Краткий курс геометрии если все совсем плохо

Иван Попов

21 апреля 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Векторная алгебра

Направленный отрезок - отрезок с указаным направлением. Направление задается при помощи точки начала и точки конца.
$\overline{AB} \in \overrightarrow{a}$ - направленный отрезок является представителем вектора $\overrightarrow{a}$

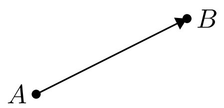


Рис. 1.1: Направленный отрезок $\overline{AB}$

Внимание <u>Направленный отрезок равен только себе</u>

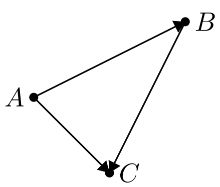
Совокупность напраленых отрезков является **вектором**.

1.1 Действия над векторами и их свойства(Аксиомпатика Вейля)

1.1.1 Сложение векторов

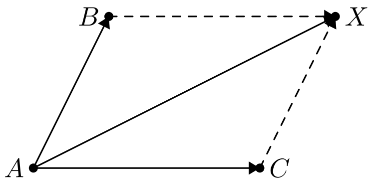
Правило треугольника

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



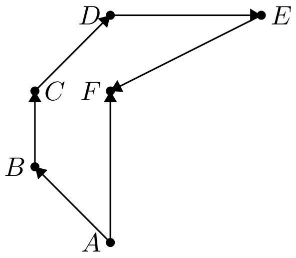
Правило параллелограма

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



Правило замкнутой ломаной|многоугольника

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$



1.1.2 Свойства сложения векторов

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a}$

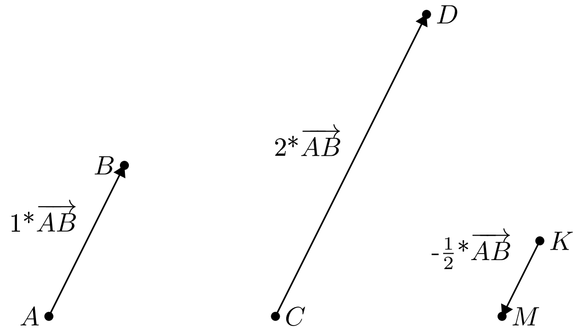
$\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha * \overrightarrow{a} + \alpha * \overrightarrow{b}$

1.1.3 Умножение вектора на число

$k * \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$
$k < 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$
$|k| > 1 => |\overrightarrow{a}| < |\overrightarrow{b}|$
$0 < |k| < 1 => |\overrightarrow{a}| > |\overrightarrow{b}|$
$k = 0 => |k\overrightarrow{a}| = \overrightarrow{0}$ - нуль вектор
$k = 1 => |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$

1.1.4 Свойства умножения вектора на число

k(m*$\overrightarrow{a}$)=$\overrightarrow{a}$*(k*m)=m(k*$\overrightarrow{a}$)
(k+m)*$\overrightarrow{a}$=k$\overrightarrow{a}$+m$\overrightarrow{a}$



1.1.5 Скалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр
угол между двумя векторами
$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = k$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b} \angle \overrightarrow{a}\overrightarrow{b} \in [0°..90°)$
$k < 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b} \angle \overrightarrow{a}\overrightarrow{b} \in (90°..180°]$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$
$k = 0 => \overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \in \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \cos\angle(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b})$
$\cos\angle(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}}{|a|} * \frac{\overrightarrow{b}}{|b|}$

1.1.6 Свойства скалярного произведения двух векторов

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} * \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a} * (\overrightarrow{b} * \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} * \overrightarrow{c})$
$(k * \overrightarrow{a}) * \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})$

1.1.7 Векторое произведение двух векторов для пространства размерности 3

Результат: вектор
модуль результата($\overrightarrow{c}$) равен площади параллелограма натянутого на векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}]$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \ \ \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$

