



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES**

GRADO EN ECONOMÍA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

TÍTULO: *Un modelo macroeconómico basado en la red sectorial
y su aplicación al caso español*

AUTOR: *Iván Rendo Barreiro*

TUTOR: *Luis A. Puch González*

CURSO ACADÉMICO: *2019 – 2020*

CONVOCATORIA: *Junio*

TABLA DE CONTENIDOS

1.	Introducción	1
2.	Literatura relacionada	3
3.	Un modelo agregado multisectorial con redes Input-Output	5
3.1.	El entorno económico	5
3.2.	Preferencias y tecnología	6
3.3.	Definiciones input-output	6
3.4.	Una extensión desagregada	7
4.	Propiedades del modelo	8
4.1.	La transmisión de los shocks	8
4.2.	Ejemplo de efectos downstream de los shocks de oferta	9
4.3.	Ejemplo de efectos upstream en shocks de demanda	11
4.4.	La simetría en la propagación de los shocks.	12
5.	Modelo empírico	14
5.1.	Introducción	14
5.2.	Matrices input-output	14
5.3.	Ecuación del modelo	15
6.	Implementación del modelo empírico	15
6.1.	La composición sectorial de la economía española	15
6.2.	Construcción de las variables	16
6.3.	Estimación del modelo empírico	17
7.	Una aplicación a la crisis COVID-19	19
7.1.	Predicción de los efectos en red de una grave crisis en la hostelería y el turismo	19
7.2.	Un análisis de la red sectorial española centrado en la hostelería y el turismo	23
8.	Conclusión	30
	Bibliografía	34
	Anexos	35

ABSTRACT. En este trabajo se presenta el modelo macroeconómico basado en los enlaces de Leontief de Acemoglu *et al.* (2015) y algunos resultados acerca de la caracterización de la propagación de los efectos de una perturbación microeconómica a través de la red sectorial. Se estima el modelo para el contexto español y se cuantifican los distintos efectos que presenta la economía en el caso de dos shocks de demanda: la variación de las exportaciones y del gasto público en cada sector. Se simula una crisis de la hostelería y el turismo inspirada por la COVID-19 y se predicen los efectos en red trasladados al conjunto de la economía. Finalmente, se complementa el estudio con un análisis de la red económica centrado en la hostelería y el turismo donde se obtiene la importancia de cada sector y otras consideraciones acerca de sus relaciones.

This paper presents the macroeconomic model based on Leontief links by Acemoglu et al. (2015) and some results about the characterization of the propagation of the effects of a microeconomic shock through the sectoral network. The model is estimated for the Spanish scenary and the different effects that the economy presents are quantified in the case of two demand shocks: the variation of exports and public expenditure in each sector. A crisis in the hostelry and tourism industries inspired by COVID-19 is simulated and the network effects transferred to the economy as a whole are predicted. Finally, the study is complemented with an analysis of the economic network focused on hostelry and tourism where the importance of each sector and other considerations about their linkages are obtained.

1. INTRODUCCIÓN

La distinción entre macroeconomía y microeconomía o la propia definición de macroeconomía no siempre es sencilla. En este sentido, Lucas se refiere a la macroeconomía como *una rendición a la tentación de aliviar la incomodidad inducida por las discrepancias entre la teoría y los hechos*, llegando a desear que el término desapareciera y que el prefijo *micro-* resultara superfluo [61]. En esa línea, Iwai, en un artículo donde dedica 15 páginas a resolver “¿Qué es la macroeconomía?” [52], establece una de las diferencias que habitualmente se dan para diferenciar las dos disciplinas: la microeconomía y la macroeconomía tratan, respectivamente, variables microeconómicas y macroeconómicas. Tanto es así, que llega a preguntarse si no sería conveniente simplemente mantener la microeconomía como *teoría económica* y *relegar la macroeconomía a unas cuantas notas en un manual estadístico acerca de cómo agregar datos microeconómicos*.

En esa escala de grises que presenta la teoría económica se enmarca este trabajo. En él se estudian ciertas variables macroeconómicas -concretamente, agregados sectoriales- asumiendo que cada una de las industrias toma sus decisiones de producción y uso de los factores de manera individual -microeconómica-

Key words and phrases. Economic networks, input-output matrices, network analysis, spanish economy, sectoral network.

como si cada sector lo conformara una única empresa. El objetivo general del trabajo es estudiar las relaciones definidas a partir de las matrices input-output entre los distintos sectores y los efectos finales observados en el conjunto de la economía a partir de la propagación por la red de distintos shocks originados a nivel sectorial. Esta idea es la que esbozan Baqaee y Farhi cuando se refieren a los *efectos macroeconómicos de las perturbaciones microeconómicas* [13].

El objetivo concreto del trabajo es estudiar las relaciones mencionadas en la red sectorial española y, en particular, predecir los efectos esperados de un shock simulado inspirado en la crisis producida por la COVID-19, centrando este estudio en dos de los sectores más importantes *a priori* para la economía española: turismo y hostelería, que servirán de origen de la perturbación.

En la teoría económica contemporánea, los modelos macroeconómicos imperantes son los denominados DSGE¹, caracterizados por presentar una fuente de incertidumbre y, sobre todo, un componente dinámico. Sin embargo, estos modelos no están exentos de polémica. Por ejemplo, Stiglitz los critica duramente debido a su bajo rendimiento y, como contraposición, alaba los buenos resultados obtenidos por Schiller y sus trabajos acerca de la burbuja inmobiliaria o los modelos de contagio financiero creados a raíz de la crisis del 2008 [73]. Blanchard establece, de manera similar, que *los modelos deben capturar lo que creemos que son las características macro esenciales del comportamiento de las empresas y las personas, y no tratar de capturar todas las dinámicas relevantes. Sólo entonces pueden servir a su propósito, seguir siendo lo suficientemente simples, y proporcionar una plataforma para las discusiones teóricas* [21].

Siguiendo esa idea y la tendencia existente² en la academia a considerar la economía como una red donde los elementos interactúan entre sí, se establece que el fin último de este trabajo es el estudio de las relaciones entre los agentes (sectores) y, por ello, se presenta un modelo estático y no dinámico. Dicho modelo es el propuesto por Acemoglu, Akcigit y Kerr [1], quienes ponen el énfasis en cuantificar los efectos de las relaciones entre sectores y utilizan como herramienta para ello la matriz inversa de Leontief. Previamente se expone otro modelo que recoge la misma idea -pero desagregado a nivel individual- y se dan algunos resultados acerca de la caracterización de la propagación de los shocks en una economía formulada a partir de una red sectorial.

Además, como complemento al estudio de la economía española, se realiza un análisis de redes centrado en la hostelería y el turismo con distintos objetivos como la detección de sectores clave en la economía o los grupos de sectores más relacionados entre sí y cuyo fin último es predecir las consecuencias de una grave crisis originada en los sectores objeto de estudio.

El trabajo se estructura como sigue. La sección 2 revisa literatura relevante al ámbito de las redes en la economía. En la sección 3 se presentan dos modelos basados en las relaciones en red, así como algunos apuntes acerca de la propagación. La sección 4 muestra las propiedades del modelo de Acemoglu *et al* especificado en la sección 3. En la sección 5 se presenta el modelo empírico utilizado en la sección 6. En la sección 6 se muestran los resultados de la estimación de dicho modelo en el caso español. En la sección 7 se explican los resultados de la simulación de un shock inspirado en la COVID-19 a través del análisis de redes y, finalmente, en la sección 8 se presenta una breve conclusión.

¹Dynamic Stochastic General Equilibrium.

²Se desarrolla con más detalle en la sección 2.

2. LITERATURA RELACIONADA

Uno de los mayores hitos en el análisis de redes fue la invención del *sociograma* por un psicólogo estadounidense, J. L. Moreno [64]. Es justamente la psicología la rama de la ciencia donde este campo está más desarrollado y, por tanto, incorpora a otros (e.g. la economía) términos y conceptos como *centralidad* o *comunidad* que podrán entenderse mejor en la sección 7. Por ello, no es de extrañar que en la teoría económica el análisis de redes esté más presente en aquellos contextos donde es más relevante la interacción, como la teoría de juegos. En este sentido, puede afirmarse que Matthew O. Jackson es el autor más importante de esta disciplina, habiendo escrito [53], el manual de referencia para muchos académicos, que posee un título que deja claro que su enfoque parte del análisis de redes sociales: *Social and Economic Networks*.

Otro aspecto que consigue explotar la formulación de una realidad dada como una red es la capacidad de propagación de cierto suceso, como es el caso del presente trabajo. Un ejemplo de esto es [11], donde los Nobel Banerjee y Duflo examinan cómo se propaga la información en una red social dependiendo de quiénes accedan a la información y si la *centralidad* citada en el párrafo anterior puede obtenerse preguntando directamente a las personas que forman la red, sin necesidad de examinar el conjunto de interacciones de la misma.

En este trabajo, sin embargo, el uso de los métodos heredados del análisis de redes sociales se restringen a la sección 7. En concreto, se especifica un modelo de equilibrio general donde los hogares vienen caracterizados de la manera usual a través de un agente representativo, mientras que los productores formarán una red cuyos elementos últimos son los sectores y serán estos los que interactúen entre sí.

Existen distintas formas de formalizar esta red y se han contemplado básicamente dos, que comparten muchos puntos, como partir del marco teórico heredado del modelo de Long y Plosser en [59] o basarse en las matrices Input-Output. Dichas propuestas son la expuesta por Baqaee y Farhi en [12] y la creada por Acemoglu, Akcigit y Kerr en [1], que finalmente se escoge por un motivo práctico: los datos de los que se dispone con facilidad en la parte de los productores se presentan a nivel sectorial. En lo que concierne a los hogares, no se tiene constancia de la existencia de microdatos con los que se consiga implementar directamente el modelo planteado por Baqaee y Farhi.

Otros trabajos comparten, con matices, las formalizaciones que parten de los artículos citados previamente. Recientemente, Elliot, Golub y Leduc examinan en [36] la producción en una oferta modelizada como una red compleja donde es posible que se deje de producir cierto bien debido a la ruptura de uno o varios enlaces críticos entre las empresas productoras, cuyos resultados varían según la topología de la red. De este mismo año es también [67], donde Pangallo crea un modelo en el que los ciclos económicos emergen de la complementariedad estratégica de los sectores de distintos países, sincronizando sus oscilaciones a través de enlaces provenientes de las matrices input-output, por medio de herramientas provenientes de la teoría de caos. De carácter más descriptivo, la sección 7 amplía el esquema del artículo de Tsekeris [76], donde analiza la estructura de red de la economía griega y las consecuencias de que presente esta tipología a nivel sectorial, partiendo de las matrices input-output. Por otro lado, Guan y Chen relacionan la estructura de la red sectorial con la innovación en la industria manufacturera china en [46].

De manera similar a Acemoglu, Akcigit y Kerr en [1], otros autores han analizado de manera empírica la red económica teniendo en cuenta la distribución geográfica, e.g. [9, 38, 74], para distintos casos. Por su parte, Lee *et al.* relacionan la topología de la red macroeconómica global con el modo en que se expanden las crisis en [58]. Los propios Baqaee y Farhi examinan en detalle los impactos macroeconómicos de los shocks microeconómicos en [13] a través del teorema de Hulten [51], al igual que lo hace Acemoglu junto a

Carvalho, Ozdaglar y Tahbaz-Salehi en [2], o el mismo Carvalho en [31]; todos ellos apoyándose en la red input-output.

Otro enfoque proveniente del análisis de redes, pero más cercano a la ciencia computacional y más marginal en cuanto a relevancia en la literatura, es el presentado en [27, 75, 26, 43, 15]. En él se trata de simular el desarrollo de parte de la economía o directamente crear una economía artificial en forma de red con el fin de estudiar los resultados de distintos sucesos o relaciones en la misma, siendo la red tan compleja como *se quiera* y cuyos elementos son agentes que pudieran tener capacidad de aprendizaje.

Literatura económica sobre la crisis de la COVID-19. En este apartado se exponen brevemente algunos de los resultados que han sido planteados hasta el momento por distintos economistas acerca de diferentes elementos relacionados con la crisis producida por la pandemia global de la COVID-19, desde la evaluación positiva de las consecuencias del shock en distintos escenarios hasta recomendaciones de política basadas en control óptimo. El objetivo es introducir el contexto en que puede enmarcarse la aplicación del modelo para el caso español propuesta en la sección 7 y las cuestiones que este obvia.

Los ya mencionados Baqaee y Farhi construyen un modelo de economías de producción anidada tipo CES³ en [14] basándose en la red sectorial input-output para la economía norteamericana. Muestran cómo las no linealidades asociadas con complementariedades en consumo y producción amplifican el efecto negativo de los shocks creando cuellos de botella en las cadenas de suministro, siendo estos efectos más intensos cuando existen problemas de reasignación o de cambio en las preferencias de los hogares que llevan a modificar la composición de la demanda. Empíricamente, postulan que las no linealidades de la crisis llegarán a suponer la amplificación del shock entre el 10 % y el 100 %, dependiendo del tamaño efectivo del shock y del horizonte temporal.

La intuición detrás de esta idea puede verse rápidamente en el caso en que Amazon es forzado a cerrar sus almacenes en Francia [5] y, a su vez, las preferencias de los hogares galos cambian, aumentando la utilidad relativa de los bienes cuando son adquiridos online.

En el caso más similar al modelo descrito en la sección 3, con funciones de producción Cobb-Douglas (i.e. $\theta = 1$, donde $\theta_i = \theta$ es la elasticidad de sustitución de los bienes de la economía), se obtiene una caída del output norteamericano de entre el 9 % y el 14 %, dependiendo de la severidad del shock.

Desde un enfoque similar al presentado en este trabajo, pero con los shocks desarrollados a partir de las consecuencias físicas del distanciamiento social, Barrot, Grassi y Sauvagnat [17] estiman, a partir de un modelo sectorial basado también en las redes input-output y las funciones de producción CES, un 5.6 % de descenso del output para la economía francesa tras seis semanas de confinamiento, siendo los sectores con mayores pérdidas aquellos afectados directamente por el cierre y los sectores proveedores (i.e. los más alejados de la demanda final).

En un intento por endogeneizar el desarrollo de la pandemia, Bodenstein, Corsetti y Guerrieri [24] aúnan en un sistema un modelo epidemiológico y uno económico multisectorial⁴ basado de nuevo en las redes input-output. Los autores llegan a la conclusión de que el coste económico del confinamiento sería mucho menor si las restricciones se repartieran de manera desigual, afectando más a los sectores no-centrales.

Existen otros trabajos relevantes acerca de esta crisis y pueden ser divididos de manera aproximada según sus objetivos. La mayoría se centran en ciertas consecuencias económicas y sociales de la misma

³*Constant Elasticity of Substitution*

⁴De hecho, bisectorial: repartiendo la actividad entre un sector *central* -produce bienes intermedios no sustituibles por bienes del otro sector- y otro conformado por el resto de la economía.

[63, 16, 47, 34, 29, 57, 25, 54], otros en el diseño óptimo de la política económica [7, 20, 45, 39, 42, 3] y varios en el análisis del *trade-off* entre salvar vidas o la economía [48, 44, 19]. Algunos autores introducen dentro del propio modelo económico la variable epidemiológica de manera endógena (generalmente a través de alguna variante del modelo SIR) [55, 32, 35] o ponen el foco en la evolución de la propia epidemia [41, 18, 10]. Dentro de cada grupo, la metodología o el enfoque de cada trabajo es muy variable. Por poner un ejemplo, en el diseño óptimo de política, Faria-e-Castro [39] ajusta un modelo DGSE donde simula diferentes políticas fiscales y corrobora que los programas de inyección de liquidez son una estrategia eficaz cuando el objetivo es mantener el empleo en un determinado sector. Por otro lado, Álvarez *et al.* [7] se basan en la teoría del control e intentan maximizar la siguiente función:

$$\int_0^{-\infty} e^{-(r+v)} \left((N(t) - (S(t) + I(t))L(t))w + \dot{N}(t)\chi + \frac{v}{r}N(t)w \right) dt$$

donde se definen las variables poblacionales N , S , I , L que refieren a la población total, la gente sana y susceptible de ser contagiada, los enfermos (de coronavirus) y el nivel de confinamiento⁵ respectivamente. Además, v es la probabilidad de encontrar una vacuna en cada instante y r es la tasa de descuento del gobierno. Los otros dos parámetros son w , la productividad de cada trabajador, y χ , el coste extra que se considera por muerte. Llegan a resultados interesantes. E.g., al acortarse la esperanza de vida de la población, el nivel de confinamiento óptimo disminuye.

En cuanto a la implementación de la crisis inspirada en la de la COVID-19 para el turismo y la hostelería en España, pueden hacerse ciertas consideraciones. La crisis sanitaria, debido a distintos factores como la estructura política y geográfica de la nación, no se ha desarrollado de la misma manera en todas las provincias, como muestra Oto-Perelías [70]. Por tanto, puede suponerse que tampoco la crisis económica será homogénea. Asimismo, podría ser muy interesante incorporar al modelo restricciones de movilidad o considerar la información procedente del mercado de trabajo para modelizar con mayor precisión el shock y obtener resultados sobre la evolución del empleo, como ya examinan Acemoglu, Akcigit y Kerr en el artículo original [1], para su caso. Trabajos acerca de esta cuestión son, por ejemplo, los publicados por Conde-Ruiz *et al.* [33] o Felgueroso *et al.* [40]. Sin embargo, el objetivo de la sección 7 es más modesto: probar la implementación del modelo y obtener resultados aproximativos *únicamente* acerca de la propagación de una crisis a través de la red sectorial.

3. UN MODELO AGREGADO MULTISECTORIAL CON REDES INPUT-OUTPUT

El modelo que se utiliza en el trabajo es el propuesto por Acemoglu, Akcigit y Kerr en [1], basado en la red sectorial y las conexiones que define la matriz input-output.

3.1. El entorno económico. Sea una economía estática de n sectores o industrias donde no existe incertidumbre. Cada uno de los sectores produce un único bien a partir del factor trabajo y de otros bienes como inputs intermedios. Todos los bienes son susceptibles de ser consumidos por el hogar representativo o utilizados como inputs para producir otros bienes. Existe un único hogar representativo, que es dotado con el factor trabajo y de preferencias racionales, que trata de maximizar su utilidad eligiendo el consumo y la cantidad de trabajo que dedica a cada sector. Los sectores también tratan de maximizar su beneficio y los precios de los bienes de consumo y del trabajo se deciden competitiva y simultáneamente en los mercados (libres y perfectos).

⁵La variable de control.

3.2. Preferencias y tecnología. Cada industria $i = 1, \dots, n$ produce siguiendo una función Cobb-Douglas:

$$y_i = e^{z_i} l_i^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{a_{ij}} \quad (3.1)$$

donde x_{ij} es la cantidad de producto del sector j utilizado como input para la producción de la industria i , l_i son las unidades de trabajo y z_i es un shock de productividad neutral a la Hicks. Se asume que $\forall i, \alpha_i^l > 0$ y que $a_{ij} \geq 0$ para todo j , siendo $a_{ij} = 0$ el caso donde el producto proveniente de la industria j no es utilizado como input en i .

Asimismo, suponemos, con el fin de mantener rendimientos constantes a escala

$$\alpha_i^l + \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad (3.2)$$

Incorporando la demanda del resto de industrias, la condición de vaciado de mercado es la siguiente:

$$y_i = c_i + \sum_{j=1}^n x_{ji} + G_i \quad (3.3)$$

id est, el output (y_i) puede destinarse al consumo final (c_i), a input intermedio para el bien j (x_{ji}), o a consumo público (G_i)⁶.

Las preferencias del hogar representativo vienen dadas por una función de utilidad dependiente del consumo y del trabajo:

$$u(c_1, \dots, c_n, l) = \gamma(l) \prod_{i=1}^n c_i^{\beta_i} \quad (3.4)$$

donde $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, y cada $\beta_i \in (0, 1)$ designando el peso normalizado del bien i en las preferencias del hogar representativo y $\gamma(l)$ es una función diferenciable tal que $\frac{\partial \gamma(l)}{\partial l} < 0$, capturando la desutilidad del trabajo.

El gobierno impone un impuesto *lump-sum* de cantidad T para financiar sus gastos. Si se denota el precio del bien i como p_i , se da la identidad $\sum_{i=1}^n p_i G_i = T$. Dado que los hogares tienen como única fuente de ingresos la venta de la fuerza de trabajo, su restricción presupuestaria puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^n p_i c_i = w l - T \quad (3.5)$$

En el equilibrio competitivo de la economía, los hogares maximizan su utilidad tomando los precios como dados y satisfaciendo las condiciones de vaciado de mercado. Las cantidades dependientes del gobierno (T y G_i) se toman como variables exógenas en el modelo y el salario w se define numerario, esto es, $w = 1$. Desde (3.1), resolviendo el problema de maximización de la empresa⁷, se llega a la condición:

$$\frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i} = a_{ij} \quad (3.6)$$

3.3. Definiciones input-output. A partir de estos términos a_{ij} se define la matriz \mathbf{A} de dimensión $n \times n$ tal que a_{ij} sea el elemento de la fila i y la columna j . Se define asimismo la **matriz inversa de Leontief** (\mathbf{H}):

$$\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

con los valores h_{ij} representando la influencia directa e indirecta de un input j sobre la producción en i . De manera análoga se define la matriz $\hat{\mathbf{A}}$, considerando los componentes $\hat{a}_{ij} = \frac{p_i x_{ji}}{p_i y_i}$ y, a su vez, la matriz inversa de Leontief equivalente $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}$, cuyos elementos \hat{h}_{ij} representan igualmente los efectos

⁶Asumimos que el gasto es no productivo y que el destino del mismo no interfiere de ninguna manera en las decisiones de los hogares.

⁷Véase el anexo 3c.

directos e indirectos sobre la producción en i , pero en este caso partiendo de un sector j que toma como input intermedio el bien i .

3.4. Una extensión desagregada. Baqaee y Farhi proponen en [13] un modelo basado de igual manera en las matrices (o redes) input-output, pero esta vez los agentes de la economía son individuales. Esto es, en lugar del hogar representativo se tienen C consumidores, N productores⁸ de N bienes y F factores con funciones de oferta L_f . Bienes y factores se distinguen porque los bienes se producen combinando bienes y factores mientras que los factores son producidos *ex nihilo*. Consumidores y productores se diferencian en que los primeros son dotados de la propiedad de los factores.

El objetivo Baqaee y Farhi en este artículo es obtener resultados acerca de la propagación de ciertas perturbaciones y comprobar teóricamente con qué distorsiones se rompe la simetría en la propagación de los shocks. En el presente trabajo solo concierne la especificación del modelo⁹, que sigue a continuación.

