

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
Педагогический институт

Кафедра «Физико-математическое образование
и информационные технологии»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по учебной дисциплине «Математический анализ» на
тему
«Гиперболические функции»

Выполнил:
Попов И. Е.
Студент группы
МИ-121
очной формы обучения
Научный руководитель:
Тихомиров Р.Н.,
к. ф.-м. н.,
доцент

Владимир, 2023

Содержание

Введение	3
Глава I. Теория гиперболических функций	5
1.1 История гиперболических функций	5
1.2 Гиперболические функции	6
1.3 Задание гиперболических функций	7
1.4 Свойства гиперболических функций	8
1.5 Обратные гиперболические функции	10
1.6 Дифференцирование и интегрирование гиперболических функций	10
1.7 Графики гиперболических функций	11
Глава II. Практическое применение гиперболических функций	13
2.1 Решение избранных задач содержащих гиперболические функции	13
2.2 Использование гиперболических функций в нейронных сетях .	14
Заключение	16
Источники	17

Введение

Тема данной курсовой работы актуальна, так как тригонометрические функции активно используются в неевклидовой геометрии, в частности - геометрии Лобачевского, и частично используются в активно развивающейся сфере искусственного интеллекта.

Сам феномен гиперболических функций задокументированно существует уже более трех сотен лет.

Проблема исследования заключается в том, что обычно с гиперболическими функциями обучающиеся ВУЗов не профильных направлений знакомятся очень редко в курсе и лишь в курсе дифференциальной геометрии. Такой подход к изучению данной темы ошибочен. Изучение темы "Гиперболические функции" позволяет обучающимся расширить и улучшить свои навыки дифференцирования и интегрирования различных функций.

Исходя из выявленной проблемы, определена тема курсовой работы: "Гиперболические функции".

Объект исследования: Гиперболические функции

Предмет исследования: Применение и особенности гиперболических функций.

Цель исследования: изучить теоретические и практические сведения о гиперболических функциях и собрать данные в одном месте.

Для осуществления обозначенной цели служат следующие задачи:

1. Изучить научную, учебную и справочную литературу по теме исследования;
2. Раскрыть сущность гиперболических функций;
3. Проанализировать гиперболические уравнения от одной переменной;
4. Привести собственные примеры некоторых задач связанных с гиперболическими функциями и их частных решений;

5. Проанализировать практические задачи, приводящие к использованию гиперболических функций.

В ходе исследования были использованы следующие методы:

1. Метод анализа;
2. Метод синтеза;
3. Метод аналогии.

Практическая значимость данной работы состоит в возможности использования данной работы в качестве справочного материала или учебного пособия.

Работа состоит из введения, 2 глав, 9 параграфов, заключения, списка использованной литературы.

Во введении проведено обоснование актуальности данной темы, определена проблема исследования, объект и предмет, цели и задачи, методы исследования, а также выделена его практическая значимость.

Параграфы 1-7 (1 глава) раскрывают теоретические аспекты нашей работы. Параграфы 8-9 (2 глава) содержат практические задачи связанные с гиперболическими функциями и информацию об применении гиперболических функций в современном мире.

В заключении обобщаются результаты курсовой работы, оцениваются достижения поставленной цели исследования и полнота решения задач, а также формулируются основные выводы

Глава I. Теория гиперболических функций

1.1 История гиперболических функций

Первое появление гиперболических функций историки математики обнаружили (1707, 1722) в трудах английского математика, ученика и помощника И. Ньютона, Абрахама де Муавра (Abraham de Moivre, 1667–1754). Дал современное определение и выполнил обстоятельное исследование этих функций Винченцо Риккати в 1757 году; он же предложил обозначения для них: sh для гиперболического синуса и ch для гиперболического косинуса (в западной нотации \sinh и \cosh). Риккати исходил из рассмотрения единичной гиперболы, используя аналогию с единичной окружностью для тригонометрических функций. Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Иоганном Ламбертом, который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрии (1770). Н.И. Лобачевский (1792–1856) впоследствии использовал этот параллелизм, доказывая непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которой круговая тригонометрия заменяется на гиперболическую. Однако все это случилось много позже знаменитого, говоря современным языком, «баттла» трех ведущих математиков своего времени (Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц и Кристофер Гюйгенс), решивших поставленную Якобом Бернулли в 1690 году задачу об определении формы цепной линии (гиперболический косинус). Вероятно, именно это состязание способствовало пробуждению осознанного интереса к гиперболическим функциям.