1.1.8 Свойства векторного произведения двух векторов

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$

$(k * \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

1.1.9 Псевдоскалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр
характеризует ориентацию угла между векторами при помощи знака
$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = m$
$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \sin\angle(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})$
$\sin\angle(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}|}$
$m = 0 => \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (0° || 180°) => \overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$

1.1.10 Свойства псевдоскалярного произведение двух векторов

$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a}$ $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \vee \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}$
$(k * \overrightarrow{a}) \vee \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b})$

1.1.11 Смешаное произведение трех векторов

Результат: скаляр
результат смешаного произведения представляет собой объем паралелепипеда натянутого на данные векторы
$(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} * \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} * (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c}$

Порядок операций: Сначала выполняется векторное умножение (×), а только затем скалярное (*)

$n = 0 => \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} || \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} || \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$
$n > 0 =>$Ориентация векторов такая же как в базисе $\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$
$n < 0 =>$Ориентация векторов не такая как в базисе $\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$

1.1.12 Свойства смешаного произведения трех векторов

$(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b})$
$(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c})$
$((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}) + (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d})$

1.2 Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис

1.2.1 Взаимное расположение векторов

Коллениарность - расположение двух векторов когда они параллельны: $\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$ а также $\overrightarrow{a} = k * \overrightarrow{b}$
Ортогональность - расположение двух векторов когда они перпендикулярны: $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$
Компланарность - расположение двух и более векторов когда они коллениарны(паралельны)

одной плоскости или лежат в ней: $\overrightarrow{c} = k * \overrightarrow{a} + m * \overrightarrow{b}$

1.2.2 Линейная зависимость

Линейная комбинация — выражение, построенное на множестве элементов путём умножения каждого элемента на коэффициенты с последующим сложением результатов
$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda \overrightarrow{a_2} + \lambda \overrightarrow{a_3} + ... + \lambda \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$
Линейная комбинация(Система) является линейно зависимой если хотябы 1 $\lambda \neq 0$ и/или если имеется хотябы один $\overrightarrow{0}$.
Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Если мы не имеется ни одного 0, то система линейно не зависима и мы имеем размер векторного пространства $n = div(M)$

1.2.3 Базис

Базис - это упорядоченная СЛНВ (система линейно независимых векторов) в векторном пространстве.
Виды базисов:

- Ортогональный
- Ортонормированый - например ($\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$)
- Произвольный (Афинный)

$\boxed{\text{Базис позволяет определить координаты вектора}}$

1.2.4 Взаимосвязь между базисами

Пусть дан базис $\beta = \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, ..., \overrightarrow{e_n}'$ и базис $\beta' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$, где n = dim(V)
Тогда координаты векторов базиса β в базисе β' будут представлять собой линейную комбинацию:
$\overrightarrow{e_1'} = a_1^1 * \overrightarrow{e_1} + a_1^2 * \overrightarrow{e_2} + ...a_1^n * \overrightarrow{e_n}$ из чего мы получим:
$\overrightarrow{e_1'}\{a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n\}_\beta$
где a_i^j - координаты
Формула перехода: $\boxed{\overrightarrow{e_j'} = a_j^i * \overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^n a_1^j * \overrightarrow{e}\ \ j = \overline{1,n}}$

Пример: $\overrightarrow{x} \in V^n$
$\overrightarrow{x}\{x_1, x_2, ..., x_n\}_\beta$ и $\{y_1, y_2, ..., y_n\}_{\beta'}$
$\overrightarrow{x} = y^1\overrightarrow{e_1'} + y^2\overrightarrow{e_2'} + ... + y^n\overrightarrow{e_n'} = y^j\overrightarrow{e_i'} = y^1(a_1^i\overrightarrow{e_j}) + y^2(a_2^i\overrightarrow{e_j}) + ... + +y^n(a_n^i\overrightarrow{e_j} = (y^1a_1^1 + y^2a_2^1 + ... + y^na_n^1)\overrightarrow{e_1} + (y^1a_1^2 + y^2a_2^2 + ... + y^na_n^2)\overrightarrow{e_2} + ... + (y^1a_1^n + y^2a_2^n + ... + y^na_n^n)\overrightarrow{e_n}$
Из этого можно сделать вывод: $\overrightarrow{x} = x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}$, где $x^n = y^1a_1^n + y^2a_2^n + ... + y^na_n^n$

