ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 1–7.

rfirstpage⟩ УДК 517.977.1

© *М. И. Гусев, И. О. Осипов*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЛОКАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В статье рассматривается задача о приведении движения нелинейной управляемой системы в начало координат при заданном интегральном ресурсе управления на конечном промежутке времени. Исследуется вопрос о построении локального синтеза управления, решающего задачу, в предположении, что промежуток времени, в течении которого осуществляется перевод системы, достаточно мал. Указаны достаточные условия, при выполнении которых задачу можно решить путем приближенной замены нелинейной системы ее линеаризацией в окрестности начала координат.

Ключевые слова: линейные системы с последействием, приводимость, показатели Ляпунова, ляпуновские инварианты.

DOI: 10.35634/vmXXXXXX

Введение

§ 1. Основные обозначения и определения

Рассмотрим нелинейную систему, аффинную по управлению

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \bar{T}. \tag{1.1}$$ nonlinear

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ – управление, $\bar{T}$ — некоторое фиксированное положительное число. Вектор функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(0) = 0$, B– $n \times r$ матрица.

Под $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[0, \bar{T}]$ будем понимать пространство интегрируемых с квадратом скалярных или вектор-функций на $[0, \bar{T}]$. Скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$ определено равенством

$$(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_0+\bar{\varepsilon}} u^\top(t)v(t)\,dt.$$

Управление $u(\cdot)$ будем выбирать из шара радиуса $\mu, \mu > 0$

$$\|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} = (u(\cdot), u(\cdot)) \leqslant \mu^2 \tag{1.2}$$ constr

в пространстве $\mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ вектор-функций. В условиях описанных предположений, каждому $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0, u(\cdot)) = x_0$. Будем далее считать, что все рассматриваемые решения продолжимы на промежуток $[0, \bar{T}]$.

Все траектории $x(t)$ системы (1.1), отвечающие удовлетворяющим (1.2) управлениям, лежат внутри некоторого компактного множества $D \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$.

Определение 1. *Множеством нуль управляемости* $N(\varepsilon)$ системы (1.1) в пространстве состояний в момент времени $t_0+\varepsilon$ назовем множество всех начальных состояний $x(t_0)\in\mathbb{R}^n$ системы (1.1), из которых система может быть приведена в начало координат управлениями $u(t)\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)=\big\{u:\|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2}\leqslant\mu^2\big\}$,

$$N(\varepsilon)=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n:\exists u(\cdot)\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu),\ x(t_0+\varepsilon,\widetilde{x},u(\cdot))=0\}.$$

В приведённом определении можно считать, что $\mathbb{L}_2=\mathbb{L}_2[t_0,t_0+\varepsilon]$, либо $\mathbb{L}_2=$ $=\mathbb{L}_2[t_0,t_0+\bar{\varepsilon}]$. Нетрудно понять, что для любого из этих пространств мы получаем одно и то же множество нуль-управляемости. Будем далее считать, что $\mathbb{L}_2=\mathbb{L}_2[t_0,t_0+\varepsilon]$.

С другой стороны, если на пространстве состояний системы (1.1) и временном интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$ ввести функцию $V(t,x)$ минимального ресурса, необходимого для приведения системы из начального состояния x в начало координат

$$V(t,x)=\min_u\int_{t_0}^{t}u^\top(t)u(t)\,dt. \tag{1.3}$$
Bellman_fu

то множество нуль-управляемости $N(\varepsilon)$ может быть найдено, как множество уровня функции Беллмана

$$N(\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n:V(t_0+\varepsilon,x)\leqslant\mu^2\} \tag{1.4}$$
Null_set

Функция $V(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}=-\min_u\{u^\top(t)u(t)+\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^\top(f(x(t))+Bu(t))\}. \tag{1.5}$$
Bellman_eq

Закон обратной связи, на котором достигается минимум в уравнении (1.5)

$$u(t,x)=-\frac{1}{2}f_2^\top(t,x(t))\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}. \tag{1.6}$$
feedback

§ 2. Линейный случай

Рассмотрим здесь линейную систему

$$\dot{x}=Ax+Bu,\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon,\qquad x(t_0)=x_0, \tag{2.1}$$
linear

Пусть $X(\tau_1,\tau_0)=\Phi(\tau_1)\Phi(\tau_0)$, где $\Phi(t)$ – матрица Коши, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t),\qquad \Phi(t_0)=I$$