Однако за почти два столетия до начала осознанного изучения гиперболических функций Гиртом де Крёмером (Gheert de Krömer, 1512–1594) было обнаружено первое и одно из наиболее важных применений гиперболических функций. Его осуществил фламандский географ, более известный под латинским именем Герард (Джерард) Меркатор (Gerhardus Mercator).

1.2 Гиперболические функции

Гиперболическая функция - это функция от одной переменной, выражающаяся через экспоненту и связанная с тригонометрической функцией. Существует 6 видов таких функций: гиперболический синус $sh(x)$ (аналог для английской литературы $\sinh(x)$), гиперболический косинус $ch(x)$ (аналог для английской литературы $\cosh(x)$), гиперболический тангенс $th(x)$ (аналог для английской литературы $\tanh(x)$), гиперболический котангенс $cth(x)$ (аналог для английской литературы $\coth(x)$), гиперболический секанс $sch(x)$ (аналог для английской литературы $\operatorname{sech}(x)$), гиперболический косеканс $csch(x)$ (аналог для английской литературы $\operatorname{csch}(x)$).

$$sh(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad (1)$$

$$ch(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (2)$$

$$th(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (3)$$

$$cth(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (4)$$

$$sch(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (5)$$

$$csch(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (6)$$

Разница между гиперболическими функциями и тригонометрическими функциями заключается в наличии мнимой части в уравнении. К примеру функции тригонометрического косинуса (7) и гиперболического косинуса (8) отличаются наличием i (мнимой части) в уравнении тригонометрического косинуса и, соответственно, её отсутствием в уравнении гиперболического

косинуса:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} * (e^{ix} + e^{-ix}) \quad (7)$$

$$ch(x) = \frac{1}{2} * (e^x + e^{-x}) \quad (8)$$

1.3 Задание гиперболических функций

Гиперболические функции являются функциями, которые могут быть представлены через степенные экспоненциальные функции e^x и e^{-x} .

Рассмотрим как графики гиперболического синуса и гиперболического косинуса формируются при помощи экспоненциальных функций.

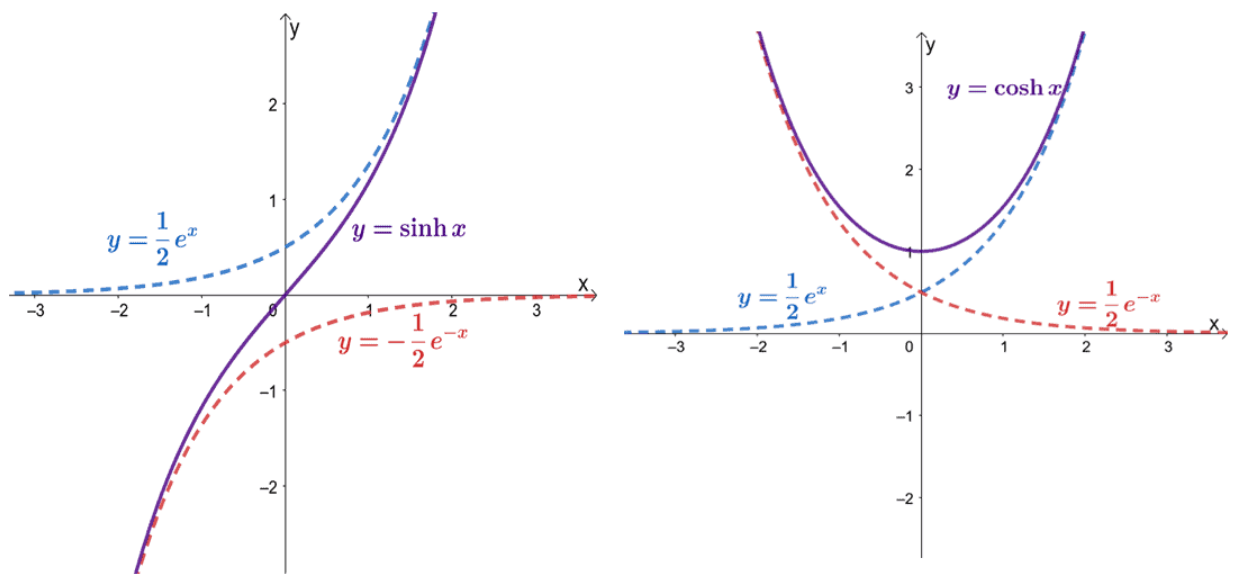


Рис. 0.1. Формирование графиков гиперболического синуса и гиперболического косинуса при помощи экспоненциальных функций