$\boxed{x^i = y^ja_j^i \text{ - формула перехода}}$

Глава 2

Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы $\overrightarrow{x}\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ и $\overrightarrow{y}\{y^1, y^2, ..., y^n\}$

2.0.1 Сложение векторов в координатной форме

$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = x^1\overrightarrow{x_1} + x^2\overrightarrow{x_2} + ... + x^n\overrightarrow{x_n} + y^1\overrightarrow{y_1} + y^2\overrightarrow{y_2} + ... + y^n\overrightarrow{y_n} = (x^1 + y^1)\overrightarrow{e_1} + (x^2 + y^2)\overrightarrow{e_2} + ... + (x^n + y^n)\overrightarrow{e_n} = z^1\overrightarrow{e_1} + z^2\overrightarrow{e_2} + ... + z^n\overrightarrow{e_n}$

$\boxed{x^n + y^n = z^n}$

2.0.2 Умножение вектора на число

$\overrightarrow{p} = k\overrightarrow{x} = k(x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}) = kx^1\overrightarrow{e_1} + kx^2\overrightarrow{e_2} + ... + kx^n\overrightarrow{e_n}$

2.0.3 Скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = (x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}) * (y^1\overrightarrow{e_1} + y^2\overrightarrow{e_2} + ... + y^n\overrightarrow{e_n}) = (x^1y^1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + x^1y^2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + ... + x^ny^n\overrightarrow{e_n}\overrightarrow{e_n})$<= простое раскрытие произведения скобок

В частности для $V^3\beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - ортогонального и ортонормированного базиса:

$\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = (x^1\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j} + x^3\overrightarrow{k}) * (y^1\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + y^3\overrightarrow{k}) = x1y1\overrightarrow{i}^2 + x^1y^2\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + x^1y^3\overrightarrow{i}\overrightarrow{k} + x^2y^1\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + x^2y^2\overrightarrow{j}^2 + x^2y^3\overrightarrow{j}\overrightarrow{k} + x^3y^1\overrightarrow{i}\overrightarrow{k} + x^3y^2\overrightarrow{j}\overrightarrow{k} + x^3y^3\overrightarrow{k}^2 => x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$

Итого: $\boxed{\text{В ортонормированом и ортогональном базисе } \overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + ... + x^ny^n}$

2.1 Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве

$\overrightarrow{x}\{x^1, x^2\}\overrightarrow{y}\{y^1, y^2\}$

$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$

$\overrightarrow{x} \vee \overrightarrow{y} = x^1y^2 - x^2y^1$

$\overrightarrow{x}^2 = \overrightarrow{x} * \overrightarrow{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2$

$\boxed{\text{Данный вариант подходит только для пространтства размерности 2!}}$

2.2 Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном простанстве

$\beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$

$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * \overrightarrow{i} + (x^3y^1 - x^1y^3) * \overrightarrow{j} + (x^1y^2 - x^2y^1) * \overrightarrow{k} = \{x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1\}$

2.3 Смешаное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном простанстве

$\overrightarrow{x}\{x^1, x^2, x^3\}\overrightarrow{y}\{y^1, y^2, y^3\}\overrightarrow{z}\{z^1, z^2, z^3\}$

$(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) * \overrightarrow{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * z^1 + (x^3y^1 - x^1y^3) * z^2 + (x^1y^2 - x^2y^1) * z^3 = ...$

2.4 Векторное произведение n-1 векторов в координатной форме в n-мерном векторном простанстве

$\beta = \{i^1, i^2, ..., i^n\}, dim(V) = n$

$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$

$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1} \times \overrightarrow{x_2} \times ... \times \overrightarrow{x_{n-1}} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & ... & x_{n-1}^n \\ i^1 & i^2 & ... & i^n \end{vmatrix}$ где $\overrightarrow{x_1}\{x_1^j\},\overrightarrow{x_2}\{x_2^j\},...,\overrightarrow{x_{n-1}}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1,n}$

