Serie Numeriche

Prima di passare alle serie, dobbiamo prima di tutto considerare le Successioni, che non sarebbero altro che delle funzioni con n come variabile:
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
e diciamo che $a = n$, quindi se $n = [1,2,3,4,5]$ allora $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$.

Adesso che abbiamo visto le successioni, vediamo le serie che con sono altro che una sommatoria tra le successioni, vediamo un esempio:

$S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \dots\dots S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$
possiamo infine dire che $S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k$, caso(n) $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, e tramite induzione forte il caso (n +1)

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \quad === \quad S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{(n+1)}$$

La serie converge se è sempre uguale a un numero finito o possibilmente finito, altrimenti se è uguale o tende ad aumentare / diminuire ogni volta che aumenta la n senza che ci sia una sorta di ripetizione tra risultati, allora si dice che diverge cioè se e $\sum_{k=0}^{n} a_k$ = un numero finito o diverso da $+\infty/-\infty$.

Ad esempio $a = 1/(n+1)$ è divergente, perché seppur piano aumenta sempre il suo valore verso $+\infty$, invece se $a = 1$ allora sappiamo che $S_n = 1$ qualsiasi sia la n e quindi è convergente.

Tipi di serie

1. Serie Geometriche
    - prendiamo una $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo $a_k = x^k$
        - se $-1 < x < 1$ allora la S_n è convergente per $(1-x^{(n+1)}) / (1-x)$
        - se $x =< -1$ allora la S_n non è convergente
        - se $x >= 1$ allora la S_n è divergente

2. Serie Armonica generalizzata
    - prendiamo una $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo $a_k = 1 / k^x$
        - se $x > 1$ allora la S_n è convergente
        - se $x <= 1$ allora la S_n è divergente

Serie a termini positivi

Le serie termini positivi rappresentano tutte una $a_k >= 0$ ed inoltre non possono essere indeterminate/ non convergenti e di conseguenza se $a_k \to n$!= 0 e $k \to +\infty$ allora la serie sarà sicuramente divergente altrimenti dovremmo verificare se divergente o convergente.

Formula di Stirling

per il limite di $k \to +\infty$ $k! / (k^k \cdot e^{-k} \cdot (2\pi k)^{(1/2)}) = 1$
Molto utile quando abbiamo nella a_k un k^k.

Criterio per controllare la divergenza

Se abbiamo una generica ak e una Sn e sappiamo che Sn è convergente allora sappiamo che ak → 0 per k →+∞, altrimenti se ak → n != 0 allora non sarà sicuramente convergente.

Criterio del confronto

condizioni :

- l' ak e bk devono essere >= 0
- 0 <= ak <= bk

soluzione:

- se ∑ ak è divergente allora anche ∑ bk sarà divergente (non vale il contrario)
- se ∑ bk è convergente allora anche ∑ ak sarà convergente (non vale il contrario)

Criterio del confronto asintotico

condizioni:

- ak ~ bk

soluzione:

- lim k → +∞ ak/bk = 1 allora la Sn di ak è convergente se Sn di bk è convergente

Criterio del rapporto

condizioni e consigli:

- utilizzarlo ogni volta che c'è il " ! "/ fattoriale
- ak >= 0 ∀ k ∈ ℝ

soluzione:

- a(k+1) / ak es. k^k = (k+1)^(k+1)/ k^k per il limite di k → + ∞ = L
- se L = 1 allora non lo sappiamo, se L < 1 allora è convergente, else è divergente

Criterio della radice

condizioni:

- ak >= 0 ∀ k ∈ ℝ
- utilizzarlo ogni volta che c'è una x ^ k

soluzione:

- (ak)^ (1/k) es. 10^k = (10^k)^(1/k) per il limite di k → + ∞ = L
- se L = 1 allora non lo sappiamo, se L < 1 allora è convergente, else è divergente

Criterio di Leibniz

condizioni generali:

- ak = (-1)^k * bk
- bk > 0
- per k → + ∞ bk = 0
- bk decrescente cioè al crescere di k b(k) < b(k-1)
- es. (-1)^k / k bk= 1/k bk >0 per k → + ∞ bk = 0 bk è decrescente

soluzione:

- mettiamo ak = |ak| quindi abbiamo (1) / k e quindi siamo sicuri che la serie **converge semplicemente perchè se facciamo il limite è = 0,** per vedere se converge assolutamente bisogna vedere se bk è convergente o divergente.

Serie Di Taylor per Serie

Serie più famose:

- e^x = $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

- $\sin(x)$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

- $\cos(x)$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

- per **$-1 < x < 1$** le prossime serie:

- $1 / 1-x$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$
- $1 / 1+x$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot x^k$

- $\ln(1+x)$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$

- $\arctan(x)$ = $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Come calcolare la derivata(n) di f(x0) attraverso la serie di taylor:

derivata n-esima di f(x0)

- ak * n! = ….

- per assegnare ad ak un valore dobbiamo trovare un k tale che abbiamo nella nostra formula di Taylor il valore x^n, trovata la k, risolviamo la formula con quella k e dividiamo tutto per x^n al fine di ottenere ak, e poi facciamo ak * n! = …, se non esiste una k tale che ci sia una x^n dobbiamo ritornare 0   esempi:

    - x*e^x = sum x^(k+1) / k! e vogliamo la derivata 6-esima
    - x^ 6 → k = 5 allora abbiamo x^6 / 5! * 1/x^6 = 1/5!
    - ak * 6! == 1/5! * 6! = 6

Serie di Potenze

Le serie di potenza sono simili alle serie di taylor e questo perché non riusciamo a individuare direttamente se converge o diverge o non converge.

Caratteristiche:

- Possono convergere e divergere allo stesso tempo in base alla x.
- Hanno questa struttura: $a_k * (x-x_0)^k$.
- x_0 rappresenta il centro della serie.
- Hanno un R che rappresenta il Raggio di convergenza e può essere uguale a 0 \ L \ +∞ .
- Sappiamo che $|x-x_0| < R$ e la convergenza è = a (x_0-R, x_0+R) ma calcoliamo le []

Come Calcolare R:

- di base sappiamo che esiste una $R >= 0$ t.c. $|x-x_0| < R$ che è convergente
- e sappiamo che esiste una $R >= 0$ t.c. $|x-x_0| > R$ che è divergente
- dobbiamo mettere a_k nel modulo e fare o il criterio del rapporto o della radice
- otterremo L che se uguale a:
    - **Ricordo che $R = 1/L$**
    - $L = +\infty$ allora $R = 0$ e la serie potrebbe essere o convergente in x_0 o solo divergente.
    - $0 < L < +\infty$ e la serie ha un intervallo tale che $(x_0 - R, x_0 + R)$ è convergente ma dobbiamo anche controllare per $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$.
    - $L = 0$ allora la serie è sempre convergente.

Come Calcolare [x0 - R, x0 + R]:

- Sappiamo che $|x - x_0| < R$ quindi dobbiamo sostituire la x.
- $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$
- Verificare le serie e se convergono per leibniz convergono.