插值法

插值法与插值函数

- 用简单函数（多项式/分段多项式）为各种离散数组建立连续模型
- 为各种非有理函数提供好的逼近方法

插值函数：设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant b$ 上的值 $y_0=f\left(x_0\right), \ldots, y_n=f\left(x_n\right)$ ，若存在简单函数 $P(x)$ 使

$$P(x_i)=y_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 称为**插值结点**，包含插值结点的期间 $[a,b]$ 称为**插值区间**，上式称为**插值条件**

多项式插值

若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式，则称 $P(x)$ 为插值多项式，插值法为多项式插值

代数多项式在插值函数有重要地位

- 结构简单，计算机易处理，且任意多项式的导数和积分仍是多项式
- Weierstrass 逼近定理：定义在闭区间上的任何连续函数 $f(x)$ ，存在代数多项式 $p(x)$ 一致逼近 $f(x)$ ，并达到所要求的精度

  > Weierstrass 逼近定理
  >
  > 设 $f(x) \in C[0,1]$， 则存在多项式 $p_n(x) \in P_n$ 使得
  > $$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}|f(x)-p_n(x)|=0$$

插值法研究的问题：

- 满足插值条件的 $P(x)$ 是否存在唯一
- 如何构造 $P(x)$
- 如何估计近似过程产生的误差

插值多项式的存在唯一性

设节点 $x_i(i=0,1,\ldots,n)$ 互异，则满足插值条件的次数不超过 n 的多项式存在且唯一

> 证明：设所求的插值多项式为
>
> $$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$
>
> 则由插值条件 $P_n\left(x_i\right)=y_i(i=0,1,\ldots,n)$ 可得到关于系数的线性方程组
>
> $$\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\ \cdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n\end{cases}$$
>
> 其行列式为 Vandermonde 行列式
>
> $$\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{j>i}\left(x_j-x_i\right)\neq 0$$
>
> 由克莱姆法则可知解存在且唯一

Lagrange 插值

Lagrange 基函数

引入基函数的概念，即求 n 次插值多项式 $l_i(x)(i=0,1,\ldots,n)$ 使之满足

$$l_i\left(x_j\right)=\begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}\ (j=0,1,\cdots,n)$$

即除了 x_i 以外所有点都是 $l_i(x)$ 的零点，可设

$$l_i(x)=A\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_{i-1}\right)\left(x-x_{i+1}\right)\cdots\left(x-x_n\right)=A\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)$$

根据定义

$$A=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$$

因此

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

称为 Lagrange 基函数，Lagrange 基函数为 n 次多项式

Lagrange 插值多项式

利用 Lagrange 基函数即可构造次数不超过 n 的多项式

$$L_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)$$

显然其满足插值条件

$$L_n(x_i)=y_i\quad i=0,1,\ldots,n$$

又由插值多项式唯一性，可得

$$P_n(x)\equiv L_n(x)$$

需要注意

- 插值节点仅要求互异，对大小次序没有要求
- 插值基函数仅由插值节点决定，与被插函数无关
- 插值基函数顺序与插值节点一致

可以得到

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)\equiv 1$$

插值余项

截断误差 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$ 称为 n 次 Lagrange 插值多项式的余项

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 存在 $n+1$ 阶导数，$x_i\in[a,b](i=0,1,\ldots,n)$ 为 $n+1$ 个互异节点，则对 $\forall x\in[a,b]$ 有

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$\xi\in(a,b)$ 且与 x 有关

注意到当 $f(x)$ 为次数 $\leqslant n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，即 $R_n(x)\equiv 0$，即插值多项式对次数 $\leqslant n$ 的多项式是精确的

插值时内插效果一般优于外推，且高次插值一般优于低次插值（对不超过 4 次的插值）

牛顿插值

基函数

Lagrange 插值的问题在于虽然易于计算，但是在增加一个节点时全部基函数都需要重新再算，而由线性代数的知识可知，任何 n 次多项式都可以表示为

$$1,\ x-x_0,(x-x_0)(x-x_1),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

共 $n+1$ 个线性无关多项式的线性组合，考虑将这 $n+1$ 个多项式选为插值基函数，寻求如下形式的插值多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

其中 a_i 为待定系数

令上述插值多项式满足插值条件

$$\begin{aligned}
&P\left(x_0\right)=f_0=a_0\\
&P\left(x_1\right)=f_1=a_0+a_1\left(x_1-x_0\right)\\
&P\left(x_2\right)=f_2=a_0+a_1\left(x_2-x_0\right)+a_2\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)
\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
a_0&=f_0\\
a_1&=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}\\
a_2&=\frac{\frac{f_2-f_0}{x_2-x_0}-\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}
\end{aligned}$$