Решение системы (2.1) в момент времени t, $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$ имеет форму

$$x(t)=X(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}X(t,\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Приравнивая $x(t)$ к нулю, выражаем $x(t_0)$

$$x(t_0)=-\int_{t_0}^{t}X(t_0,\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Теперь найдем опорную функцию $\rho(l|N(\varepsilon))$, для этого возьмем произвольный вектор $l \in \mathbb{R}^n$, $l \neq 0$ и найдем максимум скалярного произведения $(l, x(t_0))$ на всех $x(t_0) \in N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\rho(l|N(\varepsilon)) = \max_{x(t_0)\in N(\varepsilon)} (l, x(t_0)) = \sup_{u\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)} -\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} l^\top X(t_0,\tau)Bu(\tau)d\tau = \\ = \sup_{u\in B_{\mathbb{L}_2}(0,\mu)} (w_l(\cdot), u(\cdot)) = \mu\|w_l(\cdot)\| = \mu\sqrt{l^\top W(t_0, t_0+\varepsilon)l},\end{aligned} \tag{2.2}$$

sup_fun

где $w_l(t) = -B^\top X^\top(t_0, t)l$, а симметричная матрица $W(t_0, t_0+\varepsilon)$ определяется равенством

$$W(t_0, t_0+\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} X(t_0,\tau)BB^\top X^\top(t_0,\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

W

(2.2) – опорная функция эллипсоида, то есть $N(\varepsilon) = \{x : x^\top W^{-1}(t_0, t_0+\varepsilon)x \leqslant \mu^2\}$. С другой стороны, множество нуль управляемости — множество уровня функции Беллмана (1.4). Таким образом, в случае линейной системы функция Беллмана (1.3) имеет вид

$$V(t,x) = x^\top Q(t)x, \tag{2.4}$$

Bellman_line

где матрица $Q(t)$ может быть найдена из уравнения

$$\dot{Q} = QBB^\top Q - A^\top Q - QA, \tag{2.5}$$

eqQ

с учетом $W^{-1}(t_0, t) = Q(t_0)$. Уравнение (2.5) получено подстановкой (2.4) в (1.5) с учетом того, что оптимальная обратная связь (1.6) может быть записана в виде

$$u(t,x) = -B^\top Q(t)x \tag{2.6}$$

linear_feedb

Алгоритм построения обратной связи приводящей систему (2.1) в начало координат выглядит следующим образом:

Шаг 1. Рассчитываем матрицу $W(t_0, t_0+\varepsilon)$ по формуле (2.3).

Шаг 2. Интегрируем уравнение (2.5) с начальным условием $Q(t_0) = W^{-1}(t_0, t_0+\varepsilon)$.

Шаг 3. Рассчитываем управление $u(t,x) = -B^\top Q(t)x(t)$

Замкнутую обратной связью (2.6) систему (2.1) преобразуем к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BB^\top Q(t))x, & t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\varepsilon, \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{Q} = QBB^\top Q - A^\top Q - QA, & Q(t_0) = W^{-1}(t_0, t_0+\varepsilon). \end{cases} \tag{2.7}$$

feedback_lin

inear_teo⟩? **Теорема 1.** Траектория $x(t)$ системы (2.7) выпущенная из точки x попадает в начало координат в момент времени $t_0+\varepsilon$. Расход интегрального ресурса управления на переход из x в 0 равен $x^\top Q(t_0)x$ – это минимально возможное значение ресурса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем $x^\top Qx$ вдоль траектории $x(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x^\top Qx = \dot{x}^\top Qx + x^\top \dot{Q}x + x^\top Q\dot{x} = x^\top(A^\top - QBB^\top)Qx + \\ +x^\top Q(A - BB^\top Q)x + x^\top(QBB^\top Q - A^\top Q - QA)x = \\ = -x^\top(QBB^\top Q)x.\end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство от t_0 до $t_0+\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} x^\top(t)Q(t)x(t) &= x^\top(t_0)Q(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} x^\top(\tau)Q(\tau)BB^\top Q(\tau)x(\tau)d\tau = \\ &= x^\top(t_0)Q(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} u^\top(\xi)u(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{2.8}$$

xqx

где $u(\xi) = -B^\top Q(\xi)x(\xi)$ – текущее управление.

Рассмотрим множество $Y(t) = \left\{x : x^\top Q(t)x \leqslant c^2\right\}$, где c – заданная константа. Опорная функция множества $Y(t)$ равна

$$\rho(l|Y(t)) = c\left(l^\top Q^{-1}(t)l\right)^{1/2} = c\left(l^\top W(t_0, 2t_0+\varepsilon-t)l\right)^{1/2}$$