Hogares. Cada consumidor $c \in C$ presenta preferencias $u_c(D_c(c_{c1}, \dots, c_{cN}), l_{c1}, \dots, l_{cf})$ donde D_c es homotética¹⁰. Así, la restricción presupuestaria para cada consumidor puede ser especificada como:

$$\sum_{i=1}^N (1 + \tau_{ck}) p_i c_{ci} = \sum_{f=1}^F w_f l_{cf} + \pi_c + \tau_c$$

donde p_i y c_{ci} son respectivamente los precios a los que compra el consumidor y las cantidades compradas. w_f, l_{cf} son los precios y cantidades del factor f propiedad de c . Finalmente, π_c, τ_c, τ_{ck} corresponden a los beneficios, ingresos netos obtenidos por los impuestos y subsidios y los impuestos al consumo en un producto k para el consumidor c . Además, $l_{cf} = G_{cf}(w_f, Y_c)$, i.e., la oferta de factores es derivada desde una función donde intervienen los precios de los factores y el índice de consumo Y_c .

Productores. Todo bien k se produce con una tecnología con rendimientos constantes o decrecientes a escala. Sin pérdida de generalidad, se asumen constantes a escala. Así, la función de coste para cada productor se establece como sigue:

$$\frac{y_k}{B_k} C_k((1 + \tau_{k1})p_1, \dots, (1 + \tau_{kN})p_N, (1 + \tau_{k1}^f)w_1, \dots, (1 + \tau_{kF}^f)w_F)$$

donde y_k es el output total y C_k/B_k el coste marginal de producir el bien k . El término B_k define un shock de productividad neutral a la Hicks.

Equilibrio. El equilibrio general se define como usualmente. Dadas ciertas productividades y markups, el equilibrio es un conjunto de precios p_i , elecciones de inputs intermedios x_{ij} , elecciones de input de factores l_{if} , outputs y_i y demandas finales c_{ci} , para los cuales: cada productor optimiza, cada hogar optimiza y los mercados de bienes y factores se vacían.

Definiciones input-output. Baqaee y Farhi definen algunas medidas basadas en la red (o matriz) input-output que sirven para caracterizar los cambios en el producto total. Muchas de las siguientes expresiones tienen su análogo en el modelo que se utiliza en este trabajo, propuesto por Acemoglu, y el de Baqaee y Farhi son muy similares en su concepción, divergiendo principalmente en la unidad de producción (la empresa frente al sector) y en la unidad del agente consumidor (un único hogar representativo y agentes

⁸Individuales, no sectores.

⁹En Baqaee y Farhi (2019), los autores incorporan algunas modificaciones según el objetivo de la sección. Aquí se presenta el modelo básico.

¹⁰Se dice que unas preferencias son *homotéticas* si pueden representarse a través de una función homogénea de grado 1.

heterogéneos *individuales* respectivamente). Así, se define la **participación en el gasto final** del bien i para un consumidor c como:

$$b_{ci} = \frac{p_i c_{ci}}{\sum_{i \in N} p_i c_{ci}} \quad (3.7)$$

siendo p_i el precio del bien i y c_{ci} la cantidad consumida por el consumidor c de dicho bien.

Dados los precios p_j y p_i , el output del bien i , y_i y las asignaciones intermedias x_{ij} , se denomina Ω a la **matriz HA-IO**¹¹ cuyos elementos vienen definidos por:

$$(\Omega)_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i} \quad (3.8)$$

esto es, el elemento (i, j) es igual al gasto de i en inputs de j como proporción de sus ingresos totales¹².

Sea \mathbf{A} la matriz HA-IO, se define la **matriz inversa de Leontief HA-IO** como:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3.9)$$

A partir del producto total (GDP)¹³, se define el **peso de Domar** como el porcentaje de las ventas del productor i como fracción del GDP:

$$\lambda_i \equiv \frac{p_i y_i}{\text{GDP}} \quad (3.10)$$

Un resultado importante es aquel que relaciona la inversa de Leontief y los pesos de Domar tal que:

$$\lambda^T = b^T \mathbf{H} = b^T \mathbf{I} + b^T \mathbf{A} + b^T \mathbf{A}^2 + \dots \quad (3.11)$$

Finalmente, los autores definen **el cambio en el GDP real y el cambio del deflactor del GDP** respectivamente como:

$$d \log Y = \sum_i b_i d \log c_i \quad (3.12)$$

$$d \log P = \sum_i b_i d \log p_i \quad (3.13)$$

4. PROPIEDADES DEL MODELO

4.1. La transmisión de los shocks. En cuanto a la transmisión de los shocks en el modelo, se establece ahora el resultado fundamental que comprobaremos empíricamente para el caso español.

Proposición 1.

(1) *El impacto de un shock sectorial de productividad (en general, de oferta) en el output del sector i es:*

$$d \ln y_i = dz_i + \sum_{j=1}^n (h_{ij} - \delta_{ij}) \times dz_j \quad (4.1)$$

donde δ_{ij} son las deltas de Kronecker.

¹¹HA: *Heterogeneous Agents*.

¹²Esta definición podría escribirse basada en el coste y no en los ingresos si hubiera algún *markup* actuando en la economía.

¹³Se considera $\text{GDP} = \sum_{i \in N} \sum_{c \in C} p_i c_{ci}$.

(2) Suponiendo $\gamma(l) = (1-l)^\lambda$, el impacto de un shock en el gasto del gobierno (en general, de demanda) en el output del sector i es:

$$d \ln y_i = \frac{d\tilde{G}_i}{p_i y_i} + \sum_{j=1}^n (\hat{h}_{ji} - \delta_{ij}) \times \frac{1}{p_j y_j} \times d\tilde{G}_j - \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ji} \times \frac{1}{p_j y_j} \times \frac{\beta_j}{1+\lambda} \times \sum_{k=1}^n d\tilde{G}_k \quad (4.2)$$

donde $\tilde{G}_j = p_j G_j$ es el gasto nominal del gobierno en el sector j ; \hat{h}_{ij} es el elemento (i, j) de la matriz inversa de Leontief $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}$ y $\hat{\mathbf{A}}$ es la matriz de elementos $\hat{a}_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_j y_j}$, i.e., las ventas de la industria j al sector i normalizadas por el total de ventas del sector i .

La demostración de ambas partes de la proposición puede consultarse en el anexo 4a. La ecuación (4.1) implica que el shock de oferta producido en la industria i no acarrea efectos en sus proveedores, esto es, no hay efectos *hacia arriba* o *upstream*, sino que todos los efectos serán *hacia abajo* o *downstream*. Análogamente, la ecuación (4.2) indica que los shocks de demanda solo se propagan a los proveedores de los inputs que compra el sector donde aparece el shock. Esto es, los shocks de demanda se propagan *hacia arriba* o *upstream*.

Para comprender mejor el resultado de la proposición 1, se estudian los términos que componen ambas ecuaciones. En cuanto a (4.1), está claro que dz_i es el *efecto propio* (directo) que afecta al sector en que se produce el shock y $\sum_{j=1}^n (\hat{h}_{ji} - \delta_{ij}) \times dz_j$ el proveniente de la propagación de dicho shock a través de la red, es decir, que alcanza o retorna al sector inicial después de propagarse via provisión entre sectores. La ecuación (3.8) presenta los términos análogos de efectos propios y de red, siendo estos $\frac{d\tilde{G}_i}{p_i y_i}$ y $\sum_{j=1}^n (\hat{h}_{ji} - \delta_{ij}) \times \frac{1}{p_j y_j} \times d\tilde{G}_j$ respectivamente. Sin embargo, posee un último término negativo: $-\sum_{j=1}^n \hat{h}_{ji} \times \frac{1}{p_j y_j} \times \frac{\beta_j}{1+\lambda} \times \sum_{k=1}^n d\tilde{G}_k$. Esta componente refleja los efectos provenientes de la restricción presupuestaria. Esto es, el aumento del gasto del gobierno, al ser financiado por el hogar representativo, afecta negativamente a los recursos que posee este para consumir. El parámetro β_j captura el hecho de que el consumo privado del bien j varía proporcionalmente al porcentaje del presupuesto que se destina a dicho bien. Nótese también que, si $\gamma' = 0$ la oferta de trabajo no responde al shock y $\lambda = 0$, siendo máximo el efecto en el output del sector. Si, por el contrario, existe respuesta positiva por parte de la oferta de trabajo, el efecto del shock se compensa parcialmente por el aumento de producción en la economía.

Un apunte importante que debe realizarse es que en las ecuaciones no actúan los elementos de las matrices \mathbf{A} y $\hat{\mathbf{A}}$, sino que lo hacen los de sus respectivas matrices inversas de Leontief. Esto sucede porque las matrices de Leontief no solo recogen los efectos directos sino también los indirectos. Puede pensarse, por ejemplo, en un shock negativo que hace que el precio del bien j aumente y su cantidad producida disminuya. Para los sectores que utilizan el bien j como input, su producción se encarecerá, por lo que subirá el precio de su propio bien y disminuirá su output, y así sucesivamente. Estos son los efectos que recoge la inversa de Leontief. En los siguientes puntos se proponen dos ejemplos donde las economías presentan efectos *downstream* y *upstream* respectivamente.

4.2. Ejemplo de efectos downstream de los shocks de oferta. Considérese una economía con únicamente tres sectores como la que aparece en la figura 4.1. tal que el sector 1 es el único consumidor del sector 2, el sector 2 lo es del sector 3 y el sector 3 del sector 1, lo que podemos denominar una economía cíclica. Las

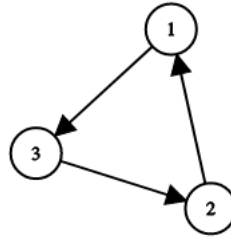
funciones de producción de cada uno de los sectores son las siguientes

$$y_1 = e^{z_1} l_1^{\alpha_l^1} x_{12}^{a_{12}}, \quad y_2 = e^{z_2} l_2^{\alpha_l^2} x_{23}^{a_{23}}, \quad y_3 = e^{z_3} l_3^{\alpha_l^3} x_{31}^{a_{31}} \quad (4.3)$$

suponiendo que se cumple la condición de rendimientos constantes a escala. Se sigue directamente de la proposición 1 que la variación del output del sector $i = 1$ ¹⁴ resulta

$$d \ln y_1 = \frac{dz_1 + a_{12} dz_2 + a_{12} a_{23} dz_3}{1 - a_{12} a_{23} a_{31}} \quad (4.4)$$

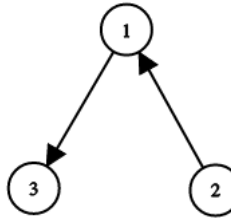
FIGURE 4.1. Economía del ejemplo 1.



Esta expresión demuestra que el output del sector 1 depende de los shocks producidos en el resto de sectores, además de en el propio, debido puramente a los efectos downstream. Así, el shock del sector 2 afecta directamente al sector 1 via provisión y el shock del sector 3 afecta al sector 1 a través del sector 2, no como un efecto upstream. A eso se debe que dz_3 tenga un coeficiente asociado $a_{12}a_{23}$, esto es, el efecto se diluye en cada paso, llegando con menos fuerza cuanto mayor sea la lejanía entre sectores.

Para visualizar mejor que efectivamente no se produce un efecto upstream, supongamos una economía ahora como la de la figura 4.2, donde se elimina la compra de inputs del sector 3 por parte del sector 2.

FIGURE 4.2. Economía del ejemplo 1 sin el enlace (3,2).



En este caso, de la proposición 1 se sigue que la variación del output del sector 1 viene dada por:

$$d \ln y_1 = dz_1 + a_{12} dz_2$$

¹⁴El ejemplo se expone para el sector 1, pero se puede pensar que este es cualquiera de los tres sectores y que el subíndice 2 refiere al sector proveedor del primero y el subíndice 3 al comprador.

esto es, existe propagación desde el sector 2 como proveedor directo de 1, pero no desde la industria 3, dado que no se puede llegar desde él hasta 1 mediante enlaces hacia abajo. Aunque efectivamente compartan un enlace upstream, este no consigue propagar los posibles efectos de un shock en el sector 3 al 1.

Extendiendo el ejemplo 1, pensando en una economía “cíclica” de n industrias donde el sector 1 es el único comprador del sector 2, el sector 2 lo es del 3 y así sucesivamente hasta que el sector n lo es del 1, la variación del output del sector 1 viene dada por

$$d \ln y_1 = \frac{dz_1 + a_{12}dz_2 + a_{12}a_{23}dz_3 + \dots + \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}dz_n}{1 - \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}a_{n1}}$$

El porqué de que no existan efectos *upstream* debe buscarse en la naturaleza de las funciones Cobb-Douglas, que utilizamos para representar las preferencias y las posibilidades de producción. Cualquier perturbación en las industrias proveedoras dependerá del balance entre el efecto en la cantidad (se produce menos en la industria j tras un efecto de productividad negativo) y un efecto en el precio (cada unidad de la industria j ahora es más cara). Con las preferencias y tecnologías Cobb-Douglas, estos efectos se cancelan exactamente.

4.3. Ejemplo de efectos upstream en shocks de demanda. Considérese de nuevo una economía con tres sectores como la descrita anteriormente que aparece en la figura 4.1., pero esta vez con sector público, cuyos shocks de gasto se expresan nominalmente como $d\tilde{G}_i$. Suponemos que no existen shocks de productividad, i.e. $dz_i = 0$ y que la participación de cada sector en la economía es equitativa: $\beta_i = \frac{1}{3}$, para $i = 1, 2, 3$. En este caso, la variación del output nominal del sector 1 puede derivarse como

$$d\tilde{y}_1 = \frac{d\tilde{G}_1 + a_{23}a_{31}d\tilde{G}_2 + a_{31}d\tilde{G}_3 - \frac{1+a_{31}+a_{23}a_{31}}{3(1+\lambda)}[d\tilde{G}_1 + d\tilde{G}_2 + d\tilde{G}_3]}{1 - a_{12}a_{23}a_{31}}$$

Así, puede observarse que, de nuevo, los shocks de gasto público de los tres sectores afectan a la variación del output nominal en el sector 1. En particular, el shock del sector 2 afecta al sector 1 indirectamente, a través de su impacto en el sector 3. Es por ello que esa componente lleva asociada un coeficiente $a_{23}a_{31}$, similar al caso del ejemplo 1.

De manera análoga a la comprobación del ejemplo 1, piénsese ahora en la economía de la figura 4.2. en la que los sectores 2 y 3 no están conectados. La variación del output del sector 1 queda entonces

$$d\tilde{y}_1 = d\tilde{G}_1 + a_{31}d\tilde{G}_3 - \frac{1+a_{31}}{3(1+\lambda)}[d\tilde{G}_1 + d\tilde{G}_2 + d\tilde{G}_3]$$

Por ello, un shock en el sector 2 solo afecta al sector 1 via la restricción presupuestaria, no a través de la red sectorial input-output.¹⁵

La intuición de por qué los shocks de demanda solo se propagan *upstream* sigue a continuación junto otras notas relevantes para el trabajo.

A partir de un shock positivo de gasto público, las industrias afectadas deberán incrementar su producción para hacer frente a una demanda incrementada, pero esto solo es posible si los sectores proveedores de sus inputs también aumentan su producción (proporcionalmente a la importancia que tiene el enlace al sector afectado entre el total de ventas), presentando así efectos *upstream*. Sin embargo, al darse en la economía rendimientos constantes a escala, los precios son independientes de la parte de la demanda. El shock del gobierno produce un aumento de la producción, pero no del precio. Por ello, el cambio en los precios relativos

¹⁵En los anexos 4b y 4c pueden verse las derivaciones de las ecuaciones de estos ejemplos.

-que era la causa de propagación *downstream* en el shock de productividad- no se da, eliminado la existencia de propagación hacia abajo en este tipo de shocks.

Dos consideraciones deben anotarse en relación a la implementación del modelo. Como se ve en las ecuaciones descritas, el marco teórico únicamente contempla shocks contemporáneos, por lo que en la práctica se deben usar retardos bajos ($L = 0, 1, 2$) en las variables de los shocks¹⁶. Finalmente, debe apuntarse que los shocks de importaciones son cualitativamente iguales a los shocks de demanda del gobierno, por ello no se tratan de manera diferenciada en esta sección, sirviendo estas ecuaciones previas como modelo teórico.

4.4. La simetría en la propagación de los shocks. Ejemplo de la economía vertical.

En [12], Baqaee y Farhi establecen una versión (más extensa) de la siguiente proposición a partir del modelo definido en la sección 3.4:

Proposición 2.

Considérese una economía como la descrita en la sección 3.4., eficiente, sin markups. Para dos productores (o sectores) i y j , se da la propagación simétrica

$$\frac{d\lambda_j}{dz_i} = \frac{d\lambda_i}{dz_j} \quad (4.5)$$

si, existiendo un único factor l , las preferencias pueden escribirse como

$$u(D(c_1, \dots, c_n), l)$$

*donde D es homogénea de grado 1.*¹⁷¹⁸

La demostración de esta proposición puede verse en el anexo 4e y parte de la misma base que el resultado obtenido por Acemoglu, Carvalho *et al.* de [2]. No debe confundirse que exista propagación simétrica con que un shock se transmita de exactamente igual manera *upstream* y *downstream*, pues esto lógicamente contradiría todo lo expuesto hasta ahora. En términos generales puede decirse que, dado que el peso de Domar se define con la multiplicación en el numerador $p_i y_i$, los efectos *upstream* suceden via precios y los *downstream* via output, pero esto se verá mejor con un ejemplo:

Ejemplo 3. (Propagación simétrica en una economía vertical). *Considérese una economía **vertical** tal que los hogares (H) consumen el bien producido por el sector 1, este utiliza como input el producto de la industria 2, esta del 3 y así sucesivamente hasta alcanzar la industria inicial n , que únicamente utiliza el factor l y es el único que lo obtiene, como en la figura 4.3. Sea Y el producto real de la economía, en [13] se demuestra (como teorema de Hulten)¹⁹ que*

$$\frac{d \ln Y}{dz_k} = \lambda_k \quad (4.6)$$

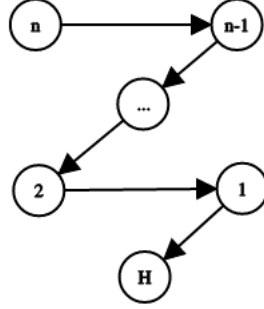
¹⁶Considerando una versión dinámica del modelo donde no existan enlaces intertemporales adicionales, únicamente dz_{it} es relevante para el output en el instante t . Sin embargo, en presencia de inversiones irreversibles u otros enlaces intertemporales a nivel sectorial, las expectativas de shocks futuros toman relevancia.

¹⁷Recuérdese que λ_i representa el peso de Domar de la empresa i , i.e.: $\lambda_i = \frac{p_i y_i}{GDP}$, igualmente $\lambda_l = \frac{wl}{GDP}$

¹⁸Se prefiere escribir z_i como shock neutral en lugar del original $\ln A_i$.

¹⁹Todas las demostraciones, adecuadas a este trabajo, pueden verse en el anexo junto a ciertas definiciones necesarias, como las del operador de $Cov_{\mathbf{A}^{(i)}}(\mathbf{C}_{(j)}, \mathbf{D}_{(k)})$.

FIGURE 4.3. Economía del ejemplo 3 (vertical).



por tanto, en la economía vertical con competencia perfecta (sin markups):

$$\frac{d \ln Y}{dz_k} = \lambda_k = \frac{p_k y_k}{\text{GDP}} = 1, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Las elasticidades del porcentaje de ventas (pesos de Domar) del sector i vienen dados por²⁰:

$$\frac{d \ln \lambda_i}{dz_k} = 0 \quad (4.8)$$

El hecho de que la ecuación anterior se anule puede verse a través de que $\lambda_i = 1 \forall i$ en la economía descrita, por lo que directamente $d \ln \lambda_i = 0$. En cuanto a la caracterización de los precios, sus elasticidades vienen dadas por

$$\frac{d \ln w}{dz_k} = \frac{d \ln \lambda_l}{dz_k} + \frac{d \ln Y}{dz_k} = \lambda_k = 1 \quad (4.9)$$

que se deriva formalmente de (4.6) y del caso general de (4.8). Puede intuirse sin embargo desde que, en competencia perfecta y sin fricciones, el factor f se remunera exactamente con su participación en la economía. En este caso, solo existe un factor, el trabajo (l). La elasticidad del precio para un sector k y un solo factor distingue el caso en que la industria donde se produce el shock está más arriba o abajo en la cadena que el sector k ²¹:

$$\frac{d \ln p_i}{dz_k} = -h_{ik} + \lambda_k = \begin{cases} 1 & i > k \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.10)$$

Finalmente, las elasticidades de las ventas y del output a los shocks vienen dadas por

$$\frac{d \ln p_i y_i}{dz_k} = \frac{d \ln \lambda_i}{dz_k} + \frac{d \ln Y}{dz_k} = 0 + 1 = 1 \quad (4.11)$$

y, dado que se da para cualquier k , la propagación no es solo simétrica en esta economía, sino que es fija: siempre es proporcional al shock, independientemente de los demás factores. Esta ecuación puede ser obtenida

²⁰Denotando por θ_j a la elasticidad de sustitución del bien j , se tiene para una economía general donde existe un único factor l que

$$\sum_{j=1}^n (\theta_j - 1) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \text{Cov}_{\mathbf{A}^{(j)}}(\mathbf{H}_{(k)}, \mathbf{H}_{(i)}) - \sum_{j=1}^n (\theta_j - 1) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \text{Cov}_{\mathbf{A}^{(j)}}(\mathbf{H}_{(l)}, \mathbf{H}_{(i)}) \frac{d \ln \lambda_l}{dz_k}$$

Veanse los trabajos de Baqaee y Farhi al respecto [12, 13], (2017a y 2019).

²¹La versión general, para un conjunto de factores $\{f_1, \dots, f_p\} = F$, de nuevo de Baqaee y Farhi:

$$\frac{d \ln p_i}{dz_k} = -h_{ik} + \sum_{g \in F} h_{ig} \frac{d \ln w_g}{dz_k}$$

directamente desde el hecho $p_i y_i = Y \lambda_i$, derivando tras tomar logaritmos. Asimismo, teniendo en cuenta la tautología $y_i = p_i y_i / y_i$ y la ecuación anterior, se obtiene la elasticidad de las ventas,

$$\frac{d \ln y_i}{dz_k} = \frac{d \ln p_i y_i}{dz_k} - \frac{d \ln p_i}{dz_k} = \begin{cases} 1 & k > i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.12)$$

Así, a partir de (4.10), (4.11) y (4.12) se observa el hecho anticipado: la propagación es simétrica en cuanto al total de ventas, pero siendo la propagación hacia abajo via output y hacia arriba via precios y siempre unitario, por lo que la propagación es total a toda la red (cadena). Sea un shock productivo positivo en k , el aumento de la demanda de inputs en el sector $k-1$ hace que este suba el precio de su bien proporcionalmente, mientras que el sector $k+1$ aumenta sus compras, también proporcionalmente.

