Petri Net

automata 是一个理论的理想的模型

petri net 相对的更适合工程实现

- state is distributed, transitions are localised
- local causality replaces global time
- subsystems interact by explicit communication

PN 中的状态迁移是异步的，因此可以用来建模并发分布式系统

Definition

PN 的图形化表示可以看作一个二分图（bipartite graph），顶点分为两类

- places：用于建模系统中的资源或状态
- transitions：用于建模系统中的状态迁移和同步

图中的边（arc）总是连接两种不同的顶点

Token 是位于 places 中的资源

更为正式的定义为

PN 是一个 4-tuple $C = (P, T, I, O)$ 其中

- P 是 places 的集合
- T 是 transitions 的集合
- $I : T \to 2^P$ 是 transition 的输入，记为 $\cdot t$
- $O : T \to 2^P$ 是 transition 的输出，记为 $t \cdot$

由于 token 的存在，故可以定义 marking $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ 为各个 place 中 token 的数量

Basics of PN

Fire

对于一个 transition t，t 在当前 marking 为 **enabled** $\iff$ 对于 t 的所有 input，其中都存在一个 token

一个 enabled transition 即可 **fire**，即从其所有 input 中减去一个 token，再在其所有 output 中增加一个 token

Fire 是一个原子操作

PN 中的边可以带有权重，对于边带权的 PN，一个 transition 被 enabled 要求其所有 input 中的 token 数都大于等于对应边的权重

PN 可以为多种现实中的行为建模

- 顺序执行：当前 transition 被 enabled 只能在前一个 transition fire 之后
- 同步：所有 input 中都有 token（resource）后当前 transition 才能 fire
- merge&fork：多个 resource 汇总到一个 place 或是 resource 从一个 place 分发到多个 place
- 并发：多个 enabled transition 可以各自独立地 fire
- conflict：多个 enabled transition 在其中一个 fire 之后其余便不处于 enable 状态

Run

PN 的 run 是一个有限/无限的 marking 和 transition 的序列

$$\mu_0 \overset{t_0}{\to} \mu_1 \overset{t_1}{\to} \cdots \overset{t_{n-1}}{\to} \mu_n \overset{t_n}{\to} \dots$$

其中 μ_0 是 PN 的初始 marking，而 $t_i \in enabled(\mu_i)$，且

$$\mu_i = (\mu_{i-1} - \cdot t_{i-1}) + t_{i-1}\cdot, \forall i \geqslant 1$$

上式的含义是从当前 marking 减去所有 t 的 input 再加上所有 t 的 output 即是 fire 之后的 marking

Semantic

PN 的语义同样是基于 TS，其中状态为 marking，而 transition 即为 fire

Other definitions

- source transition: no input
- sink transition: no output
- self-loop: a pair (p, t) s. t. $p \in \cdot t \wedge p \in t\cdot$
- pure PN: no self-loops
- weighted PN: arcs with weight
- ordinary PN: all arcs weights are 1
- infinite capacity net: places can accommodate an unlimited number of tokens
- finite capacity net: each place p has a maximum capacity $K(p)$

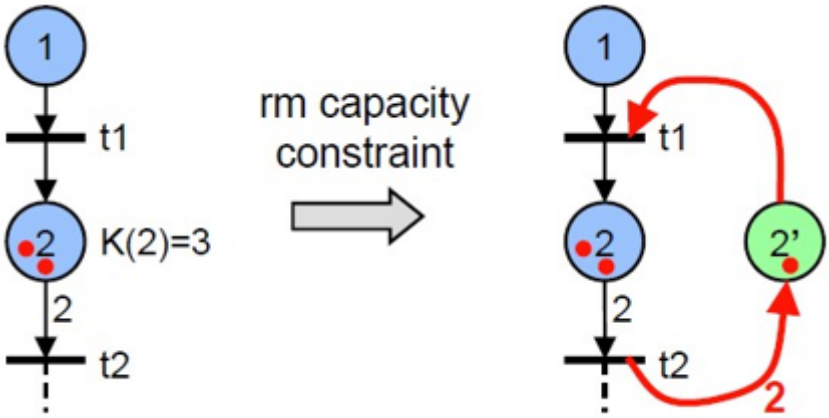
- strict transition rule: after firing, each output place can't have more than $K(p)$ tokens

则有定理：任何 pure finite-capacity PN 可以被转换为等价的 infinite-capacity

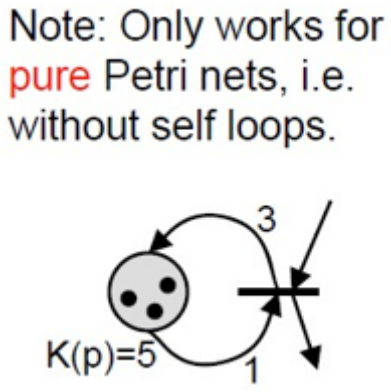
具体做法为：

- 对任意 $p, K(p) > 1$，添加一个 place p'，其中初始 marking $M_0(p') = K(p) - M_0(p)$
- 对任意 output arc $e = (p, t)$，添加 $e' = (t, p')$ 且权重为 $W(e)$
- 对任意 input arc $e = (t, p)$，添加 $e' = (p', t)$ 且权重为 $W(e)$

