

Краткий курс геометрии если все совсем плохо

Иван Попов

15 апреля 2022 г.

Оглавление

1	Векторная алгебра	3
1.1	Действия над векторами и их свойства(Аксиоматика Вейля)	3
1.1.1	Сложение векторов	3
1.1.2	Свойства сложения векторов	4
1.1.3	Умножение вектора на число	4
1.1.4	Свойства умножения вектора на число	4
1.1.5	Скалярное произведение двух векторов	5
1.1.6	Свойства скалярного произведения двух векторов	5
1.1.7	Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3	5
1.1.8	Свойства векторного произведения двух векторов	5
1.1.9	Псевдоскалярное произведение двух векторов	6
1.1.10	Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов	6
1.1.11	Смешанное произведение трех векторов	6
1.1.12	Свойства смешанного произведения трех векторов	6
1.2	Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис	6
1.2.1	Взаимное расположение векторов	6
1.2.2	Линейная зависимость	7
1.2.3	Базис	7
1.2.4	Взаимосвязь между базисами	7
2	Действия над векторами в координатной форме	9
2.0.1	Сложение векторов в координатной форме	9
2.0.2	Умножение вектора на число	9
2.0.3	Скалярное произведение векторов	9
2.1	Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве	9
2.2	Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве	10
2.3	Смешанное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве	10
2.4	Векторное произведение $n-1$ векторов в координатной форме в n -мерном векторном пространстве	10
2.5	Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n -мерном векторном пространстве	10

3	Ортогонализация и нормизация системы векторов	11
3.1	Для двух двумерных векторов	11
3.2	Для двух трехмерных векторов	12
3.3	Для трех трехмерных векторов	13
4	Кординатные системы	
	Виды и связь между ними	15
4.1	Декартова прямоугольная координатная система	15
4.2	Аффинная координатная система	15
5	Деление отрезка в заданном соотношении	17
5.1	На две равные части	17
5.2	На две произвольные части	17
6	Уравнение прямой на плоскости	19
6.1	Параметрическое уравнение	19
6.2	Каноническое	19
6.3	Общего вида	19
6.4	Уравнение в отрезках	20
7	Способы задания прямой на плоскости	21
7.1	По точке и направляющему вектору или по двум точкам	21
7.1.1	Каноническое	21
7.1.2	Параметрическое	21
7.1.3	Общего вида	21
7.2	По точке принадлежащей и вектору нормали	22
7.2.1	Общего вида	22
7.2.2	Параметрическое уравнение	22
7.2.3	Каноническое уравнение	22
8	Прямая на плоскости	23
8.1	Взаимное расположение прямых на плоскости	23
8.2	Угол между прямыми на плоскости	24
8.3	Расстояние от точки до прямой	24
8.4	Расстояние от прямой до прямой	24
8.4.1	Переход к расстоянию от точки до прямой	24
8.4.2	Частная формула для параллельных прямых	25
8.4.3	Примечания	25

Глава 1

Векторная алгебра

Направленный отрезок - отрезок с указанным направлением. Направление задается при помощи точки начала и точки конца.

$\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ - направленный отрезок является представителем вектора \vec{a}

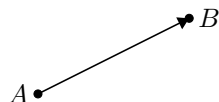


Рис. 1.1: Направленный отрезок \overrightarrow{AB}

Внимание Направленный отрезок равен только себе
--

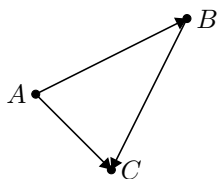
Совокупность направленных отрезков является **вектором**.

1.1 Действия над векторами и их свойства (Аксиоматика Вейля)

1.1.1 Сложение векторов

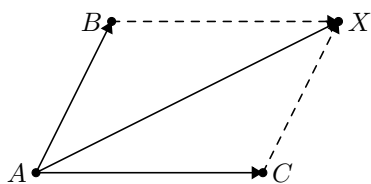
Правило треугольника

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



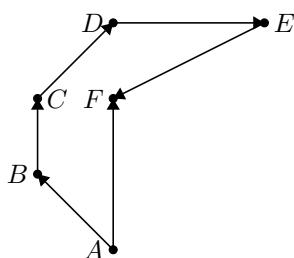
Правило параллелограмма

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



Правило замкнутой ломаной | многоугольника

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$



1.1.2 Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha * \vec{a} + \alpha * \vec{b}$$