5. MODELO EMPÍRICO

5.1. Introducción. En esta sección se presenta el modelo empírico y posteriormente se aplica al caso español para dos shocks de demanda: gasto público y exportaciones. Todo el trabajo está implementado en Python a través de la plataforma Google Colab, con distintos cuadernos que pueden consultarse en GitHub²². La sección estará dividida en distintas partes. En la primera, se muestra cómo se crean las matrices input-output ($\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}$ principalmente). En la segunda, se traslada la ecuación del modelo teórico a una ecuación *implementable* en la práctica y se describe cómo se crean las variables a partir de los datos disponibles. En la tercera, se presentan los dos shocks estudiados y los resultados obtenidos. Finalmente, en una cuarta, se realiza una pequeña predicción sobre los posibles efectos para la economía de la caída del output en el sector turístico y hostelero asociada al cierre *total* de ambos (por ejemplo, por una situación similar a la crisis de la COVID-19).

5.2. Matrices input-output. La primera matriz input-output que se define es \mathbf{A} y a partir de los coeficientes de esta se crean las demás. En la teoría se definieron los coeficientes $a_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i}$, es decir, la proporción que corresponde a las ventas del bien j al sector i como input sobre el total de ventas del sector i . Así, la matriz \mathbf{A} empírica es la traducción directa de esta definición y, a partir de las tablas *origen y destino*²³ como se describe en [37], pueden ser computados los coeficientes

$$a_{ij} \equiv \frac{\text{Ventas}_{j \rightarrow i}}{\text{Ventas}_i}$$

y denominamos a esa \mathbf{A} empírica como \mathbf{A}_{in} . De la misma manera, para la matriz $\hat{\mathbf{A}}$ definida por sus coeficientes $\hat{a}_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i}$, se computa

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\text{Ventas}_{i \rightarrow j}}{\text{Ventas}_i} = a_{ji} \frac{\text{Ventas}_j}{\text{Ventas}_i} \quad (5.1)$$

y la matriz resultante se denomina \mathbf{A}_{out} .²⁴ Las matrices \mathbf{H} y $\hat{\mathbf{H}}$ se computan simplemente como las inversas de \mathbf{A}_{in} y \mathbf{A}_{out} , nombrándolas respectivamente como \mathbf{H}_{in} y \mathbf{H}_{out} .

La primer componente en el análisis de correlación canónica entre \mathbf{A}_{in} y \mathbf{A}_{out} devuelve, lógicamente, una correlación total (de 1), debido a (5.1). Sin embargo, si tomamos las matrices como dos vectores $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn-1}, a_{nn})$ y $(\hat{a}_{11}, \hat{a}_{12}, \dots, \hat{a}_{nn-1}, \hat{a}_{nn})$ respectivamente, la correlación lineal entre ambos es de

²²<https://github.com/i-rb/tfgecon>. Lease la nota al repositorio del Anexo 0.

²³En el caso español, estas pueden encontrarse en el INE, siendo las últimas disponibles las de 2016. En el trabajo se utiliza directamente la tabla 1 de las representaciones simétricas disponible en el repositorio de GitHub y en https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736177058&menu=resultados&idp=1254735576581

²⁴En el cuaderno se calcula con la primera igualdad y se comprueba con la segunda.

0.264 y de Spearman 0.226, que podemos entender como una correlación moderada. Esto, según apuntan Acemoglu *et al.* en [1] es importante porque una correlación muy alta significaría que la introducción de shocks podría llegar a crear efectos de red espurios cuando se omitiera algún impacto propio de mayor orden que los presentes en el modelo.

El hecho de que estas matrices sean un componente estático (y muchas veces pasado, debido a su carácter quinquenal) del modelo no debería ser un problema, como muestran Acemoglu *et al.* en [2], dado que las tablas input-output son suficientemente estables en el tiempo. De hecho, este suceso no se produciría si la tecnología presente fuera distinta de las Cobb-Douglas y, por tanto, la aproximación a través de esta se puede decir que es buena. Puede añadirse que, en la práctica, las empresas siguen una inercia que es costosa de superar y, por ello, los cambios en las matrices input-output son lentos y tardíos.

5.3. Ecuación del modelo. Con el fin de estimar los efectos de la propagación en red descritos teóricamente en la sección anterior, se debe definir una ecuación equivalente a (4.1) y (4.2) con variables explicativas observables y coeficientes estimables en la práctica. De esa manera, desde las ecuaciones mencionadas se especifica la **ecuación del modelo**:

$$\begin{aligned} \nabla \ln Y_{i,t} = & \sum_{k=1}^{L_y} \psi_k \nabla \ln Y_{i,t-k} + \sum_{k=1}^{L_o} \beta_k^{own} \text{Shock}_{i,t-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{L_u} \beta_k^{up} \text{Upstream}_{i,t-k} + \sum_{k=1}^{L_d} \beta_k^{down} \text{Downstream}_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde la endógena, en diferencias de logaritmos, es alguna representación del output del sector i en el instante t , generalmente el valor añadido real; las variables (de propagación) Shock, Upstream y Downstream se definen como los efectos que percibe la industria i en cierto instante t , procedentes respectivamente de: un shock producido en el propio sector i , un shock producido en las industrias proveedoras que afecta via *downstream* y un shock producido en las industrias consumidoras que afecta via *upstream*; $\varepsilon_{i,t}$ son las perturbaciones aleatorias del modelo y $\psi_1, \dots, \psi_{L_y}, \beta_1^{own}, \dots, \beta_{L_o}^{own}, \beta_1^{up}, \dots, \beta_{L_u}^{up}, \beta_1^{down}, \dots, \beta_{L_d}^{down}$, los parámetros a estimar, debiendo elegirse previamente $(L_y, L_o, L_u, L_d) \in \mathbb{N}_0^4$, el número de retardos significativos que se introducen en el modelo²⁵. En los siguiente puntos se discute cómo se concretan las variables en detalle y los datos utilizados para ello, así como el método empleado para la estimación de los parámetros regresión.

6. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EMPÍRICO

6.1. La composición sectorial de la economía española: la red sectorial. Lo primero que se debe definir es el dominio de las variables, tanto temporal como sectorial. En el caso español, los sectores vienen determinados según la clasificación de actividades económicas provista oficialmente: la CNAE²⁶, de dos dígitos²⁷. Por ejemplo, en esta clasificación de 64²⁸ sectores, el sector 22 corresponde a la “*fabricación de productos de caucho y plásticos*” y el 24 a “*metalurgia; fabricación de productos de hierro, acero y transformaciones*”.

²⁵Nótese que, por coherencia con el modelo teórico, estos parámetros no deben ser mucho mayores de 2.

²⁶Clasificación Nacional de Actividades Económicas, en vigor desde el 1 de enero del 2009 y promulgada en el Real Decreto 475/2007, de 13 de abril de 2007.

²⁷Técnicamente se denomina la agrupación A64, o *división*, en una escala Actividad-División-Grupo-Clase.

²⁸Realmente, los sectores 63 y 64 no tienen enlaces con los demás, por lo que se eliminan del análisis.

En cuanto a la variable temporal, los datos disponibles para la construcción de las variables son observaciones anuales entre el año 1997 y 2017, último año del que se dispone el valor añadido bruto para todos los sectores. Asimismo, algunas observaciones pueden llegar a *perderse* para la regresión debido a la utilización de variables retardadas.

6.2. Construcción de las variables. Las variables expuestas a lo largo del trabajo se construyen como sigue.

- (1) La variable endógena $Y_{i,t}$ hace referencia al **valor añadido real** (en €) de la industria i en el instante t . Para su construcción, se toma la serie “valor añadido bruto” disponible en el INE²⁹. Dado que las observaciones se encuentran en términos nominales, se convierten a términos reales utilizando el Índice de Precios de Industriales³⁰, aunque pudiera haberse escogido otro índice de precios como el deflactor del PIB. Así, obtenemos el valor real añadido para cada industria y cada instante, tomando las observaciones entre 1995 y 2017³¹.
- (2) La variable $\text{Shock}_{i,t}$ se construye, para cada caso concreto, a partir de la idea general: es el efecto exógeno directo que presenta la industria i en cada momento t por un shock producido en algún momento $t_0 \leq t$ en la propia industria y que se desea estudiar. Las variables exógenas pueden ser de distinta índole y forma. Por ejemplo, podemos crear un shock de productividad a partir de la PTF³² en niveles o en diferencias indistintamente, pero debemos tenerlo en cuenta a la hora de interpretar el modelo³³. En este trabajo se desarrolla el estudio de dos shocks distintos de demanda: aumento (o bajada) del gasto público y de las exportaciones. En cada caso, el shock se construye como sigue.
 - (a) **Shock del gasto público:** Se considera directamente como la variable “shock” a la diferencia en logaritmos del gasto público en cierto sector i . Dado que este dato no está disponible, debemos realizar una aproximación. A partir de las mencionadas tablas input-output podemos obtener el porcentaje que representa el gasto público en cada sector y se denota como³⁴

$$\% \text{GastoPub}_i^{2016} = \frac{\text{Ventas}_{i-\text{Gob}}^{2016}}{\text{Ventas}_i^{2016}} \quad (6.1)$$

y, desde aquí, se necesita la serie referente al gasto anual en consumo final de las AAPP en España desde 1995 a 2019³⁵, que puede denotarse como GastoTot_t . Así, puede realizarse la siguiente aproximación sobre la variación de las compras públicas para cada sector, siendo el shock introducido:

$$\text{ShockGob}_{i,t} = \% \text{GastoPub}_i^{2016} \nabla \ln \text{GastoTot}_t \quad (6.2)$$

- (b) **Shock de exportaciones:** Igual que ocurre en el caso anterior, no existen datos completos acerca de las exportaciones de cada sector año a año³⁶, por lo que se utiliza un acercamiento análogo. Primero se define la proporción que representan las exportaciones dentro de cada

²⁹Concretamente, en <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=32449>

³⁰Disponible en <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=27102&L=0>

³¹Esta serie se crea dentro de los propios cuadernos a partir de los datos mencionados, disponibles en la carpeta “data” del repositorio.

³²Productividad Total de los Factores.

³³Dado que Downstream y Upstream son construidas a partir de Shock, la interpretación central es la de esta última.

³⁴El índice 2016 hace referencia a que el dato está tomado de la distribución mostrada por las tablas input-output de 2016.

³⁵Estos datos pueden consultarse, de nuevo, en el INE: <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=30681>

³⁶La Agencia Tributaria aporta los datos para ciertas ramas de actividad, pero no para todas.

sector a partir de las tablas input-output para cada sector i ,

$$\%Exports_i^{2016} = \frac{Ventas_{i \rightarrow X}^{2016}}{Ventas_i^{2016}} \quad (6.3)$$

siendo X el extranjero. Se define finalmente la ecuación equivalente a (6.2) para el shock de exportaciones:

$$ShockX_{i,t} = \%Exports_i^{2016} \nabla \ln ExportsTot_t \quad (6.4)$$

donde $ExportsTot_t$ es la serie anual del total de exportaciones de bienes y servicios de la economía española obtenible en el INE de nuevo en la tabla que desagrega la demanda. Esta serie tiene observaciones desde 1995 hasta 2019.

- (3) A partir de la variable Shock se define la **propagación** en red *upstream* y *downstream*, sin necesidad de dar una caracterización concreta para Shock.

- (a) **Propagación Downstream:** La variable $Dowstream_{i,t}^{Gob}$ debe recoger los efectos que llegan, en el instante t , al sector i a través de sus proveedores. Esto, en la teoría, se conseguía partiendo de la matriz \mathbf{A} input-output para definir \mathbf{H} . Por tanto, se utilizan para captar el efecto descrito los coeficientes de la equivalente en la práctica de \mathbf{H} : \mathbf{H}_{in} , definiendo la variable $Dowstream_{i,t}$ como:

$$Dowstream_{i,t}^{Gob} = \sum_{j=1}^{64} (h_{ij}^{in} - \delta_{ij}) ShockGob_{i,t} \quad (6.5)$$

Esta ecuación recoge los efectos de red, directos e indirectos, provocados por el shock propagados via *downstream* desde el resto de sectores (incluido el propio) y se evita la duplicación del efecto propio ya recogido en la $ShockGob$ a través del término negativo de la delta de Kronecker. Análogamente, $Dowstream_{i,t}^X$ se define para el shock de exportaciones como:

$$Dowstream_{i,t}^X = \sum_{j=1}^{64} (h_{ij}^{in} - \delta_{ij}) ShockX_{i,t} \quad (6.6)$$

- (b) **Propagación Upstream:** Por otro lado, la variable $Upstream_{i,t}^{Gob}$ utiliza la matriz \mathbf{H}_{out} , análoga a $\hat{\mathbf{H}}$ (creada a partir de $\hat{\mathbf{A}}$), con el fin de recoger el peso de la conexión entre el sector i y sus compradores y habiendo establecido que el shock se propaga con la intensidad descrita por las ventas. Así, se puede definir la segunda variable de propagación como:

$$Upstream_{i,t}^{Gob} = \sum_{j=1}^{64} (h_{ij}^{out} - \delta_{ij}) ShockGob_{i,t} \quad (6.7)$$

Análogamente,

$$Upstream_{i,t}^X = \sum_{j=1}^{64} (h_{ij}^{out} - \delta_{ij}) ShockX_{i,t} \quad (6.8)$$

6.3. Estimación del modelo empírico. Existen dos tipos de datos de panel: dinámicos, en los que se incluyen retardos de las variables dependientes como regresores, y estáticos. En el caso de los datos de panel dinámicos, los estimadores usuales para datos estáticos (pooled effects) no funcionan bien. Nickell, en [66], expone la posibilidad de una estimación sesgada cuando la dimensión temporal es corta debido a la dificultad de obtener un parámetro de persistencia ψ consistente, como es el caso. Sin embargo, asumiendo que el objetivo es la medición de los efectos de red, Acemoglu *et al.* muestran en [1] que las estimaciones de los coeficientes en β^ξ con $\xi \in \{in, own, down\}$ son suficientemente robustas a cambios en ψ , por lo que pueden utilizarse pooled effects.

TABLE 1. Resultados de las estimaciones de los parámetros para distintos modelos (shock de gasto público).

	$\nabla \ln Y_{t-1}$	Upstream $^{Gob}_{t-1}$	Downstream $^{Gob}_{t-1}$	ShockGob $_{t-1}$
Modelo 1a	0.2162 (0.0862)	0.1586 (0.0312)	-0.000029 (0.000012)	0.7669 (0.1404)
Modelo 1b	0.2181 (0.0864)	0.1528 (0.0297)	-	0.5947 (0.1426)

Probablemente un resultado más fino -sobre todo si se desea realizar predicción- se lograra utilizando la versión para muestras pequeñas del estimador de Arellano-Bond de [8], expuesta -por ejemplo- por Soto en [72], logrando eliminar efectivamente la endogeneidad presente en la estimación. Otras aproximaciones podrían partir de la utilización de métodos no lineales basados en el espacio de los estados como los expuestos por Heiss en [50] o la utilización de una ecuación semiparamétrica como propone Crane en [30], como se especifica en el anexo 6b.

Una vez construidas las variables para cada caso, se estiman los coeficientes de la ecuación (5.2) mediante *pooled effects* para diferentes versiones del modelo (distintos valores de $L_o, L_u \dots$, variables no significativas eliminadas, introduciendo o no efectos de entidad, etc.) y aquellos modelos aparentemente más adecuados son los presentados a continuación³⁷.

6.3.1. *Ecuación estimada para el shock del gasto del gobierno.* La ecuación del modelo referente al gasto público es la siguiente:

$$\nabla \ln \hat{Y}_{i,t} = \underset{(0.09)}{0.22} \nabla \ln \hat{Y}_{i,t-1} + \underset{(0.14)}{0.59} \widehat{\text{ShockGob}}_{i,t-1} + \underset{(0.03)}{0.15} \widehat{\text{Upstream}}^{Gob}_{i,t-1} + \hat{\varepsilon}_{i,t} \quad (6.9)$$

Puede verse que no se incluyen efectos downstream, al no ser estos significativos, como predecía la teoría. Sin embargo, sí se incluye el efecto directo del shock en el sector a través de $\text{ShockGob}_{i,t}$, retardado un periodo. En la tabla 1 puede verse un resumen de los resultados de las estimaciones de distintos modelos. Una interpretación de la misma es la que sigue.

Sea el sector k el objeto de estudio, supóngase que la participación del gasto público en el sector es $\alpha_k \in [0, 1]$. Así, se llega a que el valor de la variable $\widehat{\text{ShockGob}}_{k,t}$ es $\alpha_k \nabla \ln \text{GastoTot}_t$, dependiente aún de la variación del gasto público. *Caeteris paribus*, un aumento de un 1 % del gasto público por parte del gobierno conlleva que la variable asociada al shock propio resulte $\ln(1.01) \cdot \alpha_k$ (el aumento porcentual de las ventas totales del sector). A partir de la ecuación (0.36), la generación del shock se traduce en un aumento del output del sector k en el año $t+1$ de un $0.59 \cdot \ln(0.01) \cdot \alpha_k = 0.0058 \alpha_k$ %, sin contar los efectos en red. E.g., si $\alpha_k = 0.2$ el aumento en las ventas del sector recogido directamente por la variable es del 0.0008 %.³⁸

Por otra parte, dado que la variable de los efectos *upstream* se define como en (6.8), estudiando únicamente el efecto en red que llega de cierto sector j tal que $h_{kj}^{out} \neq 0$ y en el que gasto público representa el $\alpha_j \in [0, 1]$ de las ventas, la variable restringida al efecto mencionado -y suponiendo nuevamente un aumento del 1% del gasto por parte del gobierno- queda $\text{Upstream}^X_j = h_{kj}^{out} \alpha_j \ln(1.01)$. Dado el coeficiente 0.15 de esta variable, el aumento de un 1% del gasto público en t conlleva (a través únicamente del sector j) un aumento del $0.15 h_{kj}^{out} \alpha_j \ln(1.01)$ % del producto de k en $t+1$. Por ejemplo, si $\alpha_j = 0.2$ y $h_{kj}^{out} = 0.2$, el efecto producido desde el sector j que recibe el shock al sector k es un aumento del output del último del 0.00006 %.

³⁷En el anexo 6c pueden verse los resultados completos que devuelve la librería de Python *Statsmodels*, utilizada para la estimación.

³⁸En el contexto español, la media de la participación del sector público en los sectores es 0.093.

Lógicamente, a mayor peso del gasto público dentro del sector, mayores serán los efectos. De igual manera, a mayor conexión entre dos sectores -medida por el elemento h_{ij}^{out} de la matriz inversa de Leontief- mayor será el efecto en red con origen en el sector que sufre el shock, en este caso, el sector j .

Por último, cabe señalar que, en el caso anterior, si j no tiene ninguna conexión *downstream* con k , $h_{kj}^{out} = 0$ y el efecto del shock es nulo en este sentido.

6.3.2. *Ecuación estimada para el shock de exportaciones.* Análogamente, la ecuación del modelo construido para el shock de exportaciones es la siguiente:

$$\nabla \ln \hat{Y}_{i,t} = 0.272 \nabla \ln \hat{Y}_{i,t-1} + 0.047 \widehat{\text{Upstream}}_{i,t-1}^X + 0.044 \widehat{\text{Upstream}}_{i,t-2}^X + \hat{\varepsilon}_{i,t} \quad (6.10)$$

(0.081) (0.009) (0.012)

Su interpretación es análoga. Sin embargo, debe notarse que en esta ecuación no están presentes el shock propio y, sin embargo, sí lo está el primer retardo del efecto en red *upstream*. Considérese, como en el caso anterior, el análisis del efecto aislado que llega a través de la red a un sector k desde un sector j tal que $h_{kj}^{out} \neq 0$ y la participación de las exportaciones en el total de ventas del sector j es $\beta_j \in [0, 1]$. Suponiendo un aumento de las exportaciones del 1% general en el instante t , en $t+1$ el output del sector k aumenta el $0.047 \cdot h_{kj}^{out} \cdot \beta_j \cdot \ln(1.01) \% \text{ caeteris paribus}$. Debido a la presencia de la variable retardada dos periodos, en el instante $t+2$, el incremento retardado producido por este shock será del $0.044 \cdot h_{kj}^{out} \cdot \beta_j \cdot \ln(1.01) \%$.

TABLE 2. Resultados de las estimaciones de los parámetros para distintos modelos (shock de exportaciones).

	$\nabla \ln Y_{t-1}$	Upstream_{t-1}^X	Upstream_{t-2}^X	$\text{Downstream}_{t-1}^X$	ShockX_{t-1}
Modelo 2a	0.2996 (0.0841)	0.0845 (0.0129)	-	-8.818E-06 (9.931E-06)	-0.4653 (0.2509)
Modelo 2b	0.2703 (0.0816)	0.0579 (0.0114)	0.0444 (0.0121)	-	-0.4091 (0.2718)
Modelo 2c	0.2722 (0.0812)	0.0472 (0.0086)	0.0443 (0.0120)	-	-

En la tabla 2 puede verse un resumen de los resultados de las estimaciones de distintos modelos y con más detalle en el anexo. El parámetro de la variable del shock propio en el modelo 2c tiene un p-valor asociado al contraste de significatividad individual cercano al 12 %. Puede entenderse que este coeficiente es negativo, como expone Almunia *et al.* en [6], debido a que los productores, en presencia de una caída de las ventas en el mercado interior, aumentan sus exportaciones. Por tanto, la variable del shock no es tan exógena como sería deseable y la causalidad (y en cierto modo la temporalidad) está invertida en la variable que recoge el shock directo. Esto es, si bien en el modelo teóricamente se introducen las exportaciones siguiendo que $\uparrow \text{Exportaciones}_{t_0} \Rightarrow \text{Shock de demanda positivo}_{t_0} \Rightarrow \uparrow \text{Output}_{t \geq t_0}$; la realidad, más aún en la ventana temporal del estudio (debido a la presencia de la crisis financiera de 2008), muestra el siguiente comportamiento: $\downarrow \text{Ventas interiores}_{t_0} \Rightarrow \text{Shock de demanda negativo}_{t_0} \Rightarrow \uparrow \text{Exportaciones}_{t \geq t_0}$.

7. UNA APLICACIÓN A LA CRISIS COVID-19

7.1. **Predicción de los efectos en red de una grave crisis en la hostelería y el turismo.** En esta sección se simulan dos shocks de demanda que tienen lugar en los sectores de la hostelería (36) y el turismo (52), que podrían considerarse muy graves. Esta perturbación está inspirada en la situación vivida a partir de marzo del 2020 con la crisis de la COVID-19, pero no trata de replicar la realidad, sino estudiar cómo

actúan los efectos de red en el marco teórico planteado previamente y, en concreto, en el modelo especificado a través de la ecuación (6.10), cuya base es un shock de exportaciones. Se escoge este modelo porque se considera que la propagación de los efectos a través de la red serán semejantes en el caso del shock de exportaciones y de la COVID-19, aun presentando una posible diferencia notable en el efecto directo al propio sector, una variable que no aparece en la ecuación (6.10).

Para poder definir el shock, el output de los sectores 36 y 52 vendrá dado en el año del shock (2018) y los dos años inmediatamente posteriores al mismo, como se especifica más abajo. La predicción del nivel de output del resto de industrias sigue de la ecuación (6.10). Finalmente, se asume que los últimos datos disponibles son los del año 2017 y se realiza la predicción hasta el año 2029.