如下图

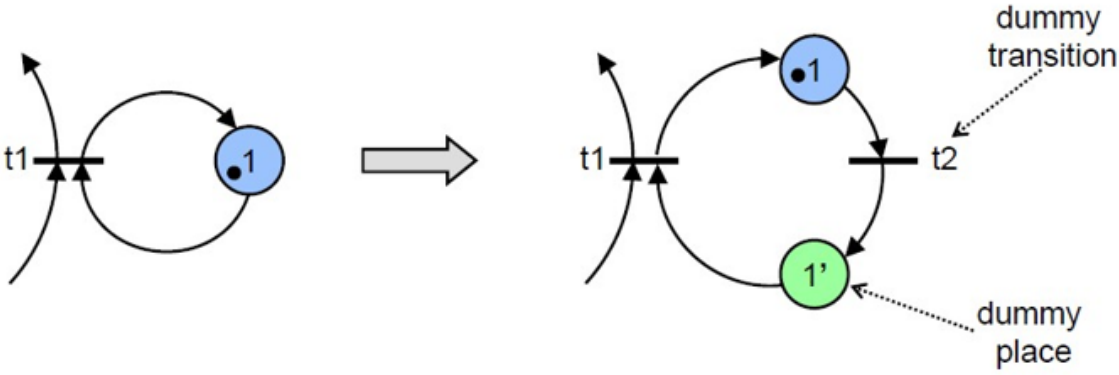


新添加的 p' 满足了在 p, p' 中的 token 数之和恒定且等于 $K(p)$，但是对于有 self-loop 的便不能使用这种方法，如下图



在添加后变为了不能 fire 的状态

但是对于 non-pure 的 PN 可以通过消除 self-loop 的方式将其变为等价的 pure PN



Behavioral properties

Behavioral peoperty 是取决于初始 marking 的属性

- Reachability：称一个 marking M_n 可达，如果存在一个从 M_0 到 M_n 的迁移序列
- Boundness：一个 bounded PN 任意可达 marking 中 place 中的 token 不会超过某个上限。称 1-bounded 的 PN 为 safe PN
- Liveness：即任何可达的 marking 都有 transition 可以 fire，等价于系统无死锁
- Reversibility：任意可达的 marking 都可达初始 marking。对于 reversibility 有一个较为宽松的版本，即存在一个 home state M' 满足任意可达的 M 都可达 M'
- Persistence：对任意两个 enabled 的 transition，fire 其中一个不会导致另一个 disabled，即一个 transition 如果 enabled 则会一直持续到其 fire 为止
- Fairness：每个 transition 连续 fire 的次数是有上限的

