

# Краткий курс геометрии если все совсем плохо

Иван Попов

11 апреля 2022 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Векторная алгебра</b>	<b>2</b>
1.1	Действия над векторами и их свойства(Аксиоматика Вейля)	2
1.1.1	Сложение векторов	2
1.1.2	Свойства сложения векторов	3
1.1.3	Умножение вектора на число	3
1.1.4	Свойства умножения вектора на число	3
1.1.5	Скалярное произведение двух векторов	4
1.1.6	Свойства скалярного произведения двух векторов	4
1.1.7	Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3	4
1.1.8	Свойства векторного произведения двух векторов	4
1.1.9	Псевдоскалярное произведение двух векторов	4
1.1.10	Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов	5
1.1.11	Смешанное произведение трех векторов	5
1.1.12	Свойства смешанного произведения трех векторов	5
1.2	Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис	5
1.2.1	Взаимное расположение векторов	5
1.2.2	Линейная зависимость	5
1.2.3	Базис	6
1.2.4	Взаимосвязь между базисами	6
<b>2</b>	<b>Действия над векторами в координатной форме</b>	<b>7</b>
2.0.1	Сложение векторов в координатной форме	7
2.0.2	Умножение вектора на число	7
2.0.3	Скалярное произведение векторов	7
2.1	Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве	7
2.2	Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве	7
2.3	Смешанное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве	7
2.4	Векторное произведение n-1 векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве	8
2.5	Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве	8
<b>3</b>	<b>Ортогонализация и нормизация системы векторов</b>	<b>9</b>
3.1	Для двух двухмерных векторов	9
3.2	Для двух трехмерных векторов	9
3.3	Для трех трехмерных векторов	10

# 1 Векторная алгебра

**Направленный отрезок** - отрезок с указанным направлением. Направление задается при помощи точки начала и точки конца.

$\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$  - направленный отрезок является представителем вектора  $\vec{a}$

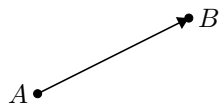


Рис. 1: Направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$

**Внимание** Направленный отрезок равен только себе

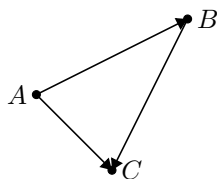
Совокупность направленных отрезков является **вектором**.

## 1.1 Действия над векторами и их свойства (Аксиоматика Вейля)

### 1.1.1 Сложение векторов

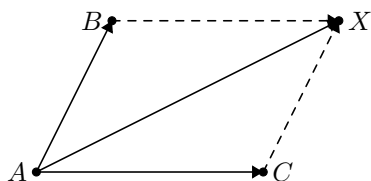
**Правило треугольника**

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



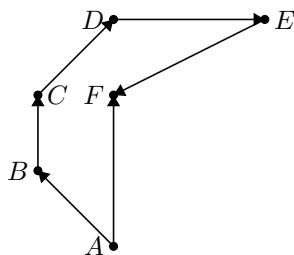
**Правило параллелограмма**

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$



**Правило замкнутой ломаной | многоугольника**

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$



### 1.1.2 Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha * \vec{a} + \alpha * \vec{b}$$

### 1.1.3 Умножение вектора на число

$$k * \vec{a} = \vec{b}$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$$

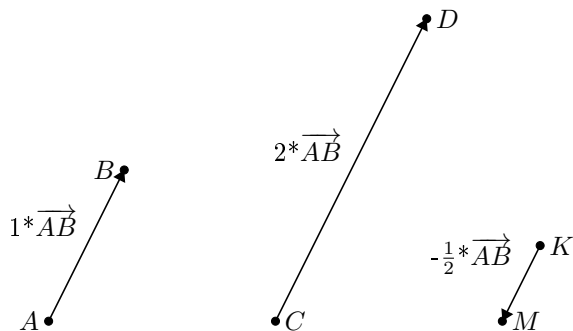
$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}$$