7.1.1. Definición de las variables del shock y de red. En primer lugar, se supone que el shock es tal que afecta negativamente a los sectores mencionados de la siguiente manera: en el año 2018, el turismo y la hostelería producen un 10 % de su output de 2017. En 2019, se recuperan hasta llegar al 30 % del output de 2017 y en 2020 alcanzan el 60 %. A partir de entonces, su output se determina a partir de la ecuación del modelo de (6.10). Así, la variable del shock, que en este caso se denomina $\text{ShockC}_{i,t}$ se define como:

$$\text{ShockC}_{i,t} = \begin{cases} \ln(0.1) & i \in \{36, 52\}, t = 2018 \\ \ln(3) & i \in \{36, 52\}, t = 2019 \\ \ln(2) & i \in \{36, 52\}, t = 2020 \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases} \quad (7.1)$$

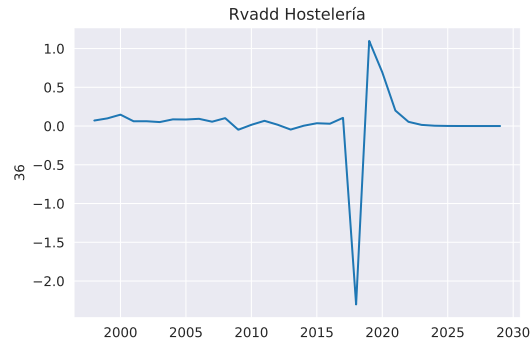
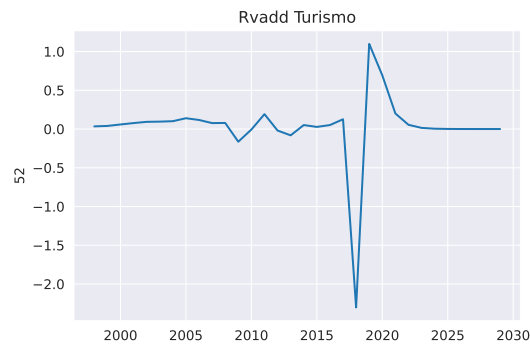
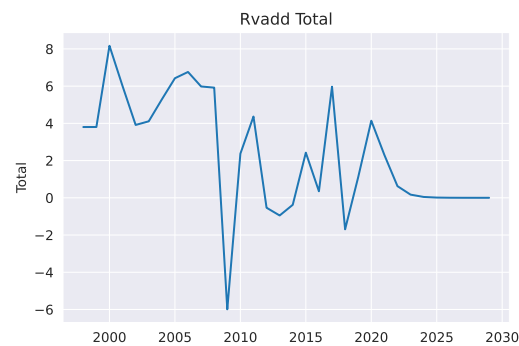
y la variable de red (en este caso, solo es necesaria de tipo *upstream*) como

$$\text{Upstream}_{i,t}^C = \sum_{j=1}^{64} (h_{ij}^{\text{out}} - \delta_{ij}) \text{ShockC}_{i,t} \quad (7.2)$$

Una vez computadas las predicciones para cada uno de los sectores de la red, se calculan algunas métricas. Las figuras 7.1 y 7.2 muestran el comportamiento de la tasa de variación en el tiempo para los sectores donde se produce el shock. Volviendo a la ecuación (6.11), puede comprobarse que tanto el mínimo de 2018, como el máximo de 2019 vienen dados y son iguales en ambas gráficas, debido a la forma en que se define el shock. Sin embargo, para años posteriores a 2020, la variación se determina a partir de (6.10) y la evolución de $\nabla \ln y_t$ sigue presentando crecimiento, debido a: (i), el factor ψ de la ecuación (6.10) y (ii) los efectos de red que *vuelven* a los sectores 36 y 52, tras pasar de ser negativos a positivos (recuperación) los efectos directos para estos sectores en 2019 y 2020 y habiéndose propagado estos al resto de la red via *upstream*.

En la figura 7.3 se muestra la evolución de $\sum_{i=1}^{64} \nabla \ln y_{ti}$ que permite comprender el comportamiento general de los sectores de la economía. Puede observarse que el comportamiento es errático desde el origen del shock hasta terminar estabilizándose en 0. El mínimo durante la crisis, sin embargo, se produce en 2018 debido a los efectos directos sobre turismo y hostelería. Debido al retardo de las variables en la ecuación (6.10), la crisis llega al resto de sectores en 2019 y, dado el inicio de la recuperación en hostelería y turismo, esta métrica se torna positiva. En 2020, tras la consolidación de la recuperación, la variación vuelve a ser claramente positiva y en los años posteriores, la trayectoria, como la de cualquier serie autorregresiva de primer orden, termina en la media, en este caso 0.

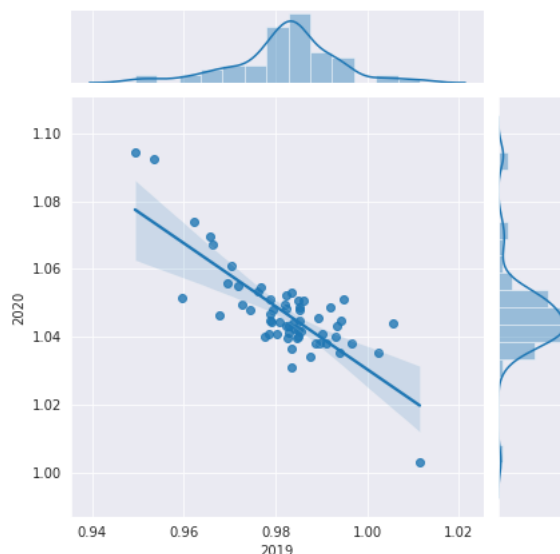
Un efecto que cabe esperar en un shock de este tipo es que las industrias más afectadas negativamente, sean aquellas que mayor recuperación presenten (en términos de tasas de variación). Por la definición del modelo y una predicción puramente determinista, esta relación es muy intensa, como muestra el gráfico

FIGURE 7.1. Variación del valor añadido real del sector hostelero (en $\nabla \ln y_{it}$)FIGURE 7.2. Variación del valor añadido real del sector turístico (en $\nabla \ln y_{it}$)FIGURE 7.3. Suma de variaciones del valor añadido real de todos los sectores de la economía (en $\nabla \ln y_{it}$)

de dispersión de la figura 7.4. En él se observa que aquellos sectores con mayor caída del output en 2019 (alcanzan niveles en torno al 94% del output de 2018) se recuperan en 2020 hasta más del 108% en términos del de 2019 o, aproximadamente, el 102% de su valor añadido de 2018.

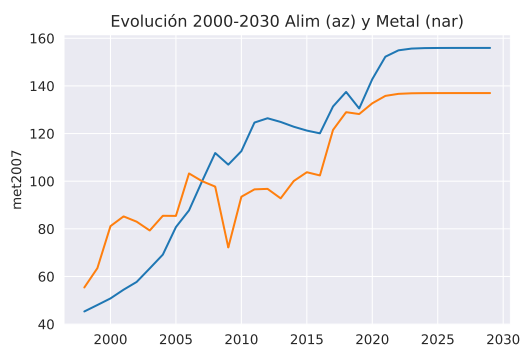
En el anexo 7a se presentan los resultados de los valores obtenidos de $\frac{y_t}{y_{t-k}}$ según la ventana temporal (i.e. k). El sector al que más afecta el shock (tanto en decrecimiento en 2019 como en recuperación posterior)

FIGURE 7.4. Gráfico de dispersión de $\frac{y_t}{y_{t-1}}$.



Nota: se eliminan del gráfico los sectores del shock (36 y 52).

FIGURE 7.5. Evolución del valor añadido real 2020-2030 (índice 2007) de los sectores de la alimentación y la metalurgia

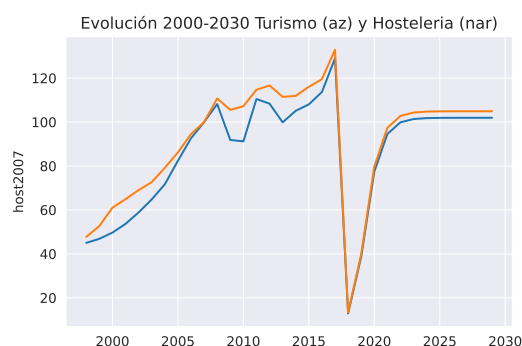


es el 5 (alimentación); mientras que el menos afectado son el 4 (industrias extractivas) y el 20 (vehículos de motor)³⁹. Otra de las industrias menos afectadas es la metalurgia (15). En la figura 7.5 puede compararse la evolución del valor añadido real del sector de la alimentación (en azul) y del metal (en naranja) entre 1998 y 2029. Debido a la especificación del modelo, se premia demasiado cualquier relación con los sectores de la hostelería y del turismo en la recuperación, por lo que cuantitativamente la predicción no se ajusta demasiado la realidad, pero sí lo hace cualitativamente: como es esperable, la propagación en red del shock afecta más a las industrias cercanas a los sectores donde se produce originalmente.

Finalmente, la figura 7.6 muestra la evolución del valor real añadido para las industrias donde se produce el shock. En general, el modelo da una gran importancia al contexto en el crecimiento económico: si una industria está mal en una economía sana, volverá a crecer; y, análogamente, un sector crece (o decrece)

³⁹Realmente es el sector 47, pero no tiene apenas coeficientes no nulos en la matriz input-output.

FIGURE 7.6. Evolución del valor añadido real 2000-2030 (índice 2007) de los sectores de la hostelería y el turismo



cuando los demás crecen (o decrecen). Por último, los shocks sí pueden ser disruptivos y generar un cambio en el comportamiento.

7.2. Un análisis de la red sectorial española centrado en la hostelería y el turismo. Se realizará el estudio de la red sectorial española partiendo del esquema planteado por Tscheris en [76] para el estudio de la red griega. El objetivo principal es complementar el análisis anterior sobre una posible crisis en turismo y hostelería. Otros objetivos son los siguientes:

- (1) Identificar cuáles son las principales *comunidades* de sectores, altamente conectadas mediante transacciones económicas entre sus integrantes.
- (2) Determinar cuáles son aquellos sectores *clave* (pueden llegar a contribuir a la reestructuración de la economía de manera relevante) y *críticos* (aseguran la estabilidad de todo el entramado económico).
- (3) Asimismo, se identifican qué enlaces tienen más *importancia* y cuáles podrían llegar a crearse o aumentar de *importancia*.
- (4) Se ofrece una jerarquización de la economía española. Este objetivo está relacionado con el primero, pues hay comunidades en el *núcleo* de la economía y comunidades de sectores en la *periferia* de la red definida.

7.2.1. Centralidad. Puede definirse la *centralidad*, en general, como la importancia de un nodo en la red. Esta *importancia* puede tener distintas connotaciones, por lo que no hay una única noción de centralidad. Aquí se estudiarán tres definiciones distintas, que difieren tanto en concepto como en estimación: centralidad de grado (saliente, entrante y total), centralidad del autovector y centralidad *pagerank*.

En lo referente al grado, en el anexo 7b pueden verse los cinco mayores y menores grados de cada tipo. Comparando estas tablas pueden obtenerse algunas conclusiones. Por ejemplo, existe un sector, el 5 (Productos alimenticios), que posee el mayor grado saliente y entrante y por tanto, en lo referente estrictamente al volumen, es el más importante de la red. Otro caso es el del sector 27 (Construcción), que presenta un grado entrante significativamente mayor que el saliente (más compras que ventas intermedias). La situación contraria (más ventas que compras) se da en el sector 29 (Comercio al por mayor). En cuanto al sector de **la hostelería (36)**, su grado entrante es de 46699 millones de euros, mientras que el saliente es de 12885. Para ponerlo en contexto, la media del grado de los sectores españoles es de 14693 millones de euros (tanto saliente como entrante, al tratarse de una red de compras y ventas). Por otro lado, el **turismo (52)**, presenta

un grado entrante de 15306 millones de euros y saliente de 44598. Puede observarse que ambos son sectores grandes, pero sus relaciones con los demás sectores son distintas: mientras el turismo tiende a comprar bienes intermedios, la hostelería los vende.

En cuanto a la centralidad a través del autovector, la realidad que trata de captar su definición es la siguiente: se entiende que un nodo debe ser más importante (por tanto, tener mayor centralidad) siempre que esté altamente conectado a otros grupos o sectores con alta conectividad. Así, estos sectores con alta centralidad del autovector son potencialmente o efectivamente sectores influyentes en la red de la economía, i.e., si aumentan su output, el output de la economía tendrá a aumentar más que si lo hiciera el de un sector con baja centralidad del autovector.

Un resumen de los mayores y menores resultados que se obtienen en la red sectorial española pueden verse en el anexo 7c. En él puede observarse que muchos de los nodos con mayor centralidad del autovector son los mismos que aquellos que presentaban mayor grado (sobre todo entrante, por su definición). E.g., el sector alimentario (5) y **la hostelería (36)** vuelven a estar presentes. Sin embargo, aparece en el tercer puesto la industria 1: agricultura y ganadería. Esto se debe a que tiene un peso crucial en cuanto a ser el principal proveedor del sector 5, el más importante en cualquiera de los términos vistos hasta ahora y, siguiendo la idea de “*ser importante para los importantes*”, la definición de centralidad del autovector le otorga un coeficiente alto. Finalmente, el **turismo (52)** ocupa la cuarta plaza en importancia.

Por último, se define la centralidad tipo PageRank. Los resultados, disponibles en el anexo 7d y en el cuaderno del repositorio, muestran que las mayores centralidades las obtienen sectores que las otras definiciones ya consideraban *importantes*, esto es: construcción (27), alimentación (5), vehículos de motor (20), **turismo (52)** y **hostelería (36)**.

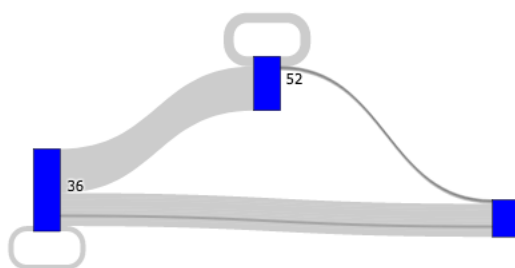
Como se ha visto, el concepto de *importancia* tiene matices según se defina la centralidad, pero los resultados coinciden de manera aproximada. Tanto es así que, como se puede observar en la matriz de correlaciones del anexo 7e, las variables están altamente correladas, sobre todo la centralidad del autovector y PageRank, al tratar de captar prácticamente la misma idea.

Además, debe observarse que, en principio, el desencadenamiento de una crisis de demanda es más *peligrosa* que una crisis de oferta en el sector del **turismo**, ya que sus conexiones *upstream* con otras industrias son mucho más fuertes que las *downstream*. Esto se debe a la naturaleza de ese sector, que presenta un elevado consumo de inputs en relación a unas escasas ventas de bienes intermedios. Por el contrario, en cuanto al sector de **la hostelería**, una crisis de oferta conllevaría unos efectos mayores sobre la red.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta lo siguiente. En la figura 7.7 se presenta el diagrama aluvial de las conexiones entre los sectores 36 y 52 y el resto de sectores. Puede observarse que aproximadamente la mitad de la producción que vende como input el sector hostelero va a parar al sector turístico, mientras que la parte más importante en los bienes y servicios intermedios procedentes del sector turístico es comprada por el propio sector.

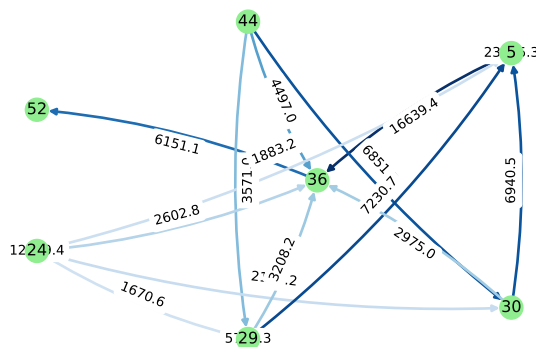
En la figura 7.8 se representa la red centrada en el sector 36 (hostelería) de radio 1, donde únicamente se dibujan los enlaces cuyo peso (ventas) sea superior a 1500 millones de euros. Análogamente, en la figura 7.9 se representa la red centrada en el sector 52 (turismo), pero de radio 2 e igualmente con enlaces con peso superior a 1500. Aquí se observa perfectamente la dependencia del sector turístico en el hostelero, mientras que la situación contraria no se da con tanta intensidad, siendo este un sector con conexiones más repartidas en el resto de la red.

FIGURE 7.7. Diagrama aluvial para los sectores 36 y 52



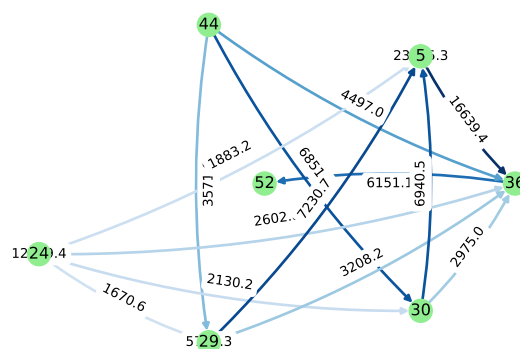
Solo se representan aquellos enlaces de más de 150 millones de euros.

FIGURE 7.8. Red centrada en el sector hostelero (36).



Si se tienen en cuenta las cuatro posibles crisis (de oferta con origen en la hostelería, de demanda con origen en ese mismo sector y sus análogas con origen en el turismo), aquella que resultaría en una menor propagación en la red es claramente el shock negativo de oferta con origen en el turismo, debido a que la cuantía de las ventas de sus productos como bienes intermedios es baja en comparación y, por tanto, sus efectos (aquí downstream) serían menores que en el resto de las crisis posibles. Por otro lado, un shock de demanda en el turismo, pasaría inmediatamente a afectar al sector hostelero y de ahí al resto de la red, por lo que puede decirse que los efectos son similares si se produce una crisis de demanda en el turismo o en la hostelería, aunque la intensidad con la que llega al resto de la red sea mayor en el segundo caso por ser más directo. Por último, el shock de oferta en la hostelería afectaría principalmente al sector turístico, aunque también -directa e indirectamente- a una buena parte de la red, sin ser conducido este último efecto a través del sector turístico.

FIGURE 7.9. Red centrada en el sector turístico (52).



7.2.2. *Detección de comunidades y jerarquización.* La detección de comunidades es una parte fundamental del análisis de redes. Conceptualmente, se entiende como *comunidad* a un conjunto de nodos más conectados entre sí que con el resto de nodos de la red. En este trabajo, se utilizará la detección de comunidades con dos objetivos: por una parte, se definen las comunidades existentes en la red con el fin de obtener aquellos nodos (vecinos de la comunidad) más afectados por una determinada política en cierto sector, siendo esta una información muy relevante para su diseño óptimo. Por otra parte, debe tenerse presente que la clasificación CNAE es inevitablemente arbitraria. Así, puede pensarse que el sector 5, que aparece en las posiciones más altas de centralidad, no sería *tan importante* si se dividiera en dos (e.g., agricultura y ganadería) y su volumen se redujera. Este caso es difícil de tratar a este nivel, pero el contrario es salvable a través de la detección de comunidades. Imagínese que el sector eléctrico se separara en dos: uno, la pura generación de electricidad y, el otro, la transmisión al punto de consumo. Se detectaría una comunidad fortísima con esos dos nodos, dado que casi la totalidad del bien del sector generador iría a parar como input al transmisor.

Es verdad, sin embargo, que las comunidades creadas a partir de enlaces de transmisiones de inputs captan mejor la existencia de un sector separado en varios de manera vertical que horizontal, debiendo utilizarse métricas y algoritmos basados en la similitud para recoger posibles separaciones de este segundo tipo. E.g., si el sector del carbón se dividiera entre el sector hullero y el sector de la antracita, estos sub-sectores no presentarían demasiados intercambios entre ellos, aunque sus estructuras de compras y ventas de inputs al resto de sectores serían prácticamente idénticas. De cualquier manera, es muy probable que aparecieran en la misma comunidad, aun no siendo su unión una unidad mínima *indivisible*.

Utilizando en parte esta idea, se crea una jerarquización de la red sectorial. En esta división, la economía presenta distintas capas, partiendo de un núcleo económico que contiene las comunidades de sectores que son el nexo de unión del resto de comunidades y llegando a una periferia cuyas comunidades conectan con las capas inferiores de la red, pero no con aquellas pertenecientes a su misma periferia. Debe tenerse en cuenta que la conexión generalmente existe, e.g., el sector de la alimentación vende una suma residual (0.1 millones de euros) al sector maderero, y por ello se necesita un algoritmo que sea capaz de distinguir si una conexión es lo suficientemente débil para no considerarla.

Se han implementado dos algoritmos distintos para detectar las comunidades presentes en la red: el *label propagation* y el algoritmo de Louvain.

Los resultados de la detección de comunidades a través de ambos algoritmos pueden consultarse en el anexo 7f. Mediante el primero, de la detección resulta una gran comunidad de sectores y varias otras con

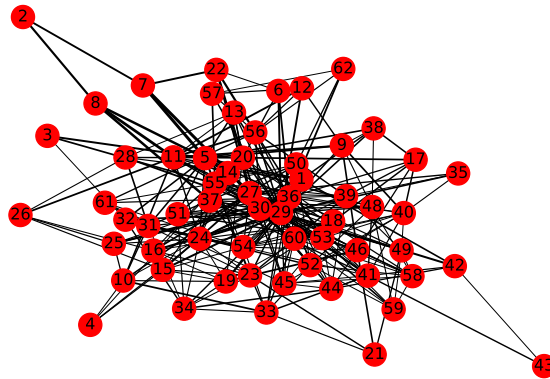
un único elemento. Además, se consiguen cuatro agrupaciones de 2 y 3 elementos, por ejemplo: 56 (servicios de atención sanitaria), 12 (productos farmacéuticos) y 22 (muebles y otros productos manufacturados); y 15 (metalurgia), 16 (productos metálicos) y 20 (vehículos de motor). Los sectores objeto del análisis pertenecen a la misma comunidad, formada por ellos mismos, **hostelería (36)** y **turismo (52)** y un tercer sector: los servicios de transporte aéreo (33).

Las comunidades obtenidas mediante el algoritmo de Louvain son más homogéneas, aunque vuelve a aparecer una gran comunidad central. Como ejemplo, existe una comunidad de 4 sectores formada por 7 (madera, excepto muebles), 12 (productos farmacéuticos), 22 (muebles) y 56 (atención sanitaria); u otra de 5 cuyos integrantes son: 15 (metalurgia), 16 (productos metálicos), 18 (equipo eléctrico), 19 (maquinaria) y 20 (vehículos de motor)⁴⁰; y dos comunidades unitarias: 6 (textil) y 35 (correos y mensajería). El hecho de que las comunidades de estos sectores sean ellos mismos no debe entenderse como si estos sectores no tuvieran conexiones, sino que estas conexiones no se dirigen a un conjunto de sectores de la red en particular, como es evidente en el sector de la mensajería. Los sectores de la **hostelería (36)** y **el turismo (52)** vuelven a compartir comunidad. En este caso, con el sector de la agricultura y ganadería (1), el sector pesquero (3) y el de los productos alimenticios (5).