可以看出待定系数的形式会越来越复杂，且有一定规律，为此引入**差商**和**差分**的概念

差商

称

$$f\left[x_0, x_1\right]=\frac{f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)}{x_0-x_1}$$

为 $f(x)$ 在 x_0, x_1 点的一阶差商，称

$$f\left[x_0, x_1, x_2\right]=\frac{f\left[x_0, x_1\right]-f\left[x_1, x_2\right]}{x_0-x_2}$$

为 $f(x)$ 在 x_0, x_1, x_2 的二阶差商

一般的，$n-1$ 阶差商的差商

$$f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right]=\frac{f\left[x_0, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}\right]-f\left[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\right]}{x_0-x_n}$$

称为 $f(x)$ 在 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 点的 n 阶差商。0 阶差商即为该点的函数值

差商一般可通过列表计算

$$\begin{array}{llll}
f(x_0) & & & \\
f(x_1) & f[x_0, x_1] & & \\
f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
f(x_3) & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
\end{array}$$

差商可表示为函数值的线性组合，即

$$f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right]=\sum_{k=0}^n \frac{f\left(x_k\right)}{\left(x_k-x_0\right) \cdots\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right) \cdots\left(x_k-x_n\right)}$$

这表明差商与节点的排列次序无关（差商的对称性），即

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]=f\left[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right]$$

且一个 n 次多项式 $f(x)$ 的 k 阶差商，当 $k \leqslant n$ 时是一个 $n-k$ 次多项式，当 $k>n$ 时恒等于 0

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 n 阶导数，且 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in[a, b]$ ，则存在一点 $\xi \in[a, b]$ 满足

$$f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

牛顿插值多项式

设 x 为 $[a,b]$ 上一点，由一阶差商定义

$$f\left[x, x_0\right]=\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

可得

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x, x_0\right]\left(x-x_0\right)$$

同理，由二阶差分定义

$$f\left[x, x_0, x_1\right]=\frac{f\left[x, x_0\right]-f\left[x_0, x_1\right]}{x-x_1}$$

可得

$$f\left[x, x_0\right]=f\left[x_0, x_1\right]+f\left[x, x_0, x_1\right]\left(x-x_1\right)$$

依此类推可得

$$\begin{gathered}
f(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x, x_0\right]\left(x-x_0\right) \\
f\left[x, x_0\right]=f\left[x_0, x_1\right]+f\left[x, x_0, x_1\right]\left(x-x_1\right) \\
f\left[x, x_0, x_1\right]=f\left[x_0, x_1, x_2\right]+f\left[x, x_0, x_1, x_2\right]\left(x-x_2\right) \\
\vdots \\
f\left[x, x_0, \cdots, x_{n-1}\right]=f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right]+f\left[x, x_0, \cdots, x_n\right]\left(x-x_n\right)
\end{gathered}$$

从后向前带入，可得

$$\begin{gathered}
f(x)=f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots \\
+f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)
\end{gathered}$$

即

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

其中

$$\begin{gathered}
N_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \ldots, x_k]\omega_k(x) \\
R_n(x)=f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]\omega_{k+1}(x)
\end{gathered}$$

$N_n(x)$ 为牛顿插值多项式，$R_n(x)$ 为牛顿型插值余项，且易得

$$R_n(x_i)=0\quad N_n(x_i)=y_i$$

满足插值条件，并且由插值多项式唯一性，易得 $N_n(x)\equiv L_n(x)$ ，并且有递推关系

$$N_n(x)=N_{n-1}(x)+f\left[x_0,\cdots,x_n\right](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

和余项公式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

即

$$R_n(x)\approx f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\right](x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

等距节点插值

差分

设函数 $y=f(x)$ 在**等距节点** $x_i=x_0+ih(i=0,1,\ldots,n),h=\frac{b-a}{n}$ 上的函数值为 $f_i=f(x_i)$ ，则定义

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i\quad \nabla f_i=f_i-f_{i-1}$$

为函数 $f(x)$ 在点 x_i 处的一阶向前差分和一阶向后差分

可递归定义 m 阶向前差分和向后差分

$$\Delta^m f_i=\Delta^{m-1}f_{i+1}-\Delta^{m-1}f_i\quad \nabla^m f_i=\nabla^{m-1}f_i-\nabla^{m-1}f_{i-1}$$