$$|k| > 1 \Rightarrow |\vec{a}| < |\vec{b}|$$

$$0 < |k| < 1 \Rightarrow |\vec{a}| > |\vec{b}|$$

$$k = 0 \Rightarrow |k\vec{a}| = |\vec{0}| - \text{нуль вектор}$$

$$k = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$



### 1.1.4 Свойства умножения вектора на число

$$k(m * \vec{a}) = \vec{a} * (k * m) = m(k * \vec{a})$$

$$(k+m) * \vec{a} = k * \vec{a} + m * \vec{a}$$

### 1.1.5 Скалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

угол между двумя векторами

$$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} * \vec{b} = k$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in [0^\circ..90^\circ)$$

$$k < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \angle \vec{a} \vec{b} \in (90^\circ..180^\circ]$$

$$k > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

$$k = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \in \vec{\alpha}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \angle(\vec{a} \vec{b})$$

$$\cos \angle(\vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

### 1.1.6 Свойства скалярного произведения двух векторов

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * (\vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) * \vec{b} = k * (\vec{a} * \vec{b})$$

### 1.1.7 Векторное произведение двух векторов для пространства размерности 3

Результат: вектор

модуль результата( $\vec{c}$ ) равен площади параллелограмма натянутого на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} * \vec{b}]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

### 1.1.8 Свойства векторного произведения двух векторов

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(k * \vec{a}) \times \vec{b} = k * (\vec{a} \times \vec{b})$$

### 1.1.9 Псевдоскалярное произведение двух векторов

Результат: скаляр

характеризует ориентацию угла между векторами при помощи знака

$$\vec{a} \vee \vec{b} = m$$

$$\vec{a} \vee \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin \angle(\vec{a} \vec{b})$$

$$\sin \angle(\vec{a} \vec{b}) = \frac{\vec{a} \vee \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

$$m = 0 \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = (0^\circ || 180^\circ) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

### 1.1.10 Свойства псевдоскалярного произведения двух векторов

$$\begin{aligned}\vec{a} \vee \vec{b} &= -\vec{b} \vee \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \vee \vec{c} = \vec{a} \vee \vec{c} + \vec{b} \vee \vec{c} \\ (k * \vec{a}) \vee \vec{b} &= k * (\vec{a} \vee \vec{b})\end{aligned}$$

### 1.1.11 Смешанное произведение трех векторов

Результат: скаляр

результат смешанного произведения представляет собой объем параллелепипеда натянутого на данные векторы

$$(\vec{a} * \vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$$

**Порядок операций:** Сначала выполняется векторное умножение ( $\times$ ), а только затем скалярное ( $*$ )

$$n = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \parallel \vec{b} = \vec{0} \parallel \vec{c} = \vec{0}$$

$$n > 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов такая же как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

$$n < 0 \Rightarrow \text{Ориентация векторов не такая как в базисе } \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{matrix}$$

### 1.1.12 Свойства смешанного произведения трех векторов

$$\begin{aligned}(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) &= (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{b} \vec{a}) \\ (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) &= -(\vec{b} \vec{a} \vec{c}) \\ ((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) &= (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d})\end{aligned}$$

## 1.2 Взаимное расположение векторов, линейная зависимость и базис

### 1.2.1 Взаимное расположение векторов

**Коллинеарность** - расположение двух векторов когда они параллельны:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  а также  $\vec{a} = k * \vec{b}$

**Ортогональность** - расположение двух векторов когда они перпендикулярны:  $\vec{a} \perp \vec{b}$

**Компланарность** - расположение двух и более векторов когда они коллинеарны (паралельны) одной плоскости или лежат в ней:  $\vec{c} = k * \vec{a} + m * \vec{b}$

### 1.2.2 Линейная зависимость

**Линейная комбинация** — выражение, построенное на множестве элементов путём умножения каждого элемента на коэффициенты с последующим сложением результатов

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Линейная комбинация (Система) является линейно зависимой если хотябы 1  $\lambda \neq 0$  и/или если имеется хотябы один  $\vec{0}$ .

Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Если мы не имеем ни одного 0, то система линейно не зависима и мы имеем размер векторного пространства  $n = \dim(M)$

### 1.2.3 Базис

**Базис** - это упорядоченная СЛНВ (система линейно независимых векторов) в векторном пространстве.

Виды базисов:

- Ортогональный
- Ортонормированный - например  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$
- Произвольный (Аффинный)

Базис позволяет определить координаты вектора

### 1.2.4 Взаимосвязь между базисами

Пусть дан базис  $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  и базис  $\beta' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ , где  $n = \dim(V)$

Тогда координаты векторов базиса  $\beta$  в базисе  $\beta'$  будут представлять собой линейную комбинацию:

$$\vec{e}'_1 = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + \dots + a_1^n \vec{e}_n \text{ из чего мы получим:}$$

$$\vec{e}'_1 \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n\}_\beta$$

где  $a_i^j$  - координаты

Формула перехода: 
$$\vec{e}'_j = a_j^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n a_j^i \vec{e}_i \quad j = \overline{1, n}$$

**Пример:**  $\vec{x} \in V^n$

$\vec{x} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}_\beta$  и  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}_{\beta'}$

$$\vec{x} = y^1 \vec{e}'_1 + y^2 \vec{e}'_2 + \dots + y^n \vec{e}'_n = y^j \vec{e}'_j = y^1 (a_1^i \vec{e}_i) + y^2 (a_2^i \vec{e}_i) + \dots + y^n (a_n^i \vec{e}_i) = (y^1 a_1^1 + y^2 a_2^1 + \dots + y^n a_n^1) \vec{e}_1 + (y^1 a_1^2 + y^2 a_2^2 + \dots + y^n a_n^2) \vec{e}_2 + \dots + (y^1 a_1^n + y^2 a_2^n + \dots + y^n a_n^n) \vec{e}_n$$

Из этого можно сделать вывод:  $\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n$ , где  $x^n = y^1 a_1^n + y^2 a_2^n + \dots + y^n a_n^n$

$$x^i = y^j a_j^i \text{ - формула перехода}$$

## 2 Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы  $\vec{x}\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  и  $\vec{y}\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$

### 2.0.1 Сложение векторов в координатной форме

$$\vec{x} + \vec{y} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n + y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \dots + y^n\vec{e}_n = (x^1 + y^1)\vec{e}_1 + (x^2 + y^2)\vec{e}_2 + \dots + (x^n + y^n)\vec{e}_n = z^1\vec{e}_1 + z^2\vec{e}_2 + \dots + z^n\vec{e}_n$$

$$\boxed{x^n + y^n = z^n}$$

### 2.0.2 Умножение вектора на число

$$\vec{p} = k\vec{x} = k(x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n) = kx^1\vec{e}_1 + kx^2\vec{e}_2 + \dots + kx^n\vec{e}_n$$

### 2.0.3 Скалярное произведение векторов

$$\vec{x} * \vec{y} = (x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \dots + x^n\vec{e}_n) * (y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \dots + y^n\vec{e}_n) = (x^1y^1\vec{e}_1\vec{e}_1 + x^1y^2\vec{e}_1\vec{e}_2 + \dots + x^ny^n\vec{e}_n\vec{e}_n) \Rightarrow \text{простое раскрытие произведения скобок}$$

В частности для  $V^3\beta\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  - ортогонального и ортонормированного базиса:

$$\vec{x} * \vec{y} = (x^1\vec{i} + x^2\vec{j} + x^3\vec{k}) * (y^1\vec{i} + y^2\vec{j} + y^3\vec{k}) = x^1y^1\vec{i}^2 + x^1y^2\vec{i}\vec{j} + x^1y^3\vec{i}\vec{k} + x^2y^1\vec{i}\vec{j} + x^2y^2\vec{j}^2 + x^2y^3\vec{j}\vec{k} + x^3y^1\vec{i}\vec{k} + x^3y^2\vec{j}\vec{k} + x^3y^3\vec{k}^2 \Rightarrow x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

$$\text{Итого: } \boxed{\text{В ортонормированном и ортогональном базисе } \vec{x} * \vec{y} = x^1y^1 + x^2y^2 + \dots + x^ny^n}$$

