omega,st} \cdot \omega_{st} \\ \tau_{Steg} &= -M_{xs,a,Ed} / I_{\omega,a} \cdot A_{\omega,a,Steg} - M_{xs,i,Ed} / I_{\omega,st} \cdot A_{\omega,st,Steg} \\ \sigma_{x,s} &= M_{\omega,i,Ed}^L / I_{\omega,st} \cdot \omega_{st}\end{aligned}\quad (7.3)$$

Bei der Berechnung der Spannungen infolge M_ω und M_{xs} können die Belastungsschichten selbstverständlich ebenfalls getrennt betrachtet werden. Die Ermittlung des ideellen Wölbwiderstandes und der Wölbordinate findet sich in Abschnitt 2.7.3. Im ungünstigsten Fall können bei einem offenen Querschnitt und kleinem Krümmungsradius die Längsspannungen aus Wölbmommenten größer sein als diejenigen aus Biegemomenten (s. hierzu Abschnitt 4.3.2). Dann muss geprüft werden, ob die Einteilung des Verbundquerschnitts in Zustand I und Zustand II noch zu zutreffenden Ergebnissen führen wird, da in diesem Fall nur ein Bereich des Betonquerschnitts unter Zug stehen könnte. Dies führt dazu, dass das System nicht mehr als ein Stab idealisiert werden kann.

Bei der Berechnung der elastischen Querschnittstragfähigkeit werden die ermittelten Spannungen in den maßgebenden Fasern den Grenzspannungen gegenübergestellt. Die Begrenzung der Längsspannungen sind in Bild 7.7 dargestellt. Sie ergeben sich aus der Streckgrenze dividiert durch den Teilsicherheitsbeiwert für den betrachteten Werkstoff. Angaben hierzu finden sich in Abschnitt 2.6.

Tabelle 7.2 Positives Biegemoment + Schwindnormalkraft: Spannungsberechnung unter Berücksichtigung des Herstellungsverfahrens und des Langzeitverhaltens des Betons [51]



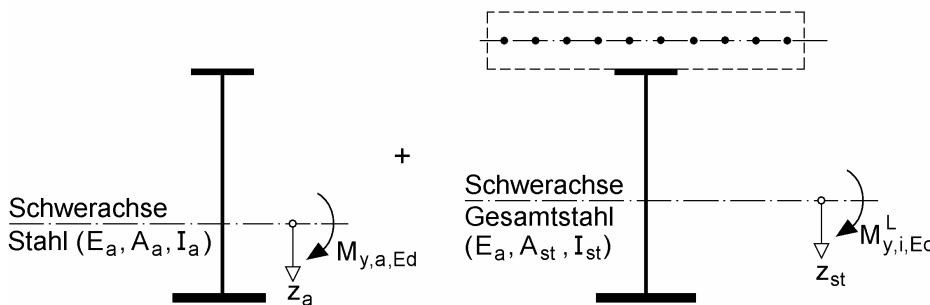
Baustahlspannungen:

$$\sigma_{x,a} = -\frac{|N_{Sh}|}{A_i^{sh}} + \frac{M_{y,a,Ed}}{I_{y,a}} \cdot z_a + \sum_L \frac{M_{y,i,Ed}^L}{I_{y,i}^L} \cdot z_i^L \quad \text{und} \quad \tau_{\text{Steg}} = \frac{V_{z,Ed}}{A_{\text{Steg}}}$$

Betonspannungen am Betonrand:

$$\sigma_{x,c} = \frac{|N_{Sh}| \cdot (A_i^{sh} - A_c^{sh})}{n_{Sh} \cdot A_c^{sh} \cdot A_i^{sh}} + \sum_L \frac{M_{y,i,Ed}^L}{n_L \cdot I_{y,i}^L} \cdot \left(z_i^L \pm \frac{h_c}{2} \cdot n_L \right)$$

Tabelle 7.3 Negatives Biegemoment: Spannungsberechnung unter Berücksichtigung des Herstellungsverfahrens und des Langzeitverhaltens des Betons [51]



Baustahlspannungen:

$$\sigma_{x,a} = \frac{M_{y,a,Ed}}{I_{y,a}} \cdot z_a + \sum_L \frac{M_{y,i,Ed}^L}{I_{y,st}} \cdot z_{st} \quad \text{und} \quad \tau_{\text{Steg}} = \frac{V_{z,Ed}}{A_{\text{Steg}}}$$

Betonstahlspannungen:

$$\sigma_{x,s} = \sigma_{x,s,0} + \Delta\sigma_{x,s}$$

$\sigma_{x,s,0}$ = Betonstahlspannung unter Vernachlässigung des Betons im Zugbereich

$\Delta\sigma_{x,s}$ = Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons im Zugbereich nach DIN-Fachbericht 104

$$\sigma_{x,s,0} = \sum_L \frac{M_{y,i,Ed}^L}{I_{y,st}} \cdot z_{st}$$

$$\Delta\sigma_{x,s} = 0,4 \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\alpha_{st} \cdot \rho_s}$$

mit

$$f_{ct,eff} = f_{ctm} \quad (\text{Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit})$$

$$\alpha_{st} = \frac{A_{st} \cdot I_{y,st}}{A_a \cdot I_{y,a}}$$

$$\rho_s = A_s / A_{ct} \quad \text{und} \quad A_{ct} = \text{Fläche der Betonzugzone}$$

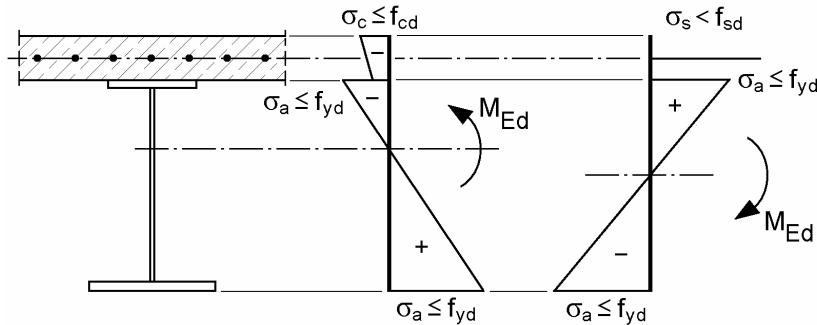


Bild 7.8 Begrenzung der Längsspannungen auf die elastischen Grenzspannungen

7.3 Beispiele

7.3.1 Gekrümmter Einfeldträger

An dieser Stelle wird auf den Einfeldträger mit offenem Querschnitt Q3 ohne Berücksichtigung von Bewehrung in Bild 4.5 zurückgegriffen. Nach Abschnitt 3.2 haben die Steifigkeiten keinen Einfluss auf die Schnittgrößenverläufe in beidseits torsionsstarr gelagerten Einfeldträgern mit Krümmung. Der Einfluss von Kriecheffekten muss folglich allein bei der Spannungsermittlung und der Bestimmung der Verformungen berücksichtigt werden.

Angaben zur Ermittlung der Querschnittskennwerte finden sich in Abschnitt 4.1.3, Abmessungen des untersuchten Querschnitts Q3 in Tabelle 4.2. Das Trägheitsmoment $I_{y,sh}$ und die Schwindgrößen N_{sh} und M_{sh} werden mit dem Programm „QSW-Verbundträger-el“ ermittelt. Der der Austrocknung ausgesetzte Umfang wird dabei mit $u = 300 + 0,5 \cdot (300+40) = 470$ cm angesetzt. Die Reduktionszahl berechnet sich zu $n_{sh} = 16,1$ mit $I_{y,sh} = 119,2877 \text{ cm}^2 \text{m}^2$ und $z_{sh} = 33,2$ cm. Die Schwindgrößen betragen: $N_{sh} = 2877$ kN und $M_{sh} = 954$ kNm. Der Wölbwiderstand und die Wölbordinate werden mit „QSW-FE ML“ ermittelt und berechnen sich zu $I_{o,sh} = 1.118.073 \text{ cm}^4 \text{m}^2$ und $\min \omega_{sh} = -8324 \text{ cm}^2$.

Nach Bild 7.6 ergeben sich aus Gleichgewichtsgründen aus den ermittelten primären Schwindgrößen zusätzliche Torsionsmomente und Biegemomente. Beim offenen Querschnitt Q3 resultieren bei einer Stabkennzahl von $\varepsilon_{T,sh} = 2,23 < 10$ aus der Torsion Wölbmomente, die einen großen Einfluss auf die elastische Tragfähigkeit haben. Diese werden mit BOGEN2008 ermittelt. Da der Verlauf des Biegemomentes infolge Schwinden bekannt ist, könnte das Wölbmoment auch mit der Ersatzlast \bar{m}_x nach Gl. (5.4) und einem Stabwerksprogramm mit geraden Stabelementen und 7 Freiheitsgraden bestimmt werden. Die extremalen Schnittgrößen sind in Bild 7.9 in Abhängigkeit des Öffnungswinkels φ aufgetragen. $M_{x,max}$ tritt dabei am Auflager und $M_{y,max}$ sowie $M_{o,min}$ in Feldmitte auf.

Bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,6$ rad liegt die Vergrößerung des Biegemomentes $M_{y,max}/M_{sh}$ unter 5 %. Das Verhältnis wächst bis zu einem Öffnungswinkel

von $\varphi = 2 \text{ rad}$ (entspricht einem Krümmungsradius von $R = 10 \text{ m}$) auf $M_{y,\max}/M_{\text{Sh}} = 1,85$ an. Gleichzeitig wächst das Torsionsmoment $M_{x,\max}$ am Auflager mit kleiner werdendem Krümmungsradius R stetig an. Dieses wird beim offenen Querschnitt Q3 zum Großteil über Wölbkrafttorsion abgetragen. Die in Bild 7.9 unten dargestellten maximalen Spannungen $\sigma_{u,\max}$ infolge Biegung und Wölbmoment ergeben sich an der Innenkante des inneren Hauptträgers. In diesem Beispiel steigt die Beanspruchung infolge Schwinden mit zunehmendem Krümmungsradius sehr stark an. Bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,5 \text{ rad}$ beträgt das Verhältnis gegenüber der Beanspruchung am vergleichbaren geraden Stab bereits $\sigma_{u,\max} / \sigma_{u,\text{Sh}} = 2,4$ und muss unbedingt berücksichtigt werden. Der Anteil des Wölbmomentes an der Gesamtbeanspruchung infolge Schwinden wird ab einem Öffnungswinkel von ca. $\varphi = 0,4 \text{ rad}$ größer als der Anteil aus Biegung (Bild 7.9, $\sigma_{u,\max}$). Die Auswirkungen der Krümmung auf die Beanspruchung infolge Schwinden sind somit bei der Wahl eines offenen Querschnitts wesentlich größer als bei einem geschlossenen Querschnitt und sollten auch bei größeren Krümmungsradien ($\varphi \leq 0,5 \text{ rad}$) sorgfältig untersucht werden.

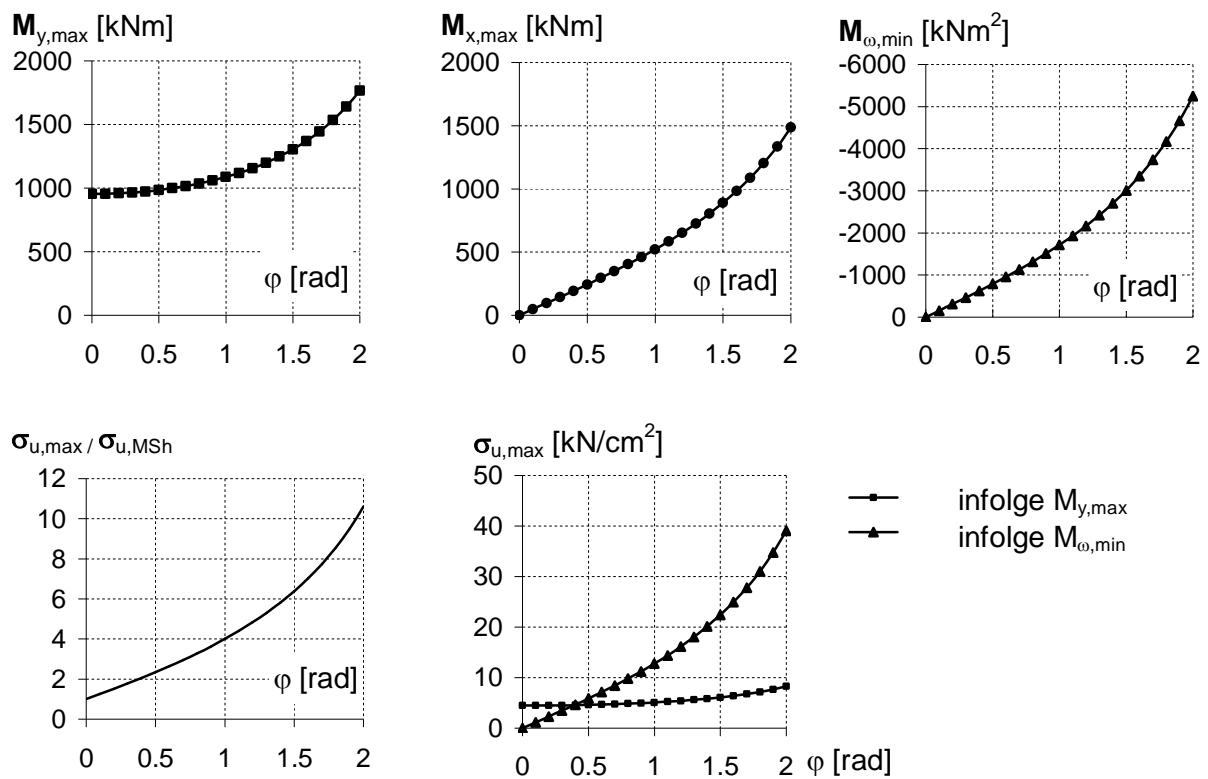


Bild 7.9 Beispiel nach Bild 4.5: Extremale Schnittgrößen infolge Schwinden und maximale Spannungen in Feldmitte

7.3.2 Gekrümmter Zweifeldträger

Einflüsse auf die Schnittgrößenverläufe infolge Kriechen und Schwinden werden am Zweifeldträger nach Bild 4.15 am offenen Querschnitt Q3 und am geschlossenen

Querschnitt Q4 unter Berücksichtigung der Bewehrung nach Tabelle 4.2 untersucht. Die Schnittgrößen werden dabei nach Abschnitt 7.2.2 mit einem gerissenen Bereich von 15 % der angrenzenden Felder ermittelt.

Einfluss des Kriechens

Die kriecherzeugende Beanspruchung von $g = 7 \text{ kN/m}$ wird 60 Tage nach dem Betonieren aufgebracht. Betrachtet wird der gekrümmte Träger mit $R = 20 \text{ m}$ im Vergleich zum geraden Träger ($R = \infty$). Die Querschnittskennwerte für kurzzeitige Beanspruchungen sind in Tabelle 4.2 zusammengestellt. Weitere benötigte Querschnittskennwerte zur Erfassung des zeitabhängigen Betonverhaltens sind in Tabelle 7.4 zusammengefasst.

Tabelle 7.4 Ideelle Querschnittskennwerte zur Berücksichtigung des Kriechens

		$\varphi_{t,L}$	n_L	$n_{G,L}$	$I_{y,i} [\text{cm}^2 \text{m}^2]$	$I_{T,i} [\text{cm}^2 \text{m}^2]$	$I_{\omega,i} [\text{cm}^4 \text{m}^2]$
Q3	$L = P$	1,31	15,4	14,2	132,2753	5,6668	1.133.069
	$L = PT$	1,31	10,85	10,0	143,8357	8,0166	1.245.634
Q4	$L = P$	1,31	15,4	14,2	134,2014	235,2594	41.535
	$L = PT$	1,31	10,85	10,0	145,9523	257,2971	30.181

Beim Kriechen treten Schnittgrößenumlagerungen als Folge veränderter Steifigkeitsverhältnisse auf (Abschnitt 7.2.2). Sie werden von den in Tabelle 7.5 dargestellten Verhältnissen κ_{My} und κ_T und deren Veränderung über die Zeit beeinflusst.

Tabelle 7.5 Steifigkeitsverhältnisse κ_{My} und κ_T und ihre Veränderung über die Zeit

		$L = 0$	$L = P$	$L = PT$	$\kappa_{My,PT} / \kappa_{My,0}$	$\kappa_{T,PT} / \kappa_{T,0}$
$\kappa_{My} = EI_{y,st} / EI_{y,i}$	Q3	0,48	0,59	0,54	1,13	
	Q4	0,48	0,59	0,54	1,13	
$\kappa_T = EI_{y,i} / GI_{T,i}$	Q3	30,5	60,5	46,5		1,52
	Q4	1,49	1,48	1,47		0,99

Die Querschnitte Q3 und Q4 wurden so gewählt, dass das Verhältnis κ_{My} und die Veränderung über die Zeit für beide Systeme gleich sind. Die zu erwartenden Umlagerungen aus diesem Anteil sind folglich auch gleich.

Das Verhältnis der Biegesteifigkeit $EI_{y,i}$ zur Torsionssteifigkeit $GI_{T,i}$ und die Veränderung über die Zeit ist stark vom Querschnitt abhängig. Für den Querschnitt Q3 ergibt sich das Verhältnis $\kappa_{T,PT} / \kappa_{T,0} = 1,52$. Der Anteil des Stahlquerschnitts an der Torsionssteifigkeit $GI_{T,i}$ ist beim offenen Querschnitt Q3 gering, somit hat die zeit- und lastfallabhängige Reduktion des E-Moduls E_c einen größeren Einfluss auf die Torsionsteifigkeit $GI_{T,i}$ als auf die Biegesteifigkeit $EI_{y,i}$. Infolge des veränderten Steifigkeitsverhältnisses sind im Vergleich zum geraden Träger größere Schnittgrößenumlagerungen über die Zeit zu erwarten (Abschnitt 4.4.1). Für den Querschnitt Q4 liegt das Verhältnis $\kappa_{T,PT} / \kappa_{T,0}$ bei annähernd 1,00. Die sich über die Zeit aufbauen-

den Schnittgrößenumlagerungen resultieren bei diesem Querschnitt überwiegend aus dem veränderten Verhältnis κ_{My} . In Tabelle 7.6 sind die Biegemomente und Wölbbimomente über dem Zwischenauflager und die Auflagertorsionsmomente und ihre Veränderung über die Zeit zusammengestellt.

