Mathematical Background

Sets

Basics

一些常用标注

- 属于 $x \in S$
- 子集 $S \subseteq T$
- 真子集 $S \subset T$
- 有限子集 $S \subseteq^{fin} T$
- 相等 $S = T$
- 空集 $\emptyset$
- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 布尔 $B = \{true, false\}$

集合的基本运算

- intersection $S \cap T \equiv \{x \mid x \in S \wedge x \in T\}$
- union $S \cup T \equiv \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$
- difference $S - T \equiv \{x \mid x \in S \wedge x \notin T\}$
- powerset $\mathcal{P}(S) \equiv \{T \mid T \subseteq S\}$
- integer range $[m, n] \equiv \{x \mid m \leqslant x \leqslant n\}$

Generalized Unions and Generalized Intersections

对于一个集合的集合 S，定义

$$\bigcup S \equiv \{x \mid \exists T \in S. x \in T\}$$

如果 $S(i)$ 是一个定义依赖于 i 的集合，则有

$$\bigcup_{i \in I} S(i) \equiv \bigcup \{S(i) \mid i \in I\}$$

$$\bigcup_{i=m}^{n} S(i) \equiv \bigcup_{i \in [m,n]} S(i)$$

同理

$$\bigcap S \equiv \{x \mid \forall T \in S.\, x \in T\}$$

$$\bigcap_{i \in I} S(i) \equiv \bigcap \{S(i) \mid i \in I\}$$

$$\bigcap_{i=m}^{n} S(i) \equiv \bigcap_{i \in [m,n]} S(i)$$

对于空集有

$$\bigcup \emptyset = \emptyset$$

而 $\bigcap \emptyset$ 无意义（set of everything paradox）

Relations

Basics

#

首先定义笛卡尔积

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$$

这里的 (x, y) 称为 pair，有

$$\pi_0(x, y) = x, \pi_1(x, y) = y$$

则从 A 到 B 的关系 ρ 满足

$$\rho \subseteq A \times B$$

或者说 $\rho \in \mathcal{P}(A \times B)$，这里的 A, B 可以是同一个集合。如果 $(x, y) \in \rho$ 则可以写作 $x \rho y$

一些常用标注

- S 上的 identity $Id_s \equiv \{(x, x) \mid x \in S\}$
- ρ 的 domain $dom(\rho) \equiv \{x \mid \exists y.\, (x, y) \in \rho\}$
- ρ 的 range $ran(\rho) \equiv \{y \mid \exists x.\, (x, y) \in \rho\}$
- composition $\rho' \circ \rho \equiv \{(x, z) \mid \exists y.\, (x, y) \in \rho \land (y, z) \in \rho'\}$
- inverse $\rho^{-1} \equiv \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$

关系满足一些属性

- $(\rho_3 \circ \rho_2) \circ \rho_1 = \rho_3 \circ (\rho_2 \circ \rho_1)$
- 对于 $\rho \subseteq S \times T$，有 $\rho \circ Id_S = \rho = Id_T \circ \rho$
- $dom(Id_s) = S = ran(Id_S)$
- $Id_T \circ Id_S = Id_{T \cap S}$

- $Id_S = Id_S^{-1}$
- $\rho = (\rho^{-1})^{-1}$
- $(\rho_2 \circ \rho_1)^{-1} = \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1}$
- $\rho \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ \rho$
- $Id_\emptyset = \emptyset = \emptyset^{-1}$
- $dom(\rho) = \emptyset \iff \rho = \emptyset$

Equivalence

S 上的等价关系 ρ 满足自反性，对称性，传递性

- reflexivity $Id_S \subseteq \rho$
- symmetry $\rho^{-1} = \rho$
- transitivity $\rho \circ \rho \subseteq \rho$

Functions

Basics

从 A 到 B 的 function f 是一种特殊的 relation，满足

$$\forall x, y, y' ((x, y) \in f \land (x, y') \in f) \to y = y'$$

显然 $\emptyset$ 和 Id_S 都是 function，且如果 g, f 是 function，$g \circ f$ 也是 function，有 $(g \circ f)x = g(fx)$

