Краткий курс геометрии если все совсем плохо

Иван Попов

11 апреля 2022 г.

Содержание

1 Векторная алгебра

Направленный отрезок - отрезок с указаным направлением. Направление задается при помощи точки начала и точки конца.
$\overline{AB} \in \overrightarrow{a}$ - направленный отрезок является представителем вектора $\overrightarrow{a}$

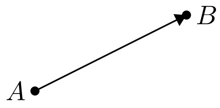


Рис. 1: Направленный отрезок $\overline{AB}$

Внимание <u>Направленный отрезок равен только себе</u>

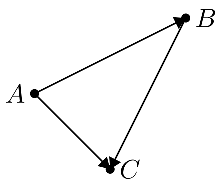
Совокупность напраленых отрезков является **вектором**.

1.1 Действия над векторами и их свойства(Аксиомпатика Вейля)

1.1.1 Сложение векторов

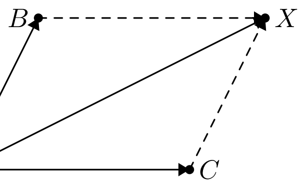
Правило треугольника

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



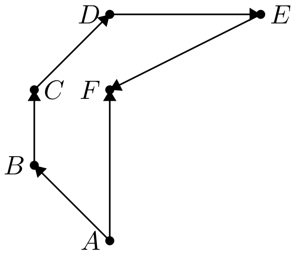
Правило параллелограма

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



Правило замкнутой ломаной|многоугольника

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$



1.1.2 Свойства сложения векторов

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

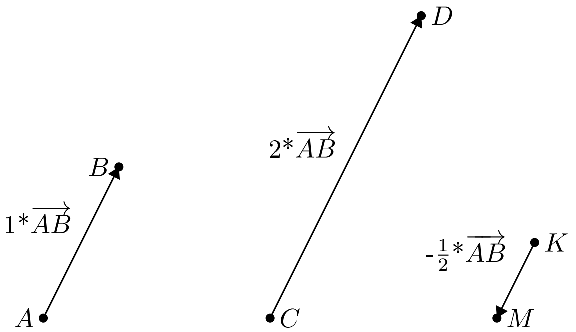
$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$

$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{\alpha}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha * \overrightarrow{a} + \alpha * \overrightarrow{b}$

1.1.3 Умножение вектора на число

$k * \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$
$k < 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$
$|k| > 1 => |\overrightarrow{a}| < |\overrightarrow{b}|$
$0 < |k| < 1 => |\overrightarrow{a}| > |\overrightarrow{b}|$
$k = 0 => |k\overrightarrow{a}| = \overrightarrow{0}$ - нуль вектор
$k = 1 => |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$



1.1.4 Свойства умножения вектора на число

k(m*$\overrightarrow{a}$)=$\overrightarrow{a}$*(k*m)=m(k*$\overrightarrow{a}$)
(k+m)*$\overrightarrow{a}$=k$\overrightarrow{a}$+m$\overrightarrow{a}$

1.1.5 Скалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр
угол между двумя векторами
$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = k$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b} \angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \in [0°..90°)$
$k < 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b} \angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \in (90°..180°]$
$k > 0 => \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$
$k = 0 => \overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \in \overrightarrow{\alpha}$
$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \cos \angle(\overrightarrow{a} \overrightarrow{b})$
$\cos \angle(\overrightarrow{a} \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a}}{|a|} * \frac{\overrightarrow{b}}{|b|}$

1.1.6 Свойства скалярного произведения двух векторов

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} * \overrightarrow{a}$
$\overrightarrow{a} * (\overrightarrow{b} * \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} * \overrightarrow{c})$
$(k * \overrightarrow{a}) * \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b})$

1.1.7 Векторое произведение двух векторов для пространства размерности 3

Результат: вектор
модуль результата($\overrightarrow{c}$) равен площади параллелограма натянутого на векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}]$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \ \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$

1.1.8 Свойства векторного произведения двух векторов

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$
$(k * \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

1.1.9 Псевдоскалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр
характеризует ориентацию угла между векторами при помощи знака
$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = m$
$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \sin \angle(\overrightarrow{a} \overrightarrow{b})$
$\sin \angle(\overrightarrow{a} \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}|}$
$m = 0 => \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (0° || 180°) => \overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$

1.1.10 Свойства псевдоскалярного произведение двух векторов

$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a}$ $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \vee \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}$
$(k * \overrightarrow{a}) \vee \overrightarrow{b} = k * (\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b})$

1.1.11 Смешаное произведение трех векторов

Результат: скаляр
результат смешаного произведения представляет собой объем паралелепипеда натянутого на данные векторы
$(\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} * \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} * (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c}$

Порядок операций: Сначала выполняется векторное умножение ($\times$), а только затем скалярное (*)

$n = 0 => \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} || \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} || \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$
$n > 0 =>$Ориентация векторов такая же как в базисе $\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$
$n < 0 =>$Ориентация векторов не такая как в базисе $\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k}$

