

Краткий курс геометрии если все совсем плохо

Иван Попов

7 апреля 2022 г.

Содержание

1	Векторная алгебра	2
1.1	Действия над векторами и их свойства(Аксиоматика Вейля)	2
1.1.1	Сложение векторов	2
1.1.2	Свойства сложения векторов	3
1.1.3	Умножение вектора на число	3
1.1.4	Свойства умножения вектора на число	3
1.1.5	Скалярное произведение двух векторов	4
1.1.6	Свойства скалярного произведения двух векторов	4
1.1.7	Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3	4
1.1.8	Свойства векторного произведения двух векторов	4
1.1.9	Псевдоскалярное произведение двух векторов	4
1.1.10	Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов	5
1.1.11	Смешанное произведение трех векторов	5
1.1.12	Свойства смешанного произведения трех векторов	5
1.2	Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис	5
1.2.1	Взаимное расположение векторов	5
1.2.2	Линейная зависимость	5
1.2.3	Базис	6

1 Векторная алгебра

Направленный отрезок - отрезок с указанным направлением. Направление задается при помощи точки начала и точки конца.

$\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ - направленный отрезок является представителем вектора \vec{a}

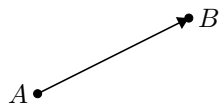


Рис. 1: Направленный отрезок \overrightarrow{AB}

Внимание Направленный отрезок равен только себе
--

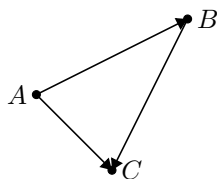
Совокупность направленных отрезков является **вектором**.

1.1 Действия над векторами и их свойства (Аксиоматика Вейля)

1.1.1 Сложение векторов

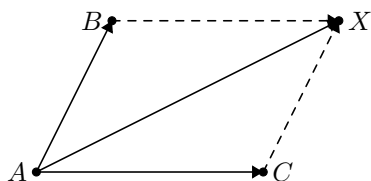
Правило треугольника

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



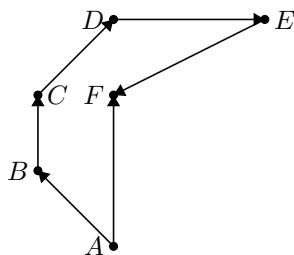
Правило параллелограмма

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



Правило замкнутой ломаной | многоугольника

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$



1.1.2 Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha * \vec{a} + \alpha * \vec{b}$$

1.1.3 Умножение вектора на число

$$k * \vec{a} = \vec{b}$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

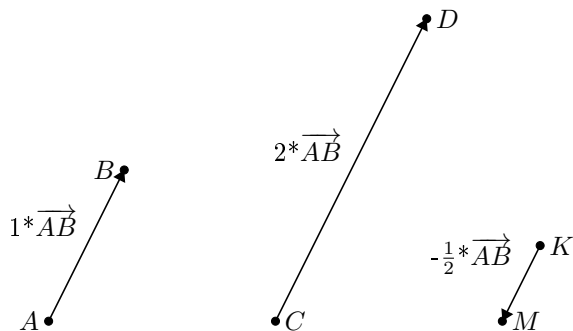
$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$|k| > 1 \Rightarrow |\vec{a}| < |\vec{b}|$$

$$0 < |k| < 1 \Rightarrow |\vec{a}| > |\vec{b}|$$

$$k = 0 \Rightarrow |k\vec{a}| = |\vec{0}| - \text{нуль вектор}$$

$$k = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$



1.1.4 Свойства умножения вектора на число

$$k(m * \vec{a}) = \vec{a} * (k * m) = m(k * \vec{a})$$

$$(k+m) * \vec{a} = k * \vec{a} + m * \vec{a}$$

1.1.5 Скалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

угол между двумя векторами

$$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} * \vec{b} = k$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in [0^\circ..90^\circ)$$

$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in (90^\circ..180^\circ]$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

$$k = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \in \vec{\alpha}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \angle(\vec{a} \vec{b})$$

$$\cos \angle(\vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

1.1.6 Свойства скалярного произведения двух векторов

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * (\vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) * \vec{b} = k * (\vec{a} * \vec{b})$$

1.1.7 Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3

Результат: вектор

модуль результата(\vec{c}) равен площади параллелограмма натянутого на векторы \vec{a} и \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} * \vec{b}]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

1.1.8 Свойства векторного произведения двух векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) \times \vec{b} = k * (\vec{a} \times \vec{b})$$

1.1.9 Псевдоскалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

характеризует ориентацию угла между векторами при помощи знака

$$\vec{a} \vee \vec{b} = m$$

$$\vec{a} \vee \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin \angle(\vec{a} \vec{b})$$

$$\sin \angle(\vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

$$m = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = (0^\circ || 180^\circ) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

1.1.10 Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов

$$\begin{aligned}\vec{a} \vee \vec{b} &= -\vec{b} \vee \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \vee \vec{c} = \vec{a} \vee \vec{c} + \vec{b} \vee \vec{c} \\ (k * \vec{a}) \vee \vec{b} &= k * (\vec{a} \vee \vec{b})\end{aligned}$$

1.1.11 Смешанное произведение трех векторов

Результат: скаляр

результат смешанного произведения представляет собой объем параллелепипеда натянутого на данные векторы

$$(\vec{a} * \vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$$

Порядок операций: Сначала выполняется векторное умножение (\times), а только затем скалярное ($*$)

$$n = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \parallel \vec{b} = \vec{0} \parallel \vec{c} = \vec{0}$$

$$n > 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов такая же как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

$$n < 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов не такая как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

1.1.12 Свойства смешанного произведения трех векторов

$$\begin{aligned}(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) &= (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{b} \vec{a}) \\ (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) &= -(\vec{b} \vec{a} \vec{c}) \\ ((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) &= (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d})\end{aligned}$$

1.2 Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис

1.2.1 Взаимное расположение векторов

Коллинеарность - расположение двух векторов когда они параллельны: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ а также $\vec{a} = k * \vec{b}$

Ортогональность - расположение двух векторов когда они перпендикулярны: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Компланарность - расположение двух и более векторов когда они коллинеарны (паралельны) одной плоскости или лежат в ней: $\vec{c} = k * \vec{a} + m * \vec{b}$

1.2.2 Линейная зависимость

Линейная комбинация — выражение, построенное на множестве элементов путём умножения каждого элемента на коэффициенты с последующим сложением результатов

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Линейная комбинация (Система) является линейно зависимой если хотябы 1 $\alpha \neq 0$ и/или если имеется хотябы один $\vec{0}$.

Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Если мы не имеем ни одного 0, то система линейно не зависима и мы имеем размер векторного пространства $n = \dim(M)$

1.2.3 Базис

Базис - это упорядоченная СЛНВ (система линейно независимых векторов) в векторном пространстве.

Виды базисов:

- Ортогональный
- Ортонормированный - например $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Произвольный (Аффинный)

Базис позволяет определить координаты вектора