2.5 Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n-мерном векторном простанстве

$\beta = \{i^1, i^2, ..., i^n\}, dim(V) = n$

$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$

$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1} \vee \overrightarrow{x_2} \vee ... \vee \overrightarrow{x_{n-1}} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1 & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix}$ где $\overrightarrow{x_1}\{x_1^j\},\overrightarrow{x_2}\{x_2^j\},...,\overrightarrow{x_{n-1}}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1,n}$

Глава 3

Ортогонализация и нормизация системы векторов

Дано:
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$
Цель: найти векторы $\overrightarrow{a'}$ и $\overrightarrow{b'}$, такие что их модули равны и векторы перпендикулярны.
$\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b'} : |\overrightarrow{a'}| = |\overrightarrow{b'}| = 1; \overrightarrow{a'} \perp \overrightarrow{b'} \leftrightarrow \overrightarrow{a'} * \overrightarrow{b'} = 0$

3.1 Для двух двухмерных векторов

$\overrightarrow{a}\{a^1, a^2\}, \overrightarrow{b}\{b^1, b^2\}$

Шаг первый Определим вектор $\overrightarrow{a'}$:
$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} = a^1, a^2$

Шаг второй Определим вектор $\overrightarrow{b'}$:
Мы знаем что $\overrightarrow{a'} \perp \overrightarrow{b'}$, а значит мы можем воспользоваться формулой:
$a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 = 0$
$a'^1 \neq 0 \Rightarrow b'^1 = -\frac{a'^2}{a'^1} b'^2$
В итоге: $\overrightarrow{b'} = \{-\frac{a^2}{a^1} b', b'\}$
Как частный случай можно использовать формулу: $\boxed{\overrightarrow{b'} = \{-a'^2, a'^1\} \text{ или } \{a'^2, -a'^1\}}$

Шаг третий Проверка ориентации:
Если $det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix}$ и $det \begin{pmatrix} a'^1 & a'^2 \\ b'^1 & b'^2 \end{pmatrix}$ имеют одинаковый знак, то ориентация совпала и можно переходить к нормированию. Иначе требуется вернуться на шаг 2 и выбрать другой вариант из частного случая.

Нормирование Вектор считается нормированным, если его модуль равен 1.
Формула нормирования на примере вектора $\overrightarrow{a}\{a^1, a^2\}$: $\boxed{\overrightarrow{a} = \{\frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2}}\}}$

3.2 Для двух трехмерных векторов

$\overrightarrow{a}\{a^1, a^2, a^3\}$
$\overrightarrow{b}\{b^1, b^2, b^3\}$
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$

Шаг 1 Получим вектор $\overrightarrow{a'}$
$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$
$\overrightarrow{a'} \perp \overrightarrow{b'}$

Шаг 2 Получим вектор $\overrightarrow{b'}$
Вектор $\overrightarrow{b'}$ является линейно зависимым для векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а значит его можно получить следующим способом:
$\overrightarrow{b'} = m\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} = ka^1, ka^2, ka^3 + mb^1, mb^2, mb^3 = ka^1 + mb^1, ka^2 + mb^2, ka^3 + mb^3$
Так как $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b'}$, то косинус угла между ними равен нулю, а значит $\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b'} = 0$
Следовательно: $a^1(ka^1 + mb^1) + a^2(ka^2 + mb^2) + a^3(ka^3 + mb^3) = 0$
Спустя несколько преобразований мы получим $k((a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2)+m(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3) = 0$

РЕШИМ УРАВНЕНИЕ
Вариант 1
$m = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$
$k = -(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$
Вариант 2
$m = -((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2)$
$k = (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$

Заменим m и n в формуле вектора $\overrightarrow{b'}$ на полученые значения.