Tabelle 7.6 Ausgewählte Schnittgrößen und Auflagertorsionsmomente zum Zeitpunkt $t = 0$ und die sich über die Zeit aufbauenden Zwangsmomente

		$M_{y,B}$ [kNm]	$\Delta M_{y,B}^{PT}$ [kNm]	$\frac{\Delta M_{y,B}^{PT}}{M_{y,B}}$			
$R = \infty$	Q3	-276	-21,3	7,7 %			
	Q4	-276	-21,4	7,8 %			
		$M_{y,B}$ [kNm]	$\Delta M_{y,B}^{PT}$ [kNm]	$\frac{\Delta M_{y,B}^{PT}}{M_{y,B}}$	$M_{\omega,B}$ [kNm ²]	$\Delta M_{\omega,B}^{PT}$ [kNm ²]	$\frac{\Delta M_{\omega,B}^{PT}}{M_{\omega,B}}$
$R = 20$	Q3	-401	-39,3	9,8 %	72,6	-26,8	-36,9 %
	Q4	-317	-21,6	6,8 %	2,4	-1,3	-54,2 %
		M_{xA} [kNm]	ΔM_{xA}^{PT} [kNm]	$\frac{\Delta M_{xA}^{PT}}{M_{xA}}$	M_{xB} [kNm]	ΔM_{xB}^{PT} [kNm]	$\frac{\Delta M_{xB}^{PT}}{M_{xB}}$
$R = 20$	Q3	50,4	-7,8	-15,4 %	-20,8	-27,3	131,3 %
	Q4	69,8	-4,1	-5,9 %	32,5	-15,4	-47,4 %

Beim geschlossenen Querschnitt Q4 entspricht das Umlagerungsmoment $\Delta M_{y,B}^{PT}$ für den geraden Träger in etwa dem des gekrümmten Trägers. Das sich über die Zeit aufbauende Zwangsmoment resultiert einzig aus der Veränderung des Steifigkeitsverhältnisses κ_{My} . Dies führt dazu, dass das Verhältnis $\Delta M_{y,B}^{PT}$ zu $M_{y,B}$ beim gekrümmten Träger kleiner ist als beim vergleichbaren geraden Träger. Bei einem vorhandenen Verhältnis von $\alpha = -M_{Stütz} / M_{Feld} = 1,39$ (Q4) zum Zeitpunkt $t = t_0$ (Zusammenhang Torsion/Biegemoment, Abschnitt 4.4.3) wirkt das Torsionsmoment M_{xB} am Auflager B in die positive Richtung. Die sich über die Zeit aufbauenden Biegemomentenumlagerungen wirken sich reduzierend auf das Torsionsmoment M_{xB} ($-47,4\%$) aus. Der Einfluss von Wölbbimomenten kann beim geschlossenen Querschnitt Q4 vernachlässigt werden.

Beim gekrümmten Träger mit offenem Querschnitt Q3 führt das sich über die Zeit ändernde Verhältnis κ_T zu einer Vergrößerung des Zwangsmomentes $\Delta M_{y,B}^{PT}$. Das Verhältnis Stützmoment zu Feldmoment vergrößert sich dementsprechend von $\alpha = 2,10$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auf $\alpha = 2,52$ zum Zeitpunkt $t = \infty$. Die direkt mit der Biegung gekoppelte Torsion weist bei $\alpha = 2,10$ ein negatives Torsionsmoment M_{xB} am Auflager B auf. Das sich über die Zeit aufbauende Zwangstorsionsmoment ΔM_{xB}^{PT} wirkt in die gleiche Richtung. Dies führt zu einer Vergrößerung der Auflagertorsion um 127,0 %. Beim Querschnitt Q3 haben die Wölbbimomente einen großen Einfluss auf die Tragfähigkeit. Bei den vorhandenen Steifigkeitsverhältnissen ist das Wölbbimoment $M_{\omega,B}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ positiv. Bis zum Zeitpunkt $t = \infty$ baut sich ein negatives Zwangswölbbimoment $\Delta M_{\omega,B}$ auf. In Bild 7.10 ist die hieraus resultierende Entwicklung der Längsspannungen an den Innenkanten der Untergurte vom

äußerem (a) und inneren (i) Hauptträger dargestellt. Die angesetzten Widerstandsgrößen entsprechen hierbei denen des Zustands II. Die größten negativen Spannungen treten beim äußeren Hauptträger auf. Die sich über die Zeit aufbauende Vergrößerung des Stützmomentes $M_{y,B}$ führt zu einer betragsmäßigen Vergrößerung der Längsspannungen $\sigma_{x,a}$ infolge Biegung, wobei die Veränderung der Längsspannungen ebenso aus dem veränderten Verhältnis κ_{My} (+7,7 %) sowie aus dem veränderten Verhältnis κ_{MT} (+14,4 %) resultieren. Die Spannungen infolge des Wölbbimomentes werden infolge des Zwangswölbbimomentes $\Delta M_{\omega,Stütz}$ über die Zeit geringer. Die zusätzlichen Längsspannungen aus dem vergrößerten Stützmoment werden durch die Verkleinerung des Wölbbimomentes ausgeglichen. Die minimale Gesamtspannung im Querschnitt reduziert sich von $\sigma_{x,a}(t=0) = -2,78 \text{ kN/cm}^2$ auf $\sigma_{x,a}(t=\infty) = -2,74 \text{ kN/cm}^2$. Am inneren Hauptträger vergrößert sich die Belastung, liegt aber weiterhin unter der minimalen Längsspannung des äußeren Hauptträgers (min $\sigma_{x,i} = -1,91 \text{ kN/cm}^2$).

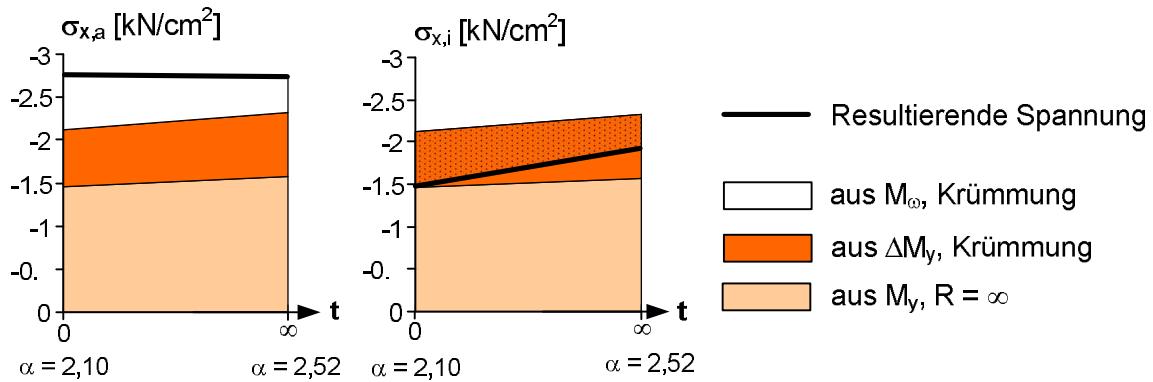


Bild 7.10 $R = 20, Q3$: Änderung der Spannungen an der Innenkante des Untergurtes vom äußeren Hauptträger $\sigma_{x,a}$ bzw. vom inneren Hauptträger $\sigma_{x,i}$ über die Zeit t

Im Folgenden soll der Einfluss des Faktors $\alpha = -M_{y,Stütz} / M_{y,Feld}$ auf die Tragfähigkeit des offenen Querschnitts Q3 untersucht werden. Der Faktor α wird durch die Veränderung der Biegesteifigkeit $I_{y,i}$ im Feld zwischen 0,85 und 3,2 variiert. Es wird davon ausgegangen, dass die Wölbsteifigkeit $I_{\omega,i}$ direkt mit der Biegesteifigkeit gekoppelt ist und somit um den gleichen Faktor verändert werden muss. Die Längsspannung an der Innenkante des äußeren (a) bzw. des inneren (i) Hauptträgers sowie die Entwicklung des Auflagertorsionsmomentes M_{xB} und des Wölbbimomentes $M_{\omega,B}$ sind in Bild 7.11 in Abhängigkeit von α dargestellt. Die Längsspannungen setzen sich dabei aus dem Anteil $\sigma_{x,My}$ infolge Biegung und $\sigma_{x,M\omega}$ infolge Wölbbimoment zusammen. Der Einfluss der Längsspannungen $\sigma_{x,My}$ ist dargestellt. Das Auflagertorsionsmoment M_{xB} baut sich bis zu einem Verhältnis von $\alpha = 1,85$ auf Null ab. Die Längsspannung an der Innenkante des äußeren Hauptträgers wird bei diesem α -Verhältnis extremal. Mit größer werdendem α -Verhältnis baut sich ein negatives Auflagertorsionsmoment M_{xB} auf, das über das Wölbbimoment $M_{\omega,B}$ zu einer betragsmäßigen Reduzierung der

Längsspannung $\sigma_{x,a}$ führt. Wird das Verhältnis $a > 2,91$ wechselt $M_{\omega,B}$ das Vorzeichen und die minimale Längsspannung σ_x liegt nun an der Innenkante des inneren Hauptträgers ($\sigma_{x,i}$).

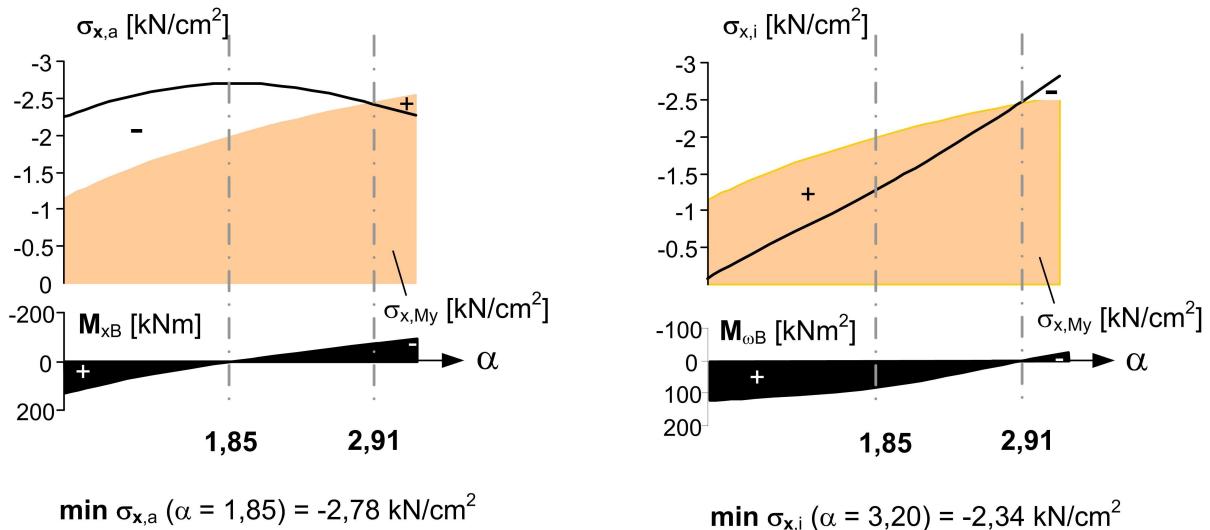


Bild 7.11 $R = 20$, Q3: Auswirkung des Faktors $\alpha = -M_y,\text{Stütz} / M_y,\text{Feld}$ auf die Spannungen σ_{xa} und σ_{xi}

In Verbundträgern ist dem Stützquerschnitt eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Mit der Zeit wird das Verhältnis α infolge der Krieffekte im Beton größer. Bei geraden Trägern folgt hieraus eine vergrößerte Beanspruchung des Stützquerschnitts über die Zeit. Für gekrümmte Träger mit offenem Querschnitt zeigt die Untersuchung, dass, wenn der Einfluss der Krümmung (R klein) groß ist, eine günstige Wahl von Steifigkeitsverhältnissen, die zum Zeitpunkt $t = 0$ bei einem positiven Wölbmoment zu einem negativen Auflagertorsionsmoment M_{xB} führen, im weiteren Zeitverlauf zu einer Verkleinerung der Beanspruchung im Querschnitt führen.

Einfluss des Schwindens

Die benötigten Querschnittskennwerte zur Erfassung des Schwindens und die Schwindgrößen N_{Sh} und M_{Sh} sind in Tabelle 7.7 zusammengefasst (s.auch Abschnitt 7.3.1). Die Schnittgrößen werden mit BOGEN2008 ermittelt. Ausgewählte Größen und die minimalen Längsspannungen über der Stütze sind über dem Öffnungswinkel ϕ aufgetragen (Bild 7.12).

Das Verhältnis $\kappa_{T,Sh}$ beträgt beim geschlossenen Querschnitt Q4 $\kappa_{T,Sh} = 1,52$, beim offenen Querschnitt Q3 $\kappa_{T,Sh} = 93,47$. Beim Querschnitt Q3 führt das größere $\kappa_{T,Sh}$ -Verhältnis in gekrümmten Trägern zu einem größeren negativen Stützmoment und hieraus resultierend zu größeren Auflagerkräften, die am Auflager A abhebend wirken. Gleichzeitig reduziert sich infolge des Biegemomentenverlaufs der Anteil der Torsion am Auflager A. Es lässt sich feststellen, dass sich bei beiden Querschnittstypen das Schwinden ungünstig auf die Lagersituation der Endauflager auswirken. Zur Vermeidung abhebender Kräfte in den Lagern sind Gegenmaßnahmen erforderlich.

Beim Querschnitt Q4 können z. B. die Auswirkungen der größeren Torsionsmomente durch Anordnung der Lager außerhalb der Trägerstege unter seitlich verlängerten Endquerträgern reduziert werden [71].

Tabelle 7.7 Ideelle Querschnittskennwerte zur Berücksichtigung von Schwindeffekten

	$\Phi_{t,Sh}$	n_{Sh}	$n_{G,Sh}$	$I_{y,i} [\text{cm}^2 \text{m}^2]$	$I_{T,i} [\text{cm}^2 \text{m}^2]$	$I_{\omega,i} [\text{cm}^4 \text{m}^2]$	$N_{Sh} [\text{kN}]$	$M_{Sh} [\text{kNm}]$
Q3	2,82	16,1	14,9	130,8662	3,6297	1.118.073	2819,6	817,3
Q4	2,82	16,1	14,9	132,7695	225,5359	43.305	2819,6	824,2

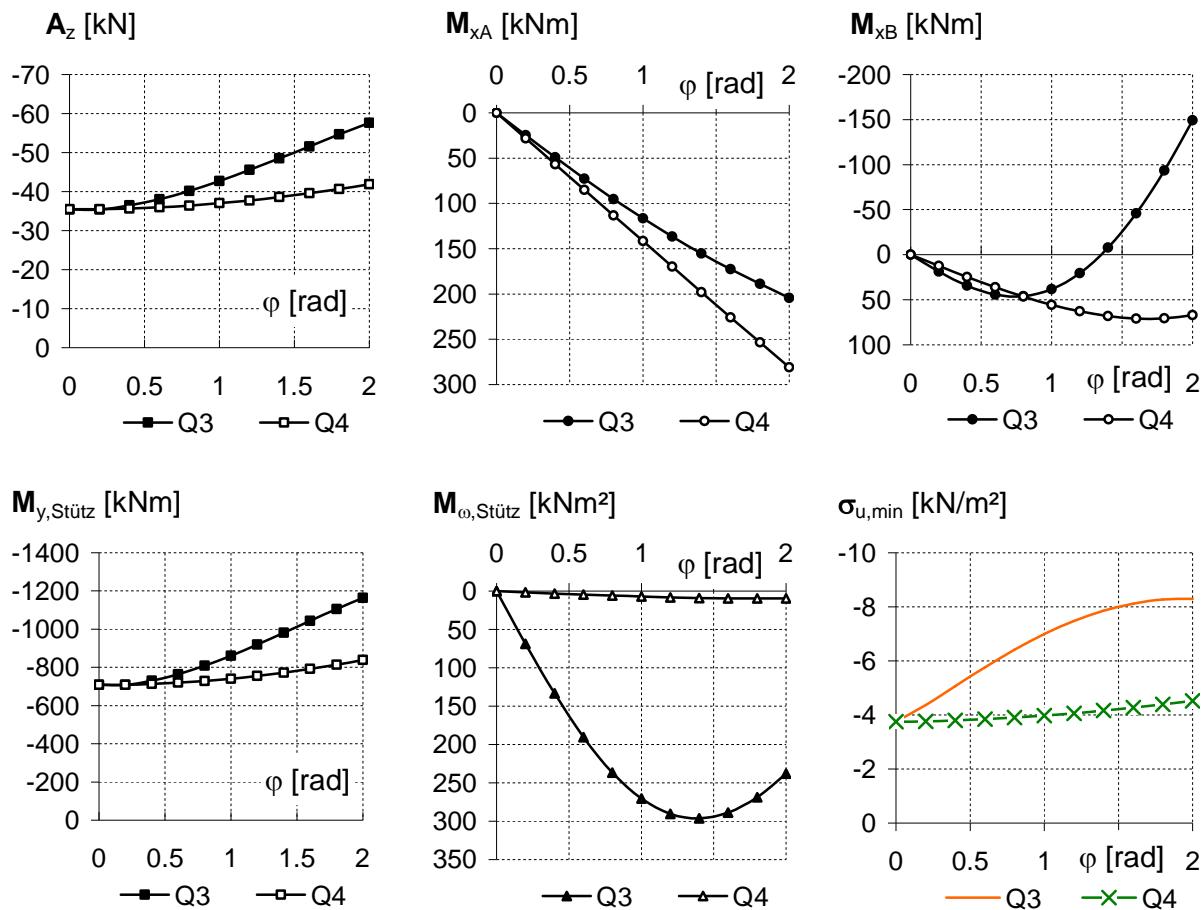


Bild 7.12 Beispiel nach Bild 4.15: Auflagerreaktionen sowie Schnittgrößen und minimale Spannungen über der Stütze infolge Schwinden

Untersucht werden soll nun die Auswirkung der Krümmung im Stützbereich. Beim offenen Querschnitt Q3 führt der Biegemomentenverlauf bei Öffnungswinkeln bis $\varphi = 0,74$ zu einer Vergrößerung des positiv wirkenden Auflagertorsionsmomentes $M_{x,B}$. Ab einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,74$ wird $M_{x,B}$ trotz größerer Krümmung kleiner. Begründet werden kann dies mit dem sich größer einstellenden Stützmoment ($M_x' = M_y / R$). Bei $\varphi = 1,35$ ist $M_{x,B} = 0$ und bei $\varphi > 1,35$ ändert sich die Richtung des Auflagertorsionsmomentes $M_{x,B}$. Aus Symmetriegründen ist $M_{x,B}$ der Wölbkrafttorsion zuzuordnen. In Bild 7.13 sind die Schnittgrößenverläufe in Abhängigkeit vom

Öffnungswinkel schematisch dargestellt. Der Einfluss auf das Wölbmoment M_{ω} wird verdeutlicht. Bei $\varphi = 1,35$ ($M_{xB} = 0$) stellt sich ein Wölbmomentenverlauf mit einem positiven M_{ω} über der Stütze ein. Ein positives M_{xB} ($\varphi < 1,35$) führt zu einer zusätzlichen Wölbeinspannung, die zu einem Knick im Wölbmomentenverlauf führt. Dies entspricht einer Vergrößerung von M_{ω} gegenüber einem System ohne Gabellager in B. Bei negativem M_{xB} führt die wölbeinspannende Wirkung von M_{xB} zu einer Einschnürung im Wölbmomentenverlauf. Das Wölbmoment wiederum hat großen Einfluss auf die Tragfähigkeit des Querschnitts ($\sigma_{u,min}$, Bild 7.12). Dies führt dazu, dass beim offenen Querschnitt $\sigma_{u,min}$ bereits bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,2$ 16,6 % über dem vergleichbaren geraden Träger liegt. Der Anstieg der Beanspruchung wird infolge der Einschnürung des Wölbmomentes mit größer werdennder Krümmung geringer.