На рисунке 0.1. можно увидеть как график $y = sh(x)$ (слева) и $y = ch(x)$ (справа) собраны при помощи экспоненциальных функций, а именно:

- Гиперболический синус через графическое сложение функций $y = \frac{1}{2}e^x$ и $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

- Гиперболический косинус через графическое сложение функций $y = \frac{1}{2}e^x$ и $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

Следовательно мы можем сделать следующие преобразования и вывести формулы для гиперболического синуса(9) и гиперболического косинуса(10):

$$sh(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (9)$$

$$ch(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (10)$$

На основании полученных формул получим формулу гиперболического тангенса(11):

$$th(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (11)$$

Следует помнить, что в случае гиперболического косинуса, равного нулю, гиперболический тангенс не существует.

Соответственно получим формулы для обратных (ареа) функций:

- Гиперболического арксинуса - $arsh(x) = \frac{1}{sh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
- Гиперболического арккосинуса - $arch(x) = \frac{1}{ch(x)} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

1.4 Свойства гиперболических функций

Гиперболические функции, также как и тригонометрические, можно использовать для параметрического задания различных кривых. Например через синус и косинус задается эллипс (12), а через гиперболический синус и гиперболический косинус - гипербола (13).

$$\begin{cases} x = a * \cos(t) \\ y = a * \sin(t) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x = a * ch(t) \\ y = a * sh(t) \end{cases} \quad (13)$$

Существуют гиперболические тождества аналогичные тригонометрическим тождествам (14) (15) (16), формулы двойного угла для гиперболического синуса (17) и гиперболического косинуса (18), а также формулы половинного угла для гиперболического тангенса (19) и гиперболического котангенса (20).

$$ch(t)^2 - sh(t)^2 = 1 \quad (14)$$

$$ch(t) + sh(t) = e^t \quad (15)$$

$$ch(t) - sh(t) = -e^{-t} \quad (16)$$

$$sh(2t) = 2sh(t) * ch(t) \quad (17)$$

$$ch(2t) = 2ch(t)^2 - 1 = 1 + 2sh(t)^2 \quad (18)$$

$$th\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{sh(x) + i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \quad (19)$$

$$cth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{sh(x) - i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \quad (20)$$

Гиперболические функции также делятся на четные и не четные (Таблица 1).

Таблица 1. Четность и не четность гиперболических функций.

Функция от x	Функция от -x	Аналог для функции от -x при x	Четность функции
$ch(x)$	$ch(-x)$	$ch(x)$	Четная
$sh(x)$	$sh(-x)$	$-sh(x)$	Не четная
$th(x)$	$th(-x)$	$-th(x)$	Не четная
$cth(x)$	$cth(-x)$	$-cth(x)$	Не четная
$sch(x)$	$sch(-x)$	$sch(x)$	Четная
$csch(x)$	$csch(-x)$	$-csch(x)$	Не четная

1.5 Обратные гиперболические функции

Обратные гиперболические функции также известные как арча-функции - семейство элементарных функций, определяющихся как обратные функции для гиперболических функций. В отличие от обратных тригонометрических функций, которые обозначают длину дуги единичной окружности, обратные гиперболические функции обозначают площадь сектора единичной параболы.

Существуют функции: арчасинус $arsh(x)$, арчакосинус $arch(x)$, арчатангенс $arth(x)$, арчакотангенс $arch(x)$, арчасеканс $arsch(x)$ и арчакосеканс $arcsch(x)$.

1.6 Дифференцирование и интегрирование гиперболических функций

Как и тригонометрические функции, гиперболические функции подвержены дифференцированию и интегрированию.

Таблица 2. Дифференцирование гиперболических функций.

