Statistica

main topics:

1) Introduzione
2) Fondamenti di combinatoria
3) Probabilità Condizionata
    a) dipendente
    b) indipendente
4) Probabilità totale

    ……..

esame:

1) 2 esoneri oppure uno scritto

Modello Base della Statistica

$casi\ positivi\ \div\ casi\ possibili$ quest'ultimo è uno dei modelli più utilizzati per capire qual'è la nostra chance in un determinato evento e il risultato sarà tra 0 e 1.

Se consideriamo i possibili casi come un grande insieme che chiameremo S, possiamo prendere singolarmente i possibili casi tipo:

1. Abbiamo un mazzo di carte da 52 carte con valori che vanno da 1 a 13 ela singola carta o è rossa o è nera, quindi se voglio sapere quanto sia probabile pescare una carta rossa dobbiamo dire :
    - S = {cartax ∀ cartax ∈ carte} e |S| = 52 = casi possibili
    - carte rosse = 52 / 2 = 26
    - casi positivi = 26
    - P = 26 / 52 = 1 / 2 = 0,5

2. Considerando tutte le informazioni precedenti ma in più a me va bene se esce anche un asso di qualsiasi tipo:
    - casi possibili = 52 come prima
    - carte rosse = 26 come prima
    - assi = 4
    - casi positivi = 30?
    - P = 30 / 52 = 15 / 26 = 0, 57…..

    in questo caso saprai che i casi positivi non sono 30 ma bensi 28, ma come riesci a rendere il tutto più formale e scalabile?

    Di base consideriamo A l'insieme delle carte rosse, e B l'insieme degli assi, sappiamo che stiamo contando 2 volte gli assi rossi quindi 30 = |A| + |B|, ma noi vogliamo 28 = |A| + |B| - |A∩B|(assi rossi) = 26 + 4 - 2 = 28.
    Ok ma come faccio se ho n insiemi tutti diversi e possibilmente con elementi in comune?
    La formula è semplice ma il principio sarebbe che ogni volta aggiungi un elemento con ∩ e poi cambi anche il segno ad esempio:
    |A| + |B| …. - |A∩B| ….. + |A∩B∩C| ….. - |A∩B∩C∩D| ….
    al fine di gestire il segno si utilizza un $(-\ 1)^{k(+1\ se\ partiamo\ da\ 1)}$.

- da aggiungere perchè facciamo + e perchè alcune volte *

Combinatoria

Al fine ti vedere quanti sono i possibili casi considerando un insieme di combinazioni possiamo utilizzare delle formule che ci aiutano a scegliere le giuste quantità.

Permutazioni

Le permutazioni considerano tutti gli elementi all'interno di un insieme in caso contrario dobbiamo applicare le Disposizioni o Combinazioni.

Esempi:

1. Abbiamo 10 elementi distiguibili, in quanti modi possiamo ordinarli?
   $n\,! \;=\; 10! \;=\; n \;*\; (n-1) \;*\; .... \;*\; 2 \;*\; 1$

2. Abbiamo 10 elementi di cui 6 hanno lo stesso valore e sono indistinguibili, in quanti modi possiamo ordinarli?
   $n! \;\div\; k! \;=\; 10! \div 6!$ questo perchè 6 elementi sono uguali e con ci interessa se comunque sono uguali, un esempio pratico sono gli anagrammi tipo:
   abbiamo la parola $AMAPALAUAA$, 10 elementi di cuo 6 uguali e indistinguibili cioè non possiamo dire che la A in prima posizione sia diversa da quella all'ultima e i possibili anagrammi sono $10! \div (6!)$.

Disposizoni

Le disposizioni seguono un ordine e sono composti da k posizioni e hanno n elementi tra cui scegliere.

Esempi:

1. Abbiamo 10 elementi, in quanti modi possiamo formare una lista di 5 elementi?
   p1, p2, p3, p4, p5 e 10 elemeti, allora in p1 = 10, p2 = 10, …, p5 = 10 allora abbiamo 10^5 possibili disposizioni cioè n^k

2. consideriamo il problema di prima ma se un elemnto viene scelto non potrà essere riscelto (senza ripetizioni), quante saranno le possibili dispozioni?
   p1 = 10, p2 = 9, …, p5 = 6 allora abbiamo $10 \;\cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \;=\; 10! \div (10 - 5)!$
   generalemente possiamo dire che la formula è $n! \div (n - k)!$

Combinazioni

Le combinazioni sono simili alle dispozioni ma senza un ordine quinidi se nella p1 c'è un elemento scelto per ultimo nelle disposizioni non ci interessa

Esempi:

1. In quanti modi posso scegliere 5 elementi da un insieme di 10 senza considerare l'ordine in cui lo scelgo e una volta estratto un elemento non posso riestrarlo?
   $10! \div ((10 - 5)! \cdot 5!)$ il 5! nel divisore elimina tutti i possibili ordini degli elementi al fine di averne uno che non ha importanza quale, la formula generica sarebbe
   $n! \div (\,(n - k)! \;\cdot k!) \;=\; (n\,k)$ con n sopra e k sotto (n scelgo k)

2. Ora invece riciamo che ci interessa la possibilità di ripescare elementi presi in precedenza, quante possibili combinazioni abbiamo?
   di base $(10 + 5 - 1)! \div (5! \cdot (10 - 1)!)$ che sarebbe il nostro risulto anche scritto $(n + k - 1)! \div (k! \cdot (n - 1)!) = (n + k - 1\, scelgo\, k)$

Probabilità Condizionatà

La probabilità condinzionatà ci da un informazione precedentemente accaduta o che accadrà, ad esempio abbiamo un mazzo da 52 carte e vogliamo dapere quali solo le probabilità che io peschi un RE (chiamiamolo evento A).

P(A) = (4 scelgo 1) / (52 scelgo 1) = 1 / 13

ma mettiamo caso che qualcuno ci dica che sia una figura la carta estratta (fonte veritiera), allora avremmo RE, JACK e DONNA allora la probabilità diventa 1 / 3, consideriamo quest'informazione come evento B e descriviamo il problema come segue:

P(A|B) = 1 / 3 = P(A∩B) / P(B)

P(A∩B) = (4 scelgo 1) / (52 scelgo 1) = 1 / 13 = P(A) perchè se esce RE sarà una figura
P(B) = (12 scelgo 1) / (52 scelgo 1) = 12 / 52 = 3 / 13

P(A|B) = P(A∩B) / P(B) = (1 / 13) / (3 / 13) = (1 / 13) * (13 / 3) = 1 / 3 verificata la condizione

Come abbiamo visto in P(A∩B) non abbiamo minimamente considerato la possibilità che uscisse una figura, questo perchè A ⊂ B e A - B = {∅}, allora prendiamo solo A, in caso A - B diverso dall'insieme vuoto non lo possiamo fare ovviamente.

Formula per calcolare la probabilità condizionata:
P(A|B) = P(A∩B) / P(B)

L'esempio precedente dimostra come possono cambiare le probabilità attraverso più informazioni ma sarà sempre cosi?

Abbiamo una moneta e sappiamo che al primo lancio uscirà testa(evento B), quali sono le probabilità che esca testa al secondo lancio (evento A)?
P(A|B) = (½ * ½) / (½) = ½ = P(A) con P(B) > 0
allora possiamo dire che A e B sono due eventi indipendenti, dal punto di vista insiemistico possiamo vederli come due sottoinsiemi ma ognuno in tempi diversi e sapendo che l'uno non influenza l'altro, per capire se degli eventi sono indipendenti fra di loro, devono rispettare diversi requisiti es con 3 eventi:

P(A∩B∩C) = P(A) * P(B) * P(C)
P(A∩B) = P(A) * P(B)
P(A∩C) = P(A) * P(C)
P(B∩C) = P(B) * P(C)

se una di queste non viene rispettata allora gli eventi sono dipendenti tra loro, ovviamente al crescere degli eventi dobbiamo fare più controlli

Probabilità Totale

Prendiamo 2 “giochi” diversi, le urne e le carte, abbiamo
1 urna contenete:

- 2 palline bianche
- 3 palline nere

2 mazzi di carte nominati M1, M2

- M1 non contiene cuori
- M2 non contiene picche

Se estraiamo una pallina bianca(B) allora estraiamo da M1, altrimenti da M2
R = carta rossa estratta

$$P(R) = P(B \cap M1) + P(N \cap M2) = P(B) * P(M1) + P(N) * P(M2) =$$
$$= \tfrac{2}{5} * \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{5} * \tfrac{2}{3} = 8/15$$

ora sapendo che estrarremo una carta rossa, quante probabilità ci sono che la pallina estratta sia B ?
$P(B|R) = P(B \cap R) / P(R) = P(R|B) * P(B) / P(R)$ diamo per scontato che esca una bianca e di fatto moltiplichiamo dopo ma ci semplifica $P(B \cap R) = P(R|B) * P(B)$
$[P(R|B) = 1 / 3]$

$P(R|B) * P(B) / P(R) = 1/3 * 2/5 * 15/8 = 1/4$

Formula probabilità totale

$$\mathbf{P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = P(B|A) * P(A) / P(B)}$$