BY STULK3

ШАБЛОН ДЛЯ КУРСОВОЙ

НА LATEX

с пояснениями

Добавление текста,
изображений, формул,
листинга кода и
специальных символов.

Содержание

Глава I. Теория гиперболических функций

1.1 История гиперболических функций

Первое появление гиперболических функций историки математики обнаружили (1707, 1722) в трудах английского математика, ученика и помощника И. Ньютона, Абрахама де Муавра (Abraham de Moivre, 1667–1754). Дал современное определение и выполнил обстоятельное исследование этих функций Винченцо Риккати в 1757 году; он же предложил обозначения для них: sh для гиперболического синуса и ch для гиперболического косинуса (в западной нотации sinh и cosh). Риккати исходил из рассмотрения единичной гиперболы, используя аналогию с единичной окружностью для тригонометрических функций. Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Иоганном Ламбертом, который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрии (1770). Н.И. Лобачевский (1792–1856) впоследствии использовал этот параллелизм, доказывая непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которой круговая тригонометрия заменяется на гиперболическую. Однако все это случилось много позже знаменитого, говоря современным языком, «баттла» трех ведущих математиков своего времени (Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц и Кристофер Гюйгенс), решивших поставленную Якобом Бернулли в 1690 году задачу об определении формы цепной линии (гиперболический косинус). Вероятно, именно это состязание способствовало пробуждению осознанного интереса к гиперболическим функциям.

Однако за почти два столетия до начала осознанного изучения гиперболических функций Гиртом де Крёмером (Gheert de Kr¨emer, 1512–1594) было обнаружено первое и одно из наиболее важных применений гиперболических функций. Его осуществил фламандский географ, более известный под латинским именем Герард (Джерард) Меркатор (Gerhardus Mercator).

1.2 Сущность гиперболических функций

Гиперболическая функция - это функция от одной переменной, выражающаяся через экспоненту и связанная с тригонометрической функцийей. Существует 6 видов таких функций: гиперболический синус $sh(x)$ (аналог для английской литературы $sinh(x)$), гиперболический косинус $ch(x)$ (аналог для английской литературы $cosh(x)$), гиперболический тангенс $th(x)$ (аналог для английской литературы $tanh(x)$), гиперболический котангенс $cth(x)$ (аналог для английской литературы $csch(x)$), гиперболический секанс $sch(c)$ (аналог для английской литературы $sech(x)$), гиперболический косеканс $csch(x)$ (аналог для английской литературы $coth(x)$).

$$sh(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \tag{1}$$

$$ch(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2}$$

$$th(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \tag{3}$$

$$cth(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \tag{4}$$

$$sch(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} \tag{5}$$

$$csch(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} \tag{6}$$

Разница между гиперболическими функциями и тригонометрическими функциями заключается в наличии мнимой части в уравнении. К примеру функции тригонометрического косинуса (7) и гиперболического косинуса (8) отличаются наличием i (мнимой части) в уравнении тригонометрического косинуса и, соответственно, её отсутствиии в уравнении гиперболического косинуса:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} * (e^{ix} + e^{-ix}) \tag{7}$$

$$ch(x) = \frac{1}{2} * (e^{x} + e^{-x}) \tag{8}$$

1.3 Свойства и возможности гиперболических функций

Гиперболические функции, также как и тригонометрические, можно использовать для параметрического задания различных кривых. Например через синус и косинус задается эллипс (9), а через гиперболический синус и гиперболический косинус - гипербола (10).

$$\begin{cases} x = a * \cos(t) \\ y = a * \sin(t) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x = a * ch(t) \\ y = a * sh(t) \end{cases} \tag{10}$$

Существуют гиперболические тождества аналогичные тригонометрическим тождествам (11) (12) (13), формулы двойного угла для гиперболического синуса (14) и гиперболического косинуса (15), а также формулы половинного угла для гиперболического тангенса (16) и гиперболического котангенса (17).

$$ch(t)^2 - sh(t)^2 = 1 \tag{11}$$

$$ch(t) + sh(t) = e^{t} \tag{12}$$

$$ch(t) + sh(t) = e^{-t} \tag{13}$$

$$sh(2t) = 2sh(t) * ch(t) \tag{14}$$

$$ch(2t) = 2ch(t)^2 - 1 = 1 + 2sh(t)^2 \tag{15}$$

$$th(\frac{z}{2}) = \frac{sh(x) + i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \tag{16}$$

$$cth(\frac{z}{2}) = \frac{sh(x) - i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \quad (17)$$

Гиперболические функции также делятся на четные и не четные (Таблица 1).