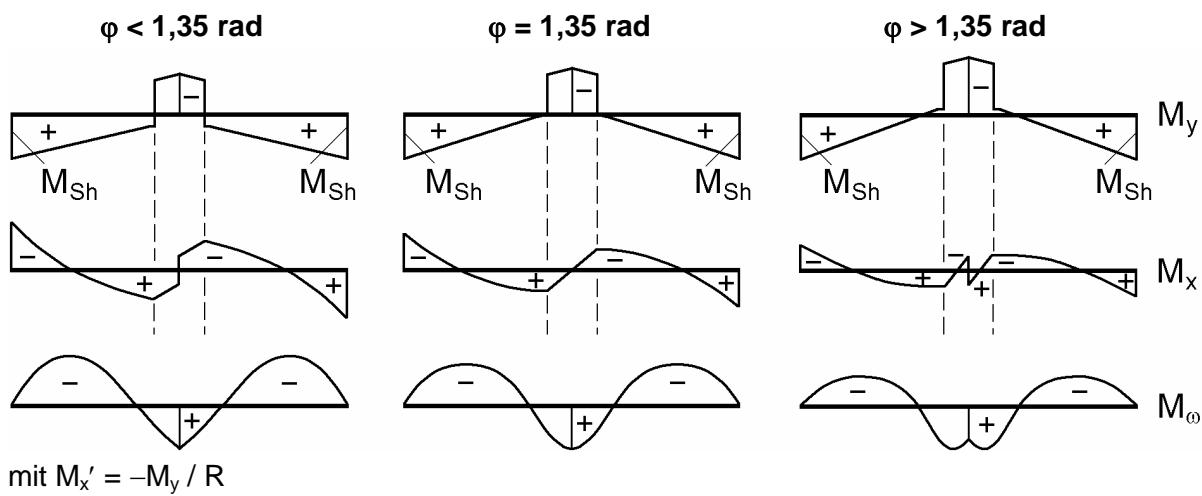


Bild 7.13 Beispiel nach Bild 4.15, offener Querschnitt Q3: Schematische Darstellung der Schittgrößenverläufe infolge Schwinden in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel φ

Beim geschlossenen Querschnitt Q4 fällt der Anstieg der Beanspruchung über der Stütze infolge des kleineren Anteils $M_{y,\text{Stütz}}$ infolge Krümmung und des nahezu wölbfreien Querschnitts wesentlich geringer aus. Bei einem Öffnungswinkel bis $\varphi = 0,8$ liegt der Anstieg der Beanspruchung im Vergleich zum geraden Träger unter 5 %. Bei einem Öffnungswinkel von $\varphi = 2$ liegt die Beanspruchung infolge Schwinden an der Innenkante des äußeren Hauptträgers beim offenen Querschnitt Q3 1,84fach höher als beim geschlossenen Querschnitt Q4.

7.3.3 Fußgängerbrücke

System

Zur Veranschaulichung der Einflüsse aus dem Langzeitverhalten des Betons werden in Anlehnung an die bei Schütz in [100] dargestellte Fußgängerbrücke die Lastfälle

- LF „Eigengewicht“ unter Annahme eines Eigengewichtsverbundes
- LF „Schwinden“

berechnet. Beim Lastfall „Eigengewicht“ wird davon ausgegangen, dass die kontinuierliche Unterstützung des Trägers (Eigengewichtsverbund) nach 30 Tagen entfernt wird. Die Spannweiten der dreifeldrigen Fußgängerbrücke betragen $\ell = 26 \text{ m}$, 40 m und 26 m . Bei einem Krümmungsradius von $R = 40 \text{ m}$ ergeben sich Öffnungswinkel φ von $0,65 \text{ rad}$ bzw. 1 rad . Der Querschnitt ist als geschlossener Verbundquerschnitt mit einer oben liegenden 20 cm starken Betonplatte ausgeführt. Die Stabkennzahl liegt bei $\varepsilon_T = 22,4 > 10$. Der Einfluss infolge Verwölbung darf somit vernachlässigt werden. Das System und der Verbundquerschnitt sind in Bild 7.14 dargestellt.

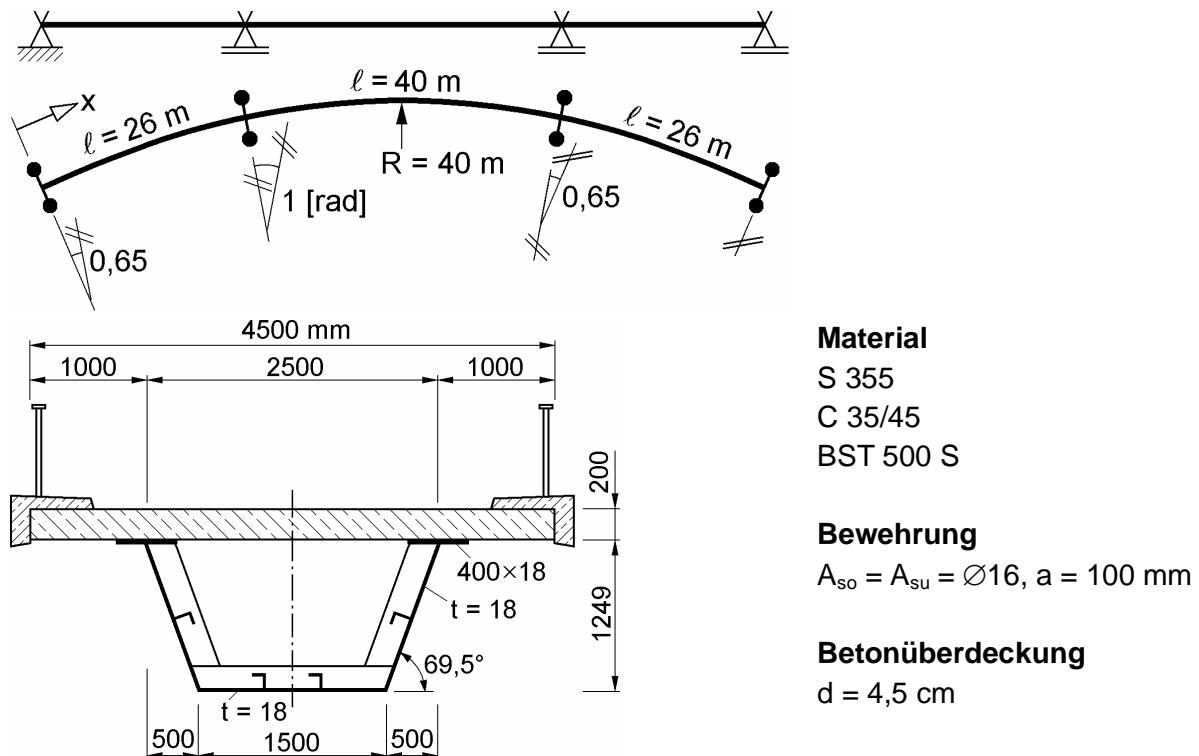


Bild 7.14 System Fußgängerbrücke und Verbundquerschnitt

Ideelle Querschnittskennwerte

Bei der Berechnung der Steifigkeiten müssen die Einflüsse der mittragenden Breite nach Abschnitt 2.7.2 berücksichtigt werden. Dies erfolgt mit dem Programm „QSW–Mittragende Breiten“ [120]. Die Betonplatte trägt mit ihrer gesamten Breite voll mit. Im Feldbereich kann der Untergurt ebenfalls als voll tragend angesehen werden. Im Stützbereich liegt eine Einschnürung auf 81 % der geometrischen Breite vor. Um weiterhin mit den Querschnittskennwerten des Feldes rechnen zu können, wird der Untergurt von $t = 18 \text{ mm}$ auf $t = 18 / 0,81 \approx 23 \text{ mm}$ verstärkt. Zur Ermittlung der ideellen Querschnittskennwerte wird auf Abschnitt 2.7.3 verwiesen. Der für die Berechnung der wirksamen Betondicke benötigte Umfang des Querschnittsteils, der der Austrocknung ausgesetzt ist, wird nach Tabelle 2.5 mit $u = 530 \text{ cm}$ angesetzt. Eine

Zusammenstellung der maßgebenden Querschnittskennwerte findet sich in Tabelle 7.8. Das Verhältnis der Biegesteifigkeiten beträgt $\kappa_{My} = E_a I_{y,st} / E_a I_{y,i} = 0,52$.

Tabelle 7.8 Zusammenfassung der Querschnittskennwerte (Bezugskoordinatensystem im Schwerpunkt der Betonplatte)

	Bau-stahl (a)	Gsamt- stahl (st)	ideeller Verbundquerschnitt unter Belastung L			
			0	P	PT	Sh
$\Phi_{t,L}$				1,47	1,47	2,77
n_L			6,31	16,49	11,4	15,91
$n_{G,L}$			5,82	15,22	10,52	14,68
$A [cm^2]$	876,3	1.057,3	2,484	1,603	1,847	1,623
$\bar{z} [cm]$	80,8	67,0	28,5	44,2	38,3	43,6
$I_y [cm^2 m^2]$	203,6302	301,9227	578,9915	465,1504	507,2377	469,0628
$I_T [cm^2 m^2]$			1118,5418	742,2930	882,6770	756,1168

Lastannahmen

Für den Lastfall „Eigengewicht“ sind die Lasten im Folgenden zusammengestellt. Bei der Ermittlung der Torsionsbeanspruchungen wird auf Tabelle 3.5 und zur Ermittlung der primären Schwindbeanspruchung für die Bestimmung der Schwindverformung ε_{cs} auf Tabelle 2.5 und Tabelle 7.1 verwiesen. Die Schwindgrößen ergeben sich mit $\varepsilon_{cs} = -0,000362$ zu $N_{Sh} = -4296,8 \text{ kN}$ und $M_{Sh} = 1874,2 \text{ kNm}$. Die Eigengewichtslasten ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Stahlträger} \quad g_a &= 78,5 \cdot 876,3 \cdot 10^{-4} = && 6,88 \text{ kN/m} \\
 m_{xa,zM} &= \sum_i g_{a,i} \cdot \frac{R + e_{s,i}}{R} \cdot e_{s,i} \\
 &= 3,44 \cdot \frac{40+2}{40} \cdot 2 + 3,44 \cdot \frac{40-2}{40} \cdot (-2) = && - 0,688 \text{ kNm/m} \\
 \text{b) Beton} \quad g_c &= 25 \cdot 4,5 \cdot 0,2 = 22,5 \text{ kN/m} \\
 e_s &= R - 0,5 \cdot \sqrt{4R^2 + b^2} \\
 &= 40 - 0,5 \cdot \sqrt{4 \cdot 40^2 + 4,5^2} = -0,063 \text{ m} \\
 g_{c,zM} &= g_c \cdot \frac{R + e_s}{R} = 22,5 \cdot \frac{40 - 0,063}{40} = && 22,46 \text{ kN/m} \\
 m_{xc,zM} &= g_{c,zM} \cdot e_s = -22,46 \cdot 0,063 = && - 1,41 \text{ kNm/m} \\
 \Sigma g &= && 29,34 \text{ kN/m} \\
 \Sigma m_{xg} &= && - 2,1 \text{ kNm/m}
 \end{aligned}$$

Schnittrößen und Auflagerreaktionen

Die Schnittrößen werden unter Anwendung von BOGEN2008 ermittelt. Zur Be rechnung der Zwangsschnittgrößen muss der Durchlaufträger in ein statisch bestimmt-

tes Grundsystem nach Abschnitt 7.2.2 überführt werden. Der Dreifeldträger ist fünf-fach statisch unbestimmt. Bei Ausnutzung der Symmetrie ergeben sich zwei Unbekannte. Die Schnittgrößen am Zwischenauflager und in Feldmitte sowie die Auflagerreaktionen sind in Tabelle 7.9 zusammengestellt.

Tabelle 7.9 Zusammenstellung der Schnittgrößen und Auflagerreaktionen (alle Angaben in kN und m)

		Auflager A	Auflager B, Links	Auflager B, Rechts	Feldmitte	
					x = 8 m	x = 23 m
LF 1	V_z	256,5	-506,3	586,8	21,8	0
	M_y	0	-3249	-3249	1144	2858
	M_x	-217	-133	-445	-54	0
LF 2	V_z	-7,8	-7,8	0	-7,8	0
	M_y	0	-204	-204	-67	-233
	M_x	255	-43	112	19	0
LF 3	V_z	-53,5	-53,5	0	-53,5	0
	M_y	1874	-1391	-1391	1503	527
	M_x	-457	148	27	-118	0

	$A_z = D_z$	$M_{xA} = M_{xD}$	$B_z = C_z$	$M_{xB} = M_{xC}$
LF 1	256,5	217	1093	312
LF 2	-7,8	-255	7,8	-155
LF 3	-53,5	457	53,5	120

LF 1: Eigengewicht

LF 2: Zwangsschnittgrößen aus Eigen-gewicht zum Zeitpunkt $t = \infty$

LF 3: Schwinden zum Zeitpunkt $t = \infty$

Spannungen

Die Längsspannungen berechnen sich im Zustand I nach Tabelle 7.2 und im Zu-stand II nach Tabelle 7.3. Die Schubspannungen infolge Querkraft und Torsion (M_{xp}) berechnen sich mit den Querschnittskennwerten nach Tabelle 7.8 wie folgt:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{V_z}{A_{\text{Steg}}} + \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t} = \frac{V_z [\text{kN}]}{2 \cdot 1,8 \cdot 128,5 \text{cm}^2} + \frac{M_x [\text{kNm}]}{2 \cdot 200 \cdot 133,1 \cdot 0,018 \text{cm}^2 \text{m}} \\ &= \frac{V_z [\text{kN}]}{462,6} + \frac{M_x [\text{kNm}]}{958,3}\end{aligned}\quad (7.4)$$

Beurteilung

In diesem Beispiel wurde eine als Kastenträger ausgebildete Fußgängerbrücke mit drei Feldern betrachtet. Auch hier können die Ergebnisse der vorangegangenen Beispiele bestätigt werden. Bei gekrümmten Kastenträgern ist besondere Sorgfalt auf die Ausbildung der Lager zu legen, insbesondere der Lastfall „Schwinden“ kann dazu führen, dass Lager abheben.

8 Maßnahmen zur Erhaltung der Querschnittsform

8.1 Vorbemerkungen

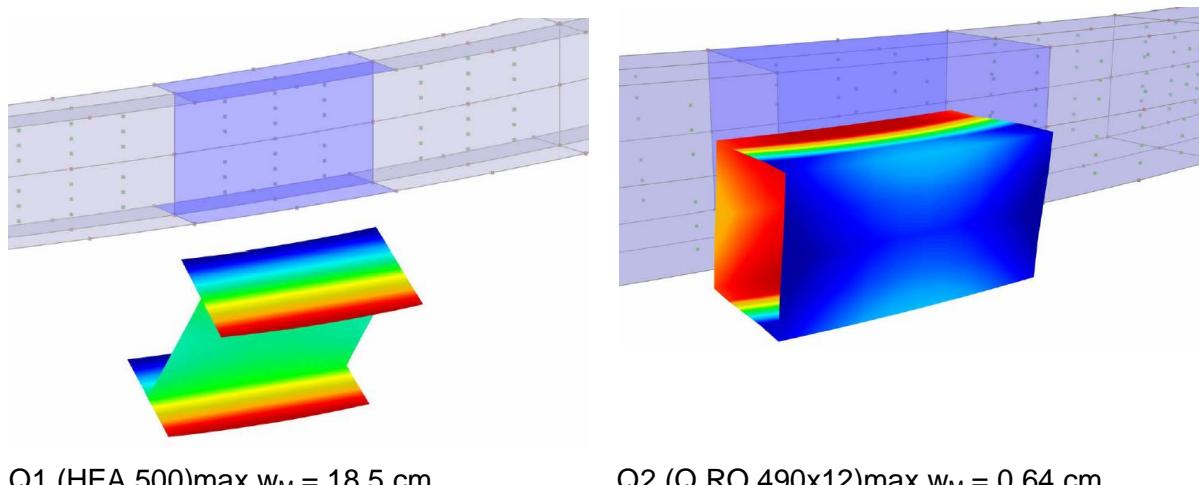
In den vorangegangenen Kapiteln wurde von der Gültigkeit der Stabtheorie ausgegangen. Voraussetzung hierfür ist die Formerhaltung des Querschnitts. In gekrümmten Trägern entstehen Torsionsbeanspruchungen aus exzentrisch zum Schubmittelpunkt angreifenden Lasten sowie aus der Krümmung des Trägers (Abschnitt 3.6). Können die aufzunehmenden Torsionsbeanspruchungen nicht entsprechend dem Schubspannungsverlauf infolge Torsion in den Querschnitt eingeleitet werden, müssen sie umgesetzt werden, um die Torsionssteifigkeit des Querschnitts zu aktivieren. Das Umsetzen der Beanspruchung erzeugt im Querschnitt Querbiegemoemente. Dies führt bei nicht ausreichender Querbiegesteifigkeit zu Profilverformungen, die in Längsrichtung zusätzliche Normalspannungen hervorrufen. In der Literatur wird die Profilverformung als zusätzliche Verformung γ , die die gegenseitige Verdrehung von Querschnittsscheiben darstellt, behandelt. Angaben normierter Querschnittskennwerte für die Profilverformung finden sich für den Kastenquerschnitt bei Steinle [106], Hees [38] und Volke [117], [118] und für offene und geschlossene Querschnitte bei Dabrowski [14] und Sedlacek [102]. Schardt entwickelt in [91] eine *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, bei der die Profilverformung als zusätzliches Teilproblem der Biegetheorie Berücksichtigung findet.