1.1.3 Умножение вектора на число

$$k * \vec{a} = \vec{b}$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \downarrow \vec{b}$$

$$|k| > 1 \Rightarrow |\vec{a}| < |\vec{b}|$$

$$0 < |k| < 1 \Rightarrow |\vec{a}| > |\vec{b}|$$

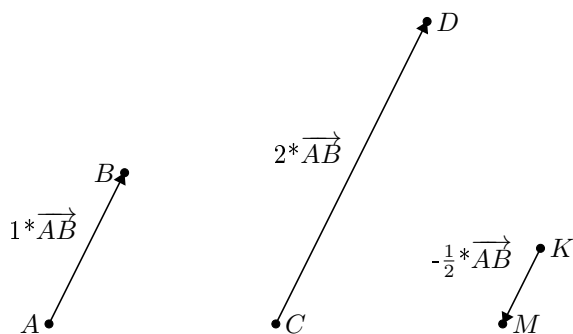
$$k = 0 \Rightarrow |k\vec{a}| = |\vec{0}| \text{ - нуль вектор}$$

$$k = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

1.1.4 Свойства умножения вектора на число

$$k(m * \vec{a}) = \vec{a} * (k * m) = m(k * \vec{a})$$

$$(k+m) * \vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$$



1.1.5 Скалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

угол между двумя векторами

$$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} * \vec{b} = k$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in [0^\circ .. 90^\circ)$$

$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in (90^\circ .. 180^\circ]$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

$$k = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \in \vec{a}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \angle(\vec{a} \vec{b})$$

$$\cos \angle(\vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

1.1.6 Свойства скалярного произведения двух векторов

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * (\vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) * \vec{b} = k * (\vec{a} * \vec{b})$$

1.1.7 Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3

Результат: вектор

модуль результата(\vec{c}) равен площади параллелограмма натянутого на векторы \vec{a} и \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} * \vec{b}]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

1.1.8 Свойства векторного произведения двух векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) \times \vec{b} = k * (\vec{a} \times \vec{b})$$

1.1.9 Псевдоскалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

характеризует ориентацию угла между векторами при помощи знака

$$\vec{a} \vee \vec{b} = m$$

$$\vec{a} \vee \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \vee \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

$$m = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = (0^\circ || 180^\circ) \Rightarrow \vec{a} || \vec{b}$$

1.1.10 Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов

$$\vec{a} \vee \vec{b} = -\vec{b} \vee \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \vee \vec{c} = \vec{a} \vee \vec{c} + \vec{b} \vee \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) \vee \vec{b} = k * (\vec{a} \vee \vec{b})$$

1.1.11 Смешанное произведение трех векторов

Результат: скаляр

результат смешанного произведения представляет собой объем параллелепипеда натянутого на данные векторы

$$(\vec{a} * \vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$$

Порядок операций: Сначала выполняется векторное умножение (\times), а только затем скалярное ($*$)

$$n = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} || \vec{b} = \vec{0} || \vec{c} = \vec{0}$$

$$n > 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов такая же как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

$$n < 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов не такая как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

1.1.12 Свойства смешанного произведения трех векторов

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{b} \vec{a})$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$$

$$((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) = (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d})$$

1.2 Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис

1.2.1 Взаимное расположение векторов

Коллинеарность - расположение двух векторов когда они параллельны: $\vec{a} || \vec{b}$ а также $\vec{a} = k * \vec{b}$

Ортогональность - расположение двух векторов когда они перпендикулярны: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Компланарность - расположение двух и более векторов когда они коллинеарны (параллельны)

1.2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И БАЗИС

одной плоскости или лежат в ней: $\vec{c} = k * \vec{a} + m * \vec{b}$

1.2.2 Линейная зависимость

Линейная комбинация — выражение, построенное на множестве элементов путём умножения каждого элемента на коэффициенты с последующим сложением результатов

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Линейная комбинация (Система) является линейно зависимой если хотя бы 1 $\lambda \neq 0$ и/или если имеется хотя бы один $\vec{0}$.

Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Если мы не имеем ни одного 0, то система линейно не зависима и мы имеем размер векторного пространства $n = \dim(M)$

1.2.3 Базис

Базис - это упорядоченная СЛНВ (система линейно независимых векторов) в векторном пространстве.