只有在 f 是 injection 时 f^{-1} 才是 function

函数可以是 injective，surjective 或者 bijective

Lambda Expression

可以用 lambda expression 的方式表示函数，函数 f 如果有 domain S 且 $\forall x \in S, fx = E$ ，则

$$f = \lambda x \in S. E$$

Variation

为函数添加映射

$$f\{x \rightsquigarrow n\} = \lambda z. \begin{cases} fz & z \neq x \\ n & z = x \end{cases}$$

需要注意 x 不一定要位于 $dom(f)$

$$dom(f\{x \rightsquigarrow n\}) = dom(f) \cup \{x\}$$
$$ran(f\{x \rightsquigarrow n\}) = ran(f - \{(x, n') \mid (x, n') \in f\}) \cup \{n\}$$

Function Types

从 A 到 B 的所有函数表示为 $A \to B$，这个算子是右结合的

$$A \to B \to C = A \to (B \to C)$$

对于 $f \in A \to B \to C, a \in A, fa \in B \to C$

可以将接受多个参数的函数

$$f \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to A$$

转换为接受一个参数的函数

$$g \in A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to A$$

这种行为称为 currying，即提供一个参数后将得到接受余下参数的一个函数

Products

考虑将笛卡尔积一般化

$$S_0 \times S_1 \times \cdots \times S_{n-1} = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid \forall i \in [0, n-1]. x_i \in S_i\}$$

称 $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ 为 n-tuple，有

$$\pi_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$$

对于一个 pair (x, y)，可以将其看作一个 function

$$\lambda i \in 2. \begin{cases} x & i = 0 \\ y & i = 1 \end{cases}$$

其中 $2 = \{0, 1\}$

则可以重新定义笛卡尔积

$$A \times B = \{f \mid dom(f) = 2 \land f0 \in A \land f1 \in B\}$$

可以将这种重新定义推广至 n-tuple

$$\lambda i \in n. \begin{cases} x_0 & i = 0 \\ \ldots & \ldots \\ x_{n-1} & i = n-1 \end{cases}$$

其中 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$，而

$$S_0 \times S_1 \times \cdots \times S_{n-1} = \{f \mid dom(f) = n \wedge \forall i \in n.\, fi \in S_i\}$$

可以推广至

$$\prod_{i \in I} S(i) = \{f \mid dom(f) = I \wedge \forall i \in I.\, fi \in S(i)\}$$

$$\prod_{i=m}^{n} S(i) = \prod_{i \in [m,n]} S(i)$$

考虑函数 θ，从一个 indices 的集合 I 到集合的集合 S（即 $\theta = \lambda i \in I.\, S(i)$），则可以定义

$$\Pi\theta = \{f \mid dom(f) = dom(\theta) \wedge \forall i \in dom(\theta).\, fi \in \theta i\}$$

即 θ 的 range 的积

$$\Pi\lambda i \in I.\, S(i) = \prod_{i \in I} S(i)$$

如果 S 与 i 无关，则将 $\prod_{i \in I} S$ 写作 S^I，有

$$S^I = \Pi\lambda x \in I.\, S = \{f \mid dom(f) = I \wedge \forall x \in I.\, fx \in S\} = (I \to S)$$

> 如 $\mathcal{P}(S) = 2^S = S \to 2$，考虑 S 的子集 T，可以定义
>
> $$f = \lambda x \in S. \begin{cases} 1 & x \in T \\ 0 & x \in S - T \end{cases}$$
>
> 则 $f \in S \to 2$

Sums

对于集合 A, B，定义

$$A + B = \{(i, x) \mid i = 0 \wedge x \in A \vee i = 1 \wedge x \in B\}$$

则可以推广至

$$S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} = \{(i, x) \mid i \in n \wedge x \in S_i\}$$

同理可以推广至

$$\sum_{i \in I} S(i) = \{(i, x) \mid i \in I \wedge x \in S(i)\}$$

$$\sum_{i=m}^{n} S(i) = \sum_{i \in [m,n]} S(i)$$

同理可以定义

$$\Sigma\theta = \Sigma\lambda i \in I.\, S(i) = \sum_{i \in I} S(i)$$

如果 S 与 i 无关，$\Sigma\theta = \Sigma\lambda i \in I.\, S = \{(i, x) \mid i \in I \wedge x \in S\} = I \times S$