Шаг 3 Проверим ориентацию: Получим векторы $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b'}$
Проверим их коллениарность при помощи векторного произведения:
Если $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{c'} = 0$
, то переходим далее, иначе ищем ошибку в вычислениях.
Проверим сонаправленность векторов: $\lambda = \frac{\overrightarrow{c}}{\overrightarrow{c'}} = \frac{c^1}{c'^1} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{c^3}{c'^3}$
Если $\lambda > 0$, тогда переходим к нормированию, иначе повторим попытку используя другой вариант из шага 2.

Нормирование Формула нормирования на примере вектора $\overrightarrow{a}\{a^1, a^2, a^3\}$:

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \{\frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}, \frac{a^3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}\}}$$

3.3 Для трех трехмерных векторов

$\overrightarrow{a}\{a^1, a^2, a^3\}$
$\overrightarrow{b}\{b^1, b^2, b^3\}$
$\overrightarrow{c}\{c^1, c^2, c^3\}$
$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{b'} \perp \overrightarrow{c'}$

Получим векторы $\overrightarrow{a'}$ и $\overrightarrow{b'}$
$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{b'}$ получаем из варианта **для двух трехмерных векторов**.
$\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{a'} \times \overrightarrow{b'}$

Проверим ориентацию:

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} a'^1 & a'^2 & a'^3 \\ b'^1 & b'^2 & b'^3 \\ c'^1 & c'^2 & c'^3 \end{vmatrix}$$

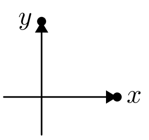
Если $\Delta 1$ и $\Delta 2$ имеют одинаковый знак, то с ориентацией все хорошо и стоит переходить к нормированию.

Глава 4

Кординатные системы Виды и связь между ними

4.1 Декартова прямоугольная координатная система

$V^2 \qquad \beta = \{\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}\}$
Координаты в декартовой системе - произведение числа на базисный вектор. К примеру координаты некоторого вектора $\overrightarrow{a} \in \beta$ будут выглядеть как:
$\overrightarrow{a} = \{a^1 * \overrightarrow{e^1}, a^2 * \overrightarrow{e^2}\}$
Обычно мы не замечаем $\overrightarrow{e^i}$, так как мы в большинстве случаев работаем в ортонормированном базисе где они равны единице.



4.2 Афинная координатная система

Глава 5

Деление отрезка в заданном соотношении

5.1 На две равные части

Дано:
M(x,y)   N(η, ν)
|MS|=|SN|
Цель: найти координаты точки S
$\boxed{\text{Расстояние между точками: } \rho = \sqrt{(\eta-\lambda)^2 + (\nu-\mu)^2}}$ $\overline{MS} = \frac{1}{2}\overline{MN}$
$\{s^1 - \lambda; s^2 - \mu\} = \frac{1}{2}\{\eta - \lambda, \nu - \mu\}$

$$\begin{cases} s^1 = \lambda + \frac{1}{2}(\eta - \lambda) \\ s^2 = \mu + \frac{1}{2}(\nu - \mu) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^1 = \frac{1}{2}(\eta + \lambda) \\ s^2 = \frac{1}{2}(\nu + \mu) \end{cases} \tag{5.1}$$

Итого координаты точки: $\boxed{S(\frac{\eta+\lambda}{2}, \frac{\nu+\mu}{2})}$

5.2 На две произвольные части

Дано:
M(x,y)   N(η, ν)
Цель: найти координаты точки S

$\overline{MS} : \overline{MN} = \frac{m}{n}$

$$\begin{cases} s^1 = \lambda + \frac{m}{m+n}(\eta - \lambda) \\ s^2 = \mu + \frac{m}{m+n}(\nu - \mu) \end{cases} \tag{5.2}$$

$\boxed{S(\frac{m\eta+n\lambda}{m+n}, \frac{m\nu+n\mu}{m+n})}$

$\overline{MS} : \overline{MN} = k$

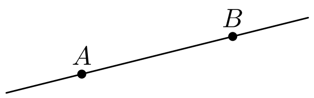
$\boxed{S(\frac{k\eta+\lambda}{k+1}, \frac{k\nu+\mu}{k+1})}$

