Graph Traversal

Warm up

Graph

图可以表示某集合中的元素之间的二元关系。

给定图 $G=(V,E)$ ，V 是节点集，$E\subseteq V\times V$ 是结点间的某种二元关系。若 E 是对称关系，则称 G 为**无向图**，否则 G 为**有向图**

用于表示图的数据结构有两种：

- 邻接表：每个节点维护一个链表，存放其邻居
- 邻接矩阵：矩阵 $A_{n\times n}$ 的元素 $A[i,j]$ 是一个布尔值，表示是否存在一条由节点 i 指向节点 j 的边

邻接表和邻接矩阵都只能描述非对称关系，描述无向图时采用对称有向图

Outline of DFS and BFS

深度优先遍历：递归

```
dfs(G, v)
    Mark v as "discovered"
    For each vertex w that edge vw is in G
        if w is undiscovered
            dfs(G, w)
        otherwise
            "Check" vw without visiting w
    Mark v as "finished"
```

广度优先遍历：队列

```
bfs(G, s)
    Mark s as "discovered"
    enqueue(pending, s)
    while(pending is nonempty)
        dequeue(pending, v)
        For each vertex that edge vw is in G
            if w is "undiscovered"
                Mark w as "discovered"
                enqueue(pending, w)
        Mark v as "finished"
```

Finding Connected Components

基于深度优先遍历，找到图中所有连通分支

若图中有 n 个节点和 m 条边，时间复杂度为 $\Theta(m+n)$

Traversal

Visits on a vertex

根据图遍历中一个节点被访问的不同状态，可以将其染成三种颜色

- 白色：尚未被遍历到
- 灰色：已经遍历到，但是对其的遍历尚未结束。（正在处理其邻居节点）
- 黑色：遍历结束。（所有邻居节点已经被处理完）

显然节点在遍历过程中颜色变化为 白色 $\rightarrow$ 灰色 $\rightarrow$ 黑色，且不会回退

遍历开始时节点均是白色。第一次访问时由白变灰，之后的多次访问中保持灰色，在最后一次访问后变为黑色

Depth-First Search Skeleton

首先为了能够在图不连通时遍历所有节点，需要一个 **wrapper** 以调度算法确保在某个连通分支遍历后能遍历下一个连通分支

DFS-WRAPPER(G)

```
Color all nodes WHITE
foreach node v in G do
    if v.color == WHITE then
        DFS(v)
```

DFS(v)

```
v.color := GRAY
<Preorder processiong of node v>
foreach neighbor w of v do
    if w.color == WHITE then
        <Exploratory processing of edge vw>
        DFS(w)
        <Backtrack processing of edge vw>
    else
        <Checking edge vw>
<Postorder processing of node v>
v.color := BLACK
```

在算法框架的不同位置（尖括号的语句）可插入不同的处理语句以解决具体问题

- 遍历前处理：当一个节点 v 刚刚从白色变为灰色时
- 遍历中处理：
    - 遍历某邻居节点前
    - 遍历某邻居节点后
    - 处理之前已被遍历的邻居节点
- 遍历后处理：在节点递归遍历完成后，变为黑色前

只要限定这些处理包含常数个简单操作，深度优先的代价即为 $O(m+n)$，n 为图 G 中节点个数，m 为边的条数

对用一个图算法，常常将一个代价为 $O(m+n)$ 的算法称作是**线性时间**的

Breadth-First Search Skeleton

基于队列可以实现 BFS 的策略，与 DFS 不同，一个节点开始被处理后就会一直处理完成，不会有多次回到其进行处理的情况。wrapper 的作用同 DFS

BFS-WRAPPER(G)

```
foreach node v in G do
    v.color := WHITE
    v.parent := NULL
    v.dis := +INFIN
foreach node v in G do
    if v.color = WHITE then
        BFS(v)
```

BFS(v)

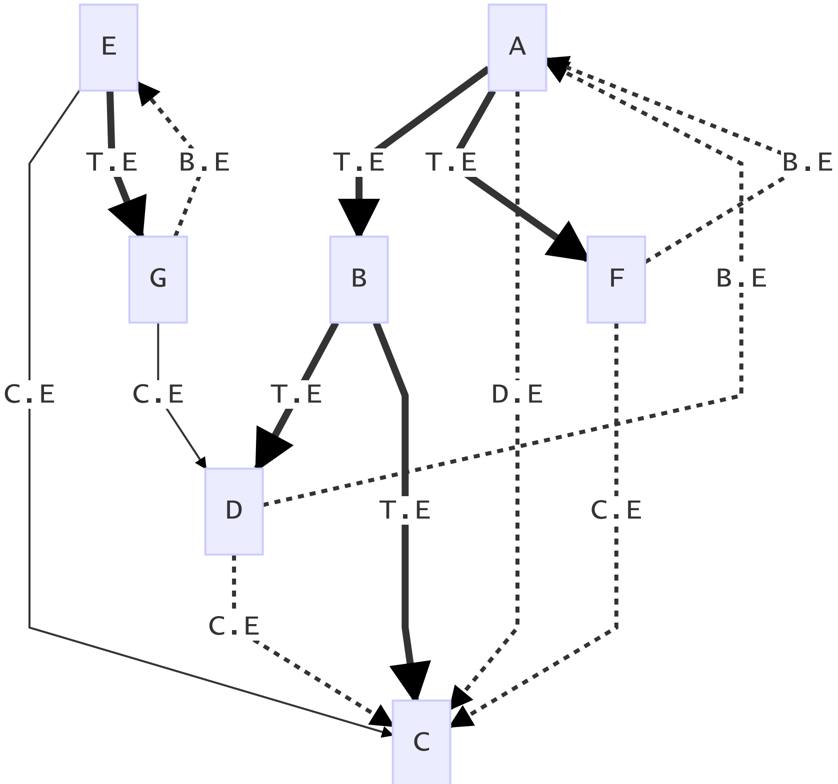
```
Initialize an empty queue queNode
v.color := GRAY
v.dis := 0;
queNode.ENQUE(v)
while queNode != empty do
    w := queNode.DEQUE();
    foreach neighbor x of w do
        if x.color = WHITE then
            x.color := GRAY
            x.parent := w;
            x.dis := w.dis + 1
            queNode.ENQUE(x)
    <processing of node w>
    w.color := BLACK
```