Таблица 1. Четность и не четность гиперболических функций.

Функция от x	Функция от -x	Аналог для функции от -x при x	Четность функции
$ch(x)$	$ch(-x)$	$ch(x)$	Четная
$sh(x)$	$sh(-x)$	$-sh(x)$	Не четная
$th(x)$	$th(-x)$	$-th(x)$	Не четная
$cth(x)$	$cth(-x)$	$-cth(x)$	Не четная
$sch(x)$	$sch(-x)$	$sch(x)$	Четная
$csch(x)$	$csch(-x)$	$-csch(x)$	Не четная

1.4 Обратные гиперболические функции

Обратные гиперболические функции также известные как ареа-функции - семейство элементарных функций, обпределяющихся как обратные функции для гиперболических функций. В отличии от обратных тригонометрических функций, которые обозначают длинну дуги единичной окружности, обратные гиперболические функции обозначают площадь сектора единичной параболы.

Существуют функции: ареасинус $arsh(x)$, ареакосинус $arch(x)$, ареатангенс $arth(x)$, ареакотангенс $arcth(x)$, ареасеканс $arsch(x)$ и ареакосеканс $arcsch(x)$.

1.5 Дифференцирование и интегрирование гиперболических функций

Как и тригонометрические функции, гиперболические функции подвержены дифференцированию и интегрированию.

Таблица 2. Дифференцирование гиперболических функций.

Функция от x	Результат дифференцирования	Ограничения
$\frac{d}{dx}sh(x)$	$ch(x)$	
$\frac{d}{dx}ch(x)$	$sh(x)$	
$\frac{d}{dx}th(x)$	$1 - th(x)^2 = sch(x)^2 = \frac{1}{csh(x)^2}$	
$\frac{d}{dx}cth(x)$	$1 - cth(x)^2 = -csch(x)^2 = -\frac{1}{sh(x)^2}$	$x \neq 0$
$\frac{d}{dx}sch(x)$	$-th(x)sch(x)$	
$\frac{d}{dx}csch(x)$	$-cth(x)csch(x)$	$x \neq 0$

Таблица 3. Стандарнтые интегралы от гиперболических функций.

Интеграл	Результат интегрирования
$\int sh(ax)dx$	$a^{-1}ch(ax) + C$
$\int ch(ax)dx$	$a^{-1}sh(ax) + C$
$\int th(ax)dx$	$a^{-1}ln(ch(ax)) + C$
$\int cth(ax)dx$	$a^{-1}ln\lvert sh(ax)\rvert + C$
$\int sch(ax)dx$	$a^{-1}atan(sh(ax)) + C$
$\int csch(ax)dx$	$a^{-1}ln\lvert th(\frac{ax}{2})\rvert + C$ $a^{-1}ln\lvert cth(ax) - chcs(ax)\rvert + C$ $-a^{-1}arcth(ch(ax)) + C$

1.6 Графики гиперболических функций

Графики функций предоставляют собой кривые, схожие по своему виду с кривыми второго порядка.

График гиперболического синуса схож с кубической параболой, а график гиперболического косинуса - с квадратичной параболой. Обе эти параболы зависят от x. (Рис. 0.1.)