En cuanto a la jerarquización, esta se lleva a cabo a través de un algoritmo propuesto en [65] por Ni *et al.* basado en la curvatura de Ricci.

Los resultados para la red sectorial española se muestran en las siguientes figuras⁴¹. En una primera ronda, se aplica la curvatura de Ricci al grafo completo⁴² (figura 7.7), y se eliminan los 169 enlaces con menor curvatura, resultando el grafo de la figura 7.8.

FIGURE 7.10. Grafo completo de la economía



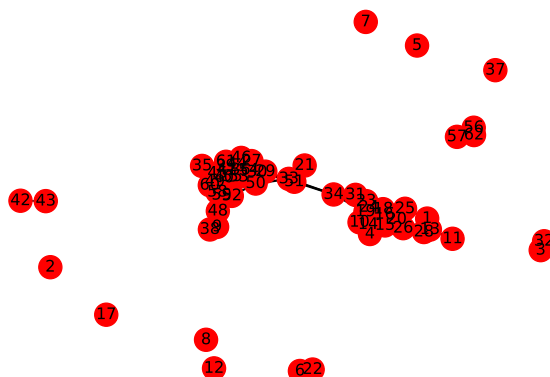
Este grafo completo mantiene únicamente los enlaces de mayor peso ($w_{ij} > 0.011$) y ya se le ha aplicado la curvatura de Ricci.

En este nuevo grafo, puede observarse que se desprenden algunos sectores (e.g. 2, 17, 42, 43) de la comunidad con mayor conectividad (o núcleo). Estos sectores de la periferia pueden formar comunidades individuales (e.g. la industria 2: productos de explotación forestal); o juntarse a otros para formar comunidades de varios sectores (e.g. 42 y 43: servicios de seguros y servicios auxiliares a servicios financieros y

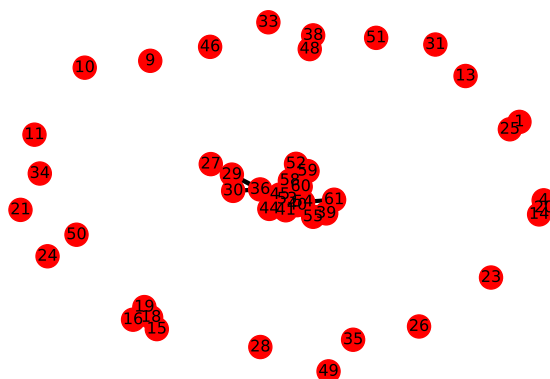
⁴⁰El sector faltante en la serie 15,...,20 es el 17: productos informáticos.

⁴¹El procedimiento completo puede consultarse en uno de los cuadernos del repositorio.

⁴²Por una cuestión de tratamiento computacional, previamente se eliminan todos los enlaces e_{ij} con peso $w_{ij} < 0.011$.

FIGURE 7.11. Grafo tras primera *cirugía*

de seguros). Repitiendo el proceso realizado al grafo completo para el núcleo obtenido en esta primera fase, se llega al grafo de la figura 7.9.

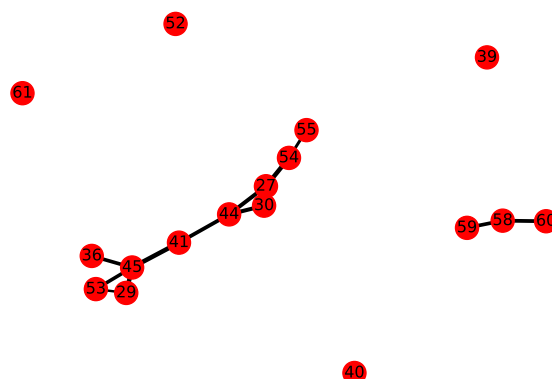
FIGURE 7.12. Grafo tras la segunda *cirugía*

El resultado es semejante. En esta segunda periferia existen comunidades individuales (e.g. 35: correos y mensajería) y de varios sectores (e.g. 38 y 48: servicios cinematográficos, de vídeo y televisión y servicios de publicidad). Además, se observa un núcleo bien definido, al que se le realiza una última *cirugía*, resultando en el grafo de la figura 7.10.

Este último grafo no sigue la línea de los anteriores y simplemente se divide en distintas comunidades. Además, no presenta estructura jerárquica, como puede observarse al poseer la mayor comunidad del grafo una estructura semejante a la de un camino. Entre las comunidades individuales se encuentran el sector 39 y el **52**: servicios de telecomunicaciones y el **sector turístico**. En la mayor comunidad se encuentran, por ejemplo, 41 y 45: servicios financieros y servicios jurídicos. El sector **hostelero (36)**, por su parte, se mantiene en la mayor comunidad a través de su conexión con el sector 45.

7.2.3. Predicción de links. En el análisis de redes, la predicción de links o enlaces sirve para pronosticar qué enlaces tienen más probabilidad de acabar realizándose. Este estudio tiene muchas aplicaciones en el

FIGURE 7.13. Grafo tras la tercera cirugía



análisis de redes sociales. Sin embargo, en un análisis de la red sectorial puede ser igualmente útil. Debe tenerse en cuenta que los enlaces entre sectores *generalmente* ya existen y que muchas veces se tratará de predecir qué sectores pudieran reforzar su conexión preexistente. La predicción de un enlace entre dos sectores puede revelar la posibilidad de integración vertical entre las empresas de ambos e incluso horizontal, dependiendo del algoritmo utilizado. Aquí se exponen dos de los más utilizados.

En la red sectorial española, el Adamic-Adar predice el enlace entre el sector 1 y 3 (sector de la agricultura y ganadería y el sector del pescado y productos de la pesca), y 33 y 36 (servicios de transporte aéreo y el **sector hostelero**). Puede observarse que, en el caso de los sectores 1 y 3, ambos mantienen una relación horizontal formando parte del primer eslabón de la cadena productiva. En el segundo, no existe conexión directa ni indirecta entre ellos ni, por tanto, relación vertical. Sin embargo, desde el punto de vista del consumo, forman parte de la misma cadena en tanto que producen servicios complementarios: se utilizan los billetes de avión para desplazarse a un sitio donde se tiene que contratar alojamiento.

El segundo algoritmo es el de la conexión preferencial, que trata de recoger la idea de que *el rico cada vez se hace más rico*. Mediante este algoritmo se espera que se refuerce el triángulo formado por los nodos 5 (sector de la alimentación), **52 (turismo)** y 12 (productos farmacéuticos), dado que no presentan prácticamente relación comercial entre sí a pesar de ser tres de los sectores de mayor volumen de la economía.

Se expone ahora una de las características económicamente más relevantes para el turismo (52) y la hostelería (36) como nodos integrantes de la red sectorial: la centralidad del enlace.

7.2.4. Centralidad del enlace. Los enlaces más importantes, calculados a partir de la centralidad *betweenness*, que tienen al **sector turístico** como origen son aquellos con los sectores 50 (servicios de alquiler) y 48 (publicidad). Aquellos cuyos enlaces presentan mayor centralidad para el caso en que **la hostelería** es el sector que actúa como origen son el **52 (turismo)** y el 60 (servicios prestados por asociaciones). En cambio, las conexiones más relevantes siendo el sector turístico el destino son aquellas con las industrias 33 (transporte aéreo) y **36 (hostelería)**; mientras que para el sector hostelero son el sector 5 (alimentación) y 54 (administración pública; seguridad social).

8. CONCLUSIÓN

La introducción de algún tipo de estructura de red en modelos macroeconómicos es totalmente aplicable y relevante a la luz de los resultados obtenidos. Con la estimación del modelo propuesto por Acemoglu *et al.* se ha conseguido corroborar la hipótesis teórica de que no existen efectos *downstream* en los shocks de demanda, pero sí *upstream* o aguas arriba y se han cuantificado en el caso español. En concreto, para un shock de exportaciones y otro de gasto público.

El estudio se ha complementado con la simulación de una crisis inspirada en la COVID-19 y un análisis de redes, de los que se pueden desprender algunas recomendaciones de política, de forma algo abstracta. En este sentido, mediante la jerarquización de la red sectorial y el análisis de centralidad se consigue detectar qué sectores están cumpliendo una función clave en la economía, entre los que están el turístico y el hostelero, por lo que puede pensarse que sería aconsejable tratar de priorizar el buen devenir de estos sectores centrales, estratégicos económicamente, respecto a los demás.

En un caso como el estudiado, en que se esperara una crisis en algunos sectores dados, podría llegar a predecirse a través del modelo presentado en la sección 3 cuáles serían aquellas industrias más afectadas en el corto, medio y largo plazo y en qué intensidad y sobre ellas se podría actuar de manera adelantada. Asimismo, el análisis de la centralidad de los enlaces indica qué conexiones entre sectores son susceptibles de ser reforzadas o reducidas, ya sea para mitigar los efectos de una posible crisis o como medio para maximizar el efecto multiplicador del gasto público.

De manera más concreta, en la sección anterior se expone que *el desencadenamiento de una crisis de demanda es más peligrosa que una crisis de oferta en el sector del turismo*. Esto quiere decir que los enlaces *upstream* son mayores que aquellos *downstream* o, equivalentemente, que el turismo tiene mayores conexiones con sus proveedores que con sus compradores (compra muchos más inputs intermedios de los que vende). Por ello, las políticas de gasto (de demanda) en este sector tendrán más consecuencias, se propagarán en mayor medida en la red económica que las políticas que buscan aumentar la productividad del turismo⁴³. Ejemplo de una posible intervención en el sector es la propuesta por Oliu-Barton y Pradelski [69] donde proponen reconectar *zonas verdes* en Europa para permitir los desplazamientos bajo ciertas condiciones y mitigar los efectos de esta crisis sobre el turismo.

Este trabajo se ha centrado en la red de productores o de sectores, pero la misma idea puede ser aplicada a los hogares con el fin de constituir agentes heterogéneos, como consiguen Baqaee y Farhi en [12], y ganar realismo a la vez que se evita la falacia de la composición [56]. En la teoría económica, parece no existir el límite de variables microeconómicas modelizables a partir de redes con el fin de otorgar realismo a las relaciones entre los agentes que interactúan en la sociedad y en el mercado. Otra cuestión, sin embargo, sería su implementación. Por ejemplo, en la propuesta mencionada en este mismo párrafo de Baqaee y Farhi, cada agente que actúa en la economía es individual y distinto y posee su propia función de utilidad, pero si se quisiera realizar una implementación empírica del modelo se necesitaría asignar una función de utilidad estimada a cada individuo de la muestra, datos que no se poseen a día de hoy.

Por ejemplo, puede pensarse en un extremo quimérico donde se podría llegar a modelizar la existencia de familias -incluso de manera endógena a través de grafos probabilísticos- y asociar una distribución geográfica o funcional (profesiones o personalidades) a los nodos -personas- de la red, pero la obtención de esos datos, a

⁴³Con esto no se pretende decir que se deban llevar a cabo únicamente este tipo de políticas, puesto que puede ser que las políticas de gasto sean imposibles en su realización y no así las de oferta. Simplemente se trata de exponer que -asumiendo su implementación efectiva- los efectos que se propagan por la red serían mayores, dado que se trata de un shocks de demanda (positivo).

día de hoy, parece imposible⁴⁴. Con esto se pretende resaltar la potencia modelizadora que tiene el enfoque de redes, pero también mostrar que ha de tenerse cierta cautela si se entiende que uno de los objetivos de la producción científica es la utilidad de sus resultados.

⁴⁴Para vencer este obstáculo puede llegar a recurrirse a la creación de una economía artificial, como se menciona en la sección 2, pero desde luego los resultados no serán tan aplicables.

REFERENCES

- [1] Acemoglu, D., Akcigit, U. and Kerr, K. (2016). Networks and the macroeconomy: An empirical exploration. *NBER Macroeconomics Annual* **30**(1), 273-335.
- [2] Acemoglu, D., Carvalho, V. M., Ozdaglar, A. and Tahbaz-Salehi, A. (2012). The network origins of aggregate fluctuations. *Econometrica* **80**(5), 1977-2016.
- [3] Acemoglu, D., Chernozhukov, V., Werning, I., and Whinston, M. D. (2020). A multi-risk SIR model with optimally targeted lockdown. *National Bureau of Economic Research* **w27102**.
- [4] Adamic, L. and Adar, W. (2003). Friends and neighbors on the web. *Social networks* **25**(3), 211-230.
- [5] Alderman, L. and Satariano, A. The New York Times. (14 de mayo del 2020). *Amazon's Showdown in France Tests Its Ability to Sidestep Labor*. Online. Disponible aquí.
- [6] Almunia, M., Antràs, P. et al. (2018). Venting Out: Exports during a Domestic Slump. *NBER Working Paper* **25372**, 1-58.
- [7] Alvarez, F. E., Argente, D., and Lippi, F. (2020). A simple planning problem for covid-19 lockdown. *National Bureau of Economic Research* **w26981**.
- [8] Arellano, M. and Bond, S. (1991). Some tests of specification por panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *Review of Economic Studies* **58**(2), 277.
- [9] Aroche Reyes, F. and Márquez Mendoza, M. A. (2016). Una red económica norteamericana. *Ensayos Revista de Economía* **35**(1), 59-90.
- [10] Atkenson, A. (2020). How Deadly Is COVID-19? Understanding The Difficulties With Estimation Of Its Fatality Rate. *NBER Work. Pap.* **26965**.
- [11] Banerjee, A., Chandrasekhar, A. G., Duflo, E. and Jackson, M. O. (2019). Using gossips to spread information: theory and evidence from two randomized controlled trials. *The Review of Economic Studies* **86**, 6, 2453-2490.
- [12] Baqaee, D. R. and Farhi, E. (2019). Macroeconomics with heterogeneous agents and input-output networks. *NBER Work. Pap.* **24684**, 1-60.
- [13] Baqaee, D. R. and Farhi, E. (2019). The macroeconomic impact of microeconomic shocks: beyond Hulten's theorem. *Econometrica* **87**(4), 1155-1203.
- [14] Baqaee, D. R. and Farhi, E., (2020). Nonlinear production networks with an application to the covid-19 crisis. *NBER Work. Pap.* **27281**.
- [15] Bargigli, L. and Tedeschi, G. (2014). Interaction in agent-based economics: a survey on the network approach. *Physica A* **399**, 1-15.
- [16] Barro, R. J., Ursúa, J. F., and Weng, J. (2020). The coronavirus and the great influenza pandemic: Lessons from the "Spanish flu" for the coronavirus's potential effects on mortality and economic activity. *National Bureau of Economic Research* **w26866**.
- [17] Barrot, J. N., Grassi, B., and Sauvagnat, J. (2020). Sectoral effects of social distancing. *SSRN*.
- [18] Berger, D. W., Herkenhoff, K. F., and Mongey, S. (2020). An seir infectious disease model with testing and conditional quarantine. *National Bureau of Economic Research* **w26901**.
- [19] Bethune, Z. A., and Korinek, A. (2020). Covid-19 infection externalities: Trading off lives vs livelihoods. *National Bureau of Economic Research* **w27009**.
- [20] Bigio, S., Zhang, M., and Zilberman, E. (2020). Transfers vs credit policy: Macroeconomic policy trade-offs during COVID-19. *National Bureau of Economic Research* **w27118**.
- [21] Blanchard, O. (2017). The Needs for Different Classes of Macroeconomic Models. Blog post, *Peterson Institute for International Economics*.
- [22] Blondel, V. D., Guillaume, J. L. et al. (2008). Fast unfolding of communities in large networks. *Journal os Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2008**(10), P10008.
- [23] Brin, S. and Page, L. (1998). The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Nertworks* **30**, 107-117.
- [24] Bodenstein, M., Corsetti, G. and Guerrieri, L. (2020). Social Distancing and Supply Disruptions in a Pandemic. *CEPR DP14629*. Available at SSRN.
- [25] Bonadio, B., Huo, Z., Levchenko, A. A., and Pandalai-Nayar, N. (2020). Global supply chains in the pandemic. *National Bureau of Economic Research* **w27224**.
- [26] Bouchard, J. P. (2009). The (unfortunate) complexity of the economy. *Physics World* **A2009**, 28-32.
- [27] Bruun, C. (2003). The economy as an agent-based whole-simulating shumpeterian dynamics. *Industry and Innovation* **10**, 475-491.
- [28] Burress, D. (1994). Homeomorphism between leontief and Cobb-Douglas input-output models. *Economic Letters* **44**, 49-53.

- [29] Caballero, R. J., and Simsek, A. (2020). A Model of Asset Price Spirals and Aggregate Demand Amplification of a "Covid-19" Shock. *National Bureau of Economic Research* **w27044**.
- [30] Crane-Droesch, A. (2017). Semiparametric panel data models using neural networks. arXiv:1702.06512v2, 1-15.
- [31] Carvalho, V. M. (2014). From micro to macro via production networks. *Journal of Economic Perspectives* **28**(4), 23-48.
- [32] Çakmaklı, C., Demiralp, S., Kalemli-Özcan, Ş., Yesiltas, S., and Yildirim, M. A. (2020). COVID-19 and Emerging Markets: An Epidemiological Multi-Sector Model for a Small Open Economy with an Application to Turkey. *National Bureau of Economic Research* **w27191**.
- [33] Conde-Ruiz, J. I., García, M., Puch, L. A. and Ruíz, J. (2020). Una metodología para el seguimiento de la afiliación a la Seguridad Social durante la crisis del Covid-19. *Fedea Economy Notes* **2020-06**.
- [34] Dingel, J. I., and Neiman, B. (2020). How many jobs can be done at home?. *National Bureau of Economic Research* **w26948**.
- [35] Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., and Trabandt, M. (2020). The macroeconomics of epidemics. *National Bureau of Economic Research* **w26882**.
- [36] Elliott, M., Golub, B. and Leduc, M. V. (2020). Supply network formation and fragility. *Preprint*.
- [37] Eurostat., 2008. *Eurostat manual of supply, use and input-output tables*. Preliminary edn. Luxembourg: Eurostat Methodologies and Working Papers.
- [38] Fagiolo, G., Reyes, J. and Schiavo, S. (2010). The evolution of the world trade web: a weighted-network analysis. *Journal of Evolutionary Economics* **20**, 479–514.
- [39] Faria-e-Castro, M. (2020). Fiscal Policy During a Pandemic. *FRB St. Louis Working Paper* **2020**(006). Available at SSRN.
- [40] Felgueroso F., García Pérez, J. I. and Jiménez, S. (2020). Guía práctica para evaluar los efectos sobre el empleo de la crisis del COVID-19 y el Plan de Choque Económico. *Fedea Economy Notes* **2020-04**.
- [41] Fernández-Villaverde, J., and Jones, C. I. (2020). Estimating and Simulating a SIRD Model of COVID-19 for Many Countries, States, and Cities. *National Bureau of Economic Research* **w27128**.
- [42] Fornaro, L. and Wolf, M. (2020). Covid-19 Coronavirus and Macroeconomic Policy. *CEPR Discussion Paper* **DP14529**. Available at SSRN.
- [43] Gatti, D., Gaffeo, E. and Gallegati, M. (2010). Complex agent-based macroeconomics: a manifesto for a new paradigm. *Journal of Economic Interaction and Coordination* **5**, 111-135.
- [44] Glover, A., Heathcote, J., Krueger, D., and Ríos-Rull, J. V. (2020). Health versus wealth: On the distributional effects of controlling a pandemic. *National Bureau of Economic Research* **w27046**.
- [45] Gourinchas, P. O. (2020). Flattening the pandemic and recession curves. *Mitigating the COVID Economic Crisis: Act Fast and Do Whatever*, 31. CEPR Press.
- [46] Guan, J. and Chen, Z. (2009). The technological system of Chinese manufacturing industry: A sectorial approach. *China Economic Review* **20**, 767-776.
- [47] Guerrieri, V., Lorenzoni, G., Straub, L., and Werning, I. (2020). Macroeconomic Implications of COVID-19: Can Negative Supply Shocks Cause Demand Shortages?. *National Bureau of Economic Research* **w26918**.
- [48] Hall, R. E., Jones, C. I., and Klenow, P. J. (2020). Trading off consumption and covid-19 deaths. *National Bureau of Economic Research* **w27340**.
- [49] Hamilton, R. S. (1982) Three-manifolds with positive ricci curvature. *J. Differ. Geom.* **17**, 255–306.
- [50] Heiss, F. (2006). Nonlinear state-space models for microeconometric panel data. *Munich Discussion Paper* **2006**(24), 1-36.
- [51] Hulten, C. R. (1978). Growth accounting with intermediate inputs. *Review of Economic Studies* **45**, 69-106.
- [52] Iwai, K. (1987). What is Macroeconomics? Knut Wicksell and Macroeconomic Analysis. *RIJE Discussion Paper* **87**(12).
- [53] Jackson, M. O., 2010. *Social and Economic Networks*. 1st edn. Princeton: Princeton University Press.
- [54] Jordà, Ò., Singh, S. R., and Taylor, A. M. (2020). Longer-run economic consequences of pandemics. *National Bureau of Economic Research* **w26934**.
- [55] Kaplan, G., Moll, B., and Violante, G. (2020). Pandemics according to HANK. *LSE*, presentación.
- [56] Kirman, A. P. (1992). Whom or what does the representative individual represent?. *Journal of Economic Perspectives* **6**, 117-136.
- [57] Krueger, D., Uhlig, H., and Xie, T. (2020). Macroeconomic dynamics and reallocation in an epidemic. *National Bureau of Economic Research* **w27047**.
- [58] Lee K. M., Yang, J. S. et al. (2011). Impact of the topology of global macroeconomic network on the spreading of economic crises. *Plos One* **6**(3), 1-25.
- [59] Long, J. B., Plosser, C. I. (1983). Real business cycles. *Journal of Political Economy* **91**(1), 39-69.
- [60] Lucas, R. E. (1977). Understanding business cycles. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* **5**, 7-29.