8.2 Problemstellung

Zur Untersuchung des Einflusses von Profilverformungen auf die Längsspannungen σ_x wird auf die Einfeldträger in Abschnitt 4.3.1 mit $R = 10$ m und den Querschnitten Q1 (HEA) und Q2 (Quadrathohlprofil) zurückgegriffen. Die Einfeldträger werden mit Flächenelementen unter Anwendung von RFEM [82] modelliert. Die Querschnitte werden mit Überlappungen beim Übergang Steg/Gurt und die Gurte darstellenden Flächenelemente kreisringförmig idealisiert. Um direkte Blechbiegung zu vermeiden, wird die Gleichstreckenlast in die Stegachse(n) verschoben. Für das Quadrathohlprofil bedeutet dies, dass die Beanspruchung nicht mehr im Schubmittelpunkt angreift. Eine gleichmäßige Verteilung der Gleichstreckenlast auf die beiden Stegachsen führt zu ungleichen Beanspruchungen auf der inneren (i) und der äußeren (a) Stegachse. Für die Aufteilung der Gleichstreckenlast auf die beiden Stegachsen des Quadrathohlprofils gilt nach Ramberger (Tabelle 5.5):

$$\begin{aligned} q_{za} &= \frac{R}{R_a} \cdot \frac{q_z}{2} = \frac{1000 \cdot 5}{1023,9 \cdot 2} = 2,44 \text{ kN/m} \\ q_{zi} &= \frac{R}{R_i} \cdot \frac{q_z}{2} = \frac{1000 \cdot 5}{952,2 \cdot 2} = 2,56 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Die mit *RFEM* berechnete Auflagerkraft beträgt $A_z = 24 \text{ kN}$, das Auflagertorsionsmoment $M_{xA} = 20,30 \text{ kNm}$. Dies entspricht den Auflagerreaktionen aus der Berechnung mit Stabelementen (BOGEN2008). Es ist zu überprüfen, ob die Einflüsse aus Profilverformung in diesen Beispielen bei der Berechnung der Tragfähigkeit berücksichtigt werden müssen und eine Berechnung nach der linearen Stabtheorie unter Anwendung von Stabelementen zu zu ungenauen Werten führt. Die mit BOGEN2008 ermittelten Ergebnisse werden hierfür mit den Ergebnissen aus *RFEM* verglichen.



Q1 (HEA 500)max $w_M = 18,5 \text{ cm}$ Q2 (Q RO 490x12)max $w_M = 0,64 \text{ cm}$

Bild 8.1 Einfeldträger aus Stahlprofilen mit $R = 10 \text{ m}$, Ausschnitt Feldbereich:
Farbliche Darstellung des Verformungsverlaufs im Querschnitt beim
HE-A 500 (links) und Q RO 490x12 (rechts)

Bild 8.1 zeigt die mit *RFEM* berechneten w -Verformungen in Feldmitte. Die Verformungen im Schubmittelpunkt sind für beide Varianten betragmäßig angegeben. Beim Querschnitt Q1 entspricht die Verformung im Schubmittelpunkt in etwa der berechneten Verformung mit BOGEN2008 (s. Bild 4.4, $w_{M,\text{BOGEN2008}} = 18,6 \text{ cm}$). Die Steigung der Verformungskurve über die Breite ist stetig und folgt aus der Verdrehung des Querschnitts. Beim Querschnitt Q2 entspricht der Verformungszuwachs im Schubmittelpunkt einem Anstieg von mehr als 50 % (s. Bild 4.4, $w_{M,\text{BOGEN2008}} = 0,42 \text{ cm}$). Es ist weiterhin zu erkennen, dass die Verformung über die Breite nicht stetig zunimmt, sondern im Bereich der Schubmittelpunktsachse einen Durchschlag mit einem sehr steilen Anstieg aufweist. Änderungen der Verformung röhren folglich nicht aus einer Verdrehung des Querschnitts, sondern aus einer Profilverformung, die wiederum Auswirkungen auf das Tragverhalten des Trägers hat. Es folgen zusätzliche Längsspannungen infolge des Verwölbungszustandes aus Profilverformung. Die Spannungsverteilungen in Feldmitte sind in Bild 8.2 dargestellt. In dem Träger mit offenem Querschnitt Q1 sind die Spannungsverläufe mit BOGEN2008 und *RFEM* nahezu deckungsgleich. Der maximale Unterschied in den σ_x -Spannungen liegt auf der Außenseite des Trägers und beträgt $\sigma_x = 0,3 \text{ kN/cm}^2$ bei einer Beanspruchung von $\sigma_x = -11,79 \text{ kN/cm}^2$ (*RFEM*). Bei der Idealisierung der Gurte mit kreisringförmigen Flächenelementen bezieht sich die Dehnung auf die jeweilige Faser im unverformten Zustand. Dabei sind die außen liegenden Fasern länger und die innen liegenden Fasern kürzer als die Faser im Schubmittelpunkt. Bei der Idealisierung des Trägers als

Stab werden die Längsspannungen auf der Innenseite der Krümmung folglich tendenziell etwas niedriger liegen und auf der Außenseite der Krümmung tendenziell etwas höher (Abschnitt 6.3.2). Vergleicht man die σ_x -Spannungsverläufe beim geschlossenen Querschnitt ist feststellbar, dass diese in den Gurten, abhängig von der Modellierung, unterschiedliche Spannungsverläufe aufweisen. Eine Berechnung mit Stabelementen führt zu konstanten Spannungsverläufen in den Gurten. Bei einer Berechnung mit Scheiben-Platten-Elementen treten zusätzliche σ_x -Spannungen auf, die in den Randbereichen der Gurte betragsmäßig maximal sind. Diese entstehen aus einer Verwölbung infolge von Profilverformungen, die bei der Ein- und Weiterleitung der Torsionslasten entstehen.

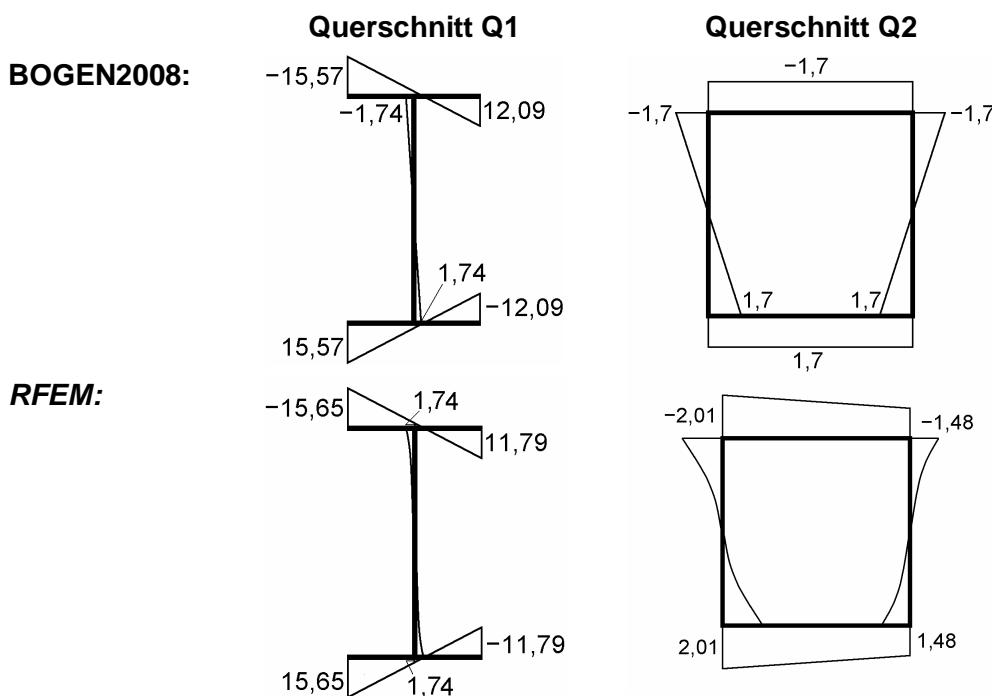


Bild 8.2 System nach Bild 4.2 mit $R = 10$ m:
Spannungsverteilung σ_x in Feldmitte, Vergleich der Berechnungen mit Bo-
gen2008 (Stabelemente) und RFEM (Scheiben- und Plattenelemente)

Profilverformung des Quadrathohlprofils nach Steinle

Bei einer Berechnung mit Stabelementen können die Längsspannungen infolge von Profilverformungen nicht direkt am gekrümmten Träger berechnet werden, weil die profilverformende Beanspruchung keine äußere Beanspruchung ist. An dieser Stelle wird auf den geraden Ersatzstab nach Abschnitt 5.2.3.2 zurückgegriffen. Die sich aus der Krümmung ergebenden Torsionsbeanspruchungen werden als äußere Ersatzlast \bar{m}_x aufgebracht und die profilverformenden Beanspruchungen aus dieser Ersatzlast bestimmt. Die Längsspannungen infolge von Profilverformungen können nun vergleichend am geraden Ersatzstab berechnet werden. Für die Differentialgleichung der Profilverformung gilt:

$$\gamma''' + 4\lambda_{\omega P}^4 \gamma = \frac{m_p}{EI_{\omega P}} \quad \begin{aligned} \text{Mit } \gamma &= \text{Verformungswinkel} \\ \lambda_{\omega P} &= \sqrt[4]{EI_Q / (4 \cdot EI_{\omega P})} \\ EI_Q &= \text{Querrahmensteifigkeit [kN]} \\ EI_{\omega P} &= \text{Wölbsteifigkeit der Profil-} \\ &\text{verformung [kNm}^2\text{]} \\ m_p &= \text{profilverformende Beanspruch-} \\ &\text{ung [kNm/cm]} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Das Wölbmoment der Profilverformung kann in Analogie zum elastisch gebetteten Balken mit einem Stabwerksprogramm berechnet werden (Tabelle 8.1). Die normierten Querschnittskennwerte für das Quadrathohlprofil nach Tabelle 4.1 ergeben sich nach Steinle [106] zu:

$$\begin{aligned} \omega_{p,\max} &= \pm \frac{b^2}{8} = \pm \frac{47,8^2}{8} = \pm 285,6 \text{ cm}^2 \\ I_{\omega P} &= \frac{b^5 \cdot t_s}{48} = \frac{47,8^5 \cdot 1,2}{48} = 6.238.490 \text{ cm}^6 \\ I_Q &= \frac{t_s^3}{b} = \frac{1,2^3}{47,8} = 0,03615 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Die profilverformende Beanspruchung entspricht der im Querschnitt umzusetzenden Torsionsbeanspruchung (s. auch Abschnitt 8.3) und berechnet sich zu $m_p = \bar{m}_x / 2$ mit der Ersatzlast \bar{m}_x nach Gl. (5.8). Das Wölbmoment der Profilverformung kann nun am elastisch gebetteten Balken mit KSTAB [83] berechnet werden. Es ist $M_{\omega P} = -5297 \text{ kNm}^2$. Für die Längsspannung $\sigma_{x,P}$ (Bild 8.3) folgt:

$$\sigma_{x,P} = \frac{M_{\omega P}}{I_{\omega P}} \cdot \omega_P = -\frac{5297}{6.238.490} \cdot \pm 285,6 = \mp 0,24 \text{ kN/cm}^2 \quad (8.4)$$

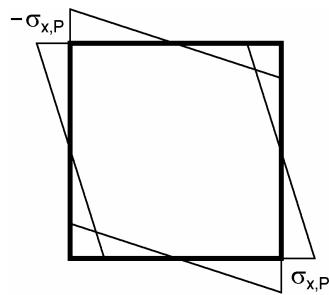


Bild 8.3 Längsspannungen $\sigma_{x,P}$ infolge des profilverformenden Einflusses im Quadrathohlprofil

Die maximalen Randspannungen infolge Biegung und Profilverformung ergeben sich zu $\sigma_{x,max} = 1,7 + 0,24 = 1,94 \text{ kN/cm}^2$ und $\sigma_{x,min} = 1,7 - 0,24 = 1,46 \text{ kN/cm}^2$. Die Unterschiede zu den Ergebnissen mit RFEM betragen maximal $\sigma_x = 0,07 \text{ kN/cm}^2$ und erklären sich mit der Idealisierung der Gurte als kreisringförmige Flächenelemente (s. oben). Die Randspannungen infolge der Profilverformungen betragen in diesem Beispiel 15 % der Biegespannung und sind bei einer Bemessung zu berücksichtigen. Zur

Vermeidung zusätzlicher Beanspruchungen infolge von Profilverformungen sollte der Träger in regelmäßigen Abständen ausgesteift werden.

Tabelle 8.1 Analoge Beziehungen zwischen einem querbelasteten Balken auf elastischer Bettung und einem auf Profilverformung belasteten Träger

Balken auf elastischer Bettung	Träger bei Profilverformung
Biegesteifigkeit EI_y [kNm ²]	Wölbsteifigkeit der Profilverformung $EI_{\omega P}$ [kNm ⁴]
Bettungsziffer c_w [kN/cm ²]	Rahmensteifigkeit EI_Q [kN]
Belastung q_z [kN/cm]	Profilverformende Belastung m_P [kNm/cm]
Durchbiegung w [cm]	Verformungswinkel γ [rad]
Biegemoment M_y [kNm]	Bimoment der Profilverformung $M_{\omega P}$ [kNm ²]
Querkraft V_z [kN]	$M_{\omega P}'$ [kNm]

8.3 Umsetzen von Lasten zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit

Werden Torsionsbeanspruchungen nicht entsprechend dem Schubspannungsverlauf infolge Torsion in den Querschnitt eingeleitet, müssen sie umgesetzt werden. Dies führt zu zusätzlichen profilverformenden Beanspruchungen. Betrachtet wird das Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt. Der Querschnitt Q1 (HE-A 500) trägt Torsion überwiegend durch Wölbkrafttorsion ab, der Querschnitt Q2 (Q RO 490x12) ist wölbfrei. Der Schubspannungsverlauf infolge der maßgebenden Torsion ist in Bild 8.4 dargestellt.

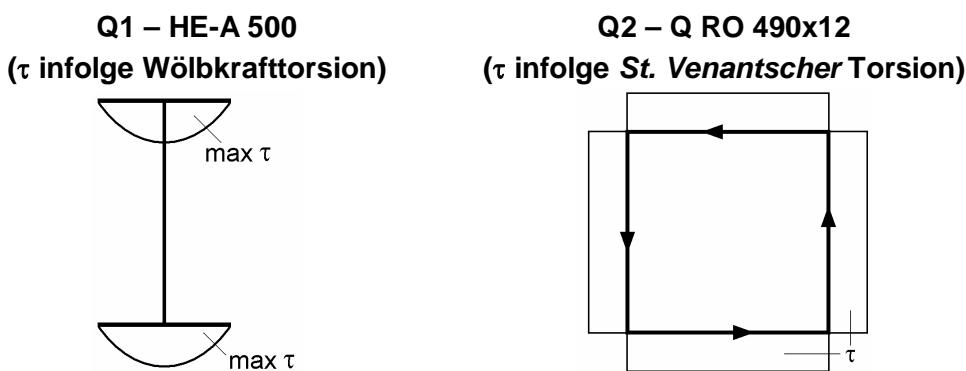


Bild 8.4 Schubspannungsverlauf infolge Wölbkrafttorsion (Q1 - HE-A 500) und St. Venantscher Torsion (Q2 - Q RO 490x12)

Die aus der Krümmung entstehenden Torsionsbeanspruchungen resultieren aus der Umlenkung von Längsspannungen [14], [71]. Ihre Wirkungsweise ist horizontal. Im Querschnitt Q1 entspricht die Wirkungsrichtung der aus der Krümmung entstehenden Beanspruchung dem Wölbwiderstand des Querschnitts. Es sind keine Umsetzungen erforderlich, um die Torsionssteifigkeit des Querschnitts zu aktivieren. Der wölfreie Querschnitt Q2 trägt Torsionsbeanspruchungen durch St. Venantsche Torsion ab, d. h.

über umlaufende Schubspannungen. Zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit ist ein Umsetzen der horizontalen Beanspruchungen infolge Krümmung erforderlich. Die Einleitung der Torsionsbeanspruchungen erfolgt über die Quersteifigkeit des Profils. Ist ein komplettes Umsetzen der Beanspruchung an den Lasteinleitungsstellen nicht möglich, kann die volle Wirksamkeit der Torsionssteifigkeit nicht aktiviert werden. Der Querschnitt verformt sich, so dass ein Teil der Torsion über Biegung abgetragen wird.

Typische Brückenquerschnitte

Betrachtet werden offene und geschlossene Verbundquerschnitte mit jeweils zwei Hauptträgern. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass der Lastabtrag der Torsion beim offenen Querschnitt überwiegend durch Wölbkrafttorsion und beim geschlossenen Querschnitt durch *St. Venantsche* Torsion erfolgt.

Bei der Einleitung der Torsion ist zwischen Torsionsbeanspruchungen aus exzentrisch zum Schubmittelpunkt angreifenden Vertikallasten, die auch im geraden Träger zu Torsion führen, und Torsionsbeanspruchungen aus Krümmung zu unterscheiden. Die Torsionsbeanspruchungen aus Krümmung resultieren aus der Umlenkung von Längsspannungen, deren Wirkungsweise horizontal ist. In Bild 8.5 sind die Schubspannungsverläufe für den offenen Querschnitt infolge Wölbkrafttorsion und für den Kastenquerschnitt infolge *St. Vernantsche* Torsion dargestellt. Bei offenen Querschnitten mit zwei Hauptträgern kann das Kräftepaar infolge exzentrischer Vertikallasten direkt in die Stege eingeleitet werden. Die Wirkungsrichtung der aufzunehmenden Kräfte entspricht dem Querschnittswiderstand der Wölbkrafttorsion. Bei geschlossenen Querschnitten wird eine Lastumsetzung zur Aktivierung der *St. Venantschen* Torsionssteifigkeit, d. h. zur Realisierung eines gleichmäßigen Schubflusses, erforderlich.