1.1.12 Свойства смешаного произведения трех векторов

$(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{b})$
$(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c})$
$((\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d}) + (\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{d})$

1.2 Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис

1.2.1 Взаимное расположение векторов

Коллениарность - расположение двух векторов когда они параллельны: $\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$ а также $\overrightarrow{a} = k * \overrightarrow{b}$
Ортогональность - расположение двух векторов когда они перпендикулярны: $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$
Компланарность - расположение двух и более векторов когда они коллениарны(паралельны) одной плоскости или лежат в ней: $\overrightarrow{c} = k * \overrightarrow{a} + m * \overrightarrow{b}$

1.2.2 Линейная зависимость

Линейная комбинация — выражение, построенное на множестве элементов путём умножения каждого элемента на коэффициенты с последующим сложением результатов
$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$
Линейная комбинация(Система) является линейно зависимой если хотябы 1 $\alpha \neq 0$ и/или если имеется хотябы один $\overrightarrow{0}$.
Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Если мы не имеется ни одного 0, то система линейно не зависима и мы имеем размер векторного пространства $n = div(M)$

1.2.3 Базис

Базис - это упорядоченная СЛНВ (система линейно независимых векторов) в векторном пространстве.
Виды базисов:

- Ортогональный
- Ортонормированый - например ($\overrightarrow{i}\overrightarrow{j}\overrightarrow{k}$)
- Произвольный (Афинный)

$\boxed{\text{Базис позволяет определить координаты вектора}}$

1.2.4 Взаимосвязь между базисами

Пусть дан базис $\beta = \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, ..., \overrightarrow{e_n}'$ и базис $\beta' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$, где n = dim(V)
Тогда координаты векторов базиса β в базисе β' будут представлять собой линейную комбинацию:
$\overrightarrow{e_1'} = a_1^1 * \overrightarrow{e_1} + a_1^2 * \overrightarrow{e_2} + ...a_1^n * \overrightarrow{e_n}$ из чего мы получим:
$\overrightarrow{e_1'}\{a_1^1, a_1^2, ..., a_1^n\}_\beta$
где a_i^j - координаты
Формула перехода: $\boxed{\overrightarrow{e_j'} = a_j^i * \overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^n a_1^j * \overrightarrow{e}\ \ j = \overline{1, n}}$

Пример: $\overrightarrow{x} \in V^n$
$\overrightarrow{x}\{x_1, x_2, ..., x_n\}_\beta$ и $\{y_1, y_2, ..., y_n\}_{\beta'}$
$\overrightarrow{x} = y^1\overrightarrow{e_1'} + y^2\overrightarrow{e_2'} + ... + y^n\overrightarrow{e_n'} = y^j\overrightarrow{e_i'} = y^1(a_1^i\overrightarrow{e_j}) + y^2(a_2^i\overrightarrow{e_j}) + ... + +y^n(a_n^i\overrightarrow{e_j} = (y^1a_1^1 + y^2a_2^1 + ... + y^na_n^1)\overrightarrow{e_1} + (y^1a_1^2 + y^2a_2^2 + ... + y^na_n^2)\overrightarrow{e_2} + ... + (y^1a_1^n + y^2a_2^n + ... + y^na_n^n)\overrightarrow{e_n}$
Из этого можно сделать вывод: $\overrightarrow{x} = x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}$, где $x^n = y^1a_1^n + y^2a_2^n + ... + y^na_n^n$
$\boxed{x^i = y^ja_j^i \text{ - формула перехода}}$

2 Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы $\overrightarrow{x}\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ и $\overrightarrow{y}\{y^1, y^2, ..., y^n\}$

2.0.1 Сложение векторов в координатной форме

$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = x^1\overrightarrow{x_1} + x^2\overrightarrow{x_2} + ... + x^n\overrightarrow{x_n} + y^1\overrightarrow{y_1} + y^2\overrightarrow{y_2} + ... + y^n\overrightarrow{y_n} = (x^1 + y^1)\overrightarrow{e_1} + (x^2 + y^2)\overrightarrow{e_2} + ... + (x^n + y^n)\overrightarrow{e_n} = z^1\overrightarrow{e_1} + z^2\overrightarrow{e_2} + ... + z^n\overrightarrow{e_n}$

$\boxed{x^n + y^n = z^n}$

2.0.2 Умножение вектора на число

$\overrightarrow{p} = k\overrightarrow{x} = k(x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}) = kx^1\overrightarrow{e_1} + kx^2\overrightarrow{e_2} + ... + kx^n\overrightarrow{e_n}$

2.0.3 Скалярное произведение векторов

$\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = (x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + ... + x^n\overrightarrow{e_n}) * (y^1\overrightarrow{e_1} + y^2\overrightarrow{e_2} + ... + y^n\overrightarrow{e_n}) = (x^1y^1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + x^1y^2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + ... + x^ny^n\overrightarrow{e_n}\overrightarrow{e_n}) <=$ простое раскрытие произведения скобок