Виды базисов:

- Ортогональный
- Ортонормированный - например $(\vec{i} \vec{j} \vec{k})$
- Произвольный (Аффинный)

Базис позволяет определить координаты вектора

1.2.4 Взаимосвязь между базисами

Пусть дан базис $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ и базис $\beta' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$, где $n = \dim(V)$

Тогда координаты векторов базиса β в базисе β' будут представлять собой линейную комбинацию:

$$\vec{e}'_1 = a_1^1 * \vec{e}_1 + a_1^2 * \vec{e}_2 + \dots + a_1^n * \vec{e}_n \text{ из чего мы получим:}$$

$$\vec{e}'_1 \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n\}_\beta$$

где a_i^j - координаты

$$\text{Формула перехода: } \vec{e}'_j = a_j^i * \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n a_j^i * \vec{e}_i \quad j = \overline{1, n}$$

Пример: $\vec{x} \in V^n$

$$\vec{x} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}_\beta \text{ и } \{y_1, y_2, \dots, y_n\}_{\beta'}$$

$$\vec{x} = y^1 \vec{e}'_1 + y^2 \vec{e}'_2 + \dots + y^n \vec{e}'_n = y^j \vec{e}'_j = y^1 (a_1^i \vec{e}_i) + y^2 (a_2^i \vec{e}_i) + \dots + y^n (a_n^i \vec{e}_i) = (y^1 a_1^1 + y^2 a_2^1 + \dots + y^n a_n^1) \vec{e}_1 + (y^1 a_1^2 + y^2 a_2^2 + \dots + y^n a_n^2) \vec{e}_2 + \dots + (y^1 a_1^n + y^2 a_2^n + \dots + y^n a_n^n) \vec{e}_n$$

Из этого можно сделать вывод: $\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$, где $x^n = y^1 a_1^n + y^2 a_2^n + \dots + y^n a_n^n$

$$x^i = y^j a_j^i - \text{формула перехода}$$

Глава 2

Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы $\vec{x}\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ и $\vec{y}\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$

2.0.1 Сложение векторов в координатной форме

$$\vec{x} + \vec{y} = x^1\vec{x}_1 + x^2\vec{x}_2 + \dots + x^n\vec{x}_n + y^1\vec{y}_1 + y^2\vec{y}_2 + \dots + y^n\vec{y}_n = (x^1 + y^1)\vec{e}_1 + (x^2 + y^2)\vec{e}_2 + \dots + (x^n + y^n)\vec{e}_n = z^1\vec{e}_1 + z^2\vec{e}_2 + \dots + z^n\vec{e}_n$$

$x^n + y^n = z^n$

2.0.2 Умножение вектора на число

$$\vec{p} = k\vec{x} = k(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n) = kx^1\vec{e}_1 + kx^2\vec{e}_2 + \dots + kx^n\vec{e}_n$$

2.0.3 Скалярное произведение векторов

$$\vec{x} * \vec{y} = (x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n) * (y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \dots + y^n\vec{e}_n) = (x^1y^1\vec{e}_1\vec{e}_1 + x^1y^2\vec{e}_1\vec{e}_2 + \dots + x^ny^n\vec{e}_n\vec{e}_n) \leftarrow \text{простое раскрытие произведения скобок}$$

В частности для $V^3\beta\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - ортогонального и ортонормированного базиса:

$$\vec{x} * \vec{y} = (x^1\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}) * (y^1\vec{i} + y^2\vec{j} + y^3\vec{k}) = x^1y^1\vec{i}\vec{i}^2 + x^1y^2\vec{i}\vec{j} + x^1y^3\vec{i}\vec{k} + x^2y^1\vec{i}\vec{j} + x^2y^2\vec{j}\vec{j}^2 + x^2y^3\vec{j}\vec{k} + x^3y^1\vec{i}\vec{k} + x^3y^2\vec{j}\vec{k} + x^3y^3\vec{k}\vec{k}^2 \Rightarrow x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

Итого:

В ортонормированном и ортогональном базисе $\vec{x} * \vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + \dots + x^ny^n$

2.1 Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве

$$\vec{x}\{x^1, x^2\} \vec{y}\{y^1, y^2\}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \in \beta\{\vec{i}, \vec{j}\}$$

$$\vec{x} \vee \vec{y} = x^1y^2 - x^2y^1$$

$$\vec{x}^2 = \vec{x} * \vec{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2$$

Данный вариант подходит только для пространства размерности 2!