差分也可以像差商那样列表计算

$$\begin{array}{llll}
f_0 & & & \\
f_1 & \Delta f_0(\nabla f_1) & & \\
f_2 & \Delta f_1(\nabla f_2) & \Delta^2 f_0(\nabla^2 f_2) & \\
f_4 & \Delta f_2(\nabla f_3) & \Delta^2 f_1(\nabla^2 f_3) & \Delta^3 f_0(\nabla^3 f_3)
\end{array}$$

差分可以使用函数值表示，即

$$\Delta^n f_i=f_{n+i}-c_n^1 f_{n+i-1}+\cdots+(-1)^n c_n^n f_i=\sum_{j=0}^n(-1)^j c_n^j f_{n+i-j}$$

$$\nabla^n f_i=f_i-c_n^1 f_{i-1}+\cdots+(-1)^n c_n^n f_{i-n}=\sum_{j=0}^n(-1)^j c_n^j f_{i-j}$$

并且有

$$\Delta^n f_i=\nabla^n f_{i+n}$$

同样的，函数值也可以用各阶差分表示

$$f_{n+i}=f_i+c_n^1\Delta f_i+\cdots+c_n^n\Delta^n f_i=\sum_{j=0}^n c_n^j\Delta^j f_i$$

差分和差商的关系为

$$\begin{aligned}f\left[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}\right]&=\frac{1}{m!h^m}\Delta^m f_i\\ f\left[x_{i-m},x_{i-m+1},\cdots,x_i\right]&=\frac{1}{m!h^m}\nabla^m f_i\end{aligned}$$

差分与微商的关系为

$$\Delta^n f_n=h^n f^{(n)}(\xi)\quad \xi\in(x_k,x_{k+n})$$

等距节点插值公式

设插值节点为 $x_i=x_0+ih$ ，若计算 x_0 附近的 x 的值，带入 $x=x_0+th(0\leqslant t\leqslant n)$ ，可得

$$N_n(x_0+th)=f_0+\Delta f_0 t+\frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1)+\cdots+\frac{\Delta^n f_0}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1)$$

上述公式即称为牛顿向前插值公式，余项为

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\quad \xi\in(x_0,x_n)$$

类似地，计算 x_n 附近函数值时可令 $x=x_n+th(-n\leqslant t\leqslant 0)$ ，代入得

$$N_n\left(x_n+th\right)=f_n+\nabla f_n t+\frac{\nabla^2 f_n}{2!}t(t+1)+\cdots+\frac{\nabla^n f_n}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

上述公式即称为牛顿向后插值公式，余项为

$$R_n(x_n+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi),\xi\in(x_0,x_n)$$

Hermite 插值

Hermite 插值多项式

Lagrange 插值和牛顿插值只保证函数值相等，有时候也需要保证导数值相等，这样的插值称为 Hermite 插值

设 $[a,b]$ 上的节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ ，有 $y_i=f(x_i),m_i=f(x_i)$ ，要求有插值多项式 $H(x)$ 满足

$$H(x_i)=y_i \quad H'(x_i)=y_i'$$

即给出 $2n+2$ 个条件，确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式，其形式为

$$H_{2n+1}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$$

可将 $H_{2n+1}(x)$ 构造成如下形式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}y_i'\beta_i(x)$$

其中 $\alpha_i(x),\beta_i(x)$ 均为 $2n+1$ 次多项式，且满足

$$\begin{array}{ll}\alpha_i(x_k)=\delta_{ik} & \alpha_i'(x_k)=0\\ \beta_i(x_k)=0 & \beta_i'(x_k)=\delta_{ik}\end{array}$$

显然满足插值条件，则

$$\alpha_i(x)=\left(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}\right)l_i^2(x)$$
$$\beta_i(x)=(x-x_i)\,l_i^2(x)$$

式中 $l_i(x)$ 即为对应的 Lagrange 基函数

三次 Hermite 插值多项式

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实函数，x_0,x_1 是区间上相异两点，求三次多项式 $H_3(x)$ 满足

$$\begin{cases}H_3(x_i)=y_i\\ H_3'(x_i)=y_i'\end{cases} \quad i=0,1$$

则为三次 Hermite 插值多项式

满足条件的多项式存在唯一，构造如下

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1'\beta_1(x)$$

则根据上文结果，可得

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= [1 + 2l_1(x)]\, l_0^2(x) \quad & \beta_0(x) &= (x - x_0)\, l_0^2(x) \\ \alpha_1(x) &= [1 + 2l_0(x)]\, l_1^2(x) \quad & \beta_1(x) &= (x - x_1)\, l_1^2(x) \end{aligned}$$

