

# 插值法

## 插值法与插值函数

- 用简单函数（多项式/分段多项式）为各种离散数组建立连续模型
- 为各种非有理函数提供好的逼近方法

插值函数：设函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义，且已知在点  $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$  上的值  $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$ ，若存在简单函数  $P(x)$  使

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

称  $P(x)$  为  $f(x)$  的**插值函数**，点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  称为**插值结点**，包含插值结点的区间  $[a, b]$  称为**插值区间**，上式称为**插值条件**

## 多项式插值

若  $P(x)$  是次数不超过  $n$  的代数多项式，则称  $P(x)$  为插值多项式，插值法为多项式插值

代数多项式在插值函数有重要地位

- 结构简单，计算机易处理，且任意多项式的导数和积分仍是多项式
- Weierstrass 逼近定理：定义在闭区间上的任何连续函数  $f(x)$ ，存在代数多项式  $p(x)$  一致逼近  $f(x)$ ，并达到所要求的精度

Weierstrass 逼近定理

设  $f(x) \in C[0, 1]$ ，则存在多项式  $p_n(x) \in P_n$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

插值法研究的问题：

- 满足插值条件的  $P(x)$  是否存在唯一
- 如何构造  $P(x)$
- 如何估计近似过程产生的误差

## 插值多项式的存在唯一性

设节点  $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  互异, 则满足插值条件的次数不超过  $n$  的多项式存在且唯一

证明: 设所求的插值多项式为

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

则由插值条件  $P_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$  可得到关于系数的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

其行列式为 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0$$

由克莱姆法则可知解存在且唯一

## Lagrange 插值

### Lagrange 基函数

引入基函数的概念, 即求  $n$  次插值多项式  $l_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$  使之满足

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases} (j = 0, 1, \dots, n)$$

即除了  $x_i$  以外所有点都是  $l_i(x)$  的零点, 可设

$$l_i(x) = A(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) = A \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$$

根据定义

$$A = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j}$$

因此

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

称为 Lagrange 基函数，Lagrange 基函数为  $n$  次多项式

## Lagrange 插值多项式

利用 Lagrange 基函数即可构造次数不超过  $n$  的多项式

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

显然其满足插值条件

$$L_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

又由插值多项式唯一性，可得

$$P_n(x) \equiv L_n(x)$$

需要注意

- 插值节点仅要求互异，对大小次序没有要求
- 插值基函数仅由插值节点决定，与被插函数无关
- 插值基函数顺序与插值节点一致

可以得到

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1$$

## 插值余项

截断误差  $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$  称为  $n$  次 Lagrange 插值多项式的余项

设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  存在  $n+1$  阶导数， $x_i \in [a, b] (i = 0, 1, \dots, n)$  为  $n+1$  个互异节点，则对  $\forall x \in [a, b]$  有

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$\xi \in (a, b)$  且与  $x$  有关

注意到当  $f(x)$  为次数  $\leq n$  的多项式时,  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , 即  $R_n(x) \equiv 0$ , 即插值多项式对次数  $\leq n$  的多项式是精确的

插值时内插效果一般优于外推, 且高次插值一般优于低次插值 (对不超过 4 次的插值)

## 牛顿插值

### 基函数

Lagrange 插值的问题在于虽然易于计算, 但是在增加一个节点时全部基函数都需要重新再算, 而由线性代数的知识可知, 任何  $n$  次多项式都可以表示为

$$1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

共  $n + 1$  个线性无关多项式的线性组合, 考虑将这  $n + 1$  个多项式选为插值基函数, 寻求如下形式的插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

其中  $a_i$  为待定系数

令上述插值多项式满足插值条件

$$P(x_0) = f_0 = a_0$$

$$P(x_1) = f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$P(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

可得

$$\begin{aligned} a_0 &= f_0 \\ a_1 &= \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\ a_2 &= \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

可以看出待定系数的形式会越来越复杂, 且有一定规律, 为此引入**差商**和**差分**的概念

### 差商

称

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

为  $f(x)$  在  $x_0, x_1$  点的一阶差商, 称

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

为  $f(x)$  在  $x_0, x_1, x_2$  的二阶差商

一般的,  $n-1$  阶差商的差商

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]}{x_0 - x_n}$$

称为  $f(x)$  在  $x_0, x_1, \dots, x_n$  点的  $n$  阶差商。0 阶差商即为该点的函数值

差商一般可通过列表计算

$$\begin{array}{ccccccc} f(x_0) & & & & & & \\ f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & & & \\ f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & & & \\ f(x_3) & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & & & \end{array}$$

差商可表示为函数值的线性组合, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

这表明差商与节点的排列次序无关 (差商的对称性), 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$$

且一个  $n$  次多项式  $f(x)$  的  $k$  阶差商, 当  $k \leq n$  时是一个  $n-k$  次多项式, 当  $k > n$  时恒等于 0

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  阶导数, 且  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , 则存在一点  $\xi \in [a, b]$  满足