В частности для $V^3\beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - ортогонального и ортонормированного базиса:

$\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = (x^1\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j} + x^3\overrightarrow{k}) * (y^1\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + y^3\overrightarrow{k}) = x1y1\overrightarrow{i}^2 + x^1y^2\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + x^1y^3\overrightarrow{i}\overrightarrow{k} + x^2y^1\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + x^2y^2\overrightarrow{j}^2 + x^2y^3\overrightarrow{j}\overrightarrow{k} + x^3y^1\overrightarrow{i}\overrightarrow{k} + x^3y^2\overrightarrow{j}\overrightarrow{k} + x^3y^3\overrightarrow{k}^2 => x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$

Итого: $\boxed{\text{В ортонормированом и ортогональном базисе } \overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + ... + x^ny^n}$

2.1 Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве

$\overrightarrow{x}\{x^1, x^2\}\overrightarrow{y}\{y^1, y^2\}$

$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$

$\overrightarrow{x} \vee \overrightarrow{y} = x^1y^2 - x^2y^1$

$\overrightarrow{x}^2 = \overrightarrow{x} * \overrightarrow{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2$

$\boxed{\text{Данный вариант подходит только для пространтства размерности 2!}}$

2.2 Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном простанстве

$\beta\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$

$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * i + (x^3y^1 - x^1y^3) * j + (x^1y^2 - x^2y^1) * k = \{x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1\}$

2.3 Смешаное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном простанстве

$\overrightarrow{x}\{x^1, x^2, x^3\}\overrightarrow{y}\{y^1, y^2, y^3\}\overrightarrow{z}\{z^1, z^2, z^3\}$

$(\overrightarrow{x}\overrightarrow{y}\overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) * \overrightarrow{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * z^1 + (x^3y^1 - x^1y^3) * z^2 + (x^1y^2 -$

$x^2y^1) * z^3 = ...$

2.4 Векторное произведение n-1 векторов в координатной форме в n-мерном вектороном простанстве

$\beta = \{i^1, i^2, ..., i^n\}, dim(V) = n$
$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1} \times \overrightarrow{x_2} \times ... \times \overrightarrow{x_{n-1}} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & ... & x_{n-1}^n \\ i^1 & i^2 & ... & i^n \end{vmatrix} \text{ где } \overrightarrow{x_1}\{x_1^j\}, \overrightarrow{x_2}\{x_2^j\}, ..., \overrightarrow{x_{n-1}}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

2.5 Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n-мерном вектороном простанстве

$\beta = \{i^1, i^2, ..., i^n\}, dim(V) = n$
$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x_1} \vee \overrightarrow{x_2} \vee ... \vee \overrightarrow{x_{n-1}} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1 & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix} \text{ где } \overrightarrow{x_1}\{x_1^j\}, \overrightarrow{x_2}\{x_2^j\}, ..., \overrightarrow{x_{n-1}}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

3 Ортогонализация и нормизация системы векторов

Дано:
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$
Цель: найти векторы $\overrightarrow{a'}$ и $\overrightarrow{b'}$, такие что их модули равны и векторы перпендикулярны.
$\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{b'} : |\overrightarrow{a'}| = |\overrightarrow{b'}| = 1; \overrightarrow{a'} \perp \overrightarrow{b'} \leftrightarrow \overrightarrow{a'} * \overrightarrow{b'} = 0$

3.1 Для двух двухмерных векторов

$\overrightarrow{a}\{a^1, a^2\}, \overrightarrow{b}\{b^1, b^2\}$

Шаг первый Определим вектор $\overrightarrow{a'}$:
$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} = a^1, a^2$

Шаг второй Определим вектор $\overrightarrow{b'}$:
Мы знаем что $\overrightarrow{a'} \perp \overrightarrow{b'}$, а значит мы можем воспользоваться формулой:
$a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 = 0$
$a'^1 \neq 0 \Rightarrow b'^1 = -\frac{a'^2}{a'^1} b'^2$
В итоге: $\overrightarrow{b'} = \{-\frac{a^2}{a^1} b', b'\}$
Как частный случай можно использовать формулу: $\boxed{\overrightarrow{b'} = \{-a'^2, a'^1\} \text{ или } \{a'^2, -a'^1\}}$

Шаг третий Проверка ориентации:
Если $det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a'^1 & a'^2 \\ b'^1 & b'^2 \end{pmatrix}$, то ориентация совпала и можно переходить к нормированию. Иначе требуется вернуться на шаг 2 и выбрать другой вариант из частного случая.

Нормирование Вектор считается нормированным, если его модуль равен 1.
Формула нормирования на примере вектора $\overrightarrow{a}\{a^1, a^2\}$: $\boxed{\overrightarrow{a} = \{\frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}}\}}$