- [61] Lucas, R. E., 1987. *Models of Business Cycles*. Oxford: Basil Blackwell, 107-108.
- [62] McKenzie, L. (1957). Demand theory without a utility index. *Review of Economic Studies* **24**(3), 185-189.
- [63] Mongey, S., Pilossoph, L., and Weinberg, A. (2020). Which workers bear the burden of social distancing policies?. *National Bureau of Economic Research* **w27085**.
- [64] Moreno, J. L., 1934. *Who Shall Survive?*. Nueva York: Beacon House.
- [65] Ni, C., Lin, Y., Luo, F. et al. (2019). Community Detection on Networks with Ricci Flow. *Sci Rep* **9**, 9984
- [66] Nickell, S. (1981). Biases in Dynamic Models with Fixed Effects. *Econometrica* **49**(6), 1417–26.
- [67] Pangallo, M. (2020). Synchronization of endogenous business cycles. *SSRN Electronic Journal*, 1-23.
- [68] Ollivier, Y. (2009). Ricci curvature of markov chains on metric spaces. *J. Funct. Anal.* **256**, 810–864.
- [69] Oliu-Barton, M. and Pradelski, B. (2020). Green-zone travelling: A pan-European approach to save tourism. *EsadeEcPol Policy Insight* **10**.
- [70] Oto-Peralías, D. (2020) Correlaciones provinciales de la COVID-19. En Á. De la Fuente, T. Roldán y J. F. Jimeno (Ed.), *La economía española en tiempos de pandemia: Una primera aproximación*. Barcelona: Debate.
- [71] Raghavan, U. N., Albert, R. and Kumara, S. Near linear time algorithm to detect community structures in large-scale networks. *Physical Review E* **76**, 036106.
- [72] Soto, M. (2009). System GMM estimation with a small sample. *Barcelona Economics Working Paper Series* **395**, 1-28.
- [73] Stiglitz, J. E. (2017). Where modern macroeconomics went wrong. *NBER Working Paper* **23795**.
- [74] Ter Wal, A. L. J. (2009). Applying social network analysis in economic geography: framing some key analytic issues. *The Annals of Regional Science* **43**, 739-756.
- [75] Tesfation, L. (2006). Agent-based computational economics: a constructive approach to economic theory.
- [76] Tsekeris, T. (2014). Network analysis of intersectoral relationships and key economic sectors. *Centre of planning and economic research* **138**, 1-40.

ANEXOS

Anexo 0. Nota al repositorio. Todo el trabajo computacional está realizado en Python 3.7. En lo concerniente a la sección 4, el shock de gasto público se ha realizado en un cuaderno de Jupyter, mientras que el de exportaciones y las predicciones basadas en el shock tipo COVID en un cuaderno de Colaboratory disponible en <https://colab.research.google.com/drive/1mxrdGyRldB4g95blocJuYjyVamYQ1Z-E>, al igual que el análisis de redes, que puede consultarse en <https://colab.research.google.com/drive/1zmcMmQwzCav00nCDZ2iHCN0V84Ppzc6u>. De cualquier manera, todo ello está disponible en el repositorio de GitHub (<https://github.com/i-rb/tfgecon>), junto a otras cosas menos relevantes en el trabajo y los datos utilizados. Todos los cuadernos mencionados (incluidos los de Colaboratory) se presentan tanto en formato .ipynb (cuaderno de Python). Además, el cuaderno referente al shock del gasto público también se presenta en formato .html, para que pueda abrirse con facilidad en cualquier navegador, aun sin ser ejecutable.

Anexo 3a. Modelo de Long y Plosser. En [59], Long y Plosser especifican un modelo que se ha convertido en clásico en la teoría de ciclos y sirve de punto de partida para el modelo de Acemoglu, Akcigit y Kerr (2015).

Formalmente, se tiene un hogar representativo que vive infinitos periodos $t = 0, \dots, \infty$ y cuyas preferencias toman la forma:

$$U \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, Z_t), \quad 0 < \beta < 1 \quad (8.1)$$

donde β es el factor de descuento, C_t el vector de consumo, donde cada componente del mismo corresponde al consumo de cada uno de los N bienes y Z_t la cantidad de ocio de la que se disfruta en el periodo t .

La función de producción se define como:

$$Y_{t+1} = F(L_t, X_t; \lambda_{t+1}) \quad (8.2)$$

donde Y_{t+1} es un vector N -dimensional en el que la componente i -ésima representa la cantidad de bien i existente en la economía en $t + 1$; F es una función definida en $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, cóncava y linealmente homogénea respecto L_t y X_t ; X_t es una matriz⁴⁵ $N \times N$ donde el elemento X_{ijt} representa la cantidad del bien j (input) utilizada en la producción del bien i en cierto instante t ; y λ_{t+1} es un vector aleatorio que asumimos realización de un proceso de Markov.

Sea H el tiempo total disponible en la economía para dedicar al ocio o a la producción de un bien, es claro que:

$$Z_t + \sum_{i=1}^N L_{it} = H \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

Además, existe una restricción en la asignación de recursos:

$$C_{jt} + \sum_{i=1}^N X_{ijt} = Y_{jt}; \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (8.4)$$

teniendo que realizar la asignación (C_t, Z_t, L_t, X_t) en el momento t_a , conociendo únicamente los outputs y shocks para instantes t_p tales que $t_p \leq t_a$.

⁴⁵Esta definición de X_t es muy importante para el objetivo del trabajo, porque es la primera de las matrices input-output.

Analíticamente, el agente maximiza su bienestar $V(S_t)$ dado un vector de estado $S_t = (Y_t, \lambda_t)$, resolviendo el problema que sigue:

$$\begin{cases} \max_{C_t, Z_t} \mathbb{E} \left[\sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u(C_s, Z_s) | S_t \right] \\ \text{sa } (2.2), (2.3) \text{ y } (2.4) \end{cases} \quad (8.5)$$

Anexo 3b. Modelo de Acemoglu. Carvalho, Ozdaglar y Tahbaz-Salehi (2012). En [2], los autores se plantean como objetivo contrastar si pudieran llegar a ocasionarse fluctuaciones agregadas significativas a partir de shocks microeconómicos que afectan a ciertas empresas o sectores, debido a que esta hipótesis suele rechazarse en la teoría económica, esgrimiendo para ello el argumento de Lucas (1977) principalmente. Este argumento, recogido en [60] sugiere que los shocks microeconómicos se equilibrarían unos a otros y, por tanto, los efectos agregados serían prácticamente nulos⁴⁶.

Más de nuestro interés es la modelización de la economía que plantean:

Considérese un único agente representativo en la economía dotado con una unidad de trabajo, ofertado inelásticamente, y con preferencias Cobb-Douglas sobre n bienes distintos:

$$u(c_1, c_2, \dots, c_n) = B \prod_{i=1}^n (c_i)^{1/n} \quad (8.6)$$

donde c_i es el nivel de consumo del bien i y B una constante que se añade con un fin normalizador, como se comprueba más adelante.

Cada bien es producido por un sector de la economía y puede ser consumido o utilizado como input para la producción de otro sector. Los sectores presentan tecnologías Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala. En particular:

$$y_i = z_i^\alpha l_i^\alpha \prod_{j=1}^n x_{ij}^{(1-\alpha)a_{ij}} \quad (8.7)$$

donde l_i es la cantidad de trabajo contratada por el sector, $\alpha \in (0, 1)$ la participación del trabajo, x_{ij} denota la cantidad de producto de j utilizado como input en la producción de i ⁴⁷ y z_i es un shock idiosincrásico de productividad al sector i , independiente cada uno de ellos de los shocks del resto de sectores, cuyo logaritmo tiene distribución conocida, i.e. $\varepsilon_i = \log(z_i) \sim F_i$. Finalmente, a_{ij} designa la participación del bien j en el total de usos intermedios para el i -ésimo sector⁴⁸. Con el fin de obtener rendimientos constantes a escala se asume $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ para todo bien $i = 1, \dots, n$.

Sea entonces \mathbf{A} la matriz input-output con componentes w_{ij} como las explicitadas. Así, la economía se especifica como una tupla $\mathcal{E} = (\mathcal{J}, \mathbf{A}, \{F_i\}_{i \in \mathcal{J}})$, donde $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$ denota el conjunto de sectores. En el equilibrio (competitivo) de esta economía \mathcal{E} , el logaritmo del valor añadido real viene dado por:

$$y \equiv \log(\text{GDP}) = \lambda' \varepsilon \quad (8.8)$$

donde $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$ y v se define como

$$\lambda = \frac{\alpha}{n} [I - (1 - \alpha)\mathbf{A}']^{-1} \mathbf{1}. \quad (8.9)$$

⁴⁶Sirva de fundamento para el presente trabajo que Acemoglu *et al.* aceptan finalmente la hipótesis y rechazan por tanto el argumento de Lucas.

⁴⁷Nótese que esta definición es análoga a la de \mathbf{X}_t en el modelo Long y Plosser (1983).

⁴⁸En particular, $a_{ij} = 0$ si el sector i no toma como input el bien j .

Esto es, el logaritmo del valor real añadido efectivamente es una combinación (lineal) de los shocks sectoriales con coeficientes determinados por el *vector de influencia* λ , pero no nos concierne. La matriz dada por $[I - (1 - \alpha)\mathbf{A}']^{-1}$ es una representación de la matriz de Leontief (véase [28], Burrell (1994)).

Finalmente, en el equilibrio tenemos que las componentes λ_i del vector λ se pueden calcular como la proporción de ventas del sector i sobre el total, esto es:

$$\lambda_i = \frac{p_i y_i}{\sum_{j=1}^n p_j y_j} \quad (8.10)$$

Formalmente,

Definition. Un **equilibrio competitivo** de la economía \mathcal{E} con n sectores consiste en un vector de precios $p = (p_1, \dots, p_n)$, un salario h , un vector de consumo $c = (c_1, \dots, c_n)$ y las cantidades $(l_i, x_i, (x_{ij}))$ tales que:

- (1) el hogar representativo maximiza su utilidad,
- (2) la empresa representativa de cada sector maximiza su beneficio
- (3) los mercados se vacían, esto es:

$$c_i + \sum_{j=1}^n x_{ji} = y_i \quad \forall i; \quad \sum_{i=1}^n l_i = 1$$

Tomando las condiciones de primer orden respecto de l_i y de x_{ij} para el sector i :

$$l_i = \frac{\alpha p_i y_i}{h} \quad x_{ij} = \frac{(1 - \alpha) p_i a_{ij} y_i}{p_j}$$

donde h es el salario de mercado y p_j denota el precio del j -ésimo bien. Sustituyendo estos valores en la función de producción del sector i :

$$\begin{aligned} \alpha \log(h) &= \alpha \varepsilon_i + \Gamma + \log(p_i) \\ &\quad - (1 - \alpha) \sum_{j=1}^n w_{ij} \log(p_j) + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^n w_{ij} \log(w_{ij}) \end{aligned}$$

donde $\Gamma = \alpha \log(\alpha) + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$ es una constante $\Gamma \in \mathbb{R}$. Multiplicando la ecuación anterior por el i -ésimo elemento del vector $v' = \frac{\alpha}{n} \mathbf{1}' [\mathbf{I} - (1 - \alpha)\mathbf{A}]^{-1}$ y sumando en i :

$$\log(h) = \lambda' \varepsilon + \mu$$

donde μ es una constante independiente de ε dada por:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(p_i) + \frac{\Gamma}{\alpha} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i a_{ij} \log(a_{ij})$$

Finalmente, definiendo A como

$$A = n \exp \left\{ -\frac{\Gamma}{\alpha} - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i a_{ij} \log(a_{ij}) \right\}$$

y normalizando el índice de precios a 1 tal que $\frac{n}{B} (p_1 p_2 \dots p_n)^{1/n} = 1$, se obtiene

$$y = \log(h) = \lambda' \varepsilon$$

Además, a partir del teorema de Hulten [51], que establece que dada una función de producción $y_i = e^{\alpha \varepsilon_i} f(x_{i1}, \dots, x_{in}, l_i)$, un cambio de productividad de $d(\alpha \varepsilon_i)$ en el sector i causa un incremento en la producción igual a:

$$d(\text{GDP}) = \frac{p_i y_i}{\text{GDP}} d(\alpha \varepsilon_i)$$

Finalmente, dado $h = \alpha \sum_{i=1}^n p_i y_i$ se llega a,

$$\lambda_i = \frac{dh}{d\epsilon_i} = \frac{p_i y_i}{\sum_{j=1}^n p_j y_j}$$

Anexo 3c. Problema de optimización de la empresa en Acemoglu et al (2015).

Sea el problema de optimización de la industria productora del bien i :

$$\begin{cases} \max_{l, x_{ij}} p_i y_i - l - \sum_{j=1}^n p_j x_{ij} \\ \text{s.a. } y_i = e^{z_i} l_i^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\alpha_{ij}} \end{cases}$$

y derivando respecto de x_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(p_i e^{z_i} l_i^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\alpha_{ij}} - l - \sum_{j=1}^n p_j x_{ij} \right)}{\partial x_{ij}} &= \\ &= p_i e^{z_i} \alpha_{ij} x_{ij}^{\alpha_{ij}-1} \prod_{j=1, j \neq i}^n x_{ij}^{\alpha_{ij}} - p_j \end{aligned}$$

Ahora igualando a 0 para obtener las condiciones de primer orden:

$$p_i e^{z_i} \alpha_{ij} x_{ij}^{\alpha_{ij}-1} \prod_{j=1, j \neq i}^n x_{ij}^{\alpha_{ij}} = p_j$$

Multiplicando y dividiendo por $x_{ij}^{\alpha_{ij}}$ y sustituyendo $e^{z_i} l_i^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\alpha_{ij}}$ por y_i :

$$\frac{p_i \alpha_{ij} x_{ij}^{\alpha_{ij}-1} y_i}{x_{ij}^{\alpha_{ij}}} = p_j$$

Finalmente, reordenando los términos:

$$\frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i} = \alpha_{ij}$$

Anexo 4a. Demostración de la proposición 1.

Demostración de la primera parte. Sea el gasto del gobierno nulo para esta demostración. La maximización de beneficios implica

$$\alpha_{ij} = \frac{p_j x_{ij}}{p_i y_i} \quad \alpha_i^l = \frac{w l_i}{p_i y_i} \quad (8.11)$$

y, de igual manera, la maximización de la utilidad conlleva

$$\frac{p_i c_i}{\beta_i} = \frac{p_j c_j}{\beta_j} \quad (8.12)$$

La restricción presupuestaria del hogar, dado que no existe gasto público a financiar (i.e. $T = 0$) será

$$\sum_{i=1}^n p_i c_i = w l$$

que implica

$$p_i c_i = \beta_i w l \quad (8.13)$$

Por otro lado, la condición de primer orden de la oferta de trabajo implica

$$-\frac{\gamma'(l)l}{\gamma(l)} = 1$$

y, así, debido a las preferencias, la oferta de trabajo es determinada independientemente del nivel salarial.

Tomando logaritmos en la función de producción y diferenciando se obtiene

$$d \ln y_i = dz_i + \alpha_i^l d \ln l_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} d \ln x_{ij} \quad (8.14)$$

Diferenciando (6.1) se llega a

$$\begin{cases} d \ln y_i + d \ln p_i = d \ln x_{ij} + d \ln p_j \\ d \ln y_i + d \ln p_i = d \ln l_i \end{cases}$$

donde se asume previamente que los salarios son numerarios y, por tanto, $dw = 0$. Sustituyendo estas ecuaciones en (6.4) se obtiene:

$$d \ln y_i = dz_i + \alpha_i^l (d \ln y_i + d \ln p_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (d \ln y_i + d \ln p_i - d \ln p_j) \quad (8.15)$$

Diferenciando (6.2) y (6.3) y combinándolas con las dos últimas ecuaciones para eliminar precios (nótese que l es constante):

$$d \ln y_i = dz_i + \alpha_i^l (d \ln y_i + d \ln c_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (d \ln y_i + d \ln c_i - d \ln c_j)$$

y habiendo asumido previamente que $\alpha_i^l + \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, podemos simplificar a

$$d \ln c_i = dz_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} d \ln c_j$$

que puede reescribirse de manera matricial como:

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{c} = \mathbf{dz} + \mathbf{A} \mathbf{d} \ln \mathbf{c}$$

y, por tanto,

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{dz} \quad (8.16)$$

como solución única dado que el mayor autovalor de \mathbf{A} es menor que 1. Ahora, combinando (6.1) y (3.3):

$$\frac{y_j}{c_j} = 1 + \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\beta_i y_i}{\beta_j c_i} \quad (8.17)$$

que implica

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{y} = \mathbf{d} \ln \mathbf{x} \quad (8.18)$$

Ahora, combinando (6.6) y (6.8)

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{dz} \quad (8.19)$$

que es el resultado de la primera parte de la proposición 1. \square

Demostración de la segunda parte. Normalizando $\mathbf{z} = 0$ para esta parte de la prueba. Considérese la función de coste unitario del sector i , que es:

$$C_i(\mathbf{p}, w) = B_i w^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n p_j^{a_{ij}}$$

donde

$$B_i = \left[\frac{1}{\alpha_i^l} \right]^{\alpha_i^l} \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{a_{ij}} \right]^{a_{ij}}$$

Al tratarse de una economía perfectamente competitiva donde las empresas obtienen beneficio cero, para todo $i = 1, \dots, n$:

$$\ln p_i = \ln B_i + \alpha_i^l \ln w + \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln p_j$$

Al ser el salario numerario, el término $\alpha_i^l \ln w$ se cancela y las n ecuaciones definen un sistema en n precios con solución

$$\ln \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

donde \mathbf{b} es el vector de entradas dado por $\ln B_i$.

Esto muestra que, para un vector de productividades dado, el equilibrio del vector de precios está determinado unívocamente independientemente del valor del gasto público \mathbf{G} . Así, los shocks de demanda no tienen impacto en los precios de equilibrio, que vienen determinados únicamente por la oferta. Desde (6.3) se sigue que el vector de consumo se mantiene inalterado y, desde (3.2), la oferta total neta de todos los sectores debe permanecer constante independientemente del valor de \mathbf{G} . Es posible, por tanto, obtener el cambio en la producción de la economía utilizando (3.2) combinada con (6.1) y (6.2), esto es:

$$d \ln y_i = d \ln x_{ij} \quad d \ln y_i = d \ln l_i$$

La optimización del hogar implica que, aunque los precios sean fijos, la oferta de trabajo varía debido a los cambios en el consumo resultantes de las compras públicas. En particular, la condición de primer orden que determina la oferta de trabajo del hogar representativo es la siguiente:

$$\frac{wl}{wl - T} = - \frac{l\gamma'(l)}{\gamma(l)}$$

donde $T = \sum_{i=1}^n p_i G_i$.

Cuando $\gamma(l) = (1 - l)^\lambda$, tomando w como numerario, se obtiene:

$$l = \frac{1 + \lambda \sum_{i=1}^n p_i G_i}{1 + \lambda}$$

Por tanto, se tiene que

$$p_i c_i = \beta_i [lw - T] = \frac{\beta_i}{1 + \lambda} \left[1 - \sum_{j=1}^n p_j G_j \right]$$

lo que implica

$$d(p_i c_i) = - \frac{\beta_i}{1 + \lambda} \left[\sum_{j=1}^n d(p_j G_j) \right]$$

La restricción presupuestaria conlleva entonces que

$$dy_i = dc_i + \sum_{j=1}^n dx_{ji} + dG_i$$

Combinando los dos resultados previos con (6.1):

$$\frac{d(p_i y_i)}{p_i y_i} = \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{d(p_j y_j)}{p_j y_j} + \frac{dG_i}{y_i} - \frac{\beta_i}{1 + \lambda} \left[\sum_{j=1}^n d(\tilde{G}_j) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ji} \frac{d(p_j y_j)}{p_j y_j} + \frac{d\tilde{G}_i}{p_i y_i} - \frac{\beta_i}{1+\lambda} \left[\sum_{j=1}^n d(\tilde{G}_j) \right] \quad (8.20)$$

donde $\tilde{G}_i = p_i G_i$. Escribiendo esta expresión en forma matricial y teniendo en cuenta que, debido a que los precios son constantes, $\frac{d(p_i y_i)}{p_i y_i} = d \ln y_i$, se tiene

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}' \mathbf{d} \ln \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{d} \tilde{\mathbf{G}}$$

$$= (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}')^{-1} \Lambda \mathbf{d} \tilde{\mathbf{G}}$$

$$= \hat{\mathbf{H}}' \Lambda \mathbf{d} \tilde{\mathbf{G}}$$

siendo $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}')^{-1}$ la inversa de Leontief, $\tilde{\mathbf{G}}$ el vector de gasto nominal del gobierno.

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \cdots & \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

cuyas entradas vienen definidas por $\hat{a}_{ij} = \frac{x_{ij}}{y_j}$, i.e., la cantidad del bien j que utiliza el sector i como input en proporción de las ventas totales del sector j y

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (1 - \frac{\beta_1}{1+\lambda}) \frac{1}{p_1 y_1} & -\frac{\beta_1}{1+\lambda} \frac{1}{p_1 y_1} & \cdots & \\ -\frac{\beta_2}{1+\lambda} \frac{1}{p_2 y_2} & (1 - \frac{\beta_2}{1+\lambda}) \frac{1}{p_2 y_2} & & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & (1 - \frac{\beta_n}{1+\lambda}) \frac{1}{p_n y_n} \end{pmatrix}$$

y, llevando a cabo la multiplicación $\Lambda \mathbf{d} \tilde{\mathbf{G}}$, el sistema queda

$$\mathbf{d} \ln \mathbf{y} = \hat{\mathbf{H}}' \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{G}_1}{p_1 y_1} - \frac{\beta_1}{1+\lambda} \frac{1}{p_1 y_1} \sum_{j=1}^n d\tilde{G}_j \\ \frac{d\tilde{G}_2}{p_2 y_2} - \frac{\beta_2}{1+\lambda} \frac{1}{p_2 y_2} \sum_{j=1}^n d\tilde{G}_j \\ \vdots \\ \frac{d\tilde{G}_n}{p_n y_n} - \frac{\beta_n}{1+\lambda} \frac{1}{p_n y_n} \sum_{j=1}^n d\tilde{G}_j \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

Finalmente, terminando la multiplicación, llegamos al resultado de la parte 2 de la proposición:

$$d \ln y_i = \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ji} \frac{1}{p_j y_j} \left(d\tilde{G}_j - \frac{\beta_j}{1+\lambda} \sum_{k=1}^n d\tilde{G}_k \right)$$

□

Anexo 4b. Derivación de la ecuación del ejemplo 1.

