假设检验

基本概念

假设检验就是对总体的某些未知特征提出假设，并且利用样本来推断假设的正确性

如对一个正态总体的均值提出假设

$$H_0 : \mu = 500$$

称 $[Math Processing Error]H_{0}$ 为原假设，则有对立假设

$$H_1 : \mu \neq 500$$

若对立假设位于原假设的一边，称为**单边假设**，否则称为**双边假设**

若假设中只含一个假设，称为**简单假设**，否则称为**复合假设**

若假设只涉及总体中的未知参数，称为**参数假设检验**

假设检验的流程

假设检验的基本流程为

- 根据问题提出原假设 H_0 和对立假设 H_1
- 构造一个**统计量**，在 H_0 成立的情况下推导出其分布
- 给出小概率 α ，确定拒绝域 W 。
  - 如果原假设成立（考虑 $H_0 : \mu = \mu_0$ ），由于样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值的一个合理估计，故 $|\overline{X} - \mu_0|$ 的值不会太大，而如果这个差超过了某个界限 k ，则认为原假设不成立
  - 界限的确定利用了小概率 α ，即考虑构造统计量

    $$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

    若 $|\overline{X} - \mu_0| \geqslant k$ 则有 $|U| \geqslant \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}$ ，令该事件发生的概率为 α ，即

    $$P\left(|U| \geqslant \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

    界限 $k = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$ ，满足要求的域即为 $\{|U| \geqslant u_{\alpha/2}\}$

    - 若代入样本值后落入拒绝域，则说明在 H_0 成立的前提下，小概率事件发生了，根据小概率事件原理，前提错误，H_0 不成立
- 由样本计算出统计量的观测值，带入，若落入拒绝域则拒绝 H_0 ，否则接受 H_0

假设检验往往会保护原假设，只有在证据充分的情况下才拒绝原假设

正态总体均值的假设检验

单个正态总体均值的假设检验

给定显著性水平 α ，设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组样本，检验问题为

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0 \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$

若 σ^2 已知，构造检验统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

则在 H_0 成立的情况下，$U \sim N(0,1)$ ，拒绝域为

$$W = \{|U| \geqslant u_{\alpha/2}\}$$

若 σ^2 未知，构造检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

则在 H_0 成立的情况下，$T \sim t(n-1)$ ，拒绝域为

$$W = \{|T| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

两个正态总体均值差的假设检验

给定显著性水平 α ，设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 为来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一组样本，$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是来自总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一组样本，且两样本相互独立，检验问题为

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

若 σ_1^2, σ_2^2 已知，构造检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

则在 H_0 成立的情况下，$U\sim N(0,1)$ ，拒绝域为

$$W=\{|U|\geqslant u_{\alpha/2}\}$$

若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 但 σ^2 未知，构造检验统计量

$$T=T=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}$$

则在 H_0 成立的情况下，$T\sim t(n_1+n_2-2)$ ，拒绝域为

$$W=\{|T|\geqslant t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$$

正态总体方差的假设检验

单个正态总体方差的假设检验

给定显著性水平 α ，设 $X_1,X_2,...,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本，检验问题为

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$$
$$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

若 μ 未知，构造检验统计量

$$\mathcal{X}^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

则在 H_0 成立的情况下，$\mathcal{X}^2\sim\mathcal{X}^2(n-1)$ ，拒绝域为

$$W=\{\mathcal{X}^2\leqslant\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}\cup\{\mathcal{X}^2\geqslant\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)\}$$

两个正态总体方差比的假设检验

给定显著性水平 α ，设 $X_1,X_2,...,X_{n_1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的一组样本，$Y_1,Y_2,...,Y_{n_2}$ 是来自总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的一组样本，且两样本相互独立，检验问题为

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
$$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

若 μ_1, μ_2 未知，构造检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

则在 H_0 成立的情况下，$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ ，拒绝域为

$$W = \{F \leqslant F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} \cup \{F \geqslant F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\}$$