上述框架维护了由 BFS 向外推进而产生的父子关系，也维护了从遍历起始节点到每个节点的最短路径信息。可以在遍历中插入对节点进行处理的语句

Depth-First Search

Depth-First Search Tree

Depth-First Search 的过程可将图中的边分为四种类型



Tree Edge

当检查节点 u 的邻居时，若发现白色节点 v ，递归对其 DFS，则将边 uv 标记为 TE。

在对一个连通分支进行 DFS 时，所有 TE 组成的子图连通，无环且包含连通分支中所有点，忽略边的方向，所有 TE 组成当前连通分支的一个生成树，称为**深度优先遍历树**

以遍历开始的节点为根，根指向叶的方向即为遍历推进的方向，由此可定义节点间的祖先与后继的关系

Back Edge

当节点 u 的邻居 v 在之前的遍历中已访问过且 v 是 u 在遍历树中的**祖先**时，将边 uv 标记为 BE

Descendant Edge

当节点 u 的邻居 v 在之前的遍历中已访问过且 v 是 u 在遍历树中的**后继**时，将边 uv 标记为 BE

Cross Edge

不是 TE, BE, DE 的边即为 CE（节点间无祖先后继关系）

Time Relation on changing color

为了更直接刻画 DFS 遍历时的推进过程，定义”遍历时间“

- time：全局时间，初始为 0，每当一个节点颜色改变时便 +1，最终值为 $2n$
- discover time：一个节点变成灰色时的 time
- finish time：一个节点变成黑色时的 time
- **active interval**：区间 $[\text{discover time}, \text{finish time}]$

在 DFS 的框架中插入适当的语句即可实现对时间的记录

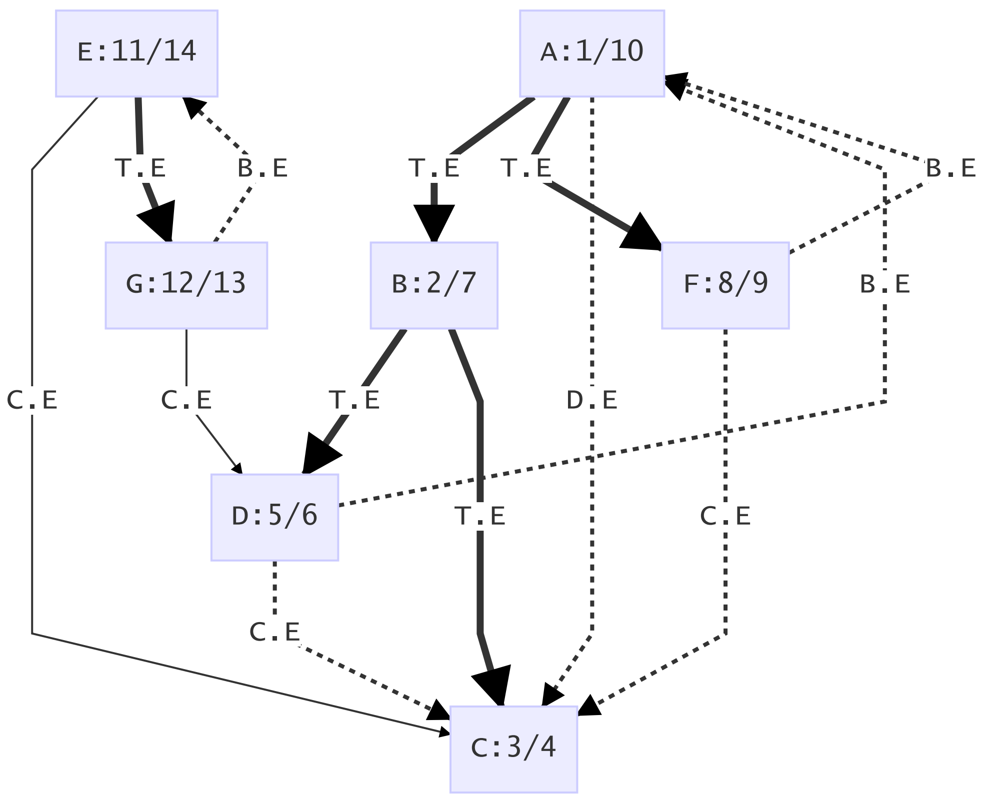
DFS-CLOCK(v)

```
v.color := GRAY
time := time + 1
v.discoverTime := time
<Preorder processiong of node v>
foreach neighbor w of v do
    if w.color == WHITE then
        <Exploratory processing of edge vw>
        DFS(w)
        <Backtrack processing of edge vw>
    else
        <Checking edge vw>
<Postorder processing of node v>
time := time + 1
v.finishTime := time
v.color := BLACK
```