Supóngase, s.p.g., que el agente representativo de la economía descrita en el ejemplo 1 presenta preferencias $u(c_1, c_2, c_3, l) = \gamma(l) \prod_{i=1}^3 c_i^{1/3}$. Dada la función de producción del sector $i = 1$,

$$y_i = e^{z_i} l_i^{a_i^l} x_{ij}^{a_{ij}}$$

denotando $j = 2$ y $k = 3$ ⁴⁹ y la condición de vaciado de mercado $y_1 = c_1 + x_{31}$, podemos obtener las condiciones de primer orden del problema de optimización del hogar y de las empresas, combinándolas para eliminar precios:

$$a_{12} = \frac{c_1 x_{12}}{c_2 y_2} \quad a_1^l = \frac{3c_1 l_1}{y_1}$$

Substituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$c_1 = e^{z_1} \Omega_{12} c_2^{a_{12}} \quad (\text{A})$$

donde $\Omega_{12} = (a_1^l)^{a_1^l} a_{12}^{a_{12}} 3^{-a_1^l}$. Análogamente, $c_2 = e^{z_2} \Omega_{23} c_3^{a_{23}}$ y $c_3 = e^{z_3} \Omega_{31} c_1^{a_{31}}$. Resolviendo el sistema dado por estas ecuaciones y (A):

$$c_i = \tilde{\Omega}_i e^{\delta_i}$$

siendo $\tilde{\Omega}_i \in \mathbb{R}$ una constante y

$$\delta_i = \frac{z_i + z_j a_{ij} + z_k a_{ij} a_{jk}}{1 - a_{ij} a_{jk} a_{ki}}$$

Combinando las funciones de producción, las asignaciones óptimas de trabajo y las elecciones de consumo del equilibrio, puede representarse y_i en términos del input intermedio x_{ij} , para el sector 1:

$$y_1 = \tilde{\Omega}_1 e^{\delta_1} + y_3 e^{\frac{a_3^l \delta_3 - z_3}{1 - a_3^l}} \Gamma_1$$

donde $\Gamma_1 \in \mathbb{R}$ es una constante. Análogamente se obtienen las ecuaciones para y_2 e y_3 . Resolviendo el sistema que forman y_1, y_2, y_3 :

$$y_1 = e^{\delta_1} \frac{[\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_3 \Gamma_3 + \tilde{\Omega}_2 \Gamma_2 \Gamma_3]}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}$$

Finalmente, tomando logaritmos y diferenciando, llegamos al resultado:

$$d \ln y_1 = \frac{dz_1 + a_{12} dz_2 + a_{12} a_{23} dz_3}{1 - a_{12} a_{23} a_{31}}$$

Anexo 4c. Derivación de la ecuación del ejemplo 2.

Supóngase de nuevo s.p.g. que el agente representativo de la economía a estudio presenta preferencias $u(c_1, c_2, c_3, l) = \gamma(l) \prod_{i=1}^3 c_i^{1/3}$. Las funciones de coste unitario para cada uno de los tres sectores pueden escribirse como

$$C_i(\mathbf{p}, w) = \mu_i w^{a_i^l} p_j^{a_{ij}}$$

⁴⁹Como se explica en el ejemplo 1, son válidas y necesarias las ternas de la forma $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \vee \{2, 3, 1\} \vee \{3, 1, 2\}$ dependiendo del sector i a estudiar.

donde $\mu_i = \left(\frac{\alpha_i^l}{a_{ij}}\right)^{a_{ij}} + \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_i^l}\right)^{a_i^l}$. En equilibrio los precios se igualan al coste:

$$p_i = C_i(\mathbf{p}, w) = \mu_i w^{\alpha_i^l} p_j^{a_{ij}}$$

por lo que, resolviendo tomando $w = 1$:

$$p_i = \gamma^{\frac{1}{1-a_{ij}a_{jk}a_{ki}}}$$

donde $\gamma = \mu_i \mu_j^{a_{ij}} \mu_k^{a_{ij}a_{jk}}$ y los valores de i, j, k son tomados de una de las ternas descritas en el anexo anterior. A partir de aquí puede comprobarse que los precios son constantes independientemente de la existencia de shocks de demanda, por lo que puede trabajarse sin dificultad con términos nominales:

$$d\tilde{y}_i = d\tilde{c}_i + d\tilde{x}_{ki} + d\tilde{G}_i$$

Usando las condiciones de primer orden del problema de la empresa, $a_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\tilde{y}_i}$, diferenciando se obtiene:

$$d\tilde{x}_{ij} = a_{ij} d\tilde{y}_i$$

por lo que

$$d\tilde{y}_i = d\tilde{c}_i + a_{ki} d\tilde{y}_k + d\tilde{G}_i \quad (\text{A})$$

Tomando ahora los resultados de la optimización del hogar, esto es:

$$\tilde{c}_i = \frac{1}{(1+\lambda)3} - \frac{\tilde{G}_i + \tilde{G}_j + \tilde{G}_k}{(1+\lambda)3}$$

y diferenciando de nuevo:

$$d\tilde{c}_i = -\frac{d\tilde{G}_i + d\tilde{G}_j + d\tilde{G}_k}{(1+\lambda)3}$$

que, introduciéndolo en la ecuación (A):

$$d\tilde{y}_i = -\frac{d\tilde{G}_i + d\tilde{G}_j + d\tilde{G}_k}{(1+\lambda)3} + a_{ki} d\tilde{y}_k + d\tilde{G}_i$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones $\{\tilde{y}_i\}_{i=1,2,3}$:

$$d\tilde{y}_i = \frac{d\tilde{G}_i + a_{jk}a_{ki}d\tilde{G}_j + a_{ki}d\tilde{G}_k - \frac{1+a_{ki}+a_{jk}a_{ki}}{3(1+\lambda)}[d\tilde{G}_i + d\tilde{G}_j + d\tilde{G}_k]}{1-a_{ij}a_{jk}a_{ki}}$$

Anexo 4d. Definición del operador covarianza y Teorema de Hulten.

Se define el **operador covarianza** como

$$\text{Cov}_{\mathbf{A}^{(j)}}(\mathbf{H}_{(k)}, \mathbf{H}_{(m)}) = \sum_{i=1}^n a_{ji} h_{ik} h_{im} - \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} h_{ik}\right) \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} h_{im}\right) \quad (8.22)$$

Proposición 3f. (Teorema de Hulten). Denótese por λ_i el peso de Domar, entonces:

$$\frac{d \ln Y}{dz_i} = \lambda_i$$

Demostración. Cumpliéndose el primer teorema del bienestar, la asignación en el equilibrio resuelve⁵⁰:

$$Y(z_1, \dots, z_n) = \max_{l_i, x_{ij}, c_i} u(c_1, \dots, c_n) + \sum_{i=1}^n \mu_i (e^{z_i} F_i(l_i, x_{ij}) - \sum_{j=1}^n x_{ij} - c_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (l - \sum_{i=1}^n l_i)$$

donde l es la cantidad de trabajo disponible, δ_i y λ_i los multiplicadores de Lagrange. El teorema de la envolvente implica que:

$$\frac{dY}{de^{z_i}} = \mu_i F_i(l_i, x_{ij}) = \mu_i y_i$$

Si se prueba que μ_i es el precio de i en el equilibrio competitivo, obtenemos el resultado. Para probar esto, se parte de que, en el equilibrio:

$$\frac{du/dc_i}{du/dc_1} = \frac{\mu_i}{\mu_1} = \frac{p_i}{p_1}$$

para todo i . Es decir:

$$\frac{du}{dc_i} = \frac{p_i}{p_1} \frac{du}{dc_1} \quad (8.23)$$

Ahora, mediante el teorema de Euler para funciones homogéneas,

$$Y = \sum_{i=1}^n \frac{du}{dc_i} c_i = \frac{du/dc_1}{p_1} \sum_{i=1}^n p_i c_i \quad (8.24)$$

Definiendo la función de gasto del hogar como $e(\mathbf{p}, \mathcal{L})$ y, dado que \mathcal{L} es homogénea de grado uno, $e(\mathbf{p}, \mathcal{L}) = e(\mathbf{p})\mathcal{L}$. Es decir,

$$\sum_{i=1}^n p_i c_i = e(\mathbf{p})Y$$

y normalizando $e(\mathbf{p}) = 1$ se obtiene que

$$\sum_{i=1}^n p_i c_i = Y$$

Combinando esta última ecuación con (6.16),

$$\frac{du}{dc_1} = p_1$$

que puede ser sustituido en (6.25) para obtener $p_i = \mu_i$ para todo i . □

Anexo 4e. Demostración de la propiedad de simetría.

Supóngase, s.p.g., que las preferencias del hogar representativo vienen dadas por:

$$u(c_1, \dots, c_n, l) = D(\mathbf{c})h\left(\frac{1-l}{l}\right)l$$

donde h presenta rendimientos constantes a escala y, por tanto, puede asumirse que u también presenta rendimientos constantes a escala y sea el índice de precios asociado $P_u^*(\mathbf{p}, w)$ con \mathbf{p} el vector de precios de los bienes y w del factor l .

Por el primer teorema del bienestar y el teorema de Hulten, se tiene

$$\frac{d \ln u}{dz_i} = \frac{p_i y_i}{P_u u} = \lambda_i^*$$

⁵⁰En nuestra economía, F es una función Cobb-Douglas.

para todo $i = 1, \dots, n$. Por el teorema de Schwartz⁵¹:

$$\frac{d\lambda_i^*}{dz_j} = \frac{d\lambda_j^*}{dz_i}$$

Nótese que $\lambda_i = \lambda_i^*(P_u u/\text{GDP})$, así:

$$\frac{d\lambda_i^*}{dz_j} = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dz_j} + \frac{d \ln(\text{GDP}/P_u u)}{d \log A_j} = \frac{\text{GDP}}{P_u u} \frac{d\lambda_i}{dz_j} + 0 \quad (8.25)$$

que sigue del hecho de que la elasticidad de sustitución entre D y h es 0. De manera análoga:

$$\frac{d\lambda_j^*}{dz_i} = \frac{\lambda_j^*}{\lambda_j} \frac{d\lambda_j}{dz_i} + 0 \quad (8.26)$$

Por tanto, combinando (6.12) y (6.13), llegamos al resultado.

$$\frac{d\lambda_j}{dz_i} = \frac{d\lambda_i}{dz_j}$$

□

⁵¹De simetría en las segundas derivadas.

Anexo 6a. Sectores según la CNAE.

FIGURE 8.1. Clasificación Nacional de Actividades Económicas 2009

Sector	Descripción
1	Productos de la agricultura, la ganadería y la caza, y servicios relacionados con los mismos
2	Productos de la silvicultura y la explotación forestal, y servicios relacionados con los mismos
3	Pescado y otros productos de la pesca; productos de la acuicultura; servicios de apoyo a la pesca
4	Industrias extractivas
5	Productos alimenticios; bebidas; tabaco manufacturado
6	Productos textiles; prendas de vestir; artículos de cuero y calzado
7	Madera y corcho y productos de madera y corcho, excepto muebles; artículos de cestería y espartería
8	Papel y productos del papel
9	Servicios de impresión y de reproducción de soportes grabados
10	Coque y productos de refino de petróleo
11	Productos químicos
12	Productos farmacéuticos de base y sus preparados
13	Productos de caucho y plásticos
14	Otros productos minerales no metálicos
15	Productos de metalurgia y productos metálicos
16	Productos metálicos, excepto maquinaria y equipo
17	Productos informáticos, electrónicos y ópticos
18	Equipo eléctrico
19	Maquinaria y equipo n.c.o.p.
20	Vehículos de motor, remolques y semirremolques
21	Otro material de transporte
22	Muebles; otros productos manufacturados
23	Servicios de reparación e instalación de maquinaria y equipos
24	Energía eléctrica, gas, vapor y aire acondicionado
25	Agua natural; servicios de tratamiento y distribución de agua
26	Servicios de alcantarillado; servicios de recogida, tratamiento y eliminación de residuos...
27	Construcciones y trabajos de construcción
28	Servicios de comercio al por mayor y al por menor y servicios de reparación de vehículos de motor
29	Servicios de comercio al por mayor e intermediación del comercio, excepto de vehículos de motor
30	Servicios de comercio al por menor, excepto de vehículos de motor y motocicletas
31	Servicios de transporte terrestre, incluso por tubería
32	Servicios de transporte marítimo y por vías navegables interiores

FIGURE 8.2. Clasificación Nacional de Actividades Económicas 2009 (continuación)

Sector	Descripción
33	Servicios de transporte aéreo
34	Servicios de almacenamiento y auxiliares del transporte
35	Servicios de correos y mensajería
36	Servicios de alojamiento y de comidas y bebidas
37	Servicios de edición
38	Servicios cinematográficos, de vídeo y televisión; grabación de sonido y edición; radio y televisión
39	Servicios de telecomunicaciones
40	Servicios de programación, consultoría y otros servicios relacionados con la informática;
41	Servicios financieros, excepto seguros y fondos de pensiones
42	Servicios de seguros, reaseguros y planes de pensiones, excepto seguridad social obligatoria
43	Servicios auxiliares a los servicios financieros y a los servicios de seguros
44	Servicios inmobiliarios. Alquileres imputados de las viviendas ocupadas por sus propietarios
45	Servicios jurídicos y contables; servicios de consultoría de gestión empresarial
46	Servicios técnicos de arquitectura e ingeniería; servicios de ensayos y análisis técnicos
47	Servicios de investigación y desarrollo científico
48	Servicios de publicidad y de estudio de mercado
49	Otros servicios profesionales, científicos y técnicos; servicios veterinarios
50	Servicios de alquiler
51	Servicios relacionados con el empleo
52	Servicios de agencias de viajes, operadores turísticos y otros servicios de reservas
53	Servicios de seguridad e investigación; servicios para edificios y paisajísticos; servicios administrativos
54	Servicios de administración pública y defensa; servicios de seguridad social obligatoria
55	Servicios de educación
56	Servicios de atención sanitaria
57	Servicios sociales de atención en establecimientos residenciales; servicios sociales sin alojamiento
58	Servicios de creación, artísticos; servicios de bibliotecas, museos; servicios de juegos de azar
59	Servicios deportivos, recreativos y de entretenimiento
60	Servicios prestados por asociaciones
61	Servicios de reparación de ordenadores, efectos personales y artículos de uso doméstico
62	Otros servicios personales
63	Servicios de los hogares como empleadores de personal doméstico
64	Servicios de organizaciones y organismos extraterritoriales

Anexo 6b. Ecuación del modelo a la Crane.

La ecuación del modelo siguiendo la metodología de Crane equivalente a (5.2), se definiría

$$\begin{aligned} \nabla \ln Y_{i,t} = & f(\nabla \ln Y_{i,t-1}, \dots, \nabla \ln Y_{i,t-k}) + \sum_{k=1}^{L_o} \beta_k^{own} \text{Shock}_{i,t-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{L_u} \beta_k^{up} \text{Upstream}_{i,t-k} + \sum_{k=1}^{L_d} \beta_k^{down} \text{Downstream}_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t} \end{aligned} \quad (8.27)$$

donde f es una aplicación desconocida estimada por medio de redes neuronales y que resulta en la eliminación de los efectos nocivos causados por la endogeneidad en la estimación del resto de parámetros.

Anexo 6c.

(1) Resultados de diferentes modelos para el shock de **gasto público**.

$$(a) \nabla \ln Y_t = \psi \nabla \ln Y_{t-1} + \beta^{ups} \text{Upstream}_{i,t-1}^{\text{Gob}} + \beta^{own} \text{ShockGob}_{i,t-1} + \beta^{\text{down}} \text{Downstream}_{i,t-1}^{\text{Gob}} + \varepsilon_t$$

<i>PanelOLS Estimation Summary</i>			
Dep. Variable:	d_ln_yt	R-squared:	0.1686
Estimator:	PanelOLS	R-squared (Between):	0.7775
No. Observations:	1240	R-squared (Within):	0.0369
Date:	Tue, Apr 28 2020	R-squared (Overall):	0.1686
Time:	21:16:34	Log-likelihood:	1213.3
Cov. Estimator:	Clustered		
		F-statistic:	62.682
Entities:	62	P-value:	0.0000
Avg Obs:	20.000	Distribution:	F(4,1236)
Min Obs:	20.000		
Max Obs:	20.000	F-statistic(robust):	4.556e+06
		P-value	0.0000
Time periods:	20	Distribution:	F(4,1236)
Avg Obs:	62.0000		
Min Obs:	62.0000		
Max Obs:	62.0000		

FIGURE 8.3. Panel OLS Estimation Summary 1a

<i>Parameter Estimates</i>						
	Parameter	Std. Err.	T-stat	P-value	Lower CI	Upper CI
	d_ln_yt_1	0.2162	0.0862	2.4277	0.0123	0.0470 0.3853
	upstream_1	0.1586	0.0312	5.0784	0.0000	0.0973 0.2199
	downstream_1	-2.995e-05	1.12e-05	-2.6753	0.0076	-5.192e-05 -7.988e-06
	shockgob_1	0.7669	0.1404	4.1091	0.0000	0.3015 0.8524

FIGURE 8.4. Parameter Estimates 1a

(b) $\nabla \ln Y_t = \psi \nabla \ln Y_{t-1} + \beta^{ups} \text{Upstream}_{i,t-1}^{\text{Gob}} + \beta^{own} \text{ShockGob}_{i,t-1} + \varepsilon_t$ (**Utilizado**)

<i>PanelOLS Estimation Summary</i>			
Dep. Variable:	d_ln_yt	R-squared:	0.1681
Estimator:	PanelOLS	R-squared (Between):	0.7759
No. Observations:	1240	R-squared (Within):	0.0365
Date:	Tue, Apr 28 2020	R-squared (Overall):	0.1681
Time:	21:16:34	Log-likelihood:	1212.9
Cov. Estimator:	Clustered		
		F-statistic:	83.298
Entities:	62	P-value:	0.0000
Avg Obs:	20.000	Distribution:	F(3,1237)
Min Obs:	20.000		
Max Obs:	20.000	F-statistic(robust):	102.99
		P-value	0.0000
Time periods:	20	Distribution:	F(3,1237)
Avg Obs:	62.0000		
Min Obs:	62.0000		
Max Obs:	62.0000		

FIGURE 8.5. Panel OLS Estimation Summary 1b

<i>Parameter Estimates</i>						
	Parameter	Std. Err.	T-stat	P-value	Lower CI	Upper CI
	d_ln_yt_1	0.2181	0.0864	2.5243	0.0117	0.0486 0.3876
	upstream_1	0.1528	0.0297	5.1432	0.0000	0.0945 0.2110
	shockgob_1	0.5947	0.1426	4.1717	0.0000	0.3150 0.4433

FIGURE 8.6. Parameter Estimates 1b

(2) Resultados de diferentes modelos para el shock de **exportaciones**.

$$(a) \nabla \ln Y_t = \psi \nabla \ln Y_{t-1} + \beta^{ups} \text{Upstream}_t^X + \beta^{own} \text{ShockX}_t^X + \beta^{down} \text{Downstream}_t^X + \varepsilon_t$$

<i>PanelOLS Estimation Summary</i>			
Dep. Variable:	d_ln_yt	R-squared:	0.1873
Estimator:	PanelOLS	R-squared (Between):	0.8036
No. Observations:	1240	R-squared (Within):	-0.0449
Date:	Thu, Jun 04 2020	R-squared (Overall):	0.1873
Time:	19:29:13	Log-likelihood:	1055.8
Cov. Estimator:	Clustered		
		F-statistic:	71.193
Entities:	62	P-value:	0.0000
Avg Obs:	20.000	Distribution:	F(4,1236)
Min Obs:	20.000		
Max Obs:	20.000	F-statistic(robust):	61.899
		P-value	0.0000
Time periods:	20	Distribution:	F(4,1236)
Avg Obs:	62.0000		
Min Obs:	62.0000		
Max Obs:	62.0000		

FIGURE 8.7. Panel OLS Estimation Summary 2a

<i>Parameter Estimates</i>						
	Parameter	Std. Err.	T-stat	P-value	Lower CI	Upper CI
	d_ln_yt_1	0.2996	0.0841	3.5619	0.0004	0.1346 0.4646
	upstream_1	0.0845	0.0129	6.5448	0.0000	0.0592 0.1099
	downstream_1	-8.818e-06	9.931e-06	-0.8879	0.3748	-2.83e-05 1.067e-05
	shockX_1	-0.4653	0.2509	-1.8543	0.0639	-0.9576 0.0270

FIGURE 8.8. Parameter Estimates 2a

$$(b) \nabla \ln Y_t = \psi \nabla \ln Y_{t-1} + \beta^{ups} \text{Upstream}_{i,t-1}^X + \beta^{ups2} \text{Upstream}_{i,t-2}^X + \beta^{own} \text{ShockX}_{i,t-1}^X + \varepsilon_t$$

<i>PanelOLS Estimation Summary</i>			
Dep. Variable:	d_ln_yt	R-squared:	0.1891
Estimator:	PanelOLS	R-squared (Between):	0.8276
No. Observations:	1240	R-squared (Within):	-0.0414
Date:	Thu, Jun 04 2020	R-squared (Overall):	0.1891
Time:	16:22:51	Log-likelihood:	988.02
Cov. Estimator:	Clustered		
		F-statistic:	68.459
Entities:	62	P-value:	0.0000
Avg Obs:	20.000	Distribution:	F(4,1174)
Min Obs:	20.000		
Max Obs:	20.000	F-statistic(robust):	70.809
		P-value	0.0000
Time periods:	20	Distribution:	F(4,1174)
Avg Obs:	62.0000		
Min Obs:	62.0000		
Max Obs:	62.0000		

FIGURE 8.9. Panel OLS Estimation Summary 2b

<i>Parameter Estimates</i>						
	Parameter	Std. Err.	T-stat	P-value	Lower CI	Upper CI
	d_ln_yt_1	0.2703	0.0816	3.3123	0.0010	0.1102 0.4305
	upstream_1	0.0579	0.0114	5.0864	0.0000	0.0356 0.0802
	upstream_2	0.0444	0.0121	3.6662	0.0003	0.0206 0.0681
	shockX_1	-0.4091	0.2718	-1.5055	0.1325	-0.9424 0.1241

FIGURE 8.10. Parameter Estimates 2b

(c) $\nabla \ln Y_t = \psi \nabla \ln Y_{t-1} + \beta^{ups} \text{Upstream}_{i,t-1}^X + \beta^{ups2} \text{Upstream}_{i,t-2}^X + \varepsilon_t$ (**Utilizado**)

<i>PanelOLS Estimation Summary</i>			
Dep. Variable:	d_ln_yt	R-squared:	0.1878
Estimator:	PanelOLS	R-squared (Between):	0.8234
No. Observations:	1178	R-squared (Within):	-0.0416
Date:	Tue, Apr 28 2020	R-squared (Overall):	0.1878
Time:	19:31:03	Log-likelihood:	987.08
Cov. Estimator:	Clustered		
		F-statistic:	90.584
Entities:	62	P-value:	0.0000
Avg Obs:	20.000	Distribution:	F(43,1175)
Min Obs:	20.000		
Max Obs:	20.000	F-statistic(robust):	93.357
		P-value	0.0000
Time periods:	20	Distribution:	F(3,1175)
Avg Obs:	62.0000		
Min Obs:	62.0000		
Max Obs:	62.0000		

FIGURE 8.11. Panel OLS Estimation Summary 2c

<i>Parameter Estimates</i>						
	Parameter	Std. Err.	T-stat	P-value	Lower CI	Upper CI
	d_ln_yt_1	0.2722	0.0812	3.3516	0.0008	0.1128 0.4315
	upstream_1	0.0472	0.0086	5.5198	0.0000	0.0304 0.0640
	upstream_2	0.0443	0.0120	3.6811	0.0002	0.0207 0.0678

FIGURE 8.12. Parameter Estimates 2c

Anexo 7a. Variaciones tras el shock de hostelería y turismo.