## 2.1 Псевдоскалярное произведение векторов в координатной форме в двухмерном пространстве

$$\begin{aligned} \vec{x}\{x^1, x^2\} \vec{y}\{y^1, y^2\} \\ \vec{x}, \vec{y} \in \beta\{\vec{i}, \vec{j}\} \\ \vec{x} \vee \vec{y} = x^1y^2 - x^2y^1 \\ \vec{x}^2 = \vec{x} * \vec{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Данный вариант подходит только для пространства размерности 2!}}$$

## 2.2 Векторное произведение двух векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве

$$\begin{aligned} \beta\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \\ \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * \vec{i} + (x^3y^1 - x^1y^3) * \vec{j} + (x^1y^2 - x^2y^1) * \vec{k} = \\ \{x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1\} \end{aligned}$$

## 2.3 Смешанное произведение трех векторов в координатной форме в трехмерном векторном пространстве

$$\begin{aligned} \vec{x}\{x^1, x^2, x^3\} \vec{y}\{y^1, y^2, y^3\} \vec{z}\{z^1, z^2, z^3\} \\ (\vec{x} \vec{y} \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) * \vec{z} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2) * z^1 + (x^3y^1 - x^1y^3) * z^2 + (x^1y^2 - \end{aligned}$$



$$x^2 y^1) * z^3 = \dots$$

## 2.4 Векторное произведение n-1 векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве

$$\beta = \{i^1, i^2, \dots, i^n\}, \dim(V) = n$$

$$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$$

$$\vec{y} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ i^1 & i^2 & \dots & i^n \end{vmatrix} \quad \text{где } \vec{x}_1 \{x_1^j\}, \vec{x}_2 \{x_2^j\}, \dots, \vec{x}_{n-1} \{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

## 2.5 Псевдоскалярное произведение n векторов в координатной форме в n-мерном векторном пространстве

$$\beta = \{i^1, i^2, \dots, i^n\}, \dim(V) = n$$

$$|i^k| = 1, i^k \perp i^e (e \neq k)$$

$$\vec{y} = \vec{x}_1 \vee \vec{x}_2 \vee \dots \vee \vec{x}_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad \text{где } \vec{x}_1 \{x_1^j\}, \vec{x}_2 \{x_2^j\}, \dots, \vec{x}_{n-1} \{x_{n-1}^j\}; j = \overline{1, n}$$

### 3 Ортогонализация и нормизация системы векторов

Дано:

$$\vec{a}, \vec{b}$$

Цель: найти векторы  $\vec{a}'$  и  $\vec{b}'$ , такие что их модули равны и векторы перпендикулярны.  
 $\vec{a}', \vec{b}' : |\vec{a}'| = |\vec{b}'| = 1; \vec{a}' \perp \vec{b}' \Leftrightarrow \vec{a}' * \vec{b}' = 0$

#### 3.1 Для двух двумерных векторов

$$\vec{a} \{a^1, a^2\}, \vec{b} \{b^1, b^2\}$$

**Шаг первый** Определим вектор  $\vec{a}'$  :  
 $\vec{a}' = \vec{a} = a^1, a^2$

**Шаг второй** Определим вектор  $\vec{b}'$  :

Мы знаем что  $\vec{a}' \perp \vec{b}'$ , а значит мы можем воспользоваться формулой:

$$a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 = 0$$

$$a'^1 \neq 0 \Rightarrow b'^1 = -\frac{a'^2}{a'^1} b'^2$$

$$\text{В итоге: } \vec{b}' = \left\{ -\frac{a'^2}{a'^1} b', b' \right\}$$

Как частный случай можно использовать формулу:

$$\vec{b}' = \{-a'^2, a'^1\} \text{ или } \{a'^2, -a'^1\}$$

**Шаг третий** Проверка ориентации:

Если  $\det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix}$  и  $\det \begin{pmatrix} a'^1 & a'^2 \\ b'^1 & b'^2 \end{pmatrix}$  имеют одинаковый знак, то ориентация совпала и можно переходить к нормированию. Иначе требуется вернуться на шаг 2 и выбрать другой вариант из частного случая.

