绪论

本课程的研究对象：用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现。

误差

误差来源

模型误差：建立数学模型时忽略的次要因素

观测误差：观测时的误差

截断误差：对无穷过程的截断

舍入误差：对无穷小数的四舍五入

误差分析与问题的病态性相关

初始数据的的微小变化(扰动)，导致计算结果产生很大影响，这样的问题称为**病态**的（ill-conditioned)，相反称为良态的。

对于一个病态的问题很难得到一个较好的解决方法。实际计算时需要避免在算法实现过程中误差的影响逐次放大

误差的基本概念

绝对误差与相对误差

绝对误差：设 x^* 为某个数据的准确值，x 为 x^* 的一个近似，称

$$e(x) = x - x^*$$

为近似值 x 的**绝对误差**

由于 x^* 通常无法确定，只能估计其绝对误差值不超过某个整数 $\varepsilon(x)$ ，即

$$|e(x)| = |x - x^*| \leqslant \varepsilon(x)$$

称其为**绝对误差限**，可记为 $x^* = x \pm \varepsilon(x)$

相对误差：设 x^* 为某个数据的准确值，x 为 x^* 的一个近似，称

$$e_r(x) = \frac{e(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*}$$

为近似值 x 的**相对误差。**实际计算时通常取

$$e_r(x) = \frac{e(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x}$$

同理可得**相对误差限**

$$|e_r(x)| \leqslant \varepsilon_r$$

有效数字

若近似值 x 的误差限是某一位的一半，该位到 x 的第一位非零位有 n 个数字，则称 x 有 n 位有效数字，即

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n \times 10^m$$

其中 $a_1 \neq 0$，其绝对误差限满足

$$e(x) \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

取有效数字的方法：取 n 位，对 $n+1$ 位四舍五入

反之，设近似数表示为

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n \times 10^m$$

若其有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$|\varepsilon_r(x)| \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

而若 x 的相对误差限为

$$|\varepsilon_r(x)| \leqslant \frac{1}{2\left(a_1 + 1\right)} \times 10^{-(n-1)}$$

其至少有 n 位有效数字

数值运算的误差估计

函数运算的误差估计：由 Taylor 公式可得

$$\varepsilon(y) \approx f'(x)|\varepsilon(x)|$$
$$\varepsilon_r(y) \approx \frac{|x f'(x)|}{|f(x)|} \varepsilon_r(x)$$

多元函数同理

算术运算的误差估计为

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\left(x_1 \pm x_2\right) &= \varepsilon\left(x_1\right)+\varepsilon\left(x_2\right) \\
\varepsilon\left(x_1 \cdot x_2\right) &= \left|x_1\right| \varepsilon\left(x_2\right)+\left|x_2\right| \varepsilon\left(x_1\right) \\
\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \frac{\left|x_1\right| \varepsilon\left(x_2\right)+\left|x_2\right| \varepsilon\left(x_1\right)}{\left|x_2\right|^2}
\end{aligned}
$$

数值运算中误差分析的方法与原则

- 使用数值稳定的算法
- 避免相近的数相减
- 避免绝对值很大的数相乘
- 避免用绝对值很小的数做除数
- 防止大数“吃”小数，累加时按照绝对值从小到大累加
- 简化计算步骤