Глава I. Теория гиперболических функций

1.1 История гиперболических функций

Первое появление гиперболических функций историки математики обнаружили (1707, 1722) в трудах английского математика, ученика и помощника И. Ньютона, Абрахама де Муавра (Abraham de Moivre, 1667–1754). Дал современное определение и выполнил обстоятельное исследование этих функций Винченцо Риккати в 1757 году; он же предложил обозначения для них: sh для гиперболического синуса и ch для гиперболического косинуса (в западной нотации sinh и cosh). Риккати исходил из рассмотрения единичной гиперболы, используя аналогию с единичной окружностью для тригонометрических функций. Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Иоганном Ламбертом, который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрии (1770). Н.И. Лобачевский (1792–1856) впоследствии использовал этот параллелизм, доказывая непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которой круговая тригонометрия заменяется на гиперболическую. Однако все это случилось много позже знаменитого, говоря современным языком, «баттла» трех ведущих математиков своего времени (Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц и Кристофер Гюйгенс), решивших поставленную Якобом Бернулли в 1690 году задачу об определении формы цепной линии (гиперболический косинус). Вероятно, именно это состязание способствовало пробуждению осознанного интереса к гиперболическим функциям.

Однако за почти два столетия до начала осознанного изучения гиперболических функций Гиртом де Крёмером (Gheert de Kremer, 1512–1594) было обнаружено первое и одно из наиболее важных применений гиперболических функций. Его осуществил фламандский географ, более известный под латинским именем Герард (Джерард) Меркатор (Gerhardus Mercator).

1.2 Гиперболические функции

Гиперболическая функция - это функция от одной переменной, выражающаяся через экспоненту и связанная с тригонометрической функцийей. Существует 6 видов таких функций: гиперболический синус $sh(x)$ (аналог для английской литературы $sinh(x)$), гиперболический косинус $ch(x)$ (аналог для английской литературы $cosh(x)$), гиперболический тангенс $th(x)$ (аналог для английской литературы $tanh(x)$), гиперболический котангенс $cth(x)$ (аналог для английской литературы $csch(x)$), гиперболический секанс $sch(c)$ (аналог для английской литературы $sech(x)$), гиперболический косеканс $csch(x)$ (аналог для английской литературы $coth(x)$).

$$sh(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \tag{1}$$

$$ch(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2}$$

$$th(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \tag{3}$$

$$cth(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \tag{4}$$

$$sch(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} \tag{5}$$

$$csch(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} \tag{6}$$

Разница между гиперболическими функциями и тригонометрическими функциями заключается в наличии мнимой части в уравнении. К примеру функции тригонометрического косинуса (7) и гиперболического косинуса (8) отличаются наличием i (мнимой части) в уравнении тригонометрического косинуса и, соответственно, её отсутствиии в уравнении гиперболического косинуса:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} * (e^{ix} + e^{-ix}) \tag{7}$$

$$ch(x) = \frac{1}{2} * (e^{x} + e^{-x}) \tag{8}$$

1.3 Задание гиперболических функций

Гиперболические функции являются функциями, котороые могут быть представленны через степенные экспонециальные функции e^x и e^{-x}.

На рисунке 0.1. можно увидеть как график $y = sh(x)$ (слева) и $y = ch(x)$ (справа) собраны при помощи экспоненциальных функций, а именно:

- Гиперболический синус через графическое сложение функций $y = \frac{1}{2}e^x$ и $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

- Гиперболический косинус через графическое сложение функций $y = \frac{1}{2}e^x$ и $y = \frac{1}{2}e^{-x}$

Следовательно мы можем сделать следующие преобразования и вывести формулы для гиперболического синуса(9) и гиперболического косинуса(10):

$$sh(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{9}$$

$$ch(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{10}$$

На основании полученых формул получим формулу гиперболического тангенса(11):

$$th(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{11}$$

Следует помнить, что в случае гиперболического косинуса, равного нулю, гиперболический тангенс не существует.

Соответственно получим формулы для обратных (ареа) функций:

- Гиперболического арксинуса - $arsh(x) = \frac{1}{sh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
- Гиперболического арккосинуса - $arch(x) = \frac{1}{ch(x)} = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

1.4 Свойства гиперболических функций

Гиперболические функции, также как и тригонометрические, можно использовать для параметрического задания различных кривых. Например через синус и косинус задается эллипс (12), а через гиперболический синус и гиперболический косинус - гипербола (13).

$$\begin{cases} x = a * \cos(t) \\ y = a * \sin(t) \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} x = a * ch(t) \\ y = a * sh(t) \end{cases} \tag{13}$$

Сущестуют гиперболические тождества аналогичные тригонометрическим тождествам (14) (15) (16), формулы двойного угла для гиперболического синуса (17) и гиперболического косинуса (18), а также формулы половинного угла для гиперболического тангенса (19) и гиперболического котангенса (20).

$$ch(t)^2 - sh(t)^2 = 1 \tag{14}$$

$$ch(t) + sh(t) = e^t \tag{15}$$

$$ch(t) - sh(t) = -e^{-t} \tag{16}$$

$$sh(2t) = 2sh(t) * ch(t) \tag{17}$$

$$ch(2t) = 2ch(t)^2 - 1 = 1 + 2sh(t)^2 \tag{18}$$

$$th(\frac{z}{2}) = \frac{sh(x) + i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \tag{19}$$

$$cth(\frac{z}{2}) = \frac{sh(x) - i * \sin(y)}{ch(x) - \cos(y)} \tag{20}$$

Гиперболические функции также делятся на четные и не четные (Таблица 1).

Таблица 1. Четность и не четность гиперболических функций.

