# Ejercicios Tema 4. Introducción a las Máquinas de Vectores Soporte.

**Pregunta 1.-** ¿Cuál es el objetivo del algoritmo SVM? ¿Cuándo se puede aplicar con éxito?

**Pregunta 2.-** ¿Qué función lineal utiliza una SVM para la clasificación? ¿Cómo se asigna un vector de entrada **x** (patrón) a la clase positiva o negativa?

**Pregunta 3.-** Si los ejemplos de entrenamiento son linealmente separables, ¿cuántas fronteras de decisión pueden separar los puntos de datos positivos de los negativos? ¿Qué frontera de decisión calcula el algoritmo SVM? ¿Por qué?

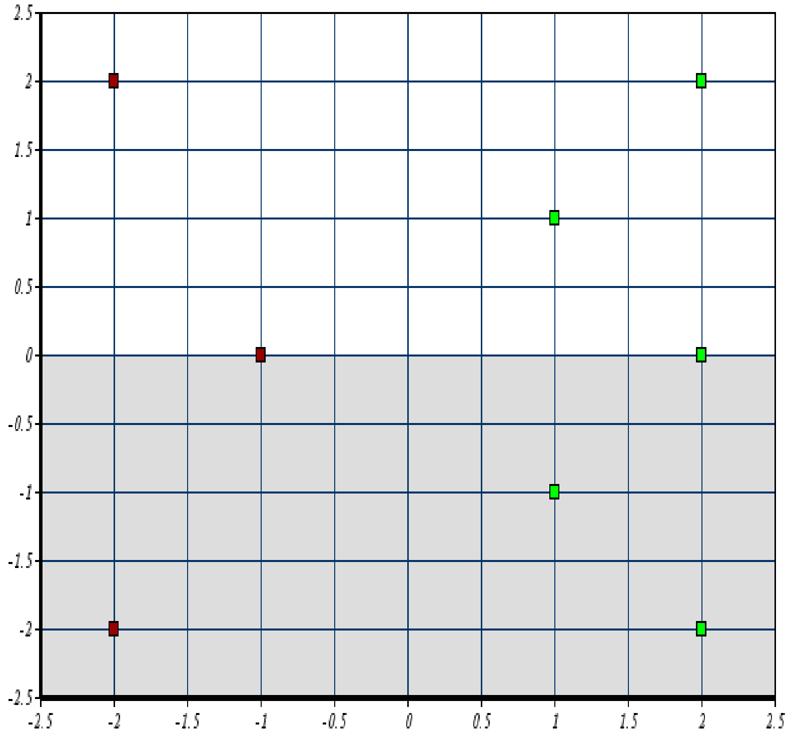
**Pregunta 4.-** ¿Qué es el margen? ¿Cuáles son las ecuaciones de los dos hiperplanos de margen $H^+$ y $H^-$?

**Pregunta 5.-** Ilustre el problema de minimización restringida que define el aprendizaje de la SVM dado un conjunto de ejemplos de entrenamiento linealmente separables. ¿Cuál es el resultado de resolver el problema?

**Pregunta 6.-** Explique por qué el problema de minimización restringida se transforma en un problema de maximización dual. ¿Qué vectores de entrada (patrones de entrenamiento) se utilizan para calcular la solución?

**Pregunta 7**.- Resuma las principales ventajas y limitaciones de SVM.

**Ejercicio 8.-** Aplicar una SVM lineal para encontrar un hiperplano que separe los puntos positivos (verdes) de los negativos (rojos), a partir de la formulación primal del problema.



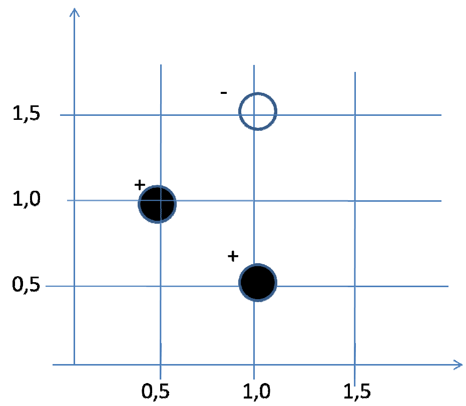
**Ejercicio 9.-** Queremos diseñar un clasificador para el problema XOR, donde los puntos $\mathbf{x}_1$=(−1, −1) y $\mathbf{x}_3$=(1, 1) son de la clase$C_1$, y $\mathbf{x}_3$=(−1, 1) y $\mathbf{x}_4$=(1, −1) son de la clase $C_2$. Consideraremos la siguiente función de transformación $\varphi : R^2 \rightarrow R^6$

$$y = \phi(x_1, x_2) = \left[1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1x_2, x_1^2, x_2^2\right]^T$$

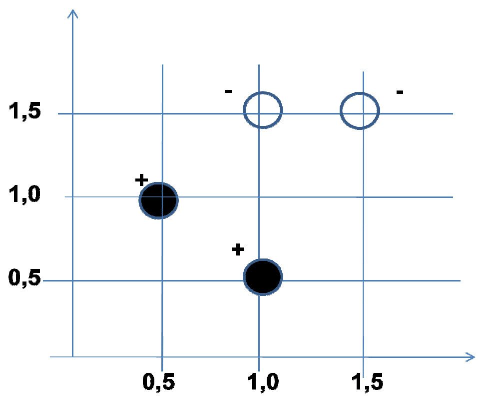
Demostrar que el problema es linealmente separable en el espacio transformado. Diseñe un clasificador de margen máximo para el problema haciendo uso de la función kernel. Especifique los hiperplanos (hiperplanos de margen e hiperplano de separación) y el valor del margen en el espacio de características.