Функция от x	Результат дифференцирования	Ограничения
$\frac{d}{dx}sh(x)$	$ch(x)$	
$\frac{d}{dx}ch(x)$	$sh(x)$	
$\frac{d}{dx}th(x)$	$1 - th(x)^2 = sch(x)^2 = \frac{1}{csh(x)^2}$	
$\frac{d}{dx}cth(x)$	$1 - cth(x)^2 = -csch(x)^2 = -\frac{1}{sh(x)^2}$	$x \neq 0$
$\frac{d}{dx}sch(x)$	$-th(x)sch(x)$	
$\frac{d}{dx}csch(x)$	$-cth(x)csch(x)$	$x \neq 0$

Таблица 3. Стандартные интегралы от гиперболических функций.

Интеграл	Результат интегрирования
$\int sh(ax)dx$	$a^{-1}ch(ax) + C$
$\int ch(ax)dx$	$a^{-1}sh(ax) + C$
$\int th(ax)dx$	$a^{-1}ln(ch(ax)) + C$
$\int cth(ax)dx$	$a^{-1}ln sh(ax) + C$
$\int sch(ax)dx$	$a^{-1}atan(sh(ax)) + C$
$\int csch(ax)dx$	$a^{-1}ln th(\frac{ax}{2}) + C$ $a^{-1}ln cth(ax) - chcs(ax) + C$ $-a^{-1}arcth(ch(ax)) + C$

1.7 Графики гиперболических функций

Графики функций предоставляют собой кривые, схожие по своему виду с кривыми второго порядка.

График гиперболического синуса схож с кубической параболой, а график гиперболического косинуса - с квадратичной параболой. Обе эти параболы зависят от x . (Рис. 0.2.)

График гиперболического тангенса отдаленно схож с гиперболой зависимой от x , а котангенс в свою очередь с кубической параболой зависимой от y . (Рис. 0.3.)

График секанса представляет собой лемнискаты Бернулли, а график косеканса как и график гиперболического тангенса представляет собой гиперболу зависимую от x , но максимально приближеную к каноническому ее виду. (Рис. 0.4.)