Функция от x	Функция от -x	Аналог для функции от -x при x	Четность функции
$ch(x)$	$ch(-x)$	$ch(x)$	Четная
$sh(x)$	$sh(-x)$	$-sh(x)$	Не четная
$th(x)$	$th(-x)$	$-th(x)$	Не четная
$cth(x)$	$cth(-x)$	$-cth(x)$	Не четная
$sch(x)$	$sch(-x)$	$sch(x)$	Четная
$csch(x)$	$csch(-x)$	$-csch(x)$	Не четная

1.5 Обратные гиперболические функции

Обратные гиперболические функции также известные как ареа-функции - семейство элементарных функций, обпределяющихся как обратные функции для гиперболических функций. В отличии от обратных тригонометрических функций, которые обозначают длинну дуги единичной окружности, обратные гиперболические функции обозначают площадь сектора единичной параболы.

Существуют функции: ареасинус $arsh(x)$, ареакосинус $arch(x)$, ареатангенс $arth(x)$, ареакотангенс $arcth(x)$, ареасеканс $arsch(x)$ и ареакосеканс $arcsch(x)$.

1.6 Дифференцирование и интегрирование гиперболических функций

Как и тригонометрические функции, гиперболические функции подвержены дифференцированию и интегрированию.

Таблица 2. Дифференцирование гиперболических функций.

Функция от x	Результат дифференцирования	Ограничения
$\frac{d}{dx}sh(x)$	$ch(x)$	
$\frac{d}{dx}ch(x)$	$sh(x)$	
$\frac{d}{dx}th(x)$	$1 - th(x)^2 = sch(x)^2 = \frac{1}{csh(x)^2}$	
$\frac{d}{dx}cth(x)$	$1 - cth(x)^2 = -csch(x)^2 = -\frac{1}{sh(x)^2}$	$x \neq 0$
$\frac{d}{dx}sch(x)$	$-th(x)sch(x)$	
$\frac{d}{dx}csch(x)$	$-cth(x)csch(x)$	$x \neq 0$

Таблица 3. Стандарнтые интегралы от гиперболических функций.

Интеграл	Результат интегрирования
$\int sh(ax)dx$	$a^{-1}ch(ax) + C$
$\int ch(ax)dx$	$a^{-1}sh(ax) + C$
$\int th(ax)dx$	$a^{-1}ln(ch(ax)) + C$
$\int cth(ax)dx$	$a^{-1}ln\|sh(ax)\| + C$
$\int sch(ax)dx$	$a^{-1}atan(sh(ax)) + C$
$\int csch(ax)dx$	$a^{-1}ln\|th(\frac{ax}{2})\| + C$ $a^{-1}ln\|cth(ax) - chcs(ax)\| + C$ $-a^{-1}arcth(ch(ax)) + C$

Глава II. Практическое применение гиперболических функций

2.1 Решение избранных задач содержащих гиперболические функции

Задача 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10}(sh(x) * ch(x))\,dx$.

Решение:

1. Вычислим непределенный интеграл $\int(sh(x) * ch(x)), dx$:

$$\int(sh(x) * ch(x)), dx = \frac{ch(x)^2}{2}$$

2. При помощи формулы Ньютона-Лейбница вычислим требуемое значение:

$$\int_0^{10}(sh(x) * ch(x))\,dx = \frac{ch(x)^2}{2}|_0^{10} = \frac{ch(10)^2}{2} - \frac{ch(0)^2}{2} = \frac{ch(10)^2}{2} - 1$$

2.2 Использование гиперболических функций в нейронных сетях

В нейронных сетях используются различные линейные и не линейные математические функции для активации нейронов, но эффективными функциями являются лишь не линейные. Одна из таких функций - гиперболический тангенс.

Функция Tanh очень похожа на сигмовидную / логистическую функцию активации и даже имеет ту же S-образную форму с разницей в выходном диапазоне от -1 до 1. В Tanh, чем больше входные данные (более положительные), тем ближе выходное значение будет к 1.0, тогда как чем меньше входные данные (более отрицательные), тем ближе выходные данные будут к -1.0. Преимуществами использования для активации нейронов именно данной гиперболической функции являются:

- Центрированность на нуле результата обработки входных данных, следовательно, мы можем легко отобразить выходные значения как сильно отрицательные, нейтральные или сильно положительные.

- Обычно данная функция используется в скрытых слоях нейронной сети, поскольку его значения лежат в диапазоне от -1 до 1 и следовательно, среднее значение для скрытого слоя получается равным 0 или очень близко к нему. Это помогает в центрировании данных и значительно упрощает обучение для следующего уровня.

Заключение

Итак, гипреболические функции - это аналоги тригонометрических функций из евклидовой геометрии для геометрии Лобачевского.

Самая распространная область в которой применяются гиперболические функции - это обучение нейронных сетей.

Цель исследования состояла в изучении теоретических сведений о гиперболических функциях и их систематизация.

Для достижения нашей цели были в полном объёме решены следующие задачи:

1. Изучена научная, учебная и справочная литература по теме исследования;
2. Раскрыта сущность гиперболических функций;
3. Проанализированы гиперболические уравнения от одной пременной;
4. Приведены собственные примеры некоторых задач связаных с гиперболическими функциями и их частных решений;
5. Проанализированы практические задачи, приводящие к использованию гиперболических функций.

На протяжении всей работы ма ознакомились с краткой теорией гиперболических функций, разъяснили для себя, что это такое "гиперболические функции какими бывают задачи с использованием гиперболическимих функций, как решаются такие задачи, где используются гиперболические функции в современном мире.

Таким образом мы изучили гиперболические функции и выполнили все поставленные нами задачи данного исследования.