当 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有四阶导时，余项为

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

设

$$M_4 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

则当 $x \in (x_0, x_1)$ 时有误差限

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{M_4}{384} h^4$$

分段低次插值

随着插值多项式次数的增长，插值多项式不一定收敛到原函数，这样的现象被称为 Runge 现象

> Runge 证明了存在一个常数 $c \approx 3.63$ ，当 $|x| \leqslant c$ 时 $\lim_{n\to\infty} L_n = f(x)$ ，而当 $|x| > c$ 时 $\{L_n(x)\}$ 发散

事实上很少采用超过 7 次的插值多项式，因此引入分段低次插值的概念

分段线性插值

考虑区间 $[a,b]$ 上的节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 及其对应的函数值 $y_i = f(x_i)$ ，求一个分段函数 $P(x)$ 满足

- $P(x_i) = y_i$
- 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性函数

则称 $P(x)$ 为分段线性插值函数

在每个区间做线性插值即可

$$P(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$P(x)$ 是一个折线函数，在 $[a,b]$ 上连续，但是不光滑（一阶导不连续）

其余项估计式为

$$
\begin{aligned}
|f(x)-P(x)| &= \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| \\
&\leqslant \frac{h_i^2}{8}\max_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}|f''(x)| \leqslant \frac{h^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|
\end{aligned}
$$

设

$$
h=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} h_i \quad M_2=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|
$$

则分段线性插值的余项为

$$
|f(x)-P(x)| \leqslant \frac{h^2}{8}M_2 \quad \forall x\in[a,b]
$$

对光滑性要求不高的插值问题，分段线性插值的效果好，计算简单

分段插值函数

除了分段线性插值以外，还有分段二次插值和分段三次 Hermite 插值

分段三次 Hermite 插值的余项为

$$
|f(x)-H(x)| \leqslant \frac{h^4}{384}M_4 \quad x\in[a,b]
$$

三次样条插值

三次样条

给定区间 $[a,b]$ 与其上节点 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ 和节点对应的函数值 $y_i=f(x_i)$，若函数 $S(x)$ 满足

- $S(x_i)=y_i$
- 在每个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上是次数不超过 3 的多项式
- 在每个内节点上有二阶连续导数

则称 $S(x)$ 为关于上述划分的一个三次多项式样条函数，简称三次样条

$S(x)$ 在每个区间是次数不超过 3 的多项式，故需要 4 个待定参数，区间共 n 个，则应当确定 $4n$ 个系数，而连续导数条件有 $3n-3$ 个

$$
\begin{cases}
S\left(x_i-0\right)=S\left(x_i+0\right) & \\
S'\left(x_i-0\right)=S'\left(x_i+0\right) & \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \\
S''\left(x_i-0\right)=S''\left(x_i+0\right) &
\end{cases}
$$

加上插值条件，共 $4n-2$ 个，因此还需两个条件确定 $S(x)$ ，一般补充两个边界条件

固支条件：已知两段的一阶导

$$S'(x_0)=f_0' \quad S'(x_n)=f_n'$$

已知两段二阶导

$$S''(x_0)=f_0'' \quad S''(x_n)=f_n''$$

自然边界条件

$$S''(x_0)=0 \quad S''(x_n)=0$$

或是周期性条件

$$
\begin{gathered}
S(x_0+0)=S(x_0-0) \\
S'(x_0+0)=S'(x_0-0) \\
S''(x_0+0)=S''(x_0-0)
\end{gathered}
$$

可通过待定系数法求解

有误差估计式

$$
\begin{gathered}
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-S(x)| \leqslant \frac{5}{384}h^4M_4 \\
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)-S'(x)| \leqslant \frac{1}{24}h^3M_4 \\
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)-S''(x)| \leqslant \frac{3}{8}h^2M_4
\end{gathered}
$$

三转角方程

设 $S'(x_i)=m_i$ ，则通过确定 m_i 来求 $S(x)$ 的方法称为三转角法。使用分段 Hermite 插值参数

$$\lambda_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}, \mu_i=1-\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$$

以及

$$g_{i+1} = 3(\mu_i f[x_{i-1}, x_i] + \lambda_i f[x_i, x_{i+1}]) \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

有

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

三弯矩方程

设 $S''(x_i) = M_i$ ，则通过确定 M_i 来求 $S(x)$ 的方法称为三弯矩法。

参数

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \qquad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} = 1 - \lambda_i$$

以及

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right] = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

有

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$