Из определения W следует, что существует $k>0$, такое что $\|W(t_0, 2t_0+\varepsilon-t)\| \leqslant k(\varepsilon - t)$, поэтому

$$\rho(l|Y(t)) \leqslant c\sqrt{k}\sqrt{\varepsilon - t}\|l\|.$$

Из последнего неравенства следует, что для любого $x \in Y(t)$ справедлива оценка

$$\|x\| \leqslant c\sqrt{k}\sqrt{\varepsilon - t}$$

Учитывая, что $x^\top(t)Q(t)x(t) \leqslant x^\top(t_0)Q(t_0)x(t_0)$, мы можем заключить, что

$$\|x\| \leqslant \left(k(\varepsilon - t)x^\top(t_0)Q(t_0)x(t_0)\right)^{1/2}$$

Таким образом, $x(t) \to 0$ при $t \to t_0+\varepsilon$. Покажем, что $x^\top(t)Q(t)x(t) \to 0$ при $t \to t_0+\varepsilon$. Этот факт не следует из стремления к 0 $x(t)$, так как $Q(t) = W^{-1}(t_0, 2t_0+\varepsilon-t)$ не ограничена вблизи $t_0+\varepsilon$ в силу $W(t_0,t_0) = 0$. Из неравенства

$$\frac{d}{dt}x^\top Qx \leqslant 0, x^\top Qx > 0$$

следует, что $x^\top(t)Q(t)x(t)$ не возрастает и ограничена снизу. Таким образом, существует предел

$$\lim_{t\to t_0+\varepsilon} x^\top(t)Q(t)x(t) = q \geqslant 0.$$

Покажем, что $q=0$. Допустим противное. Переходя в (2.8) к пределу при $t \to t_0+\varepsilon$ получим

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} u^\top(\xi)u(\xi)d\xi = x^\top Q(t_0)x - q.$$

С другой стороны, расход интегрального ресурса равен значению функции Беллмана $V(t_0,x) = x^\top Q(t_0)x$, а значит $q \equiv 0$. □

§ 3. Нелинейный случай

Докажем, что при некоторых условиях, линейная обратная связь (2.6) приведет систему (1.1) в начало координат. То есть, если ε достаточно мало, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ и матрица W удовлетворяет некоторым условиям, то решение нелинейной системы

$$\dot{z} = f(z) - BB^\top Qz, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \qquad z(0) = z_0 \tag{3.1}$$

nonlinear_cl

Наряду с системой (3.1) будем рассматривать линеаризованную систему

$$\dot{x} = Ax - BB^\top Qz. \tag{3.2}$$

linear_close

Здесь $Q = Q(t)$, а начальные условия для (3.2) совпадают с z_0.

Далее предполагаем, что $f(z) = Az + R(z)$, $\|R(z)\| \leqslant k\|z\|$ в некоторой окрестности нули $z \in B(0,r)$, где $B(0,r)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом r, $r > 0$. Это выполняется, если $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = A$ и компоненты $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Вычитая из (3.1) уравнение (3.2), получим

$$\dot{y} = Ay + R(z) - BB^\top Qx, \qquad y(0) = 0, \tag{3.3}$$

{?}

где $y = z - x$, $z = x + y$.

Обозначим $V(t,y) = y^\top Q(t)y$. Дифференцируем вдоль решения $y(t)$ получим, учитывая уравнение (2.5).

$$\frac{dV}{dt} = R^\top(z)Qy + y^\top QR(z) - y^\top QBB^\top y. \tag{3.4}$$

?dV?

Вероятно, описанный подход к синтезу управления может быть распространен и на более общий случай систем вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t).$$

Иллюстрирующий данный факт пример приведен в следующем разделе

§ 4. Примеры

Финансирование. Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, проект № 1.1234.2017/8.9. Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18–01–01234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

?Abgar? 1. Абгарян К.А. Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. М.: Физматлит, 1994. 544 с.

Поступила в редакцию 01.12.2021

Гусев Михаил Иванович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0000-0000-XXXX
E-mail: gmi@imm.uran.ru Осипов Иван Олегович, аспирант, отдел оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3071-535X
E-mail: i.o.osipov@imm.uran.ru

Цитирование: М. И. Гусев, И. О. Осипов. Об одном методе локального синтеза для нелинейных систем с интегральными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 1–7.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 1. Pp. 1–7.

M. I. Gusev, I. O. Osipov
On the question of the optimization of permutations in the problem with dynamic constraints
Keywords: linear systems with delay, reducibility, Lyapunov exponents, Lyapunov invariants.

MSC2020: 93B03

DOI: 10.35634/vmXXXXXX

We consider

Funding. The study of the first author was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part, project no. 1.1234.2017/8.9. The study of the second author was funded by RFBR, project number 18–01–01234.

REFERENCES

1.

Received 01.12.2021

Gusev Michail Ivanovich, Professor, Department of Optimal Control, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0000-0000-XXXX
E-mail: gmi@imm.uran.ru

Osipov Ivan Olegovich, Post-Graduate student, Department of Optimal Control, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3071-535X
E-mail: i.o.osipov@imm.uran.ru

Citation: M. I. Gusev, I. O. Osipov. On the question of the optimization of permutations in the problem with dynamic constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 1–7.
erlastpage⟩