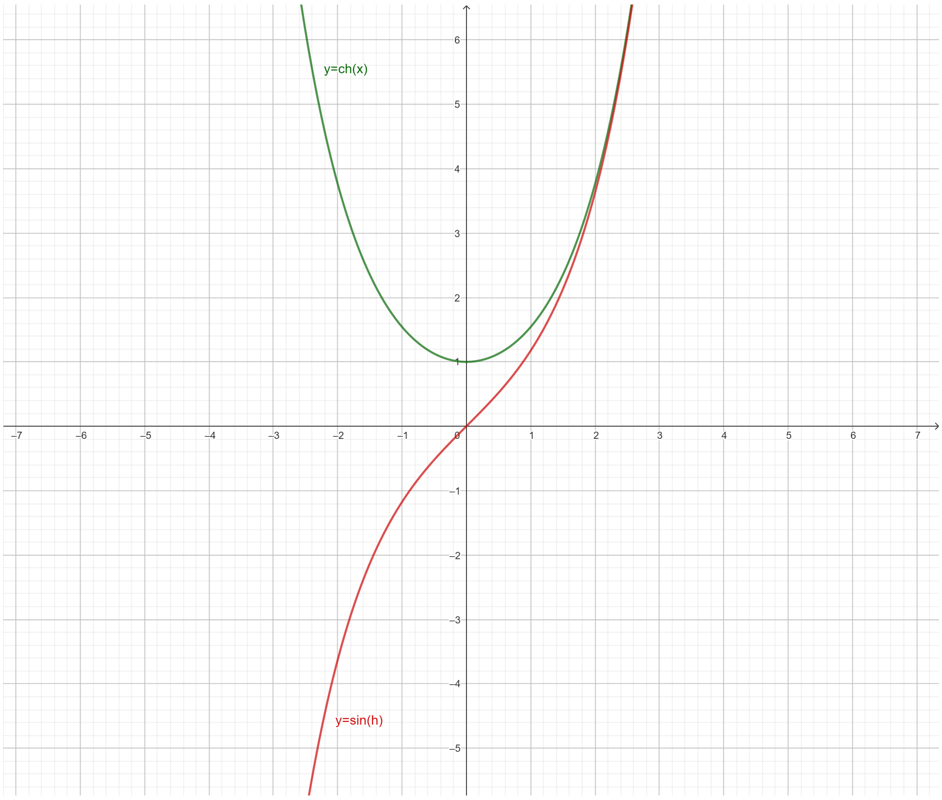

Рис. 0.1. $y = sinh(x)$ и $y = cosh(x)$

График гиперболического тангенса отдаленно схож с гиперболой зависимой от x, а котангенс в свою очередь с кубической парасболой зависимой от y. (Рис. 0.2.)

График секанса представляет собой ... , а грфик косеканса как и график гиперболического тангенса представляет собой гиперболу зависимую от x, но максимально приближеную к каноническому ее виду. (Рис. 0.3.)