$\boxed{\text{Отрицательный результат означает что такая точка находится вне отрезка}}$

Глава 6

Уравнение прямой на плоскости

$M \in (AB) \longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : AM = \lambda \overline{AB}$, где координаты точки M(x,y). Отсюда: $\{x - a^1, y - a^2\} = \lambda\{b^1 - a^1, b^2 - a^2\}$



6.1 Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - a^1 = \lambda(b^1 - a^1) \\ y - a^2 = \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^1 + \lambda(b^1 - a^1) \\ y = b^1 + \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \tag{6.1}$$

Где a^1 и b^1 - координаты точки принадлежащей, а $(b^1 - a^1)$ и $(b^2 - a^2)$ координаты направляющего вектора.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ b^1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b^1 & -a^1 \\ b^2 & -a^2 \end{pmatrix}$

6.2 Каноническое

$\frac{x - a^1}{b^1 - a^1} = \frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \lambda$ При условии того что a и b не дают 0

6.3 Общего вида

$\begin{vmatrix} x - a^1 & b^1 - a^2 \\ y - a^1 & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 = (x - a^1)(b^2 - a^2) - (b^1 - a^1)(y - a^2) = xb^2 - xa^2 - a^1b^2 + a^1a^2 - b^1y + b^1a^2 + a^1y - a^1a^2 = (b^2 - a^2)x + (a^1 - b^1)y - (a^1b^2 - a^2b^1)$
Введем обозначения:
$A = b^2 - a^2$
$B = a^1 - b^1$

$C = a^2b^1 - a^1b^2$
Отсюда можно получить $l : Ax + By + c = 0 <-$ линейное уравнение 2х неизвестных если $A \neq 0 || B \neq 0$

6.4 Уравнение в отрезках

Получаемое из общего вида при условии что $C \neq 0$
$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ или $\frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = \frac{-c}{c}$

Глава 7

Способы задания прямой на плоскости

7.1 По точке и направляющему вектору или по двум точкам

$l^A \in l, \overrightarrow{p}||l$
$A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), \overrightarrow{p}\{p^1, p^2\}$ или $p\{b^1 - a^1, b^2 - a^2\}$

7.1.1 Каноническое

$l : \frac{x-a^1}{p^1} = \frac{y-a^2}{p^2}$

7.1.2 Параметрическое

$l :$

$$\begin{cases} x = a^1 + \lambda * p^1 \\ y = b^1 + \lambda * p^2 \end{cases} \tag{7.1}$$

7.1.3 Общего вида

Пусть:
$p^2 = A$
$-p^1 = B$
$p^1 a^2 - p^2 a^1 = C$
Тогда $Ax + By + C = 0$
Или $l : \begin{vmatrix} x - a^1 & b^1 - a^2 \\ y - a^1 & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = p^2 x - p^2 a^1 - p^1 y + p^1 a^2 = p^2 x - p^1 y + (-p^2 a^1 + p^1 a^2)$

7.2 По точке принадлежащей и вектору нормали

$l^A \in l, \overrightarrow{n} \perp l$
$A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), \overrightarrow{n}\{n^1, n^2\}$

7.2.1 Общего вида

$\overrightarrow{AM} * \overrightarrow{n} = 0- > \{x - a^1; y - a^2\} * \{n^1; n^2\} = 0$
Откуда
$n^1(x - a^1) + n^2(y - a^2) = 0$
$n^1x + n^2y - (n^1a^1 + n^2a^2) = 0$
$n^1x + n^2y + (-n^1a^1 - n^2a^2) = 0$
$A = n^1$
$B = n^2$
$C = -(n^1a^1 + n^2a^2)$

7.2.2 Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - a^1 = \lambda(b^1 - a^1) \\ y - a^2 = \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