Sector	$y_{i,2019}/y_{i,2018}$
5	0.949
33	0.954
30	0.959
1	0.962
...	...
49	0.995
43	0.996
20	1.002
4	1.005

FIGURE 8.13. Valores máximos y mínimos de $y_{i,2019}/y_{i,2018}$

Sector	$y_{i,2020}/y_{i,2019}$
42	1.031
57	1.034
15	1.035
20	1.035
...	...
32	1.069
1	1.074
33	1.092
5	1.094

FIGURE 8.14. Valores máximos y mínimos de $y_{i,2020}/y_{i,2019}$

Sector	$y_{i,2020}/y_{i,2018}$
30	1.008
8	1.012
42	1.013
47	1.014
...	
19	1.040
33	1.041
49	1.045
4	1.049

FIGURE 8.15. Valores máximos y mínimos de $y_{i,2020}/y_{i,2018}$

Sector	$y_{i,2023}/y_{i,2017}$
30	1.046
47	1.058
8	1.062
42	1.062
...	...
5	1.184
33	1.197
49	1.203
4	1.221

FIGURE 8.16. Valores máximos y mínimos de $y_{i,2023}/y_{i,2017}$

Anexo 7b. Resultados de centralidades de grado.

FIGURE 8.17. Grado entrante de mayor a menor

	Sector	Grado
<i>1</i>	5	87776
<i>2</i>	27	65361
<i>3</i>	29	53280
<i>4</i>	20	51183
<i>5</i>	36	46699
...
<i>58</i>	32	1187
<i>59</i>	3	1165
<i>60</i>	2	960
<i>61</i>	50	562
<i>62</i>	47	0

FIGURE 8.18. Grado saliente de mayor a menor

	Sector	Grado
<i>1</i>	5	53176
<i>2</i>	29	51512
<i>3</i>	52	44598
<i>4</i>	24	44295
<i>5</i>	34	40558
...
<i>58</i>	2	1275
<i>59</i>	32	586
<i>60</i>	56	321
<i>61</i>	3	297
<i>62</i>	47	0

FIGURE 8.19. Grado total de mayor a menor

	Sector	Grado
1	5	140952
2	29	104792
3	27	98566
4	24	81240
5	20	75122
...
58	60	3288
59	2	2236
60	32	1773
61	3	1463
62	47	0

FIGURE 8.20. Distribución del grado entrante

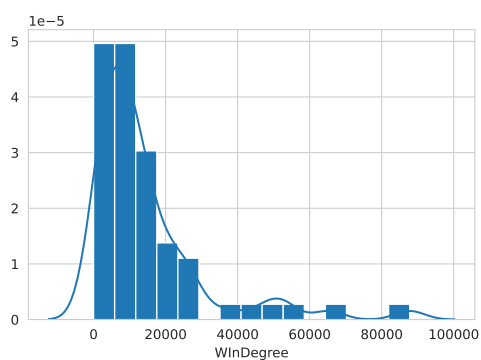
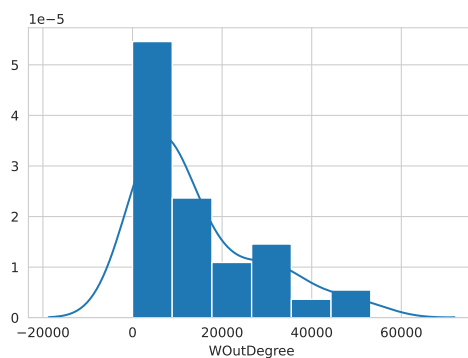


FIGURE 8.21. Distribución del grado saliente



Anexo 7c. Resultados de centralidades del autovector.

FIGURE 8.22. Centralidad del autovector de mayor a menor

	Sector	Centralidad
1	5	0.8357
2	36	0.4721
3	1	0.2110
4	52	0.0967
5	27	0.0892
...
58	61	0.0006
59	32	0.0006
60	51	0.0003
61	32	0.0002
62	47	0

Anexo 7d. Resultados de centralidades pagerank.

FIGURE 8.23. Centralidad pagerank de mayor a menor

Sector		Centralidad
<i>1</i>	<i>27</i>	0.0746
<i>2</i>	<i>5</i>	0.0732
<i>3</i>	<i>20</i>	0.0634
<i>4</i>	<i>52</i>	0.0522
<i>5</i>	<i>36</i>	0.0468
...
<i>58</i>	<i>17</i>	0.0040
<i>59</i>	<i>4</i>	0.0039
<i>60</i>	<i>32</i>	0.0035
<i>61</i>	<i>51</i>	0.0031
<i>62</i>	<i>47</i>	0.0025

Anexo 7e. Correlaciones entre centralidades.

FIGURE 8.24. Correlaciones entre centralidades (de Spearman)

	Gr. Entrante	Autovector	Pagerank
Gr. Entrante	1	0.76	0.79
Autovector	0.76	1	0.90
PageRank	0.79	0.90	1

Anexo 7f. Resultados de la detección de comunidades.

FIGURE 8.25. Comunidades (*Label Prop.*)

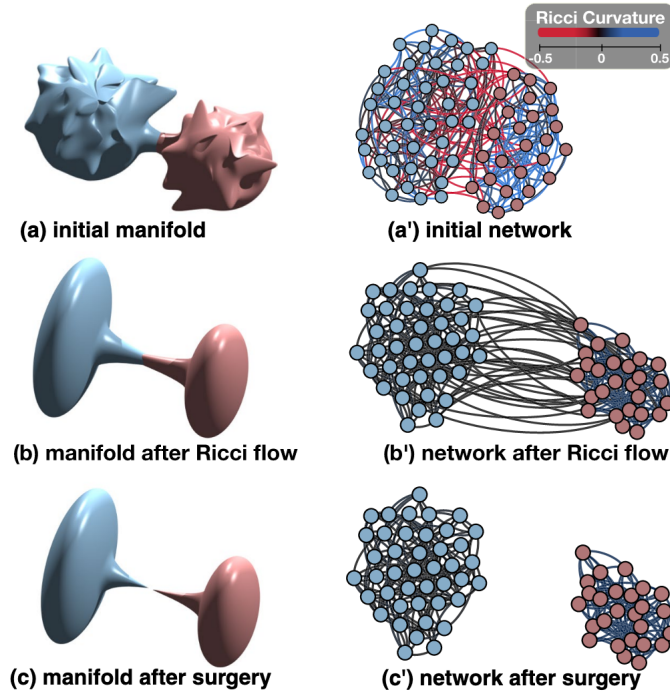
Comunidad	Sectores
1	2
2	6
3	7
4	56, 12, 22
5	18, 27, 14
6	16, 20, 15
7	21
8	26
9	36, 52
10	40
11	47
12	57
13 (Restante)	Resto

FIGURE 8.26. Comunidades (*Louvain*)

Comunidad	Sectores
1	1, 3, 5, 36, 52
2	2, 8, 9
3	4, 10, 24
4	6
5	7, 12, 22, 56
6	11, 13
7	14, 27, 46
8	15, 16, 18, 19, 20
9	21, 47, 49, 58, 59, 60
10	23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 59, 51
11	25, 26
12	35
13	42, 43, 48
14 (Restante)	Resto

Anexo 7g. Explicación gráfica del algoritmo de la curvatura de Ricci.

FIGURE 8.27. Algoritmo basado en la Curvatura de Ricci



Fuente: Ni, C., Lin, Y., Luo, F. et al. (2019). Community Detection on Networks with Ricci Flow. *Sci Rep* **9**, 9984

Anexo 7h. Construcción del grafo. La matriz fundamental de la que se partirá. Podría partirse de la matriz de coeficientes técnicos \mathbf{A} , pero se eliminaría la información acerca del volumen del sector, algo realmente relevante en la red. Asimismo, una aproximación a través de \mathbf{H} podría servir para algunos objetivos distintos de los planteados. Sin embargo, para los especificados previamente, no tiene sentido construir una red con los enlaces correspondiendo a \mathbf{H} , puesto que la propia matriz ya recoge los efectos directos e indirectos a través del modelo planteado por Leontief⁵².

Entendiendo el *grafo* como la formalización de una red, se dice que un **grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de nodos y E un conjunto de enlaces que relacionan los nodos. En este trabajo se utilizará un **grafo dirigido con pesos**, esto es, una terna $G = (V, E, \mathbf{W})$ donde $V \neq \emptyset$, $E \subseteq \{e = (a, b) \in V \times V :$

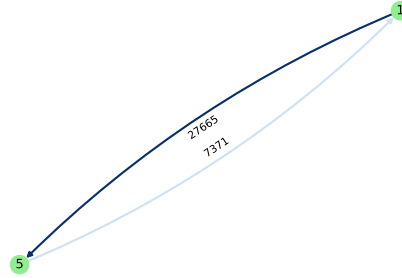
⁵²En el caso de la jerarquización, sí se utilizan los enlaces proveniente de la matriz \mathbf{A}^{out} . El uso de \mathbf{A}^{out} frente \mathbf{A}^{in} se debe a que es la que actúa en los shocks de demanda como los estudiados en la sección anterior y así se pretende complementar mejor el análisis global.

a es el origen de e , b es el destino de e y \mathbf{W} es una matriz de pesos tal que $e = (a, b, w_{ab})$ tiene asociado un peso w_{ab} , coeficiente del par (a, b) de \mathbf{W} .

Se define entonces el **grafo (o red) de la economía** $\mathcal{E} = (S, L, \Omega)$, siendo $S = \{1, 2, \dots, 64\}$ un conjunto donde el elemento i -ésimo refiere al sector i de la CNAE⁵³, $L = \{(a, b) \in S \times S\}$ y Ω los pesos provenientes de la matriz simétrica equivalente a la tabla input-output⁵⁴ a precios básicos, cuyos elementos $w_{ij} \in \Omega$ recogen las ventas del sector i al sector j . Nótese que el grafo definido es **completo**, i.e., si un sector A no vende ninguno de sus bienes a B , existe igualmente un enlace entre ellos tal que $w_{AB} = 0$.

Como ejemplo, entre el sector 1 (*Productos de la agricultura, la ganadería y la caza, y servicios relacionados con los mismos*) y el 5 (*Productos alimenticios; bebidas; tabaco manufacturado*) existirán dos enlaces distintos, uno en cada dirección, como muestra la figura 5.1. Puede observarse que el enlace e_{15} posee un peso mucho mayor que e_{51} , dado que el flujo principal de inputs esperable es el que aparece efectivamente: la industria alimentaria comprando como bienes intermedios aquellos procedentes de la agricultura y ganadería.

FIGURE 8.28. Enlaces entre los nodos 1 y 5.



Anexo 7i. Centralidades. La **centralidad de grado** es la métrica de importancia más sencilla de las existentes. Se define simplemente como el número de enlaces incidentes en un nodo (o su peso total, en el caso de un grafo con pesos). Además, en el caso de un grafo dirigido, como \mathcal{E} , pueden distinguirse el *grado de entrada* y el *grado de salida*, restringiendo el cómputo al respectivo tipo de enlace (de entrada o de salida) que incide en el nodo en cuestión.

Así, formalmente y para \mathcal{E} , puede definirse el **grado de entrada** (D_{in}) del nodo i como:

$$D_{in}(i) = \sum_{j \in S} w_{ji} \quad (8.28)$$

Análogamente, el **grado de salida** (D_{out}) del sector i ,

$$D_{out}(i) = \sum_{j \in S} w_{ij} \quad (8.29)$$

y el **grado total** o simplemente grado de i como $D(i) = D_{in}(i) + D_{out}(i)$. Es sencillo ver que, en la red sectorial, $D_{in}(i)$ equivale al total de compras de cierto sector (incluidas las propias) y D_{out} de las ventas, por lo que el grado es directamente una medida de la magnitud del sector, más allá de su comportamiento en la red.

⁵³Consultable en el anexo 6a.

⁵⁴Se trata del archivo *weights.csv* del repositorio, disponible en el INE nuevamente. https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736177058&menu=resultados&idp=1254735576581

La **centralidad del autovector** se define, formalmente, la centralidad para el sector i (A_i) -siguiendo la idea explicada- depende de la centralidad de resto de sectores:

$$A_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in S} w_{ji} A_j \quad (8.30)$$

en forma matricial:

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \quad (8.31)$$

donde $\mathbf{a} = (A_1, \dots, A_{64})$. En general, existen varias soluciones para el sistema planteado. Sin embargo, es necesario que \mathbf{a} sea positivo en todos sus elementos y, por el teorema de Perron-Frobenius, esto solo se garantiza cuando λ es el autovector asociado al mayor autovalor. En la práctica, computacionalmente, se utiliza el *power method* para alcanzar la estimación de \mathbf{a} .

La **centralidad PageRank** se calcula a través del algoritmo probablemente más famoso de la historia, descrito por sus creadores en [23] y utilizado para ordenar por importancia (o centralidad) las páginas web en el motor de búsqueda original de Google. Se trata, sin embargo, de una variante de la centralidad del autovector y cuyo concepto es similar. Se define, por tanto, la centralidad PageRank P_i de un sector i como:

$$P_i = \alpha \sum_{j \in S} \frac{w_{ji}}{D_j} P_j + \beta \quad (8.32)$$

donde α es una constante normalizadora y β un parámetro asociado en el paper original a la probabilidad de que un usuario cliquee en un hipervínculo, que aquí puede utilizarse como un ajuste del riesgo de propagación, si se conociera. Escribiendo (8.32) de forma matricial

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W} + \beta \quad (8.33)$$

siendo el vector $\mathbf{p} = (P_1, \dots, P_{64})$, y \mathbf{D} una matriz diagonal con elementos $(\mathbf{D})_{ii} = \frac{1}{D_i}$. Desde (5.6), operando, se obtiene la expresión equivalente:

$$\mathbf{p} = \beta (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \quad (8.34)$$

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W} + \beta \Leftrightarrow \mathbf{p}^{-1} \mathbf{p} = \alpha \mathbf{p}^{-1} \mathbf{p} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{p}^{-1} \beta$$

$$(\mathbf{p}^{-1} \beta)^{-1} = (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \beta (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W})^{-1}$$

mediante la cual puede calcularse la centralidad.

Anexo 7j. Detección de comunidades y jerarquización. El *label propagation*, desarrollado en [71], es un algoritmo iterativo que siempre converge. La idea es que cada nodo pertenezca a aquella comunidad a la que pertenecen la mayoría de sus vecinos. El algoritmo comienza otorgando una etiqueta distinta a cada nodo de la red. Desde aquí, en cada iteración, el nodo i toma (o mantiene) aquella etiqueta de la comunidad C_m predominante entre sus vecinos teniendo en cuenta el peso del enlace. Esto es,

$$i \in C_m \Leftrightarrow \sum_{j \in C_m} w_{ij} + w_{ji} = \max_{m \in [1, 64]} \left\{ \sum_{k \in C_m} w_{ik} + w_{ki} \right\} \quad (8.35)$$

con desempate aleatorio en su caso. El algoritmo finaliza cuando se consigue una partición donde cada nodo tiene al menos tantos vecinos de su comunidad como de cualquier otra.

El algoritmo de Louvain [22], más sofisticado, se basa en la **modularidad** de la red definida como

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left[w_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta_{c_i, c_j} \quad m = \sum_{ij} w_{ij}, k_i = \sum_k w_{ik} \quad (8.36)$$

donde δ_{c_i, c_j} toma el valor 1 si los sectores i y j pertenecen a la misma comunidad y 0 en otro caso. La modularidad puede entenderse como la diferencia entre la proporción del peso total que poseen los enlaces dentro de una comunidad y la esperanza de dicho peso si estos enlaces se distribuyeran aleatoriamente. El algoritmo busca la partición de la red en que la modularidad es máxima a través de una aproximación de su variación ∇Q .

Por otra parte, en la jerarquización de la red se utiliza como matriz de peso \mathbf{W} la matriz de coeficientes \mathbf{A}^{out} , equivalente a $\hat{\mathbf{A}}$, porque el objetivo aquí es separar la red en capas, desde la más externa a la más interna, y desde una perspectiva puramente relacional, por lo que no se desea que el volumen sea tenido en cuenta únicamente a través de las relaciones. De utilizar \mathbf{W} , el algoritmo tenderá a asignar los sectores de menor volumen a capas externas, dado que las capas internas se reservan para aquellos sectores cuyos enlaces tienen pesos w_{ij} altos, generalmente los sectores de mayor volumen. No ocurre ningún efecto de este tipo en la detección de comunidades porque la asignación a cada comunidad se realiza desde una perspectiva individual (del propio sector).⁵⁵

Esta jerarquización se lleva a cabo a través de la detección de comunidades basada en la curvatura de Ricci [65]. Esta medida parte del flujo de Ricci introducido por Hamilton en [49], dentro de la teoría de variedades⁵⁶. De manera resumida, el método se basa en tratar el grafo como una variedad, i.e. un cuerpo geométrico, y descomponerlo de acuerdo a su curvatura (en comunidades) como se muestra gráficamente en la figura 6.21. del anexo 5h.

Ollivier propone en [68] una definición de la curvatura de Ricci basada en la teoría de transporte óptimo. Dado un espacio métrico cualquiera (X, d) en el que existe una medida de probabilidad m_x para cada $x \in X$, la curvatura de Ricci de Ollivier del camino con origen en x y final en y se define como

$$k(x, y) = 1 - \frac{W(m_x, m_y)}{d(x, y)} \quad (8.37)$$

donde $W(m_x, m_y)$ es la distancia de Wasserstein⁵⁷.

Considerando el grafo de la economía $\mathcal{E} = (S, E, \mathbf{W})$, se define la probabilidad m_s para los nodos vecinos de $s \in S$. Un plan de transporte discreto es una aplicación $A : S \times S \rightarrow [0, 1]$ tal que $A(u, v)$ es la cantidad de masa (probabilidad) del nodo v que se desplaza al nodo u . Este plan satisface $\sum_{v' \in S} A(u, v') = m_x(u)$ y se define la distancia de Wasserstein como $W(m_x, m_y) = \inf\{\sum_{u, v \in S} A(u, v)d(u, v)\}$. Así, la curvatura del enlace entre el nodo u y el nodo v se define como en (5.10), siendo $d(u, v)$ la distancia ponderada por el peso del camino más corto entre u y v .

Desde esta perspectiva, si dos nodos u y v pertenecen a distintas comunidades, sus nodos vecinos tienden a tener menos vecinos en común, por lo que la mejor manera de transportar m_u desde u a v es directamente a través del enlace e_{uv} . El algoritmo, una vez calculada la curvatura de Ricci para cada par de nodos, expande los enlaces con curvatura negativa y encoge aquellos con curvatura positiva. Finalmente, los enlaces del interior de una comunidad se fortalecen, mientras aquellos que unen nodos de distintas comunidades se debilitan. Piénsese en los enlaces que en principio presentaban un peso original w_{ij} alto, con i y j en

⁵⁵Se mantiene esta matriz como base del grafo en la sección siguiente: predicción de links.

⁵⁶También empleado *manifold*, en inglés.

Informalmente, una variedad puede entenderse como un espacio que localmente **parece** euclídeo. Puede pensarse, por ejemplo, en el globo terráqueo: si tomamos los ángulos del triángulo formado por Nueva York, Moscú y Ciudad del Cabo, su suma no es igual a 180° (la esfera no es un espacio euclídeo). Sin embargo, aproximadamente 180° es lo que vale la suma del triángulo cuyos vértices sean las facultades de Psicología, Economía y Ciencias Políticas en Somosaguas, a pesar de formar parte de dicha esfera.

⁵⁷Conceptualmente, la distancia de Wasserstein es el mínimo coste de transporte alcanzable dados los planes de transporte disponibles.

distintas comunidades. Tras k iteraciones, presentan un nuevo peso $w_{ij}^{(k)}$ suficientemente bajo como para eliminar el enlace del grafo, en un proceso que los autores denominan *cirugía*.

Gracias a la naturaleza del proceso, si existe estructura jerárquica en el grafo, puede procederse en fases e ir poco a poco desentrañando el núcleo de la red. No obstante, no debe entenderse que el núcleo de la red está formado por aquellos nodos con mayor importancia o siquiera de mayor volumen, sino que, en términos de conexión, son nexo de unión entre otras partes de la economía.

Anexo 7k. Predicción de links. La metodología es la siguiente: desde el grafo original, se eliminan aquellas conexiones de menor importancia (con $w_{ij} < 0.1$) y a este grafo reducido se aplican los distintos mecanismos de predicción. Existe una correlación positiva, aunque baja (0.08 y 0.02), entre la puntuación del algoritmo (a mayor puntuación, mayor probabilidad de realización del enlace) y que el enlace haya existido originalmente, pero se hubiera eliminado, i.e. $w_{ij} \in (0, 0.1)$.

El primer algoritmo es el Adamic Adar [4]. El coeficiente Adamic-Adar mide la proporción de vecinos compartidos entre dos nodos que no poseen un enlace entre ellos, dando mayor importancia a aquellos vecinos *raros*, i.e. con menor grado. Un ejemplo de la idea que trata de captar este coeficiente es el siguiente: imagínense tres parejas de profesores de economía en Twitter que no se siguen entre sí y donde cada uno de los profesores sigue a 100 personas. La primera pareja sigue en común únicamente a una persona: Jean Tirole; la segunda pareja, sigue en común a tres cuentas: Jean Tirole, Daron Acemoglu y el NBER; la última pareja sigue en común a otras tres personas: Jean Tirole y dos alumnos de grado. Lógicamente, tiende a creerse que esta última pareja es la más probable de acabar conectando.

Formalmente, se define el Adamic-Adar AA_{xy} entre dos nodos x e y como

$$AA_{xy} = \sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)} \frac{1}{\ln(\#\{\Gamma(z)\})} \quad (8.38)$$

donde $\Gamma(v)$ denota al conjunto de los vecinos de v .

El segundo algoritmo es el de la conexión preferencial y recoge la idea de que aquel nodo con más enlaces es más propenso a obtener nuevos enlaces. Así, el coeficiente de conexión preferencial CP_{xy} entre los nodos x e y se define como

$$CP_{xy} = \#\{\Gamma(x)\}\#\{\Gamma(y)\} \quad (8.39)$$

Anexo 7l. Centralidad del enlace. Una métrica interesante de ser calculada para estos sectores es la centralidad *betweenness*, $b(e_{ij})$, aplicada a cada enlace y definida, para un grafo con pesos, como

$$b(e_{ij}) = \sum_{u,v \in S} \frac{\sigma(u,v|e_{ij})}{\sigma(u,v)} \quad (8.40)$$

siendo $\sigma(u,v)$ el número de caminos más cortos⁵⁸ entre u y v . Además, $\sigma(u,v|e_{ij})$ es el número de caminos más cortos entre u y v que atraviesan el enlace e_{ij} . Se parte de nuevo del grafo cuya matriz de adyacencia es \mathbf{A}^{out} , pero trasladando al grafo $w_{ij} = \frac{1}{a_{ij}^{out}}$ debido a la definición de (8.40).

⁵⁸En un grafo con pesos, se dice que el camino más corto entre $u = s_1$ y $v = s_n$ es el camino factible $P = (s_1, \dots, s_n)$ que minimiza la suma $\sum_{i=1}^{n-1} w_{s_i, s_{i+1}}$.