2.2 Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве

$$\beta\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * \vec{i} + (x^3y^1 - x^1y^3) * \vec{j} + (x^1y^2 - x^2y^1) * \vec{k} =$$

$$\{x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1\}$$

2.3 Смешанное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве

$$\vec{x}\{x^1, x^2, x^3\} \vec{y}\{y^1, y^2, y^3\} \vec{z}\{z^1, z^2, z^3\}$$

$$(\vec{x} \vec{y} \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) * \vec{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * z^1 + (x^3y^1 - x^1y^3) * z^2 + (x^1y^2 - x^2y^1) * z^3 = \dots$$

2.4 Векторное произведение n-1 векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве

$$\beta = \{i^1, i^2, \dots, i^n\}, \dim(V) = n$$

$$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$$

$$\vec{y} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ i^1 & i^2 & \dots & i^n \end{vmatrix} \quad \text{где } \vec{x}_1\{x_1^j\}, \vec{x}_2\{x_2^j\}, \dots, \vec{x}_{n-1}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

2.5 Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве

$$\beta = \{i^1, i^2, \dots, i^n\}, \dim(V) = n$$

$$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$$

$$\vec{y} = \vec{x}_1 \vee \vec{x}_2 \vee \dots \vee \vec{x}_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad \text{где } \vec{x}_1\{x_1^j\}, \vec{x}_2\{x_2^j\}, \dots, \vec{x}_{n-1}\{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

Глава 3

Ортогонализация и нормизация системы векторов

Дано:

\vec{a}, \vec{b}

Цель: найти векторы \vec{a}' и \vec{b}' , такие что их модули равны и векторы перпендикулярны.
 $\vec{a}', \vec{b}' : |\vec{a}'| = |\vec{b}'| = 1; \vec{a}' \perp \vec{b}' \leftrightarrow \vec{a}' * \vec{b}' = 0$

3.1 Для двух двумерных векторов

$\vec{a} \{a^1, a^2\}, \vec{b} \{b^1, b^2\}$

Шаг первый Определим вектор \vec{a}' :
 $\vec{a}' = \vec{a} = a^1, a^2$

Шаг второй Определим вектор \vec{b}' :

Мы знаем что $\vec{a}' \perp \vec{b}'$, а значит мы можем воспользоваться формулой:

$$a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 = 0$$

$$a'^1 \neq 0 \Rightarrow b'^1 = -\frac{a'^2}{a'^1} b'^2$$

В итоге: $\vec{b}' = \{-\frac{a'^2}{a'^1} b', b'\}$

Как частный случай можно использовать формулу: $\vec{b}' = \{-a'^2, a'^1\}$ или $\{a'^2, -a'^1\}$

Шаг третий Проверка ориентации:

Если $\det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix}$ и $\det \begin{pmatrix} a'^1 & a'^2 \\ b'^1 & b'^2 \end{pmatrix}$ имеют одинаковый знак, то ориентация совпала и можно переходить к нормированию. Иначе требуется вернуться на шаг 2 и выбрать другой вариант из частного случая.

Нормирование Вектор считается нормированным, если его модуль равен 1.

Формула нормирования на примере вектора $\vec{a} \{a^1, a^2\}$: $\vec{a} = \left\{ \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}} \right\}$

3.2 Для двух трехмерных векторов

$$\begin{aligned} \vec{a} \{a^1, a^2, a^3\} \\ \vec{b} \{b^1, b^2, b^3\} \\ \vec{a}, \vec{b} \in V^3 \end{aligned}$$

Шаг 1 Получим вектор \vec{a}
 $\vec{a} = \vec{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$
 $\vec{a} \perp \vec{b}$

Шаг 2 Получим вектор \vec{b}
 Вектор \vec{b} является линейно зависимым для векторов \vec{a} и \vec{b} , а значит его можно получить следующим способом:
 $\vec{b} = m\vec{a} + k\vec{b} = ka^1, ka^2, ka^3 + mb^1, mb^2, mb^3 = ka^1 + mb^1, ka^2 + mb^2, ka^3 + mb^3$
 Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то косинус угла между ними равен нулю, а значит $\vec{a} * \vec{b} = 0$
 Следовательно: $a^1(ka^1 + mb^1) + a^2(ka^2 + mb^2) + a^3(ka^3 + mb^3) = 0$
 Спустя несколько преобразований мы получим $k((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2) + m(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) = 0$

РЕШИМ УРАВНЕНИЕ

Вариант 1

$$\begin{aligned} m &= (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \\ k &= -(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} m &= -((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2) \\ k &= (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) \end{aligned}$$

Заменим m и n в формуле вектора \vec{b} на полученные значения.