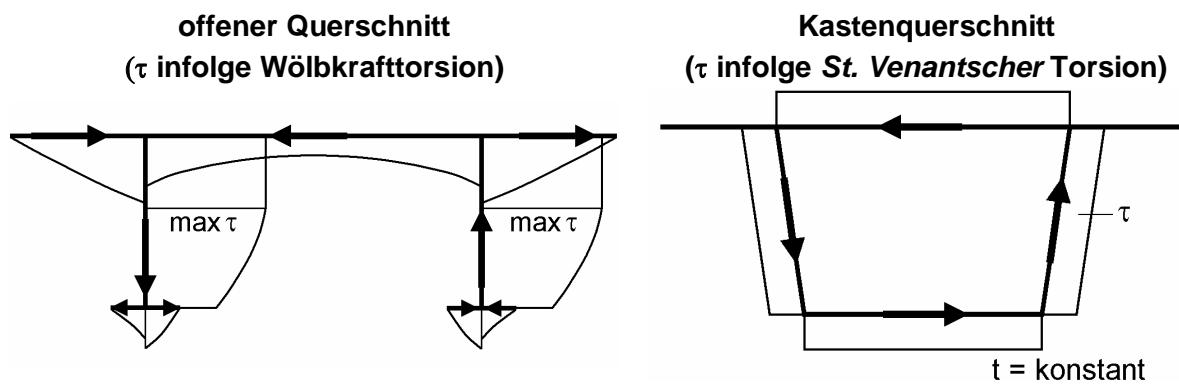


Bild 8.5 Ausgewählte Querschnitte und Schubspannungsverläufe infolge Torsion

Infolge der aus der Krümmung entstehenden Torsionsbeanspruchungen wird auch beim offenen Querschnitt mit zwei Hauptträgern eine Lastumsetzung zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit erforderlich. Bild 8.6 zeigt die Zerlegung des einzuleitenden Kräftepaars in Wölbkrafttorsion mit dem vereinfachten Ansatz der ungleichen Biegung und Profilverformung mit Darstellung der jeweiligen Verformungsfiguren.

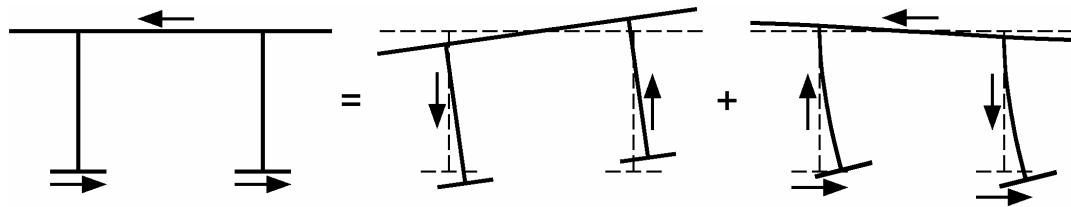


Bild 8.6 Offener Querschnitt mit zwei Hauptträgern: Zerlegung des einzuleitenden Kräftepaars in ungleiche Biegung und Profilverformung

In Bild 8.7 ist die Zerlegung eines einzuleitenden vertikalen und horizontalen Kräftepaars in *St. Venantsche* Torsion und Profilverformung beim geschlossenen Querschnitt dargestellt. Es ist festzustellen, dass bei gleicher Wirkungsrichtung des Kräftepaars aus exzentrischer Vertikallast und des Kräftepaars aus horizontaler Belastung infolge der Krümmung der profilverformende Einfluss und somit die Beanspruchung für den Querschnitt in Querrichtung geringer wird. Grund ist der kleinere Anteil der einzuleitenden Kräfte, die im Querschnitt umgesetzt werden müssen. Bei entgegen gesetzter Wirkungsrichtung der Torsionsbeanspruchungen wird die Beanspruchung für den Querschnitt größer. Für die Bemessung der Queraussteifungen ist es folglich wichtig zu wissen, aus welchem Anteil die Torsionsbeanspruchung herührt.

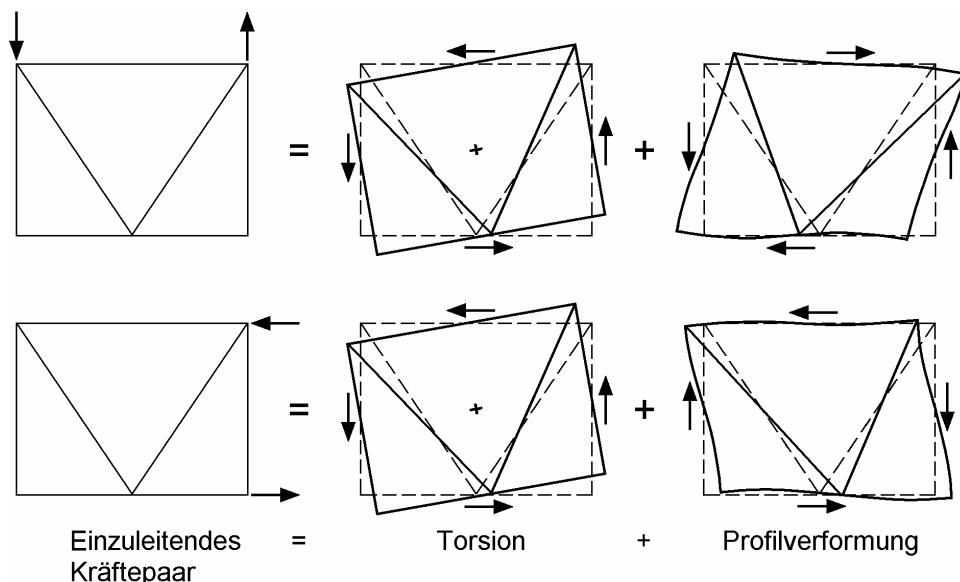


Bild 8.7 Geschlossener Querschnitt: Zerlegung des einzuleitenden Kräftepaars in *St. Venantsche* Torsion und Profilverformung

8.4 Queraussteifungen in gekrümmten Brücken

8.4.1 Allgemein

Brücken mit großen Querschnitten müssen in regelmäßigen Abständen ausgesteift werden. Die Queraussteifungen dienen

- der Lastumsetzung zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit
- der Stabilisierung druckbeanspruchter Bauteile
- der Erhaltung der Querschnittsform
- der Reduzierung der Beulgefahr

Zu unterscheiden sind abhängig von der Quersteifigkeit Querrahmen, Querverbände und Querscheiben (Endquerträger). Zur Erhaltung der Querschnittsform werden Queraussteifungen in einem Abstand von ca. 3 – 5 m empfohlen [94]. Querrahmen bieten die geringste Quersteifigkeit. Wenn Lasten zur Aktivierung der Torsionssteifigkeit umgesetzt werden müssen, wird häufig jede dritte oder vierte Queraussteifung als Querverband ausgebildet oder es werden zusätzliche Querverbände in den Drittelpunkten der Feldlängen angeordnet. Querverbände bieten eine größere Quersteifigkeit. Sie werden im Allgemeinen für die Einleitung von Lasten bemessen. Ausführungsvarianten sind K– oder X–Verbände. Beim Kastenträger laufen die Diagonalen des K–Verbandes häufig von Oberkante Steg zu Mitte Bodenblech. Bei geneigten Stegen können die Verbandsstäbe dann ebenfalls zur Stabilisierung des Obergurtes in der Betonierphase herangezogen werden. Bei besonders starker Neigung werden noch zusätzliche Zugstäbe zwischen den oberen Angriffspunkten angeordnet. Beim Querverband nach Bild 2.8 sind die Diagonalen des K–Verbands zusätzlich Auflagerpunkte für die oben liegende Betonfahrbahnplatte. Über außen liegende Druckstreben (Stempel) in den Achsen der Querverbände werden weitere Auflagerpunkte für die Betonplatte geschaffen. Bei der Talbrücke Reichenbach (Bild 2.8) konnte so ein 28,50 m breiter Querschnitt mit einem Überbau realisiert werden. X–Verbände finden sich in sehr hohen Querschnitten, so dass die Neigung der Diagonalen mit einem Winkel von maximal 60° ausgeführt werden kann. In den Auflagerachsen sind für den Lagerwechsel und zur Einleitung der Lagerlasten in den Querschnitt sehr starre Aussteifungen, d. h. bei Kastenträgern Querscheiben und bei offenen Querschnitten Endquerträger, anzuordnen.

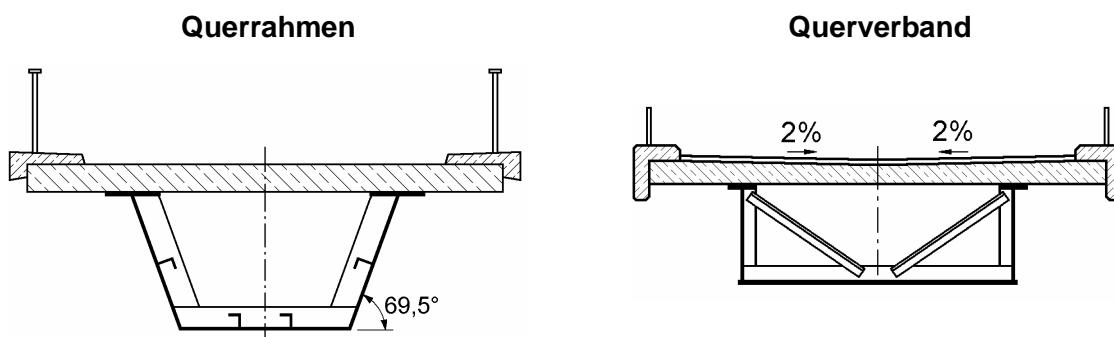


Bild 8.8 Ausführungen von Queraussteifungen

In gekrümmten Brücken sind in jedem Fall auch bei offenen Querschnitten in regelmäßigen Abständen Queraussteifungen anzuordnen. Diese müssen für die Einleitung der sich aus der Krümmung ergebenden Torsionsbeanspruchungen ausgelegt sein.

8.4.2 Einleiten der Torsion im Bereich von Queraussteifungen

Bei der Ermittlung der einzuleitenden Torsionsbeanspruchungen in die Queraussteifungen muss zwischen Torsion aus exzentrischer Vertikalbeanspruchung und Torsion aus Krümmung unterschieden werden (s. Abschnitt 8.3). Deshalb wird vorgeschlagen, bei der Ermittlung der Beanspruchungen für die Queraussteifungen zwei Lastfälle zu betrachten.

Die aus der Krümmung sich ergebende einzuleitende Torsion $M_{x,Fy}$ wird aus dem Biegemomente M_y unter Berechnung einer Ersatzlast \bar{m}_x entsprechend Gl. (5.4) ermittelt. Die Aufteilung der ermittelten Ersatzlasten auf die Queraussteifungen erfolgt über Einflussbreiten (Bild 8.9). Für die i -te Queraussteifung ergibt sich darausfolgend (der 0-Ursprung liegt jeweils in der betrachteten Queraussteifung):

$$M_{x,Fy,i} = \int_{-e_{QS}/2}^{e_{QS}/2} \bar{m}_x \cdot dx = \int_{-e_{QS}/2}^{e_{QS}/2} -\frac{M_y}{R} \cdot dx \quad (8.5)$$

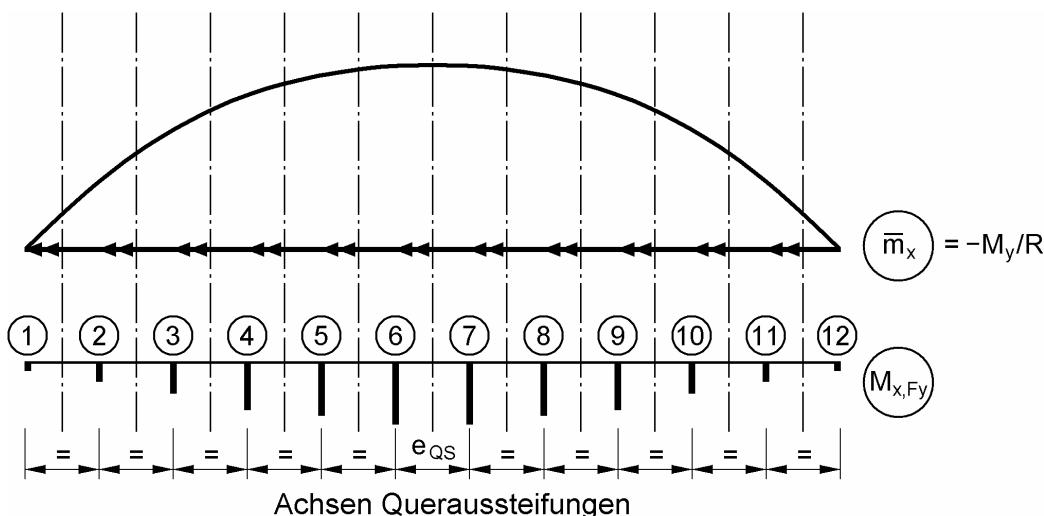


Bild 8.9 Torsionsbeanspruchung infolge Krümmung: Einzuleitende Torsion $M_{x,Fy}$ in den Queraussteifungen bei Annahme einer Gleichstreckenlast

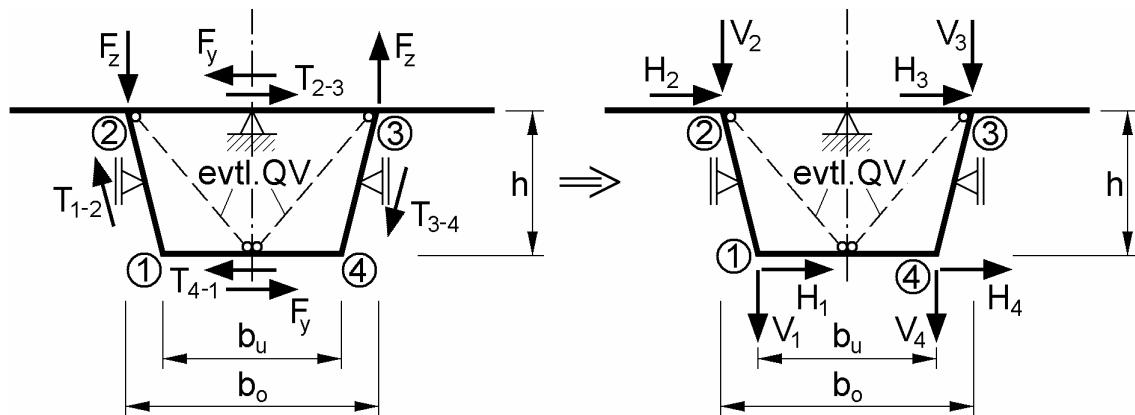
Zur Ermittlung der einzuleitenden Torsion $M_{x,Fz}$ wird die exzentrische Vertikallast in einen symmetrischen Anteil (Lastangriff im Schubmittelpunkt) und einen antimetrischen Anteil (Kräftepaar) aufgeteilt. Die Torsionsbeanspruchung ergibt sich aus dem antimetrischen Anteil. Die einzuleitende Torsion $M_{x,Fz}$ in erster Näherung anhand von Einflusslinien auf die Querverbände verteilt werden, wobei der Abstand e_{QS} als Einfeldträger betrachtet werden kann.

8.4.3 Ebene Stabmodelle

Die profilverformenden Kräfte stehen in sich im Gleichgewicht, d. h. sie können am „freien Tragwerk“ angesetzt werden. Sie haben nichts mit dem äußeren Gleichge-

wicht zu tun [106]. Die Queraussteifung kann folglich an einem Teilsystem, das die Queraussteifung als Stabmodell mit einer Gleichgewichtsgruppe abbildet, untersucht werden. Das ebene Stabmodell wird unter Ansatz von mittragenden Breiten für den Ober-, Untergurt und Steg idealisiert und so gelagert, dass das System nicht kinematisch wird. Die Lagerung hat dabei keinen Einfluss auf den Schnittgrößenverlauf, da die Lasten als Gleichgewichtsgruppe aufgebracht werden und somit alle Lagerkräfte Null sein müssen. Für die Darstellung der Verformungsfigur ist es jedoch zweckmäßig, eine Lagerung zu wählen, die zu einer sinnvollen Verformungsfigur führt. Zur Ermittlung der Beanspruchung dieses Teilsystems wird im ersten Schritt der Träger in Längsrichtung nach Abschnitt 8.3 betrachtet. Die Lasten werden dann entsprechend Tabelle 8.2 für einen geschlossenen Querschnitt und Tabelle 8.3 für einen offenen Querschnitt mit zwei Hauptträgern auf das Teilsystem aufgebracht.

