Algebra

main topics:

1) Strutture algebriche
2) Sistemi di equazioni lineari
3) Spazi vettoriali
4) Elementi di teoria dei gruppi

esame:

1) Prova scritta
2) Prova orale

Strutture algebriche

Esistono diverse strutture algebriche che si riconoscono attraverso delle propietà che elencheremo in seguito.

Diciamo che S è un insieme e m la sua operazione.

Propietà 1/ Associatività:

S è associativo se m((x, y), z) con x, y, z ∈ S e cambiando l'ordine di m non cambia il risultato.

Es. moltiplicazione e addizione

Propietà 2/ Elemento neutro:

S ha un elemento neutro definoto come e ∈ S se { m(x, e) = x ∀ x ∈ S }

Es. molticazione -> e = 1, addizione -> e = 0

Propietà 3/ Esistenza inversi:

S contiene inversi se ∀ x ∈ S ∃ y | m(x, y) = m (y, x) = e

Es moltiplicazione x = 2, y = ½ e = 1 o addizione x = 2, y = -2, e = 0

Propietà 4/ Commutatività:

S è commutativo se m(x, y) = m(y, x) ∀ x, y ∈ S

Prendiamo (S, +, *)

Propietà 5/ Relazione distributiva:

Vale la relazione distributiva se a*(b+c) = a*b + a*c e (a+b)*c = a*c + b*c ∀ a,b,c ∈ S

Strutture

- Semigruppo (P1)
- Monoide (P1, P2)
- Gruppo (P1, P2, P3)
- Struttura* commutativa (P4)
- Anelli (S, op1, op2) (S, op1) = Gruppo commutativo, e (S, op2) = Monoide e P4

- Campo è un anello in cui tutti gli elementi di S - {0} sono invertibili

Numeri Complessi

I numeri comblessi hanno una forma tipo z = a + i*b dove:

- a = parte reale
- i*b = (-1)^(1/2) * b

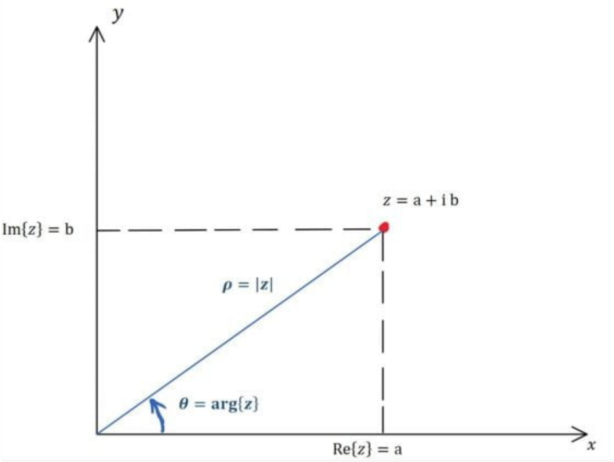
Numero comlesso in forma normale: z = a + i*b

Complementare di z = $\overline{z}$ = a - i*b

Modulo di z = |z| = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Inverso di z = z^{-1} = $\overline{z} \div |z|$

Rappresentazione sul piano di Gauss e forma polare



a = asse delle x
b = asse delle y
p = |z| = distanza dall'origine del punto z
Θ = arg(z) = l'angolo che viene effettuato dall' asse delle x all'incontro con la retta [0, z]
Θ è anche rappresentato in numeri reali e ci servirà per trovare la posizione polare

Calcolo posizione polare:

Avendo la nostra z, calcolando |z| che sarà uguale a r, possiamo trovare leinformazioni necessarie per trovale le coordinate polari

z = a + i*b, a = a, b = b, r = |z| = $\sqrt{a^2 + b^2}$, inoltre sappiamo che risolvendo il sistema { cos(Θ) = a/r, sin(Θ) = b/r } troviamo il Θ, da qui possiamo dire che posizione polare di z = $r \cdot e^{i \cdot \Theta}$

ARCO (angolo)	**sen**	**cos**
0 (0°)	**0**	**1**
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	**1**	**0**
$\frac{2}{3}\pi$ (120°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$ (135°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$ (150°)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π (180°)	**0**	**-1**
$\frac{7}{6}\pi$ (210°)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$ (225°)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$ (240°)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	**-1**	**0**
$\frac{5}{3}\pi$ (300°)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$ (315°)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11}{6}\pi$ (330°)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Esponenziale e radice di un nomero complesso
Potenze
Secondo la formula di Gauss $z^n = r^n \cdot e^{i\cdot(n\cdot\Theta)}$, per quest'ultimo cioè Θ * n dobbiamo trovare uno che sia tra 0 e 2π e questo lo facciamo calcolandoci inanzitutto le coordinate polari di z e poi applicando la formula di Gauss ed infine semplificando.
Es.
z = -i, a = 0, b = -1, |z| = 1, { cos(Θ) = 0/1, sin(Θ) = -1/1 } → Θ = 3π/2 → $z = 1 \cdot e^{i\cdot 3\pi/2}$
$z^{10} = e^{i(10*3\pi/2)} = e^{i(30\pi/2)} = e^{i(15\pi)} = e^{i(14\pi + \pi)} = e^{i\pi}$

Radice
Nel caso dei numeri complessi $z^{1/n}$ con n > 1, abbiamo n soluzioni distinte, e la formula sarebbe $z^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{(\Theta/n) + (2k\pi/n)}$ $con\, n > 1$, per trovare tutte le soluzioni dovremmo dare a k un valore da [0..n-1]
Es.
z = -i, a = 0, b = -1, |z| = 1, { cos(Θ) = 0/1, sin(Θ) = -1/1 } → Θ = 3π/2 → $z = 1 \cdot e^{i\cdot 3\pi/2}$
$z^3 = e^{i(3\pi/6 + 2k\pi/3)} = e^{i(\pi/2 + 2k\pi/3)}$
k = 0 : $e^{i(\pi/2 + 2\cdot 0\cdot \pi/3)} = e^{i\pi/2}$
k = 1 : $e^{i(\pi/2 + 2\cdot 1\cdot \pi/3)} = e^{i(\pi/2 + 2\pi/3)} = e^{i(5\pi/6)}$
k = 2 : $e^{i(\pi/2 + 2\cdot 2\cdot \pi/3)} = e^{i(\pi/2 + 4\pi/3)} = e^{i(11\pi/6)}$