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

## 牛顿插值多项式

设  $x$  为  $[a, b]$  上一点, 由一阶差商定义

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

可得

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

同理, 由二阶差分定义

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

可得

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

依此类推可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\ f[x, x_0] &= f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1) \\ f[x, x_0, x_1] &= f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2) \\ &\vdots \\ f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] &= f[x_0, x_1, \dots, x_n] + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_n) \end{aligned}$$

从后向前带入, 可得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

即

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

其中

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \omega_k(x)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \omega_{n+1}(x)$$

$N_n(x)$  为牛顿插值多项式,  $R_n(x)$  为牛顿型插值余项, 且易得

$$R_n(x_i) = 0 \quad N_n(x_i) = y_i$$

满足插值条件, 并且由插值多项式唯一性, 易得  $N_n(x) \equiv L_n(x)$ , 并且有递推关系

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

和余项公式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

即

$$R_n(x) \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

# 等距节点插值

## 差分

设函数  $y = f(x)$  在等距节点  $x_i = x_0 + ih (i = 0, 1, \dots, n)$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$  上的函数值为  $f_i = f(x_i)$ , 则定义

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

为函数  $f(x)$  在点  $x_i$  处的一阶向前差分和一阶向后差分

可递归定义  $m$  阶向前差分和向后差分

$$\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i \quad \nabla^m f_i = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}$$

差分也可以像差商那样列表计算

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & & & & & & \\ f_1 & \Delta f_0 & & & & & \\ f_2 & \Delta f_1 & \nabla f_2 & & & & \\ f_3 & \Delta f_2 & \nabla f_3 & \Delta^2 f_0 & \nabla^2 f_2 & & \\ f_4 & \Delta f_3 & \nabla f_4 & \Delta^2 f_1 & \nabla^2 f_3 & \Delta^3 f_0 & \nabla^3 f_3 \end{array}$$

差分可以使用函数值表示, 即

$$\Delta^n f_i = f_{n+i} - C_n^1 f_{n+i-1} + \dots + (-1)^n C_n^n f_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f_{n+i-j}$$
$$\nabla^n f_i = f_i - C_n^1 f_{i-1} + \dots + (-1)^n C_n^n f_{i-n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f_{i-j}$$

并且有

$$\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n}$$

同样的, 函数值也可以用各阶差分表示

$$f_{n+i} = f_i + C_n^1 \Delta f_i + \dots + C_n^n \Delta^n f_i = \sum_{j=0}^n C_n^j \Delta^j f_i$$

差分 and 差商的关系为

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}] = \frac{1}{m! h^m} \Delta^m f_i$$
$$f[x_{i-m}, x_{i-m+1}, \dots, x_i] = \frac{1}{m! h^m} \nabla^m f_i$$

差分与微商的关系为

$$\Delta^n f_n = h^n f^{(n)}(\xi) \quad \xi \in (x_k, x_{k+n})$$

## 等距节点插值公式

设插值节点为  $x_i = x_0 + ih$ ，若计算  $x_0$  附近的  $x$  的值，带入  $x = x_0 + th (0 \leq t \leq n)$ ，可得

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + \Delta f_0 t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} t(t-1) \cdots (t-n+1)$$

上述公式即称为牛顿向前插值公式，余项为

$$R_n(x_0 + th) = \frac{t(t-1) \cdots (t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

类似地，计算  $x_n$  附近函数值时可令  $x = x_n + th (-n \leq t \leq 0)$ ，代入得

$$N_n(x_n + th) = f_n + \nabla f_n t + \frac{\nabla^2 f_n}{2!} t(t+1) + \cdots + \frac{\nabla^n f_n}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1)$$

上述公式即称为牛顿向后插值公式，余项为

$$R_n(x_n + th) = \frac{t(t+1) \cdots (t+n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \xi \in (x_0, x_n)$$

## Hermite 插值

### Hermite 插值多项式

Lagrange 插值和牛顿插值只保证函数值相等，有时候也需要保证导数值相等，这样的插值称为 Hermite 插值

设  $[a, b]$  上的节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ，有  $y_i = f(x_i), m_i = f'(x_i)$ ，要求有插值多项式  $H(x)$  满足

$$H(x_i) = y_i \quad H'(x_i) = y'_i$$

即给出  $2n + 2$  个条件，确定一个次数不超过  $2n + 1$  的多项式，其形式为

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

可将  $H_{2n+1}(x)$  构造成如下形式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n y_i \alpha_i(x) + \sum_{i=0}^n y'_i \beta_i(x)$$

其中  $\alpha_i(x), \beta_i(x)$  均为  $2n + 1$  次多项式，且满足



$$\begin{aligned}\alpha_i(x_k) &= \delta_{ik} & \alpha'_i(x_k) &= 0 \\ \beta_i(x_k) &= 0 & \beta'_i(x_k) &= \delta_{ik}\end{aligned}$$

显然满足插值条件，则

$$\begin{aligned}\alpha_i(x) &= \left(1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}\right) l_i^2(x) \\ \beta_i(x) &= (x - x_i) l_i^2(x)\end{aligned}$$