Tabelle 8.2 Ebenes Stabmodell für einen geschlossenen Querschnitt (Einleitung der Torsion $M_{x,Fz}$ und $M_{x,Fy}$)



$$\tan \alpha = 2 \cdot h / (b_o - b_u)$$

$$F_z = M_{x,Fz} / b_o \text{ und } F_y = M_{x,Fy} / h$$

$$M_x = M_{x,Fz} + M_{x,Fy}$$

$$T_{1-2} = T_{3-4} = M_x / ((b_o + b_u) \cdot \sin \alpha)$$

$$T_{2-3} = M_x \cdot b_o / ((b_o + b_u) \cdot h)$$

$$T_{4-1} = M_x \cdot b_u / ((b_o + b_u) \cdot h)$$

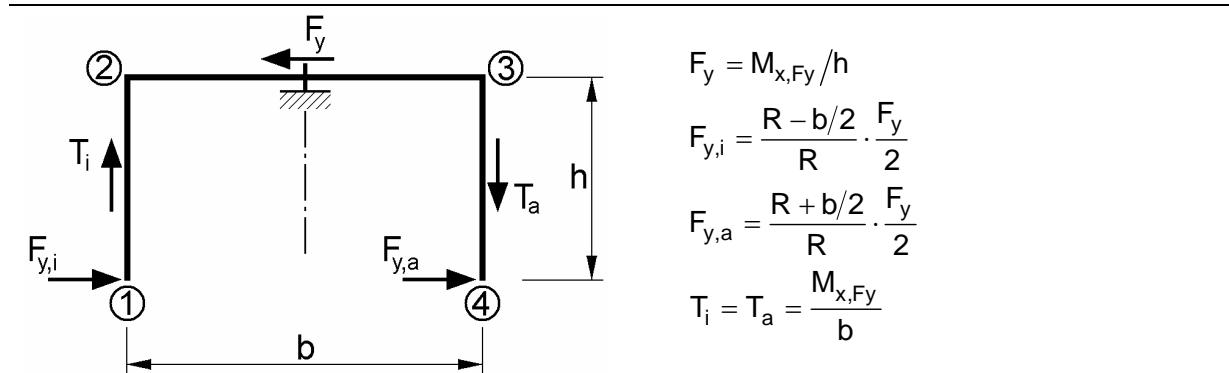
$$H_1 = H_4 = 0,5 \cdot F_y - T_{1-2} \cdot \cos \alpha - 0,5 \cdot T_{4-1}$$

$$V_1 = -V_4 = -0,5 \cdot T_{1-2} \cdot \sin \alpha$$

$$H_2 = H_3 = -0,5 \cdot F_y - T_{1-2} \cdot \cos \alpha + 0,5 \cdot T_{2-3}$$

$$V_2 = -V_3 = 0,5 \cdot F_z - 0,5 \cdot T_{1-2} \cdot \sin \alpha$$

Tabelle 8.3 Ebenes Stabmodell für offene Querschnitte mit zwei Hauptträgern (Einleitung der Torsion $M_{x,Fy}$)



8.4.4 Hinweise zur konstruktiven Ausbildung

In Queraussteifungen von Verbundbrücken ist ein besonderes Augenmerk auf die Detailausbildung des Anschlusses Betonfahrbahnplatte und Stahlträger zu legen. Im Allgemeinen werden zur Übertragung von Kräften in der Verbundfuge Kopfbolzendübel angeordnet, die für eine planmäßige Übertragung von Zugkräften nicht zugelassen sind. Um bei der Wahl eines biegesteifen Anschlusses die resultierenden Beanspruchungen in der Verbundfuge nachweisen zu können, werden zusätzliche Stehbleche mit horizontalen Dübeln erforderlich (Bild 8.10).

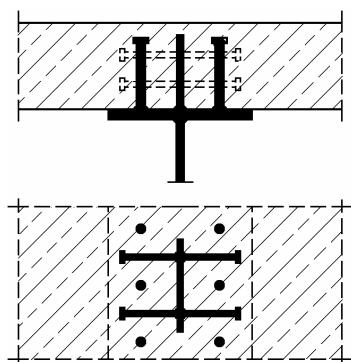


Bild 8.10 Ausbildung eines biegesteifen Anschlusses an die Betonplatte

Aus diesem Grunde ist es häufig sinnvoll den Anschluss gelenkig auszubilden. Zur Lastumsetzung der Beanspruchungen aus Krümmung wird in offenen Querschnitten mit zwei Hauptträgern zur Ausbildung des notwendigen Rahmens in diesem Fall ein unten liegender Querträger erforderlich (Bild 8.11).

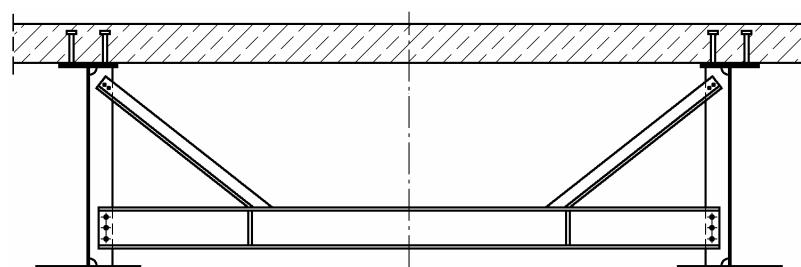


Bild 8.11 Ausbildung von Querschnitten in gekrümmten Brücken mit gelenkig angegeschlossener Betonplatte

Die Queraussteifungen dienen ebenfalls zur Aussteifung des Trägers in den Montagezuständen. Beim Kastenträger ist zu berücksichtigen, dass im Bauzustand die Fahrbahnplatte noch nicht mit trägt und so ein offener Querschnitt die Lastabtragung übernehmen muss. Häufig wird deshalb ein oben liegender Montageverband angeordnet, der nach Abschnitt 2.7.4 als aufgelöste Kastenwand betrachtet wird. Beim offenen Querschnitt muss der Obergurt entsprechend ausgebildet werden, um die Abtriebskräfte aus der Krümmung abtragen zu können und um ein Wegknicken des Obergurtes aus der Ebene zu vermeiden.

9 Querweiche Systeme

9.1 Vorbemerkungen

Brücken mit breiten Querschnitten können sich in Querrichtung verformen, so dass man nicht mehr von der Erhaltung der Querschnittsform ausgehen kann. Diese querweichen Systeme werden im Allgemeinen als Trägerrost modelliert. Das Tragsystem wird in Längsstäbe aufgeteilt, die an diskreten Stellen durch Querstäbe verbunden sind. Alle Stäbe werden als in einer Ebene liegend angenommen. Es entsteht eine Schar sich kreuzender Stäbe, die in der Regel biegesteif miteinander verbunden sind. Es kann aber auch eine biegeweiche Koppplungsstelle als Gelenk oder Feder modelliert werden. Maßgebende Querschnittseigenschaften sind Biege- und eventuell Torsionssteifigkeit. Der Trägerrost wird senkrecht zur Ebene gelagert. Eine torsionsstarre Lagerung wird durch die Anordnung von zwei in einem definierten Abstand angeordneten Lagern idealisiert. Auch die Lasten wirken senkrecht zur Ebene und werden in der Regel auf die längsgerichteten Stäbe aufgebracht.

Im Trägerrost sind die Stabschnittgrößen ablesbar. Als weitere Ergebnisse liefert ein Trägerrost Verformungen und Auflagerkräfte. Von Interesse sind die Verformungen in Feldmitte zur Festlegung der Überhöhung und die Kräfte und Verformungen an den Auflagern zur Bemessung der Auflager. Bei einer Modellierung als ebenes Trägerrost ist zu berücksichtigen, dass die Verformungen in der Schwerpunktsachse ausgegeben werden. Die Verformungen UK Querschnitt können über Geometriebeziehungen bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit besteht in der Modellierung des Trägerrosts als Teil eines räumlichen Systems. Der Abstand Schwerpunkt Querschnitt – UK Querschnitt kann dann mittels Hilfsstäben idealisiert werden.

9.2 Querschnitte mit zwei Hauptträgern

Unterweger beschreibt in [112] einen ebenen Trägerrost zur Berechnung quer ausgesteifter, längsgerichteter gerader Träger. Es wurde speziell für die Modellierung von Brückentragwerken entwickelt. Es gelten folgende Annahmen:

- Die Nachgiebigkeit der Queraussteifungen wird berücksichtigt. Das verwendete Stabwerkprogramm muss deshalb eine Berechnung mit schubweichen Stabelementen zulassen.
- In den Lagerachsen werden annähernd starre Queraussteifungen vorausgesetzt.
- Der Träger wird durch eine Last q_z (F_z), eine Last q_y (F_y) und durch ein Torsionsmoment m_x (M_{xL}) im Schubmittelpunkt belastet.

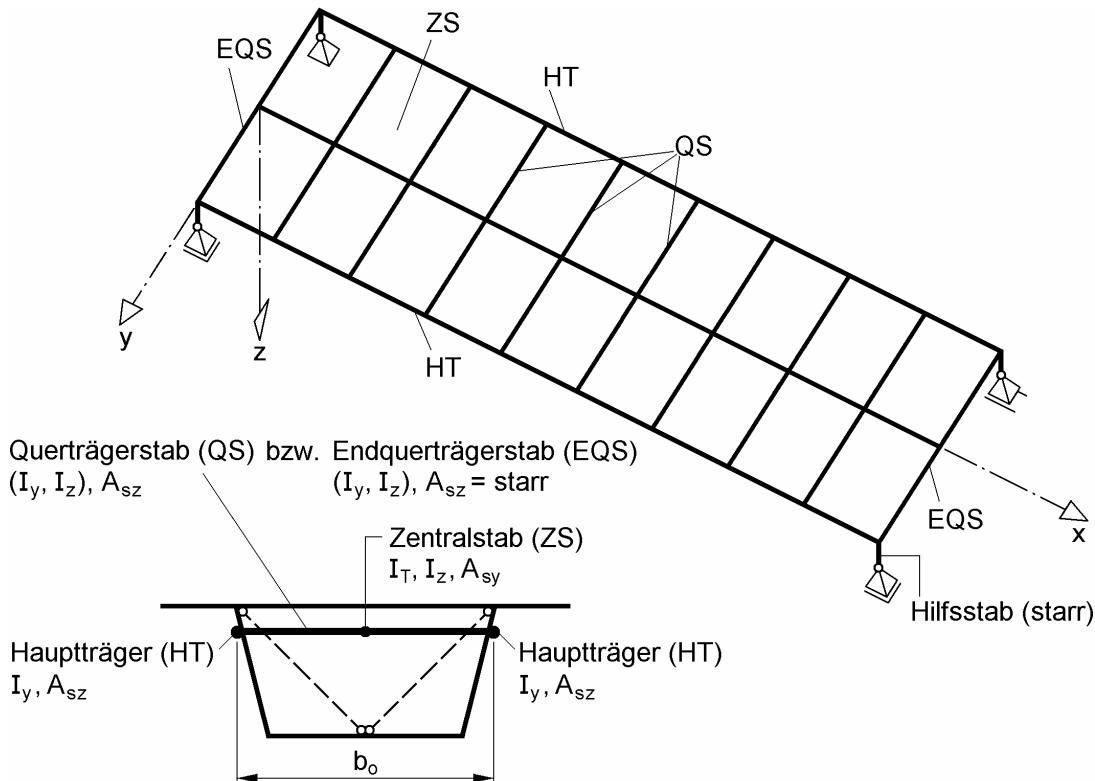


Bild 9.1 Trägerrostmodell nach Unterweger

Der Querschnitt kann als offener Querschnitt mit zwei Stegebenen sowie auch als Kastenquerschnitt ausgebildet sein. Der Querschnitt wird in drei parallel laufende Längsstäbe aufgelöst, die in den Bereichen der Queraussteifungen über schubweiche Stabelemente (QS) nach Abschnitt 2.7.5 und in den Lagerachsen über schubarre Stabelemente (EQS) miteinander verbunden sind. Die Queraussteifungen stellen dabei kurze hohe Träger dar, bei denen die Schubverformungen den maßgeblichen Verformungsanteil bilden. Die beiden äußeren Stabzüge liegen in den Stegebenen des Querschnitts, bei geneigten Stegen in den Achsen der Stegoberkante, und stellen die Hauptträger (HT) des Systems dar. Neben den Hauptträgern wird ein Torsionsbegleitträger oder Zentralstab (ZS) in der Symmetriechse, der Schubmittelpunktsachse des Querschnitts, angeordnet. Alle Stäbe werden als in einer Ebene liegend angesehen. Diese entspricht der Schwerachse des mittragenden Querschnitts.

Im Bereich der Auflager werden zusätzliche Lagerstäbe bzw. Hilfsstäbe angeordnet, so dass die Verformungen an der Unterkante des Querschnitts direkt abgelesen werden können. In Bild 9.1 ist das Trägerrostmodell des geraden Trägers mit der prinzipiellen Aufteilung der am Gesamtquerschnitt ermittelten Steifigkeiten dargestellt. Die Beanspruchung wird generell auf die längsgerichteten Stäbe aufgebracht. Die anzusetzenden Querschnittskennwerte und das Aufbringen der Beanspruchung sind in Tabelle 9.1 zusammengefasst. Die Querschnittstragfähigkeit wird an den Teilstäben untersucht.

Durch das Zusammenwirken der Hauptträger und des Zentralstabes mit den schubweichen Querträgern lassen sich folgende Effekte erfassen:

- Ungleiche Biegung der Hauptträger
- Lokale Biegungen zwischen den Queraussteifungen
- Querschnittsverformungen infolge der Nachgiebigkeit der Queraussteifungen

Tabelle 9.1 Querschnittskennwerte und Beanspruchung Stabmodell Unterweger

Stab	QSW	Last	Berechnung
Hauptträger (HT)	I_y		Trägheitsmoment eines HTs (halber Querschnitt) unter Berücksichtigung der mittragenden Breiten
	A_{sz}		Stegfläche eines HTs
	q_z, F_z		Ermittlung über Querverteilungslinien
	$\Delta q_z, \Delta F_z$		Vertikales Kräftepaar auf HT mit $\Delta q_z = \pm m_x/b_o$ mit $m_x = q_y \cdot e$ bzw. $\Delta F_z = \pm M_{xL}/b_o$ mit $M_{xL} = F_y \cdot e$, e bezeichnet hierbei den Abstand zwischen dem Lastangriffspunkt und dem Schubmittelpunkt
Zentralstab (ZS)	I_T		Torsionssteifigkeit des Gesamtquerschnitts
	I_z		Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts um die globale z-Achse
	A		Fläche des Gesamtquerschnitts
	A_{sy}	q_y, F_y	Fläche der Fahrbahnplatte ohne Längssteifen Direktes Aufbringen der horizontalen Belastung
Querträger- stab(QS)	A_{sz}		Schubfläche der Queraussteifung nach Abschnitt 2.7.5
	I_T		0 (sehr klein!)
	I_y		$I_y \rightarrow \infty$ (biegestarr)
	I_z		$I_z \rightarrow \infty$ (biegestarr)
Endquerträger- stab (EQS)	A_{sz}		$A_{sz} \rightarrow \infty$ bei den Queraussteifungen in den Lagerachsen (starr)
	I_y		$I_y \rightarrow \infty$ (biegestarr)
	I_z		$I_z \rightarrow \infty$ (biegestarr)

- Alle nicht angegebenen Querschnittskennwerte sind 0 (sehr klein!).
- Der Bezug des Indizes y erfolgt jeweils auf die lokale Stabachse.

Die Auswirkungen der Wölbkrafttorsion darf bei offenen Querschnitten nicht vernachlässigt werden. Sie wird im vorgestellten System über ungleiche Biegung der Hauptträger erfasst. Diese Annahme führt bei Annahme von schubstarren Queraussteifungen zu den Ergebnissen der Stabtheorie, wenn die Wölbsteifigkeit $EI_o \approx EI_y \cdot (b_o/2)^2$ ist. Durch die Schubweichheit der Querträger werden profilverformende Effekte berücksichtigt. Für geschlossene Querschnitte spielt die Wölbkrafttorsion eine untergeordnete Rolle. In Bild 9.2 a) bis c) sind die möglichen Verformungszustände des Querschnitts dargestellt:

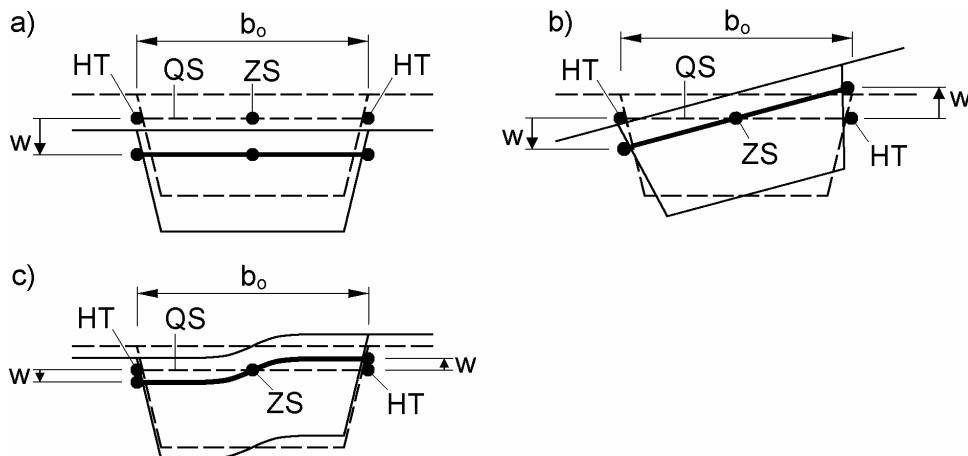


Bild 9.2 Verformungszustände im Trägerrostmodell nach Unterweger

- Der Querschnitt verschiebt sich in Richtung w . Die Durchbiegung beider Hauptträger ist gleich. Die Queraussteifung erhält keine Beanspruchung.
- Der Querschnitt verdreht sich um $\vartheta = 2 \cdot w / b_o$. Die Durchbiegung beider Hauptträger ist gegengleich. Auch hier erhält die Queraussteifung keine Beanspruchung. Die Verdrehung resultiert aus *St. Venantscher Torsion*.
- Der Querschnitt verformt sein Profil. Die Queraussteifung dient zur Lastumsetzung vertikaler Lasten und Weiterleitung als Torsion in den geschlossenen Querschnitt.

Untersuchungen am gekrümmten Träger unter Anwendung des für den geraden Träger entwickelten Trägerrosts wurden in [112] durchgeführt. Die Krümmung wird zwischen den Queraussteifungen mit geraden Stabelementen polygonal angenähert. Die Queraussteifungen verlaufen rechtwinklig zu den Hauptträgerachsen. Die Knotenpunkte zwischen den Queraussteifungen und den Hauptträgern liegen auf den gekrümmten Achsen. Das Stabmodell des geraden Stabes wird grundsätzlich beibehalten.