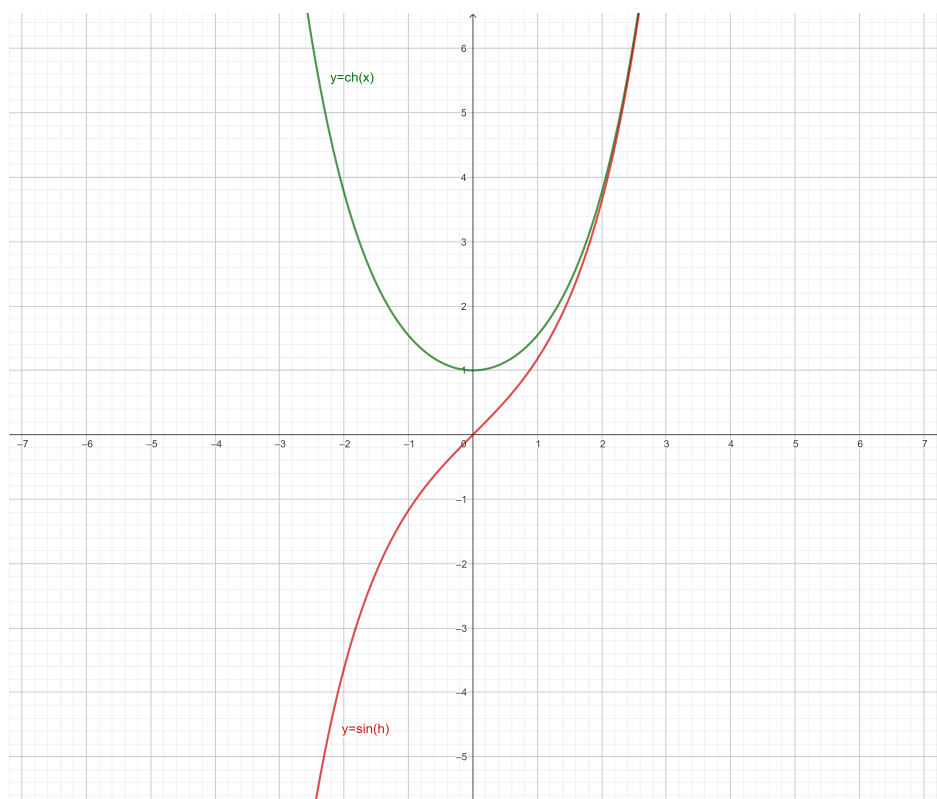


Рис. 0.2. $y = \sinh(x)$ и $y = \cosh(x)$

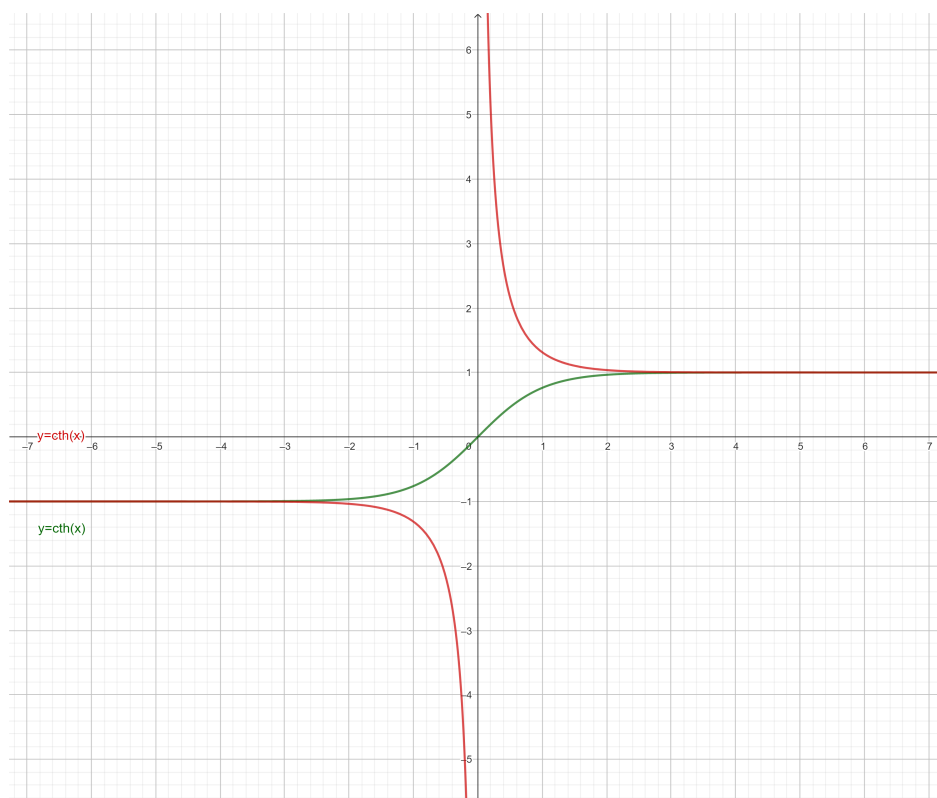


Рис. 0.3. $y = \tanh(x)$ и $y = \coth(x)$

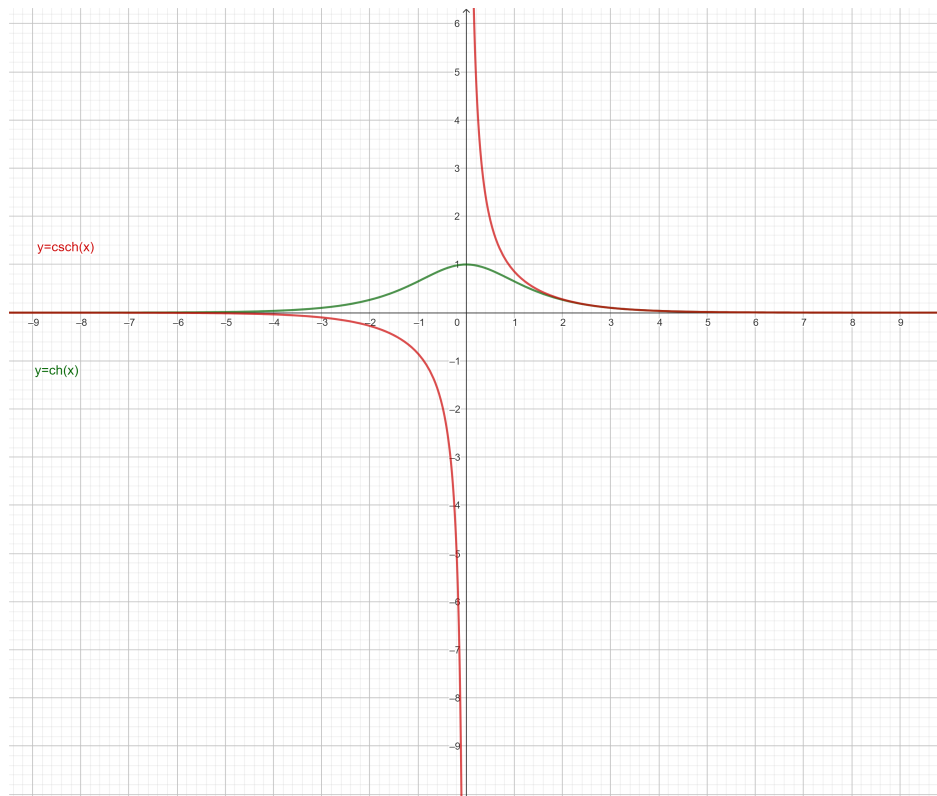


Рис. 0.4. $y = sch(x)$ и $y = csch(x)$

Глава II. Практическое применение гиперболических функций

2.1 Решение избранных задач содержащих гиперболические функции

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10} (sh(x) * ch(x)) dx$.

Решение:

1. Вычислим неопределенный интеграл $\int (sh(x) * ch(x)), dx$:

$$\int (sh(x) * ch(x)), dx = \frac{ch(x)^2}{2}$$

2. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислим требуемое значение:

$$\int_0^{10} (sh(x) * ch(x)) dx = \frac{ch(x)^2}{2} \Big|_0^{10} = \frac{ch(10)^2}{2} - \frac{ch(0)^2}{2} = \frac{ch(10)^2}{2} - 1$$

2.2 Использование гиперболических функций в нейронных сетях

В нейронных сетях используются различные линейные и не линейные математические функции для активации нейронов, но эффективными функциями являются лишь не линейные. Одна из таких функций - гиперболический тангенс.

Функция \tanh очень похожа на сигмовидную / логистическую функцию активации и даже имеет ту же S-образную форму с разницей в выходном диапазоне от -1 до 1. В \tanh , чем больше входные данные (более положительные), тем ближе выходное значение будет к 1.0, тогда как чем меньше входные данные (более отрицательные), тем ближе выходные данные будут к -1.0.