7.2.3 Каноническое уравнение

$l : \frac{x-a^1}{-n^2} = \frac{y-a^2}{n^1}$

Глава 8

Прямая на плоскости

$l_1 : A^1x + B^1y + C^1 = 0$
$l_2 : A^2x + B^2y + C^2 = 0$

8.1 Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Существует три вида расположения двух прямых на плоскости:

- $l_1||l_2$
- $l_1 \cap l_2$
- $l^1 \equiv l^2$

Определить взаимное расположение можно при помощи решения системы уравнений:

$$\begin{cases} A^1x + B^1y + C^1 = 0 \\ A^2x + B^2y + C^2 = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

Если:

- одно решение - прямые пересекаются (2)
- множество решений - прямые совпадают (3)
- нет решений - прямые параллельны (1)

Определить взаимное расположение можно при помощи пропорции: $\frac{A^1}{A^1} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2}$
Если:

- $\frac{A^1}{A^1} \neq \frac{B^1}{B^2} \neq \frac{C^1}{C^2}$ - прямые пересекаются (2)
- $\frac{A^1}{A^1} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2}$ - прямые совпадают (3)
- $\frac{A^1}{A^1} = \frac{B^1}{B^2} \neq \frac{C^1}{C^2}$ - прямые параллельны (1)

Определить взаимное расположение можно при помощи векторов нормали:

- $\overrightarrow{n^1} \nparallel \overrightarrow{n^2}$ - прямые пересекаются (2)
- $\overrightarrow{n^1} || \overrightarrow{n^2}$ - прямые параллельны (1) или прямые совпадают (3)

8.2 Угол между прямыми на плоскости

$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \overrightarrow{n_1}\{a_1, b_1\} \quad \overrightarrow{p_1}\{-b_1, a_1\}$
$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad \overrightarrow{n_2}\{a_2, b_2\} \quad \overrightarrow{p_2}\{-b_2, a_2\}$
$\boxed{\text{Углом между двумя прямыми считают наименьший образовавшийся}}\, \varphi \in [0°, 90°]\; cos\angle\left\langle \overrightarrow{p^1}, \overrightarrow{p^2} \right\rangle =$
$|\frac{\overrightarrow{p^1} * \overrightarrow{p^2}}{|\overrightarrow{p^1}| * |\overrightarrow{p^2}|}| => \frac{|\overrightarrow{p^1} * \overrightarrow{p^2}|}{|\overrightarrow{p^1}| * |\overrightarrow{p^2}|} => \boxed{\frac{|a^1a^2 + b^1b^2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} * \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}} = \boxed{\frac{|\overrightarrow{n^1} * \overrightarrow{n^2}|}{|\overrightarrow{n^1}| * |\overrightarrow{n^2}|}}$
$cos\angle\left\langle l^1, l^2 \right\rangle = |cos\angle\left\langle \overrightarrow{p^1}, \overrightarrow{p^2} \right\rangle|$
$l1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0- > \overrightarrow{n_1}\{A_1, B_1\}$
$l2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0- > \overrightarrow{n_2}\{A_2, B_2\}$
$\overrightarrow{n_1} \vee \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = |\overrightarrow{n_1}| * |\overrightarrow{n_2}| * sin(\varphi)$
$sin(\varphi) = \frac{|A_1B_2 - A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$
$|tg(\varphi)| = |\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{B_1B_2 + A_1A_2}|$

8.3 Расстояние от точки до прямой

$l : Ax + By + C = 0$
$M(m_1, m_2)\; \boxed{\rho(M; l) = \frac{|A_1m_1 + Bm_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$

8.4 Расстояние от прямой до прямой

Существует два варианта:

- конкретное значение, если прямые параллельны
- неопределенное расстояние, если прямые пересекаются