Cover tree

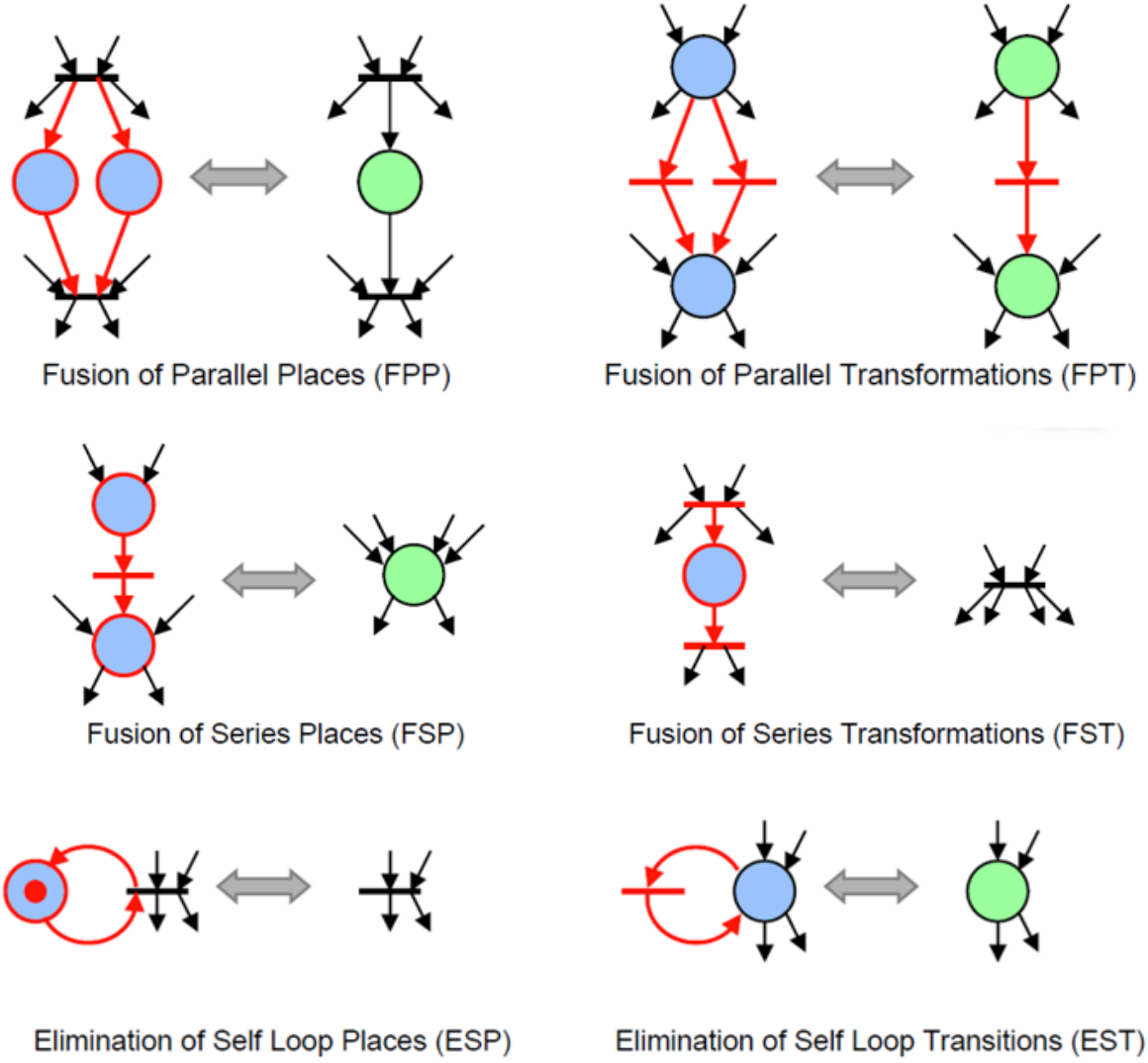
可以通过树的形式表现出所有可能的 marking

根节点为初始 marking，节点则是可达的 marking，通过 transition 的 fire 相连

对于 unboudned PN，引入 ω 表示任意个数的 token，则有

- PN 为 bounded $\iff$ 任何节点中不出现 ω
- PN safe $\iff$ 节点中只有 0，1
- transition t is dead $\iff$ t 不出现在任何边中

在分析 PN 时代价往往是随着 PN 规模的增大指数级增长的，故需要化简 PN，常用的方法有



PN with time

Time PN 是在经典 PN 的基础上，为每个 transition t 分配一个时间区间 $[a;b]$，其值与 t 最近一次 enabled 有关

如果 t 是在时间 c enabled 的，则其能 fire 的时间一定位于 $[c+a;c+b]$，且 t 或是在 $c+b$ 之前完成 fire 或是在 fire 之前因为另一个 transition 的 fire 而不再 enabled

fire 不需要花费时间

Time PN 的思路很符合常识：一个 Transition 在 enabled 之后不一定会立刻 fire，但一定会在某段时间过后 fire

time PN 的定义为

time PN 是一个 6-tuple $N=(P,T,F,Eft,Lft,\mu_0)$，其中

- P 是有限的 place 集合
- T 是有限的 transition 集合
- $F\subset(P\times T)\cup(T\times P)$ 是 flow relation

- $Eft, Lft : T \to \mathbb{N}$ 是 earliest fire time 和 latest fire time，满足 $\forall t \in T, Eft(t) \leqslant Lft(t) \leqslant \infty$
- μ_0 是初始 marking

令 T 为非负实数（代表时间），则 N 中的状态是一个 pair (μ, c)，其中 μ 是 marking，且 $c : enabled(\mu) \to T$ 被称为 clock function

对于初始状态 (μ_0, c_0) 满足

$$\forall t \in enabled(\mu_0), c_0(t) = 0$$

则一个 transition t 如果能在状态 (μ, c) 以 δ 的延迟 fire 等价于满足下列条件

- $t \in enabled(\mu)$
- $(\mu - \cdot t) \cap t\cdot = \varnothing$
- $Eft(t) \leqslant c(t) + \delta$
- $\forall t' \in enabled(\mu), c(t') + \delta \leqslant Lft(t')$

在从 s 以延迟 δ fire t 之后，新的状态 $s' = (\mu', c')$ 为

- $\mu' = (\mu - \cdot t) \cup t\cdot$
- 对于任意 $t' \in enabled(\mu')$，如果 $t' \neq t \wedge t' \in enabled(\mu)$ 则 $c'(t') = c(t') + \delta$，否则 $c'(t') = 0$

则 time PN 的 run 是一个 state，transition，delay 的序列

$$\rho = s_0 \overset{(t_0,\delta_0)}{\to} s_1 \overset{(t_1,\delta_1)}{\to} \cdots \overset{(t_{n-1},\delta_{n-1})}{\to} s_n \overset{(t_n,\delta_n)}{\to} \cdots$$

满足 s_0 是初始状态，且对任意 s_i，通过 transition t_{i-1} 在 delay δ_{i-1} 后 fire 得到

time PN 可以为同步的 fire 添加时间上的先后关系