**Нормирование** Вектор считается нормированным, если его модуль равен 1.

Формула нормирования на примере вектора  $\vec{a} \{a^1, a^2\}$ :  $\vec{a} = \left\{ \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}} \right\}$

#### 3.2 Для двух трехмерных векторов

$$\vec{a} \{a^1, a^2, a^3\}$$

$$\vec{b} \{b^1, b^2, b^3\}$$

$$\vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

**Шаг 1** Получим вектор  $\vec{a}'$

$$\vec{a}' = \vec{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$$

$$\vec{a}' \perp \vec{b}'$$

**Шаг 2** Получим вектор  $\vec{b'}$

Вектор  $\vec{b'}$  является линейно зависимым для векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а значит его можно получить следующим способом:

$$\vec{b'} = m\vec{a} + k\vec{b} = ka^1, ka^2, ka^3 + mb^1, mb^2, mb^3 = ka^1 + mb^1, ka^2 + mb^2, ka^3 + mb^3$$

Так как  $\vec{a} \perp \vec{b'}$ , то косинус угла между ними равен нулю, а значит  $\vec{a} * \vec{b'} = 0$

$$\text{Следовательно: } a^1(ka^1 + mb^1) + a^2(ka^2 + mb^2) + a^3(ka^3 + mb^3) = 0$$

$$\text{Спустя несколько преобразований мы получим } k((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2) + m(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) = 0$$

РЕШИМ УРАВНЕНИЕ

**Вариант 1**

$$m = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$$

$$k = -(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$$

**Вариант 2**

$$m = -((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2)$$

$$k = (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$$

Заменим m и k в формуле вектора  $\vec{b'}$  на полученные значения.

**Шаг 3** Проверим ориентацию: Получим векторы  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$   
 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Проверим их коллинеарность при помощи векторного произведения:

$$\text{Если } \vec{c} \times \vec{c} = 0$$

, то переходим далее, иначе ищем ошибку в вычислениях.

$$\text{Проверим сонаправленность векторов: } \lambda = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{c^1}{c^1} = \frac{c^2}{c^2} = \frac{c^3}{c^3}$$

Если  $\lambda > 0$ , тогда переходим к нормированию, иначе повторим попытку используя другой вариант из шага 2.

**Нормирование** Формула нормирования на примере вектора  $\vec{a} \{a^1, a^2, a^3\}$ :

$$\vec{a} = \left\{ \frac{a^1}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}, \frac{a^2}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}, \frac{a^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}} \right\}$$

### 3.3 Для трех трехмерных векторов

$$\vec{a} \{a^1, a^2, a^3\}$$

$$\vec{b} \{b^1, b^2, b^3\}$$

$$\vec{c} \{c^1, c^2, c^3\}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b'} \perp \vec{c'}$$

Получим векторы  $\vec{a'}$  и  $\vec{b'}$

$$\vec{a'} = \vec{a}$$

$$\vec{b'} \text{ получаем из варианта для двух трехмерных векторов.}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b'}$$

**Проверим ориентацию:**

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} a'^1 & a'^2 & a'^3 \\ b'^1 & b'^2 & b'^3 \\ c'^1 & c'^2 & c'^3 \end{vmatrix}$$

Если  $\Delta 1$  и  $\Delta 2$  имеют одинаковый знак, то с ориентацией все хорошо и стоит переходить к нормированию.