Tutorial 6

从优化问题到判定问题

对于优化问题和判定问题，其均关注一个结构和结构上的一个指标，不同之处在于优化问题关注指标的优化，而判定问题引入参数 k ，判定是否存在结构，其指标满足与 k 的某种关系

以最大团问题为例：

- 优化问题：求图 G 中最大的团
- 错误的判定问题：图 G 中最大的团大小是否为 k
- 正确的判定问题：图 G 中是否存在大小为 k 的团

> HY：转化时把最大/最小之类的限定丢掉，不要担心转化为判定问题以后问题看起来变简单了。可以证明判定问题和优化问题难度是一样的

P 问题

P 问题是指多项式时间可解

考虑如下“CLIQUE 的判定问题”

对于一个常数 k ，输入无向图 G ，判定图中是否有大小为 k 的团

- 枚举所有大小为 k 的子图，代价为 $\binom{n}{k}$
- 对每个子集检查是否为完全图，代价为 k^2

总的代价为

$$\binom{n}{k} \times k^2 = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times k^2$$

由于 k 为常数，在 O 的概念下代价为

$$O\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right) = O(n^k)$$

这是一个 P 问题

那么能够得出 CLIQUE 判定问题多项式时间可解 $\iff$ CLIQUE 优化问题多项式时间可解，即一个 NPC 问题多项式时间可解，从而 NP = P 吗？

不能！

一个 CLIQUE 的判定问题 k 是作为参数输入，而非一个固定的常数，在 $k \in [1, n]$ 的情况下上述多项式时间可解的推理不成立，这个问题被称为伪 CLIQUE 问题

归约 or 规约

归约（Reduction）的含义是一个问题可通过解决另一个问题来间接的解决

规约（Specification）的概念出现在第一节课计算模型中，表示一个算法问题所有合法的输入和对于合法输入相应的输出是什么

归约是问题间的二元关系，用于描述两个问题相对的难易程度

规约是算法问题的明确定义

CNF-SAT and DNF-SAT

已知 CNF-SAT 是一个经典的 NPC 问题，而 DNF-SAT 是一个 P 问题，那么可以通过将 CNF-SAT 规约到 DNF-SAT 来求解么？

如果能证明 $CNF \leqslant_p DNF$，显然可证明 NP = P

答案是不行，因为将 CNF 规约到 DNF 是 NP-hard 问题，不能在多项式时间完成。这个是一个典型的规约代价影响到判定问题代价的例子

简单的 NPC 证明

特例型

已知特例问题是 NPC，求证一般问题是 NPC

由于将特例问题规约到一般问题是容易的，这个证明过程也是简单的：将特例问题的限制转换为一般问题的输入

最大团问题和稠密子图问题

（特例）最大团问题：无向图 G 中是否有大小为 k 的团

（一般）稠密子图：无向图 G 中是否存在子图 H，其有 k 个顶点，且至少有 y 条边

最大团问题是稠密子图问题的特例，规约即为大小为 k 的团 $\to$ 子图有 k 个顶点，团 $\to$ 至少有 $\dfrac{k(k-1)}{2}$ 条边

划分问题和背包问题

（特例）划分问题：n 个物品，大小为 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ，是否存在一个划分使两个集合中物品大小和相等

（一般）背包问题：n 个物品，大小为 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ，价值为 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ，给定参数 k, C ，是否可以在背包中装若干物品，使得装入的物品大小之和不超过 C ，且价值之和不少于 k

规约时可以令 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, c_i = s_i$ ，且令 $k = C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$ ，显然这等价于寻找一个集合 S 满足

$$\sum_{s \in S} s \leqslant C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$$
$$\sum_{s \in S} s \geqslant k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$$
$$\sum_{s \in S} s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} s_i$$

即为划分问题

等价型

独立集问题和点覆盖问题

> 独立集：点集，其中任意两点不相邻，独立集大小为其中顶点个数
>
> 点覆盖：点集，图中任意一边至少有一个端点是点覆盖中的点，点覆盖大小为其中顶点个数

独立集问题：给定无向图 G 和参数 k ，判定 G 中是否存在大小为 k 的独立集

点覆盖问题：给定无向图 G 和参数 k ，判定 G 中是否存在大小为 k 的点覆盖

等价关系为，I 是 G 的独立集 $\iff C = V \setminus I$ 是 G 的点覆盖

判断是否有大小为 k 的独立集等价于判断是否有大小为 $|V| - k$ 的点覆盖

支配集和集合覆盖

> 支配集：设 D 为支配集，则任意 $V \setminus D$ 中顶点均有边与 D 中顶点相连，支配集大小为其中顶点个数
>
> 集合覆盖：若干子集的子集族，其中所有子集的并为全集，集合覆盖大小为子集个数

支配集问题：给定无向图 G 和参数 k ，判定 G 中是否存在大小为 k 的支配集

集合覆盖问题：给定全集 U 和 U 的 n 个子集 $S_1, S_2, ..., S_n$ ，满足 $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = U$ ，判定是否存在大小为 k 的集合覆盖

等价关系为，对 G 中每个顶点 v_i ，对应一个子集 S_i ，其集合元素即为顶点 v_i 的邻居及其自身

D 为支配集 $\iff$ D 中顶点对应子集的并为全集