8.4.1 Переход к расстоянию от точки до прямой

$l : A_1x + B_1y + C_1 = 0- > \overrightarrow{n_1}\{A_1, B_1\}$
$m : A_2x + B_2y + C_2 = 0- > \overrightarrow{n_2}\{A_2, B_2\}$
$M(m_1, m_2) \in m$
Фактически все сводится к поиску расстояния от точки, принадлежащей одной из прямых до второй прямой. $\boxed{\rho(l; m) = \frac{|C^1 - \frac{A^1}{A^2} * C^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$

8.4.2 Частная формула для параллельных прямых

Если преобразовать уравнение прямой m с учетом пропорциональности первых двух коэфициентов в уравнениях прямых l и m,оно примет вид $A_1 + B_1 + C' = 0$ и мы можем использовать данное уравнение:

$\boxed{\rho(l;m) = \frac{|C'-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

8.4.3 Примечания

$a * b * sin(\phi) = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \sqrt{1 - cos^2(\phi)}|$

$a * b * sin(\phi) = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \sqrt{1 - (\frac{\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|*|\overrightarrow{b}|})^2}$

$a * b * sin(\phi) = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \frac{\sqrt{\overrightarrow{a}^2 * \overrightarrow{b}^2 - (a*b)^2}}{|\overrightarrow{a}|*|\overrightarrow{b}|}|$

Глава 9

Геометрическое место точек на плоскости

9.1 Кривые второго порядка

Уравнение кривой второго порядка выглядит следующим образом:
$\gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$
Где:
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ - коэфициенты квадратичной формы
$2a_{10}x + 2a_{20}y$ - линейные компоненты
a_{00} - свободный член.
ранее коэфициент квадратичной формы мы встерчали в подсчете модуля вектора в афинном пространстве, и фактически он является симметрической матрицей: $g(x; y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

9.2 Определение типа прямой

Для определения прямой есть два варианта:

9.2.1 Первый (a_{12}) - простой

Стандартно

Все решается путем выделения полного квадрата: $a_{11}(x^2 + 2\frac{a_{10}}{a_{11}}x) + a_{22}(y^2 + 2\frac{a_{20}}{a_{22}}y) + a_{00} = 0$
$\ldots (\frac{a_{10}}{a_{11}})^2 + (\frac{a_{20}}{a_{22}})^2 - a_{00} = 0$
Но это сработает при условии что $\boxed{a_{11}, a_{22} \neq 0}$

$a_1 1 = 0$

$a_{22}y^2 + a_{20}y + a_{00} = 0$
$2a_{10}x + a_{22}(y + \frac{a_{20}}{a_{22}})^2 = (\frac{a_{20}}{a_{22}})^2 - a_{00}$

$a_2 2 = 0$

$a_{22}y^2 + a_{20}y + a_{00} = 0$
$a_{11}(x + \frac{a_{10}}{a_{11}})^2 + 2a_{20}y = (\frac{a_{10}}{a_{11}})^2 - a_{00}$

9.2.2 Второй ($a_{12} \neq 0$) Всё плохо

Метод 1 алгебраический

Путем перехода $A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \backsim B\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$
$det\left(A - \lambda E\right)$<- характеристическое уравнение
$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22}) + \lambda^2 - a_{12}^2 = \lambda^2 - a_{11}a_{22} - \lambda(a_{11} + a_{22} - a_{12}^2) = 0$
Решив полученое уравнение мы получим λ_1 и λ_2
$g'(x'; y') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$
Собственные векторы:

$$\lambda_i => \begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0 \\ a_{12}x + (a_{12} - \lambda_i)y = 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Решения данного уровнения дадут $\overrightarrow{n_1}\{\lambda, \mu\}$ для λ_1 и$\overrightarrow{n_2}\{\phi, \psi\}$ для λ_2
И это даст нам вектроры нового базиса, а значит получим формулу перехода:

$$\begin{cases} x = \lambda x' + \phi y' \\ y = \mu x' + \psi y' \end{cases} \tag{9.2}$$

Итого:
$\gamma : \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2(a_{10}\lambda + a_{20}\mu)x' + 2(a_{10}\phi + a_{20}\psi)y' + a_{00} = 0$
Отсюда мы уже можем перейти в способ I