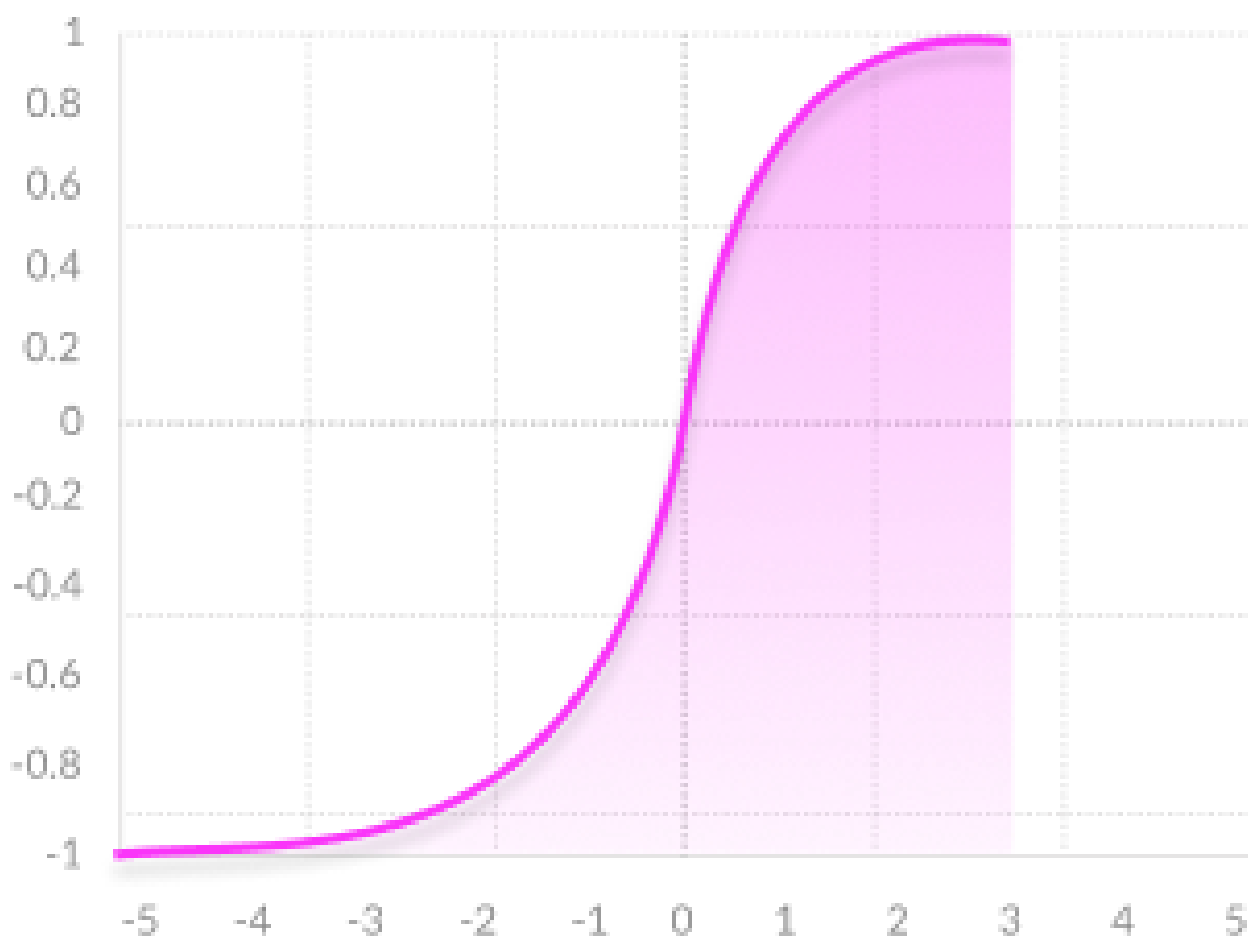


Рис. 0.5. Функция активации гиперболический тангенс

Преимуществами использования для активации нейронов именно данной гиперболической функции являются:

- Центрированность на нуле результата обработки входных данных, следовательно, мы можем легко отобразить выходные значения как сильно отрицательные, нейтральные или сильно положительные.
- Обычно данная функция используется в скрытых слоях нейронной сети, поскольку его значения лежат в диапазоне от -1 до 1 и следовательно, среднее значение для скрытого слоя получается равным 0 или очень близко к нему. Это помогает в центрировании данных и значительно упрощает обучение для следующего уровня.

Заключение

Итак, гиперболические функции - это аналоги тригонометрических функций из евклидовой геометрии для геометрии Лобачевского.

Самая распространенная область в которой применяются гиперболические функции - это обучение нейронных сетей.

Цель исследования состояла в изучении теоретических сведений о гиперболических функциях и их систематизация.

Для достижения нашей цели были в полном объеме решены следующие задачи:

1. Изучена научная, учебная и справочная литература по теме исследования;
2. Раскрыта сущность гиперболических функций;
3. Проанализированы гиперболические уравнения от одной переменной;
4. Приведены собственные примеры некоторых задач связанных с гиперболическими функциями и их частных решений;
5. Проанализированы практические задачи, приводящие к использованию гиперболических функций.

На протяжении всей работы мы ознакомились с краткой теорией гиперболических функций, разъяснили для себя, что это такое "гиперболические функции", какими бывают задачи с использованием гиперболических функций, как решаются такие задачи, где используются гиперболические функции в современном мире.

Таким образом мы изучили гиперболические функции и выполнили все поставленные нами задачи данного исследования.

Источники

А. А. Быков В. Ю. Бодряков. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения. *Математическое образование*, 4(88):18--29, 2018.

Eric W. Weisstein. Hyperbolic functions. URL <https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html>. Последнее обращение к источнику 05 мая 2023.

Pragati Baheti. Activation functions in neural networks [12 types & use cases]. URL <https://www.v7labs.com/blog/neural-networks-activation-functions>. Последнее обращение к источнику 12 мая 2023.

Nanba Hiroyuki. Soukyokusen kansuu (\sinh, \cosh, \tanh) no imi seishitsu tanoshii wadai matome. URL <https://manabitimes.jp/math/617>. Последнее обращение к источнику 18 мая 2023.

Luke Mastin. Hyperbolic functions - graphs, properties, and examples. URL <https://www.storyofmathematics.com/hyperbolic-functions/>. Последнее обращение к источнику 20 мая 2023.

К. А. Семендяев И. Н. Бронштейн. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Издательство "Лань", 2010.