Шаг 3 Проверим ориентацию: Получим векторы $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Проверим их коллинеарность при помощи векторного произведения:

$$\text{Если } \vec{c} \times \vec{c} = 0$$

, то переходим далее, иначе ищем ошибку в вычислениях.

$$\text{Проверим сонаправленность векторов: } \lambda = \frac{\vec{c}}{\vec{c}} = \frac{c^1}{c^1} = \frac{c^2}{c^2} = \frac{c^3}{c^3}$$

Если $\lambda > 0$, тогда переходим к нормированию, иначе повторим попытку используя другой вариант из шага 2.

Нормирование Формула нормирования на примере вектора $\vec{a}\{a^1, a^2, a^3\}$:

$$\vec{a} = \left\{ \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}, \frac{a^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}} \right\}$$

3.3 Для трех трехмерных векторов

$$\vec{a}\{a^1, a^2, a^3\}$$

$$\vec{b}\{b^1, b^2, b^3\}$$

$$\vec{c}\{c^1, c^2, c^3\}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

Получим векторы \vec{a}' и \vec{b}'

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

\vec{b}' получаем из варианта для двух трехмерных векторов.

$$\vec{c} = \vec{a}' \times \vec{b}'$$

Проверим ориентацию:

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} a'^1 & a'^2 & a'^3 \\ b'^1 & b'^2 & b'^3 \\ c'^1 & c'^2 & c'^3 \end{vmatrix}$$

Если $\Delta 1$ и $\Delta 2$ имеют одинаковый знак, то с ориентацией все хорошо и стоит переходить к нормированию.

Глава 4

Координатные системы Виды и связь между ними

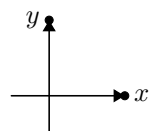
4.1 Декартова прямоугольная координатная система

$$V^2 \quad \beta = \{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$$

Координаты в декартовой системе - произведение числа на базисный вектор. К примеру координаты некоторого вектора $\vec{a} \in \beta$ будут выглядеть как:

$$\vec{a} = \{a^1 * \vec{e}^1, a^2 * \vec{e}^2\}$$

Обычно мы не замечаем \vec{e}^i , так как мы в большинстве случаев работаем в ортонормированном базисе где они равны единице.



4.2 Афинная координатная система

Глава 5

Деление отрезка в заданном соотношении

5.1 На две равные части

Дано:

$M(x, y)$ $N(\eta, \nu)$

$|MS| = |SN|$

Цель: найти координаты точки S

Расстояние между точками: $\rho = \sqrt{(\eta - \lambda)^2 + (\nu - \mu)^2}$ $\overline{MS} = \frac{1}{2} \overline{MN}$

$\{s^1 - \lambda; s^2 - \mu\} = \frac{1}{2} \{\eta - \lambda, \nu - \mu\}$

$$\begin{cases} s^1 = \lambda + \frac{1}{2}(\eta - \lambda) \\ s^2 = \mu + \frac{1}{2}(\nu - \mu) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^1 = \frac{1}{2}(\eta + \lambda) \\ s^2 = \frac{1}{2}(\nu + \mu) \end{cases} \quad (5.1)$$

Итого координаты точки: $S(\frac{\eta + \lambda}{2}, \frac{\nu + \mu}{2})$

5.2 На две произвольные части

Дано:

$M(x, y)$ $N(\eta, \nu)$

Цель: найти координаты точки S

$\overline{MS} : \overline{MN} = \frac{m}{n}$

$$\begin{cases} s^1 = \lambda + \frac{m}{m+n}(\eta - \lambda) \\ s^2 = \mu + \frac{m}{m+n}(\nu - \mu) \end{cases} \quad (5.2)$$

$S(\frac{m\eta + n\lambda}{m+n}, \frac{m\nu + n\mu}{m+n})$

$$\overline{MS} : \overline{MN} = k$$

$$S\left(\frac{k\eta+\lambda}{k+1}, \frac{k\nu+\mu}{k+1}\right)$$

Отрицательный результат означает что такая точка находится вне отрезка

Глава 6

Уравнение прямой на плоскости

$M \in (AB) \longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : AM = \lambda \overline{AB}$, где координаты точки $M(x, y)$. Отсюда: $\{x - a^1, y - a^2\} = \lambda \{b^1 - a^1, b^2 - a^2\}$