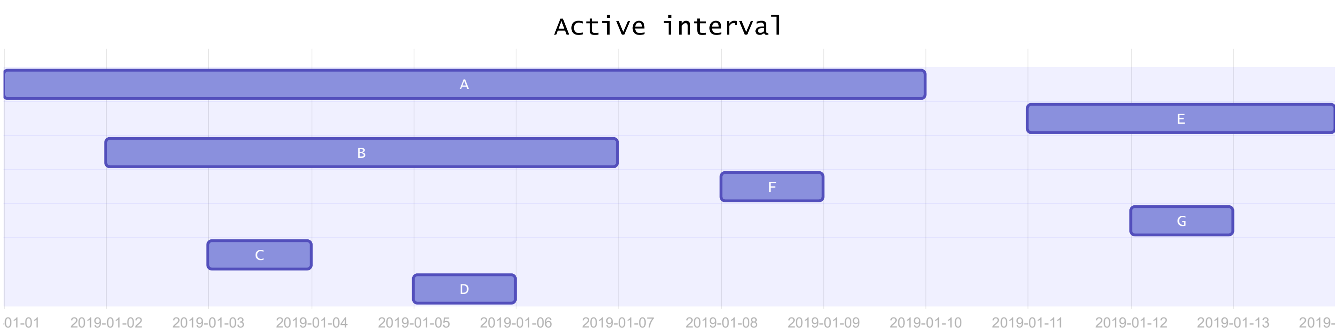
> **定义 4.1** 活动区间

> 在遍历过程中，一个节点的活动区间定义为从该结点被发现到遍历结束的时间区间
>
> $$\text{active}(v) = [\text{discover time}, \text{finish time}]$$

以上文的遍历过程为例，标注其活动区间



对于每个节点，其活动区间的关系如下



节点的活动区间的包含关系反映了节点在遍历树中的祖先后继关系

> **定理 4.1** 考察深度优先遍历图 $G = (V, E)$ 的过程，对任意顶点 u, v 有

> - v 是 u 的后继 $\iff$ $\text{active}(v) \subseteq \text{active}(u)$，如果 $v \neq u$ 则 $\text{active}(v) \subset \text{active}(u)$
> - u 和 v 没有祖先后继关系 $\iff$ $\text{active}(v), \text{active}(u)$ 互不包含
> - 若 uv 是 G 中的边
>   - uv 是 CE $\iff$ $\text{active}(v)$ 在 $\text{active}(u)$ 前面
>   - uv 是 DE $\iff$ 存在第三个节点 $x, \text{active}(v) \subset \text{active}(x) \subset \text{active}(u)$
>   - uv 是 TE $\iff$ $\text{active}(v) \subset \text{active}(u)$ 且不存在节点 $x, \text{active}(v) \subset \text{active}(x) \subset \text{active}(u)$
>   - uv 是 BE $\iff$ $\text{active}(u) \subset \text{active}(v)$

White Path Theorem

如何判断遍历树中的祖先后继关系

> **定理 4.2** 白色路径定理
>
> 在深度优先遍历树中，节点 v 是节点 w 的祖先，当且仅当在遍历过程中刚刚发现 v 的时刻，存在一条从 v 到 w 的全部由白色节点组成的路径
>
> 证明:
>
> - $\Rightarrow$：若节点 v 是 w 的祖先，考察从 v 到 w 由 TE 组成的路径，在节点 v 刚刚被发现的时刻，这条路径是白色路径
> - $\Leftarrow$：对白色路径的长度 k 归纳
>   - $k = 0$，显然
>   - 假设对所有长度小于 k 的白色路径，命题成立
>   - 考虑长度为 k 的白色路径 $P = v \to x_1 \to \cdots \to x_i \to \cdots \to w$，假设节点 x_i 是白色路径 P 上第一个被遍历过程发现的节点，基于 x_i 将路径分为两部分 $P_1 = v \to \cdots \to x_i, P_2 = x_i \to \cdots \to w$
>
> P_2 是长度小于 k 的白色路径，基于归纳假设，x_i 是 w 的祖先，显然 $v.discoverTime < x_i.discoverTime, x_i.finishTime < v.finishTime$，故根据定理 4.1，有 v 是 x_i 的祖先，祖先后继关系可传递，故 v 是 w 的祖先