**Ejercicio 10.-** Dados los siguientes patrones de entrenamiento en $R^1$ $x_1$=0, $z_1$=1, $x_2$=1 y $y_2$=-1. Entrenar una SVM lineal para determinar el hiperplano de separación.

**Ejercicio 11.-** Considere los tres vectores de entrada bidimensionales linealmente separables de la siguiente figura. Encuentre la frontera SVM lineal que separa óptimamente las clases maximizando el margen.



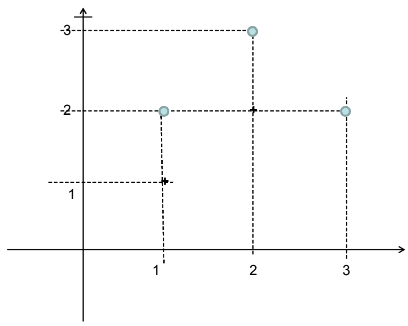

**Ejercicio 12.-** Considere los cuatro vectores de entrada bidimensionales linealmente separables de la siguiente figura. Encontrar la SVM lineal que separa óptimamente las clases maximizando el margen. Derivar los problemas primal y dual asociados a la optimización.



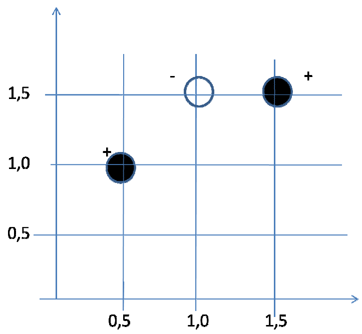

**Ejercicio 13.-** Considera los cinco vectores: (0,0) y (2,2) de la clase positiva, y (-1,0), (2,0) y (3,0) de la clase negativa. Encuentre la SVM lineal que separe óptimamente las

clases al maximizar el margen. Si encuentra un punto no separable, puede ignorarlo para el entrenamiento (en lugar de utilizar la SVM de margen suave). Utilice los problemas primal y dual. Después del entrenamiento, clasifique un nuevo patrón de prueba (1,0).

**Ejercicio 14.-** Considere los cinco vectores bidimensionales de la siguiente figura, donde las cruces son puntos de la clase positiva y los círculos son puntos de la negativa. Encuentre la SVM lineal que separa óptimamente las clases al maximizar el margen. Si encuentra un punto no separable, puede ignorarlo para el entrenamiento (en lugar de utilizar la SVM de margen suave).




**Ejercicio 15.-** Considere los tres vectores bidimensionales linealmente separables de la siguiente figura. Encontrar la SVM lineal que separa óptimamente las clases maximizando el margen. Utilice los problemas primal y dual.




**Ejercicio 16.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (3,0), (0,3), (-3,0), (0, -3). Y los siguientes como negativos: (0,2), (1,0), (0,-1), (-1,0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(4-x_2+|3x_1-x_2|,\ 4-x_1+|3x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano separador.

**Ejercicio 17.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (3,0), (0,3), (-3,0), (0, -3). Y los siguientes como negativos: (0,1), (1,0), (1,0), (0,-1), (-1,0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(3-x_2+|3x_1-x_2|,\ 4-x_1+|3x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano de separación.
b) Clasifica un nuevo punto de prueba (-1,0). ¿Qué conclusiones puedes obtener?

**Ejercicio 18.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (3,0), (0,3), (-3,0), (0, -3). Y los siguientes como negativos: (0,1), (1,0), (1,0), (0,-1), (-1,0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(4-x_2+|3x_1-x_2|,\ 4-x_1+|3x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano separador.
b) Clasifica un nuevo punto de prueba (1,1). ¿Qué conclusiones puedes obtener?

**Ejercicio 19.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como negativos: (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1). Y los siguientes como negativos: (3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\left[x_1,x_2,\ ((x_1^2+x_2^2)-6)/4\right].$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

**Ejercicio 20.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (2,5, 1), (1, 1,5), (-2,5, 1), (1, -1,5). Y los siguientes como negativos: (0, 0,5), (0,5, 0), (0, -0,5), (-0,5, 0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(4-x_2+|x_1-x_2|,\ 4-x_1+|x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano de separación utilizando la formulación dual.

b) Clasifica un nuevo punto de prueba (3,1). ¿Qué conclusiones puedes obtener?

**Ejercicio 21.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (2,5, 0), (0, 2,5), (-2,5,0), (0, -2,5). Y los siguientes como negativos: (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(4-x_2+|3x_1-x_2|,\ 4-x_1+|3x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano de separación utilizando la formulación dual.
b) Clasifica un nuevo punto de prueba (2.2,1). ¿Qué conclusiones puedes obtener?

**Ejercicio 22.-** Dados los siguientes puntos etiquetados como positivos: (2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2). Y los siguientes como negativos: (0, 0,5), (0,5, 0), (0, -0,5) y (-0,5, 0). Consideremos la siguiente función de transformación para el espacio de características:

$$\Phi(x_1,x_2)=\begin{cases}(3-x_2+|x_1-x_2|,\ 3-x_1+|x_1-x_2|), & \text{si } \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geq 2,\\ (x_1,x_2), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Utilizar una SVM lineal aplicada a los puntos transformados.

a) Obtener los vectores soporte y la ecuación del hiperplano de separación utilizando la formulación dual.
b) Clasifica un nuevo punto de prueba (-1,-1). ¿Qué conclusiones puedes obtener?