Infolge der Krümmung treten Querbeanspruchungen in den Gurten auf, die im Bereich der Queraussteifungen als Torsion eingeleitet und weitergeleitet werden. Zur Erfassung dieser lokalen Beanspruchungen sind Gurte mit geringer Breite, z. B. Untergurte von offenen Querschnitten, in einem zusätzlichen Modell abzubilden und die Beanspruchungen mit den Beanspruchungen des globalen Systems zu überlagern. Bild 9.3 zeigt das von Unterweger vorgeschlagene Ersatzmodell zur Berücksichtigung lokaler Querbiegung in Gurten. Die Belastung Δq_y ergibt sich aus den Umlenkungen der Längsspannungen im Gurt. Vereinfachend wird die Längsspannung in dem betrachteten Bereich konstant angenommen. Es folgt:

$$\Delta q_y = \frac{\sigma_{m,Gurt} \cdot A_{Gurt}}{R} \quad (9.1)$$

mit $\sigma_{m,Gurt}$ = mittlere Gurtspannung in Längsrichtung

Das lokale Gurtbiegemoment ergibt sich maximal zu:

$$\Delta M_{\text{Gurt}} \approx \pm 0,1 \cdot \Delta q_y \cdot e_{QS}^2 \quad (\text{entspricht Stützmoment im Dreifeldträger}) \quad (9.2)$$

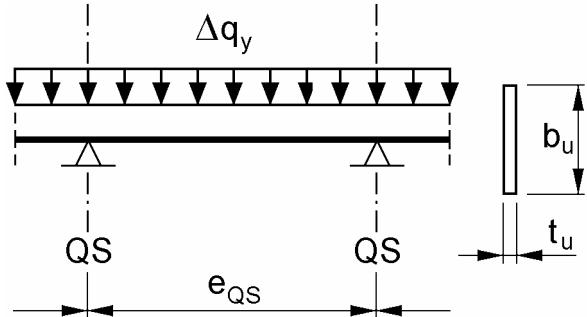


Bild 9.3 Ersatzsystem zur Berücksichtigung lokaler Beanspruchungszustände in den Gurten

Das Trägerrostmodell nach Unterweger ist in erster Linie für breite Querschnitte des Brückenbaus mit zwei Hauptträgern entwickelt worden. Bei diesen Tragwerken kann die Erhaltung der Querschnittsform ohne weitere Queraussteifungen nicht gewährleistet werden. Für offene Querschnitte, die mit der linearen Stabtheorie erfasst werden können, ist das Modell nur bedingt einsetzbar, da die Wölbkrafttorsion nicht exakt implementiert ist. Bei der Auswertung können Beanspruchungen in Längs- und Querrichtung erfasst werden. Die Belastungen werden auf die Längsträger aufgebracht. Die als Querträger idealisierten Queraussteifungen sind für Lastumsetzungen im System verantwortlich. Da bei dieser Art der Modellierung die Beanspruchungen in den Queraussteifungen generell eher unterbewertet werden, sollten die ermittelten Beanspruchungen nach [113] um 10 % erhöht werden. Demgegenüber werden die Beanspruchungen in den Hauptträgern tendenziell überbewertet.

Die Richtigkeit der ermittelten Beanspruchungen ist maßgeblich abhängig von der Aufbringung der Lasten und von der Zuordnung der Steifigkeiten. In gekrümmten Trägern liegt der Schwerpunkt bei gleichmäßiger Belastung des Querschnitts nicht in der Symmetriechse des Querschnitts (Abschnitt 3.5). Darüber hinaus ist beim Aufbringen der Lasten zu beachten, dass die Stegachsen unterschiedliche Krümmungsradien und damit auch Längen aufweisen (Abschnitt 8.2). Eine Ermittlung der vertikalen Lasten der Hauptträger über Querverteilungslinien führt bei Nichtbeachtung der Krümmungsradien z. B. für den inneren Hauptträger zu einer zu niedrigen Beanspruchung. Des Weiteren kann die Beanspruchung der Queraussteifungen in gekrümmten Trägern nicht richtig erfasst werden, da bei der Einleitung der Torsion nicht zwischen Torsion aus Exzentrizität vertikaler Lasten und aus Krümmung unterschieden wird (Abschnitt 8.3). Die Aufteilung der Steifigkeiten auf die Hauptträger erfolgt beim Modell Unterweger in Abhängigkeit von den mittragenden Breiten. Der Ansatz der mittragenden Breiten gilt für gerade Träger. Für gekrümmte Träger kann dieser Ansatz nicht vorbehaltlos übernommen werden, weitere Untersuchungen sind erforderlich.

Die Modellierung als Trägerrost nach Unterweger sollte folglich nur bei großen Krümmungsradien in Betracht gezogen werden. Bei der Bemessung der Queraussteifungen ist dann auf Ersatzsysteme zurückzugreifen.

9.3 Offene Querschnitte mit mehr als zwei Hauptträgern

Bei offenen Querschnitten wird der Querschnitt im Allgemeinen in Querrichtung als biegeweich angesehen. Die in der Stabtheorie zugrunde gelegte Voraussetzung der „Querschnittstreue“ wird also bei dieser Tragwirkung aufgegeben. Das bedeutet, dass außermittige Lasten nicht auf die Stabachse des Gesamtquerschnitts bezogen, sondern über Querverteilungslinien in Belastungen der Hauptträger umgerechnet werden [47]. Bei Querschnitten mit mehr als zwei Hauptträgern ist das Quersystem statisch unbestimmt (Bild 9.4). Die richtige Ermittlung der Schnittgrößenverläufe im Trägerrost hängt von der Verteilung der Steifigkeiten und dem Aufbringen der Belastung ab. Bei den hier behandelten offenen Querschnitten kann die Torsionssteifigkeit vernachlässigt werden. Betrachtet werden gekrümmte Träger mit gleichen Hauptträgern.

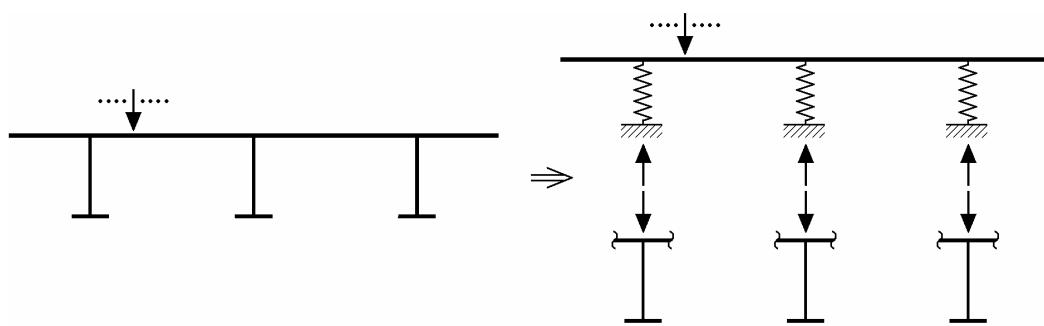


Bild 9.4 Offener Querschnitt mit 3 Hauptträgern [51]

Längsträger

Die systembezogene Biegesteifigkeit für den gekrümmten Trägern beträgt $EI_y / \ell^2 = EI_y / (R \cdot \varphi)^2$. Die Aufteilung der Gesamtsteifigkeit auf die einzelnen Hauptträger, die auf verschiedenen Krümmungsradien liegen, ist noch näher zu untersuchen, s. auch Abschnitt 9.2.

Querträger

Bei hohen kurzen Querträgern kann davon ausgegangen werden, dass die Schubsteifigkeit einen größeren Einfluss auf die Verformung hat als die Biegesteifigkeit (s. Abschnitt 9.2). Bei Querschnitten mit mehreren Hauptträgern sind die einzelnen Hauptträger im Allgemeinen nicht so hoch, d. h. der Einfluss der Biegesteifigkeit der Querträger wird überwiegen und die Schubsteifigkeit kann vernachlässigt werden.

Beanspruchung

Die Lasten sollten bei einem gekrümmten Träger mit mehreren Hauptträgern auf die Querträger verteilt werden. So kann die richtige Aufteilung auf die Längsträger gewährleistet werden. Lokale Zusatzbeanspruchungen in den Untergurten infolge aus der Krümmung herrührender Umlenkungen von Längsspannungen müssen an einem Ersatzsystem erfasst werden.

10 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt das Tragverhalten im Grundriss gekrümmter Verbundträger. Offene und geschlossene Querschnitte mit oben liegender Betonplatte aus dem Verbundbrückenbau stehen dabei im Vordergrund.

Kapitel 2 enthält eine Zusammenstellung von Grundlagen, die für Verbundträger im Brückenbau benötigt werden. In diesem Zusammenhang wird die im Verbundbau übliche Vorgehensweise, den Verbundquerschnitt zur Ermittlung der Querschnittskennwerte ideell in einen auf den Baustahl bezogenen Gesamtquerschnitt zu überführen, auf die Berechnung der **Querschnittskennwerte der Torsion** übertragen. Brücken werden in Abhängigkeit ihres Querschnitts in drei Kategorien klassifiziert. Die Untersuchungen in den Kapiteln 3 bis 8 beziehen sich auf **Brückenquerschnitte**, bei denen die Anwendung der Stabtheorie ihre Gültigkeit behält.

In Kapitel 3 werden grundlegende Beziehungen für gekrümmte Träger entwickelt und zusammengestellt. Es wird gezeigt, dass die **Steifigkeiten im Einfeldträger** mit Gabellagern keinen Einfluss auf die Schnittgrößenverteilung haben (ausgenommen eine über die Länge veränderliche Torsionssteifigkeit G_I_T). Formeln zur Berechnung der Schnittgrößen von Einfeldträgern werden zusammengestellt. Mit Hilfe von **Gleichgewichtsbetrachtungen** wird das komplexe Tragverhalten des gekrümmten Trägers verständlich gemacht. Darüber hinaus werden Lastgrößen ins Hauptachsensystem transformiert und die Differentialgleichungen für gekrümmte Träger hergeleitet.

Kapitel 4 behandelt das grundsätzliche Tragverhalten von gekrümmten Ein- und Zweifeldträgern mit Gleichstreckenlast. Die Auswirkungen auf die elastische und plastische Tragfähigkeit von offenen und geschlossenen Verbundquerschnitten werden untersucht. Bei einem vertikal beanspruchten Träger werden infolge der **Kopplung von Biegung und Torsion** immer auch Torsionsmomente auftreten. Für den Einfeldträger mit Gleichstreckenlast können folgende Ergebnisse festgehalten werden:

- In gekrümmten Trägern treten immer auch Torsionsmomente auf. Diese müssen wie auch beim geraden Träger in einen primären und einen sekundären Anteil unterteilt werden. Der sekundäre Anteil führt zu weiteren Belastungen aus den Wölbmomenten.
- Die Krümmung führt zu einem veränderten Biegemomentenverlauf, der nicht mehr der $q\ell^2/8$ -Parabel des geraden Trägers entspricht. Das Biegemoment in Feldmitte ist im Vergleich zum geraden Träger größer.
- Die Verformungen hängen von der Art des Querschnitts ab. Bei offenen Querschnitten sind die Verdrehungen ϑ und demzufolge wegen der Kopplung von Torsion und Biegung auch die Verschiebungen w_M teilweise wesentlich größer als bei einem vergleichbaren geschlossenen Querschnitt.

Für den Zweifeldträger folgt:

- Die Verläufe der Biege- und Torsionsmomente hängen von den Steifigkeitsverhältnissen im Träger ab. Zu nennen sind hierbei die Biegesteifigkeiten

ten über die Länge und das Verhältnis der Biegesteifigkeit zur Torsionssteifigkeit. Dies führt dazu, dass das Stützmoment beim offenen Querschnitt größer ist als beim vergleichbaren geschlossenen Querschnitt.

- Die Einflüsse der Torsion auf den Biegemomentenverlauf werden durch einen veränderten Querkraftverlauf kompensiert. Der eingehängte Biegemomentenverlauf entspricht auch bei starker Krümmung annähernd der $q\ell^2/8$ -Parabel.
- Die Art der Lagerung bezüglich der Torsion hat ebenfalls Einfluss auf die Biegemomente.
- Die Verformungen ϑ und w_M sind auch hier abhängig von der Wahl des Querschnitts. Der Unterschied bei vergleichbaren offenen und geschlossenen Querschnitten ist aber nicht so groß wie beim Einfeldträger, da über unterschiedliche Schnittgrößenverläufe die Einflüsse aus der Krümmung bereits ausgeglichen werden.

Die elastischen Grenzlasten in Verbundträgern mit offenem Querschnitt liegen immer unter den elastischen Grenzlasten vergleichbarer Träger mit geschlossenem Querschnitt. Beim Einfeldträger reduzieren die aufzunehmenden Wölbmomente die Grenzlast. Beim Zweifeldträger reduzieren zusätzlich die tendenziell größeren Stützmomente bei der Wahl eines offenen Querschnitts die elastische Grenzlast. Die **Rissbildung des Betons** in Zug beanspruchten Bereichen wirken sich hier ausgleichend aus.

In Kapitel 5 werden **Ersatzsysteme** erläutert, entwickelt und beurteilt. Die Einflüsse der Krümmung werden an geraden Trägern mit Ersatzlasten erfasst. Es wird gezeigt, dass die Auswirkungen der Biegung auf die Torsion größer sind als die Einflüsse der Torsion auf die Biegemomente. Mit Hilfe einer Analogiebetrachtung wird dargelegt, dass Krümmungen bis zu einem Öffnungswinkel von $\varphi = 0,5$ rad (ca. 30°) unter Anwendung der Theorie II. Ordnung als Vorverformung betrachtet werden können. In herkömmlichen räumlichen Stabwerksprogrammen sind im Allgemeinen gerade Stabelemente ohne Berücksichtigung der Wölkrafttorsion (ohne ϑ') formuliert. An einem Beispiel wird gezeigt, dass bei diesen Programmen die Verläufe von Biege- und Torsionsmomenten in Durchlaufträger unter Verwendung **eines** Stabzuges nicht richtig bestimmt werden können. Die Wölkrafttorsion muss in diesem Fall über ungleiche Biegung erfasst werden. In dem vorgestellten Leitermodell nach Ramberger wird ein Vorschlag der Idealisierung gegeben und beurteilt.

In Kapitel 6 wird die **virtuelle Arbeit für ein mäßig gekrümmtes Stabelement** mit 7 Freiheitsgraden unter Berücksichtigung der Wölkrafttorsion (ϑ') aufgestellt und die Elementsteifigkeitsmatrix für FE-Berechnungen hieraus entwickelt. Unter Verwendung dieses Stabelementes können stark gekrümmte Träger modelliert werden. Die Qualität dieses Stabelementes wird an mehreren Beispielen überprüft.

In Kapitel 7 wird die Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens bei gekrümmten Verbundträgern behandelt. Das zeitabhängige Betonverhalten wird in analoger Weise wie bei geraden Verbundträgern erfasst und auf gekrümmte Träger übertragen. Aus Gründen des Gleichgewichts führen die **primären Schwindmomente** in gekrümmten Einfeldträgern zu Torsionsmomenten an den Auflagern sowie zu zusätzli-

chen Biegemomenten in Feldmitte. Das **Kriechen des Betons** infolge einer zeitlich konstanten Beanspruchung führt in gekrümmten Durchlaufträgern zu sich über die Zeit aufbauenden Umlagerungen der Biege- und Torsionsmomente. Diese müssen als zeitlich veränderliche Einwirkung betrachtet werden. Aufgrund dieser unterschiedlichen Einwirkungen wird das Kraftgrößenverfahren erforderlich. Die Größe der sich über die Zeit aufbauenden Schnittgrößenumlagerungen ist abhängig vom Verhältnis der Biegesteifigkeiten und der Biegesteifigkeit zur Torsionssteifigkeit. Die zeitliche Veränderung des Verhältnisses Biege- zur Torsionssteifigkeit hängt dabei vom gewählten Querschnitt ab. Die Veränderung fällt beim offenen Querschnitt größer aus als bei dem vergleichbaren geschlossenen Querschnitt, da die Torsionssteifigkeit beim offenen Querschnitt hauptsächlich von der Betonplatte abhängt. Bei allen Berechnungen ist zu beachten, dass auch kleine Umlagerungen der Biegemomente große Auswirkungen auf die Torsionsmomente an den Auflagern haben.

In Kapitel 8 wird verdeutlicht, dass in gekrümmten Trägern ein besonderes Augenmerk auf die Problematik der Erhaltung der Querschnittsform, die eine wichtige Voraussetzung für die Gültigkeit der Stabtheorie ist, gelegt werden muss. In gekrümmten Trägern entstehen aus der Krümmung kontinuierliche Torsionsbeanspruchungen aus der **Umlenkung von Längsspannung**. Die Einleitung dieser Torsionsbeanspruchungen kann bei nicht ausgesteiften Trägern zu großen Profilverformungen führen, die wiederum weitere Belastungen in Längsrichtung hervorrufen. Die **Erhaltung der Querschnittsform** kann durch eine genügend große Anzahl ausreichend steifer Queraussteifungen erreicht werden. Es wird gezeigt, dass für die richtige Erfassung der **profilverformenden Beanspruchung** in eine einzuleitende Torsionsbeanspruchung aus einer vertikalen und einer horizontalen Belastung unterschieden werden muss. Ein Vorschlag zur Bemessung der Queraussteifungen in gekrümmten Trägern wird gemacht.

In Kapitel 9 werden breite Brücken behandelt, deren Querschnitte sich in Querrichtung verformen können, sodass man nicht mehr von der Erhaltung der Querschnittsform ausgehen kann. Ein Modellierungsansatz von Unterweger, der speziell für den Brückenbau entwickelt wurde, wird diskutiert. Zur Modellierung gekrümmter Brücken mit offenen Querschnitten und mehreren Hauptträgern unter Verwendung eines **Trägerrostes** werden Hinweise gemacht. Vor allem in Bezug auf mittragende Breiten von Hauptträgern in gekrümmten Systemen sind weitere Untersuchungen erforderlich.