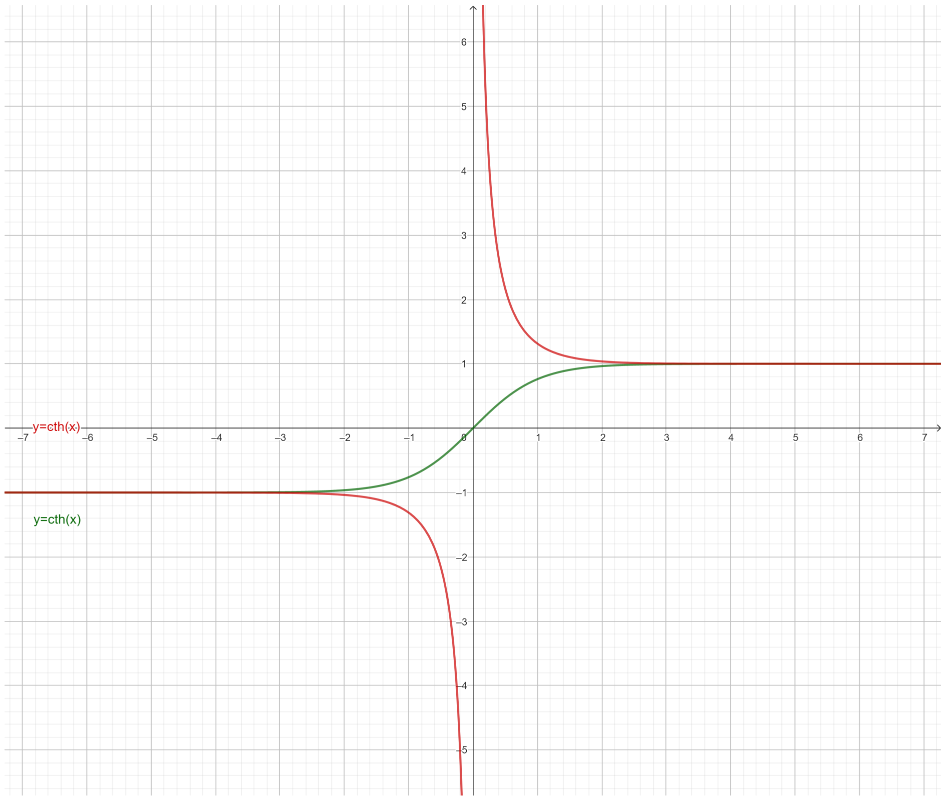

Рис. 0.2. $y = th(x)$ и $y = cth(x)$

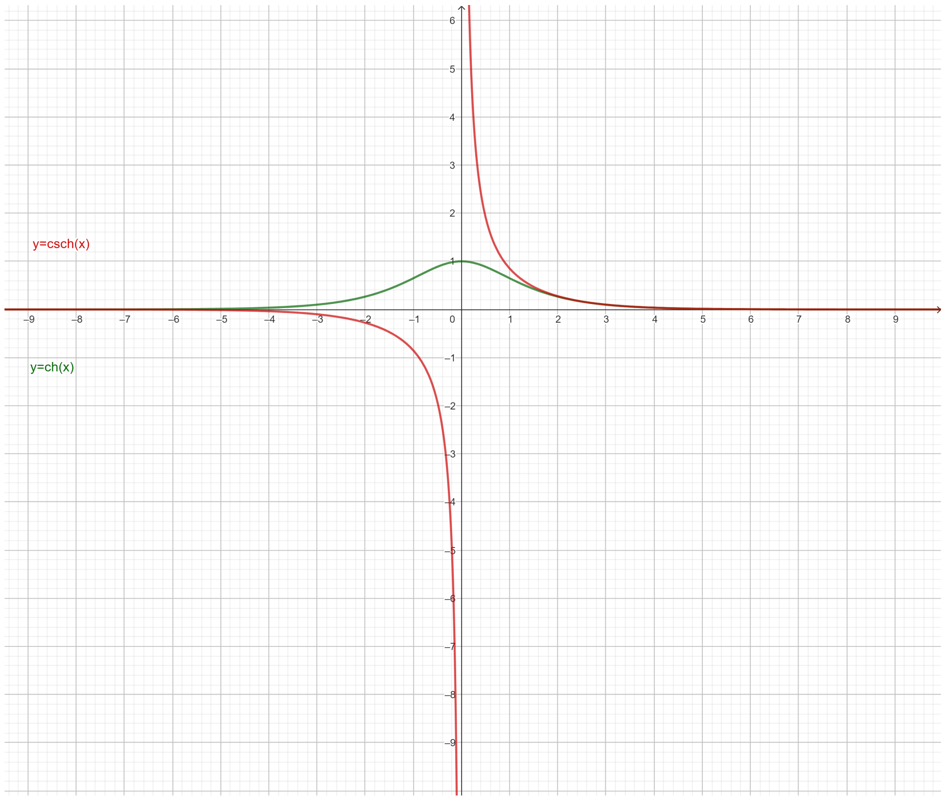

Рис. 0.3. $y = sch(x)$ и $y = csch(x)$

Источники

А. А. Быков В. Ю. Бодряков. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения. *Математическое образование*, 4(88):18--29, 2018.

Eric W. Weisstein. Hyperbolic functions. URL https://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html. Последнее обращение к источнику 05 мая 2023.

А. А. Быков В. Ю. Бодряков. *Социальные науки и право*. Directmedia, 2014.