6.1 Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - a^1 = \lambda(b^1 - a^1) \\ y - a^2 = \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^1 + \lambda(b^1 - a^1) \\ y = a^2 + \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \quad (6.1)$$

Где a^1 и a^2 - координаты точки принадлежащей, а $(b^1 - a^1)$ и $(b^2 - a^2)$ координаты направляющего вектора.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

6.2 Каноническое

$$\frac{x - a^1}{b^1 - a^1} = \frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \lambda \text{ При условии того что } a \text{ и } b \text{ не дают } 0$$

6.3 Общего вида

$$\begin{vmatrix} x - a^1 & b^1 - a^1 \\ y - a^2 & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = 0 = (x - a^1)(b^2 - a^2) - (b^1 - a^1)(y - a^2) = xb^2 - xa^2 - a^1b^2 + a^1a^2 - b^1y + b^1a^2 + a^1y - a^1a^2 = (b^2 - a^2)x + (a^1 - b^1)y - (a^1b^2 - a^2b^1)$$

Введем обозначения:

$$A = b^2 - a^2$$

$$B = a^1 - b^1$$

$$C = a^2b^1 - a^1b^2$$

Отсюда можно получить $l : Ax + By + c = 0$ — линейное уравнение 2х неизвестных если $A \neq 0 || B \neq 0$

6.4 Уравнение в отрезках

Получаемое из общего вида при условии что $C \neq 0$

$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ или } \frac{x}{\frac{a}{c}} + \frac{y}{\frac{b}{c}} = \frac{-c}{c}$$

Глава 7

Способы задания прямой на ПЛОСКОСТИ

7.1 По точке и направляющему вектору или по двум точкам

$$l^A \in l, \vec{p} \parallel l \\ A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), \vec{p} \{p^1, p^2\} \text{ или } p\{b^1 - a^1, b^2 - a^2\}$$

7.1.1 Каноническое

$$l : \frac{x-a^1}{p^1} = \frac{y-a^2}{p^2}$$

7.1.2 Параметрическое

$l :$

$$\begin{cases} x = a^1 + \lambda * p^1 \\ y = b^1 + \lambda * p^2 \end{cases} \quad (7.1)$$

7.1.3 Общего вида

Пусть:

$$p^2 = A$$

$$-p^1 = B$$

$$p^1 a^2 - p^2 a^1 = C$$

Тогда $Ax + By + C = 0$

$$\text{Или } l : \begin{vmatrix} x - a^1 & b^1 - a^2 \\ y - a^1 & b^2 - a^2 \end{vmatrix} = p^2 x - p^2 a^1 - p^1 y + p^1 a^2 = p^2 x - p^1 y + (-p^2 a^1 + p^1 a^2)$$

7.2 По точке принадлежащей и вектору нормали

$$l^A \in l, \vec{n} \perp l \\ A(a^1, a^2), B(b^1, b^2), \vec{n} \{n^1, n^2\}$$

7.2.1 Общего вида

$$\overrightarrow{AM} * \vec{n} = 0 \rightarrow \{x - a^1; y - a^2\} * \{n^1; n^2\} = 0$$

Откуда

$$n^1(x - a^1) + n^2(y - a^2) = 0$$

$$n^1x + n^2y - (n^1a^1 + n^2a^2) = 0$$

$$n^1x + n^2y + (-n^1a^1 - n^2a^2) = 0$$

$$A = n^1$$

$$B = n^2$$

$$C = -(n^1a^1 + n^2a^2)$$

7.2.2 Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - a^1 = \lambda(b^1 - a^1) \\ y - a^2 = \lambda(b^2 - a^2) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (7.2)$$

7.2.3 Каноническое уравнение

$$l : \frac{x-a^1}{-n^2} = \frac{y-a^2}{n^1}$$

Глава 8

Прямая на плоскости

$$\begin{aligned}l_1 : A^1x + B^1y + C^1 &= 0 \\l_2 : A^2x + B^2y + C^2 &= 0\end{aligned}$$

8.1 Взаимное расположение прямых на плоскости

Существует три вида расположения прямой на плоскости:

- $l_1 || l_2$
- $l_1 \cap l_2$
- $l^1 \equiv l^2$

Определить взаимное расположение можно при помощи решения системы уравнений:

$$\begin{cases} A^1x + B^1y + C^1 = 0 \\ A^2x + B^2y + C^2 = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Если:

- одно решение - прямые пересекаются (2)
- множество решений - прямые совпадают (3)
- нет решений - прямые параллельны (1)

Определить взаимное расположение можно при помощи пропорции: $\frac{A^1}{A^2} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2}$
Если:

- $\frac{A^1}{A^2} \neq \frac{B^1}{B^2} \neq \frac{C^1}{C^2}$ - прямые пересекаются (2)
- $\frac{A^1}{A^2} = \frac{B^1}{B^2} = \frac{C^1}{C^2}$ - прямые совпадают (3)
- $\frac{A^1}{A^2} = \frac{B^1}{B^2} \neq \frac{C^1}{C^2}$ - прямые параллельны (1)

Определить взаимное расположение можно при помощи векторов нормали:

- $\vec{n}^1 \nparallel \vec{n}^2$ - прямые пересекаются (2)
- $\vec{n}^1 \parallel \vec{n}^2$ - прямые параллельны (1) или прямые совпадают (3)

8.2 Угол между прямыми на плоскости

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \quad \vec{n}_1\{a_1, b_1\} \quad \vec{p}_1\{-b_1, a_1\} \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \quad \vec{n}_2\{a_2, b_2\} \quad \vec{p}_2\{-b_2, a_2\} \end{aligned}$$

Углом между двумя прямыми считают наименьший образовавшийся $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ] \cos \angle \langle \vec{p}^1, \vec{p}^2 \rangle =$

$$\left| \frac{\vec{p}^1 * \vec{p}^2}{|\vec{p}^1| * |\vec{p}^2|} \right| = \Rightarrow \frac{|\vec{p}^1 * \vec{p}^2|}{|\vec{p}^1| * |\vec{p}^2|} = \Rightarrow \frac{|a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} * \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|\vec{n}^1 * \vec{n}^2|}{|\vec{n}^1| * |\vec{n}^2|}$$

$$\cos \angle \langle l^1, l^2 \rangle = |\cos \angle \langle \vec{p}^1, \vec{p}^2 \rangle|$$

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \rightarrow \vec{n}_1\{A_1, B_1\} \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \rightarrow \vec{n}_2\{A_2, B_2\} \end{aligned}$$

$$\vec{n}_1 \vee \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = |\vec{n}_1| * |\vec{n}_2| * \sin(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{|A_1 B_2 - A_2 B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$|\operatorname{tg}(\varphi)| = \left| \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_2 + A_1 A_2} \right|$$

8.3 Расстояние от точки до прямой

$$l : Ax + By + C = 0$$

$$M(m_1, m_2) \quad \rho(M; l) = \frac{|A_1 m_1 + B m_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.4 Расстояние от прямой до прямой

Существует два варианта:

- конкретное значение, если прямые параллельны
- неопределенное расстояние, если прямые пересекаются

8.4.1 Переход к расстоянию от точки до прямой

$$\begin{aligned} l : A_1x + B_1y + C_1 = 0 & \rightarrow \vec{n}_1\{A_1, B_1\} \\ m : A_2x + B_2y + C_2 = 0 & \rightarrow \vec{n}_2\{A_2, B_2\} \end{aligned}$$

$$M(m_1, m_2) \in m$$

Фактически все сводится к поиску расстояния от точки, принадлежащей одной из прямых

до второй прямой. $\rho(l; m) = \frac{|C^1 - \frac{A_1^1}{A_2^1} * C^2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

8.4.2 Частная формула для параллельных прямых

Если преобразовать уравнение прямой m с учетом пропорциональности первых двух коэффициентов в уравнениях прямых l и m , оно примет вид $A_1 + B_1 + C' = 0$ и мы можем использовать данное уравнение:

$$\rho(l; m) = \frac{|C' - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

8.4.3 Примечания

$$\begin{aligned} a * b * \sin(\phi) &= |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sqrt{1 - \cos^2(\phi)} \\ a * b * \sin(\phi) &= |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}\right)^2} \\ a * b * \sin(\phi) &= |\vec{a}| * |\vec{b}| * \frac{\sqrt{\vec{a}^2 * \vec{b}^2 - (a * b)^2}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} \end{aligned}$$