Literaturverzeichnis

- [1] AASHTO, Guide Specifications for Horizontally Curved Highway Bridges 1993. Washington, DC 2001
- [2] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin / Göttingen/ Heidelberg 1990
- [3] Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen, dünnwandigen offenen Profilen von in der Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 1965, S. 334-346 und S. 368-377
- [4] Beverungen, G.: Geometrisch nichtlineare Berechnung des Spannungs- und Stabilitätsproblems räumlich gekrümmter Stäbe. TWM Nr. 76-13, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum 1976
- [5] Beyer-Tertel, J.: Geometrische Ersatzimperfektionen für Tragsicherheitsnachweise zum Biegendrillknicken von Trägern aus Walzprofilen. Dissertation 2008
- [6] Bode, H.: Euro-Verbundbau, Konstruktion und Berechnung. Werner Verlag, 2. Auflage, Düsseldorf 1998
- [7] Bogensperger, Th.: Erweiterte Stabtheorie und der gevoutete Träger im Brückenbau. Technische Universität Graz 2000
- [8] Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Annalen der Physik und Chemie, Erg. Band 7, 1876, S. 624
- [9] Bornscheuer, F.-W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehungsvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21 (1952), Heft 1, S. 1-9
- [10] Bretthauer, G., Nötzhold, F.: Ein Beitrag zur Berechnung von gekrümmten Durchlaufträgern mit starrer und elastischer Torsionseinspannung über den Stützen. Bauingenieur 39 (1964), Heft 10, S. 402-406
- [11] Bruhns, O., Lehmann, Th.: Elemente der Mechanik II, Elastostatik. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1994
- [12] Bundesministerium für Verkehr: Straßenbrücken in Stahl-Beton-Verbundbauweise, Dokumentation 1997. Bundesministerium für Verkehr, Abteilung Straßenbau – Referat StB 25 –
- [13] Dabrowski, R.: Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil. Der Stahlbau 12 (1964), S. 364-372
- [14] Dabrowski, R.: Gekrümmte dünnwandige Träger. Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1968
- [15] Davidson, J., Ballance, S., Yoo, Ch.: Finite Displacement Behavior of Curved I-Girder Webs Subjected To Bending. Journal of Bridge Engineering, S. 213-220, August 1999

- [16] Davidson, J., Yoo, Ch.: Evaluation of Strength Formulations For Horizontally Curved Flexural Members. *Journal of Bridge Engineering*, S.200-207, August 2000
- [17] DEGES: Brückenbauwerke in den neuen Bundesländern. Verlag Ernst & Sohn 2004
- [18] DIN 1337-1: Lager im Bauwesen, Teil 1: Allgemeine Regelungen. Februar 2001
- [19] DIN 18800-5: Stahlbauten, Teil 5: Verbundtragwerke aus Stahl- und Beton. März 2007
- [20] DIN-Fachbericht 101: Einwirkungen auf Brücken. Beuth Verlag, Berlin 2003
- [21] DIN-Fachbericht 102: Betonbrücken. Beuth Verlag, Berlin 2003
- [22] DIN-Fachbericht 103: Stahlbrücken. Beuth Verlag, Berlin 2003
- [23] DIN-Fachbericht 104: Verbundbrücken. Beuth Verlag, Berlin 2003
- [24] Ding, K.: Zur Bemessung vorverformter einfeldriger und mehrfeldriger Träger nach der Biegetorsionstheorie II. Ordnung. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, Band 2, Ruhr-Universität Bochum 1996
- [25] Eggert, H., Kauschke, W.: Lager im Bauwesen. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1995
- [26] EN 1994-2: Design of composite steel and concrete structures, Rules for Bridges. Februar 2004
- [27] FEM Programmsystem ANSYS, Version 11.0, Inc. Canonsburg, USA + Release 11.0 Documentation for ANSYS
- [28] Fischer, M.: Stahlbrücken. Stahlbau Handbuch, Teil 2, Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, 2.Auflage, Köln 1985
- [29] Francke, W., Friemann, H.: Schub und Torsion in geraden Stäben. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 3. Auflage 2005
- [30] Frickel, J.: Zur Torsionsbeanspruchung von Stäben unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität. Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 4, Nr. 191, 2002
- [31] Galambos, Th., Hajjar, J., Huang, W., Pulver, B. Leon, R., Rudie, B.: Comparison of Measured and Computed Stresses in a Steel Curved Girder Bridge, *Journal of Bridge Engineering*, S. 191-199, August 2000
- [32] Göppert, K., Kratz, A., Pfoser, Ph.: Entwurf und Konstruktion einer S-förmigen Fußgängerbrücke in Bochum. *Stahlbau* 74 (2005), Heft 2, S. 126-133
- [33] Gottfeld, H.: Einflußlinien für räumlich gekrümmte Stahlbrücken. *Die Bau-technik* 6 (1933), Heft 8, S. 57- 64
- [34] Hanswille, G., Stranghöner, N.: Leitfaden zum DIN-Fachbericht 104, Verbundbrücken, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2003
- [35] Hanswille, G.: Eurocode 2, Teil 2 – Verbundbrücken (FE 15.240 R95F), Teil 1: Zur Behandlung der Einflüsse aus dem Kriechen und Schwinden des Betons. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Wuppertal 1998

- [36] Hanswille, G.; Stranghöner, N.: Leitfaden zum DIN Fachbericht 104, Verbundbrücken. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2003
- [37] Hayashikawa, T., Hirasawa, H.: Ein Vorschlag zur Bemessung einer gekrümmten Brücke mit offenem Querschnitt unter Verwendung von diagonalen Querträgern. Stahlbau 72 (2003), Heft 5, S. 316-322
- [38] Hees, G.: Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung. Die Bautechnik 1 (1972), S. 21-28
- [39] Hees, G.: Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung. Die Bautechnik 11 (1971), S. 370-377
- [40] Heil, W.: Gekrümmte Träger und Tragwerke, Stahlbau Handbuch 1, Teil A. Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH Köln, S. 287-327
- [41] Herkt, S.: Grundlagen des Verkehrswesens – Straßenwesen – Umdruck für das 2. Semester, Hochschule Bochum
- [42] Holst, K.-H.: Brücken aus Stahlbeton und Spannbeton, Entwurf, Konstruktion und Berechnung. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 3. Auflage 1993
- [43] Huang, D.: Dynamic Loading of Curved Steel Box Girder Bridges due to Moving Vehicles. Structural Engineering International 4 (2008), S. 365-372
- [44] Iliopoulos, A.: Zur rechnerischen Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons bei Verbundträgern. Shaker Verlag, Aachen 2005
- [45] Kindmann, R., Ding, K.: Alternativer Biegedrillknicknachweis für Träger aus I-Querschnitten. Stahlbau 66 (1997), Verlag Ernst & Sohn, Berlin
- [46] Kindmann, R., Frickel, J.: Elastische und Plastische Querschnittstragfähigkeit. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2002
- [47] Kindmann, R., Krahwinkel, M.: Stahl- und Verbundkonstruktionen. Teubner-Verlag, Stuttgart 1999
- [48] Kindmann, R., Kraus, M., Niebuhr, H.-J.: Stahlbau Kompakt, Bemessungshilfen, Profiltabellen, Stahleisen, 2. Ausgabe 2008
- [49] Kindmann, R., Kraus, M.: Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2007
- [50] Kindmann, R.: Neue Berechnungsformel für das I_T von Walzprofilen und Berechnung der Schubspannungen. Stahlbau 75 (2006), S. 371-347
- [51] Kindmann, R.: Stahl- und Verbundbrücken. Band 35 der Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum, September 2008
- [52] Kindmann, R.: Stahlbau, Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2008
- [53] Kindmann, R.: Starr gestützte durchlaufende Träger und Stützen - Schnittgrößen nach Theorie I. und II. Ordnung. Bauingenieur 58 (1983), S. 323-328

- [54] Kindmann, R.: Traglastermittlung ebener Stabwerke mit räumlicher Beanspruchung. TWM Nr. 81-3, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum 1981
- [55] Kindmann, R.: Unterlagen zur Lehrveranstaltung Stahlbau, Band 33 der Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum, Mai 2007
- [56] Kindmann, R.; Stracke, M.: Verbindungen im Stahl- und Verbundbau. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2003
- [57] Kollbrunner, C.F.; Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, Band 1. Springer-Verlag, 1972
- [58] Krätzig, W. B., Basar, Y.: Tragwerke 3, Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente. Springer-Verlag. Berlin 1997
- [59] Kraus, M.: Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaus. Shaker Verlag, Aachen 2005
- [60] Kraus, M.: Zur Anwendung der Wölbkrafttorsion auf Systeme mit Wölbfeldern. RUBSTAHL-Bericht 2-2004, Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum, 2004
- [61] Kreisel, M.: Zur Berechnung drehfester, konstant gekrümmter Träger mit beliebig räumlicher Belastung. Stahlbau 31/32 (1962/1963), S. 153-155 und 384
- [62] Kuhl, D., Meschke, G.: Finite Elemente Methoden II, Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, 2002
- [63] Lafffranchi, M.: Zur Konzeption gekrümmter Brücken. Institut für Baustatik und Konstruktion Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, September 1999
- [64] Laumann, J.: Zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen für Stabilitätsprobleme des Stahlbaus. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 193, VDI-Verlag, Düsseldorf 2003
- [65] Lindner, J., Bamm, D.: Berechnung von orthotropen Platten und Trägerrostten. Stahlbau-Handbuch, Teil 1A, Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln 1993
- [66] Mark, P.: Berechnung von Stahlbeton- und Spannbetonbrücken, Lehrstuhl für Stahlbeton- und Spannbetonbau, Fakultät für Bauingenieurwesen, Ruhr-Universität Bochum 2002
- [67] MATLAB, The Language of Technical Comuting, Version R2006b, The Math Works, Inc.
- [68] McElwain, B., Laman, J.: Experimental Verification of Horizontally Curved I-Girder Bridge Behavior. Journal of Bridge Engineering, S. 284-292, November 2000
- [69] Meek, J. W.: Ein praxisgerechtes Näherungsverfahren für die gemischte Torsion des doppelstegigen Plattenbalkens. Beton- und Stahlbeton 80 (1985), Heft 2, S. 46-51
- [70] Mehlhorn, G.: Der Ingenieurbau, S. 166-169. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1996

- [71] Menn, Ch.: Stahlbetonbrücken. Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1986
- [72] Merziger, G., Wirth, T.: Repetitorium der höheren Mathematik. Feldmann Verlag, Hannover 1991
- [73] Nather, F.: Verbundbrücken – Stand der Technik – Perspektiven für die Zukunft. Stahlbau 59 (1990), S. 289-299
- [74] Pauser, A.: Konstruktions- und Gestaltungskonzepte im Brückenbau, Betonkalender 2004. Verlag Ernst & Sohn, Berlin
- [75] Pelikan, W., Esslinger, M.: Die Stahlfahrbahn, Berechnung und Konstruktion. MAN-Forschungsheft Nr. 7, 1975
- [76] Petersen, C.: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für gekrümmte Träger. Bauingenieur 41 (1966), Heft 3, S. 98-102
- [77] Petersen, C.: Die Übertragungsmatrix des kreisförmig gekrümmten Trägers auf elastischer Unterlage. Bautechnik 44 (1967), Heft 8, S. 289-294
- [78] Petersen, C.: Stahlbau, Grundlagen der Berechnung und bauliche Ausbildung von Stahlbauten. Verlag Vieweg, Wiesbaden 1990
- [79] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Verlag Vieweg, Wiesbaden 2004
- [80] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1964
- [81] Pötzl, M., Maisel, J.: Entwurfsparameter für fugenlose Betonbrücken mit gekrümmtem Grundriss, Beton- und Stahlbetonbau 100 (2005), Heft 12, S. 985-990
- [82] Programmpaket DLUBAL 2008, Ing.-Software Dlubal GmbH
- [83] Programmpaket RUBSTAHL 2008, Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum, 2008
- [84] Rakowski, G.: Gekrümmte Stäbe: Statische Berechnung, Werner-Verlag, Düsseldorf 1968
- [85] Ramberger, G.: Ein weiteres Analogiesystem zur Berechnung von Biegetorsionproblemen gerader, dünnwandiger Stäbe nach Elastizitätstheorie I. Ordnung. Stahlbau 10 (1987), S. 307-312
- [86] Ramberger, M., Parzer, M., Ruzicka, M., Horn, H.: Ein Analogiesystem zur Berechnung von Biegetorsionproblemen kreisförmig gekrümmter, dünnwandiger Stäbe nach Elastizitätstheorie I. Ordnung. Bauingenieur 66 (1991), S. 223-229
- [87] Richtlinie 804: Eisenbahnbrücken (und sonstige Ingenieurbauwerke) planen, bauen und instand halten, Mai 2003
- [88] Roik, K., Bergmann, R., Haensel, J., Hanswille, G.: Verbundkonstruktionen, Betonkalender 1999, Teil 2, S. 373-510, Verlag Ernst & Sohn
- [89] Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1983
- [90] Roik, K.; Carl, J.; Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1972

- [91] Schardt, R.: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, VBT I – Lineare Probleme. Springer Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg 1989
- [92] Schlaich, J.: Brücken: Entwurf und Konstruktion, Betonkalender 2004. Verlag Ernst & Sohn, Berlin
- [93] Schleicher, W.: Modellierung und Berechnung von Stahlbrücken. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2003
- [94] Schmackpfeffer, H.: Verbundbrücken mit begehbarer Kastenträgern. Tagungsband zum Stahlverbundbrückensymposium 2004, BMV für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen
- [95] Schmidtmann, W., Wagner, P.: Die Werratalbrücke Einhausen – neue Wege beim Bau einer Autobahn-Verbundbrücke mit getrennten Überbauten. Stahlbau 74 (2005), Heft 10, S. 735-748
- [96] Schmidtmann, W., Wagner, P.: Die Werratalbrücke Einhausen – neue Wege beim Bau einer Autobahn-Verbundbrücke mit getrennten Überbauten. Stahlbau 74 (2005), Heft 10, S. 735-748
- [97] Schmitt, V.: Verbundbrücken in der Praxis, Betonkalender 2002. Verlag Ernst & Sohn, Berlin
- [98] Schmoll, J., Uhlig, R.: Zum Tragverhalten von im Grundriss kreisförmig gekrümmten Stabtragwerken. Bautechnik 67 (1990), S. 73-76
- [99] Schneider, K.: Bautabellen für Ingenieure mit Berechnungshinweisen und Beispielen. 17. Auflage, Werner Verlag, Neuwied 2006
- [100] Schütz, K.G.: Fußgängerbrücke in Verbundbauweise, VBI-Fortbildungs-Seminar Bayern, Konstruktiver Ingenieurbau, Neuerungen und Tendenzen, Band1: Stahlbau. Verband Beratender Ingenieure, Landesverband Bayern 1988
- [101] Schütz, K.G.: Statische und dynamische Berechnung ebener gekrümmter Durchlaufträger. Bautechnik 67 (1990), S. 77-84
- [102] Sedlacek, G.: Zweiachsige Biegung und Torsion, Stahlbau Handbuch 1, Teil A. Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH Köln, S. 329-378
- [103] Sennah, K., Kennedy, B.: Shear Distribution in Simply-Supported Curved Composite Cellular Bridges. Journal of Bridge Engineering, S. 47-55, May 1998
- [104] Stahlbau-Lehrprogramm, Stahl-Informations-Zentrum, Düsseldorf 2003
- [105] Steinle, A.: Praktische Berechnung eines durch Verkehrslasten unsymmetrisch belasteten Kastenträgers am Beispiel der Henschbachtalbrücke. Beton- und Stahlbetonbau 10 (1970), S. 249-253
- [106] Steinle, A.: Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger. Beton- und Stahlbetonbau 9 (1970), S. 215-222
- [107] Thieme, D.: Einführung in die FEM für Bauingenieure. Verlag für Bauwesen, Berlin 1996
- [108] Topkaya, E., Frank, K.: Behavior of Curved Steel Trapezoidal Box-Girders During Construction. Engineering Structures 26 (2004), S. 721-733

- [109] Topkaya, E., Williamson, E.: Development of Computational Software for Analysis of Curved Girders under Construction Loads. *Computers & Structures* 81(2003), S. 2087-2098
- [110] Unold, G.: Der Kreisringträger, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 255, Verlag des Vereins deutscher Ingenieure, Berlin 1922
- [111] Unterweger, H.: Aussteifungen in einzelligen Kastenträgern des Brückenbaus – Beanspruchungsermittlung und praktische Auswirkungen. *Bauingenieur* 78 (2003), S. 466-470
- [112] Unterweger, H.: Globale Systemberechnung von Stahl- und Verbundbrücken – Leistungsfähigkeit einfacher Stabmodelle. Technische Universität Graz 2001
- [113] Unterweger, H.: Globale Systemberechnung von Stahl- und Verbundbrücken – Modellbildung und Leistungsfähigkeit verbesserter einfacher Stabmodelle. Technische Universität Graz 2007
- [114] Vette, J.: Aussteifungen von Verbundbrücken mit einzelligem Kasten. Diplomarbeit, Universität Bochum 2005
- [115] Vogel, U.: Praktische Berechnung des im Grundriss gekrümmten Durchlaufträgers nach dem Kraftgrößen-Verfahren. *Die Bautechnik* 11, 1983
- [116] Volke, E.: Zur Aussteifung stählerner Kastenträger im Brückenbau – Beispiel. *Bauingenieur* 77 (2002), S. 207-210
- [117] Volke, E.: Zur Aussteifung stählerner Kastenträger im Brückenbau. *Bauingenieur* 77 (2002), S. 117-124
- [118] Volke, E.: Zur Aussteifung stählerner Kastenträger im Brückenbau. Technische Universität Wien 1999
- [119] Wansleben, F.: Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken. *Stahlbau* 21 (1952), Heft 4, S. 53-56
- [120] Wehnert-Brigdar, A., Benra, M.: EDV-Programm QSW-Mittragende Breiten, Lehrstuhl für Stahl und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum
- [121] Wehnert-Brigdar, A., Dircks, S.: EDV-Programm QST-Verbundträger-layer, Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum 2008
- [122] Wehnert-Brigdar, A.: EDV-Programm BOGEN2008. Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau, Ruhr-Universität Bochum, 2008
- [123] Wendehorst: Bautechnische Zahlentafeln. 25. Auflage, B. G. Teubner Stuttgart 1991
- [124] Wittfoht, H.: Kreisförmig gekrümmte Träger. Springer-Verlag, Berlin/ Göttingen / Heidelberg 1964
- [125] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band 2. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1965
- [126] Wolf, C.: Tragfähigkeit von Stäben aus Baustahl, Nichtlineares Tragverhalten, Stabilität, Nachweisverfahren. Shaker Verlag, Aachen 2006
- [127] Wunderlich, W., Kiener, G.: Statik der Stabtragwerke. Teubner Verlag, Stuttgart 2004

- [128] Xanthakos, P.: Theory and Design of Bridges. John Wiley & Sons, Inc.
- [129] Xia, G.: Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Verbundkonstruktionen unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Betonverhaltens. Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau, 1999
- [130] ZTV-ING: Zusätzliche Technische Vertragsbedingungen für Kunstbauten, 2003
- [131] Zureick, A., Naqib, R.: Horizontally Curved Steel I-Girders State-Of-The-Art Analysis Methods. Journal of Bridge Engineering, S. 38-47, February 1999