式中  $l_i(x)$  即为对应的 Lagrange 基函数

## 三次 Hermite 插值多项式

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的实函数， $x_0, x_1$  是区间上相异两点，求三次多项式  $H_3(x)$  满足

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i \\ H'_3(x_i) = y'_i \end{cases} \quad i = 0, 1$$

则为三次 Hermite 插值多项式

满足条件的多项式存在唯一，构造如下

$$H_3(x) = y_0 \alpha_0(x) + y_1 \alpha_1(x) + y'_0 \beta_0(x) + y'_1 \beta_1(x)$$

则根据上文结果，可得

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= [1 + 2l_1(x)] l_0^2(x) & \beta_0(x) &= (x - x_0) l_0^2(x) \\ \alpha_1(x) &= [1 + 2l_0(x)] l_1^2(x) & \beta_1(x) &= (x - x_1) l_1^2(x)\end{aligned}$$

当  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内有四阶导时，余项为

$$R_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) (x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

设

$$M_4 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f^{(4)}(x)|$$

则当  $x \in (x_0, x_1)$  时有误差限

$$|R_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4$$

## 分段低次插值

---

随着插值多项式次数的增长，插值多项式不一定收敛到原函数，这样的现象被称为 Runge 现象

Runge 证明了存在一个常数  $c \approx 3.63$ ，当  $|x| \leq c$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = f(x)$ ，而当  $|x| > c$  时  $\{L_n(x)\}$  发散

事实上很少采用超过 7 次的插值多项式，因此引入分段低次插值的概念

## 分段线性插值

考虑区间  $[a, b]$  上的节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  及其对应的函数值  $y_i = f(x_i)$ ，求一个分段函数  $P(x)$  满足

- $P(x_i) = y_i$
- 在每个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是线性函数

则称  $P(x)$  为分段线性插值函数

在每个区间做线性插值即可

$$P(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$P(x)$  是一个折线函数，在  $[a, b]$  上连续，但是不光滑（一阶导不连续）

其余项估计式为

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &= \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\ &\leq \frac{h_i^2}{8} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \end{aligned}$$

设

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

则分段线性插值的余项为

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{h^2}{8} M_2 \quad \forall x \in [a, b]$$

对光滑性要求不高的插值问题，分段线性插值的效果好，计算简单

## 分段插值函数

除了分段线性插值以外，还有分段二次插值和分段三次 Hermite 插值

分段三次 Hermite 插值的余项为

$$|f(x) - H(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4 \quad x \in [a, b]$$

## 三次样条插值

### 三次样条

给定区间  $[a, b]$  与其上节点  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  和节点对应的函数值  $y_i = f(x_i)$ ，若函数  $S(x)$  满足

- $S(x_i) = y_i$
- 在每个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是次数不超过 3 的多项式
- 在每个内节点上有二阶连续导数

则称  $S(x)$  为关于上述划分的一个三次多项式样条函数，简称三次样条

$S(x)$  在每个区间是次数不超过 3 的多项式，故需要 4 个待定参数，区间共  $n$  个，则应当确定  $4n$  个系数，而连续导数条件有  $3n - 3$  个

$$\begin{cases} S(x_i - 0) = S(x_i + 0) \\ S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) \\ S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

加上插值条件，共  $4n - 2$  个，因此还需两个条件确定  $S(x)$ ，一般补充两个边界条件

固支条件：已知两段的一阶导

$$S'(x_0) = f'_0 \quad S'(x_n) = f'_n$$

已知两段二阶导

$$S''(x_0) = f''_0 \quad S''(x_n) = f''_n$$

自然边界条件

$$S''(x_0) = 0 \quad S''(x_n) = 0$$

或是周期性条件

$$\begin{aligned} S(x_0 + 0) &= S(x_0 - 0) \\ S'(x_0 + 0) &= S'(x_0 - 0) \\ S''(x_0 + 0) &= S''(x_0 - 0) \end{aligned}$$

可通过待定系数法求解

有误差估计式

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| &\leq \frac{5}{384} h^4 M_4 \\ \max_{a \leq x \leq b} |f'(x) - S'(x)| &\leq \frac{1}{24} h^3 M_4 \\ \max_{a \leq x \leq b} |f''(x) - S''(x)| &\leq \frac{3}{8} h^2 M_4\end{aligned}$$

## 三转角方程

设  $S'(x_i) = m_i$  , 则通过确定  $m_i$  来求  $S(x)$  的方法称为三转角法。使用分段 Hermite 插值

参数

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$$

以及

$$g_{i+1} = 3(\mu_i f[x_{i-1}, x_i] + \lambda_i f[x_i, x_{i+1}]) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

有

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = g_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

## 三弯矩方程

设  $S''(x_i) = M_i$  , 则通过确定  $M_i$  来求  $S(x)$  的方法称为三弯矩法。

参数

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} = 1 - \lambda_i$$

以及

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right] = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

有

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$$