Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №4
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Дойников И. Д.
Руководитель
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Страница

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Использование теоремы Зюзина

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [1,\ 4]\cdot x_1 + [0.5,\ 0.7]\cdot x_2 = [-1,\ 1] \\ [0.8,\ 1.2]\cdot x_1 + [3,\ 5]\cdot x_2 = [-3,\ 3] \end{cases} \tag{1}$$

Для нее необходимо построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части по теореме Зюзина, а также провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Использование субдифференциального метода Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [3,\ 4]\cdot x_1 + [5,\ 6]\cdot x_2 = [-3,\ 3] \\ [-1,\ 1]\cdot x_1 + [-3,\ 1]\cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} [3,\ 4]\cdot x_1 + [5,\ 6]\cdot x_2 = [-3,\ 4] \\ [-1,\ 1]\cdot x_1 + [-3,\ 1]\cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона, провести вычисления и привести иллюстрации брусов итерационного процесса, а также сравнить полученные результаты для систем (2) и (3).

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$Cx = d, \quad C \in KR^{n\times n},\ d \in KR^n$$

правильная проекция матрицы C имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$D = \mathrm{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n \quad E = C \ominus D$$

$$Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$$

$$x^{k+1} = \mathrm{inv}\, D \cdot (d \ominus Ex^k),\ k = 0, 1, \dots$$

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau (D^{k-1})^{-1} \mathscr{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathscr{F}(x) = \mathrm{sti}\ (C \cdot \mathrm{sti}^{-1}\ (x)) - x + \mathrm{sti}\ (d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из KR^n в R^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения $\mathscr{F}$ в точке x^{k-1}, τ - константа, в данной работе выбрана единицей.

3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Octave с библиотекой полной интервальной арифметики kinterval.

4 Результаты

4.1 Итерационный процесс с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части

Здесь и далее пунктиром обозначено допусковое множество Ξ_{tol} рассматриваемой ИСЛАУ. Также здесь и далее начальный брус обозначен синим цветом. Число итераций - 10.

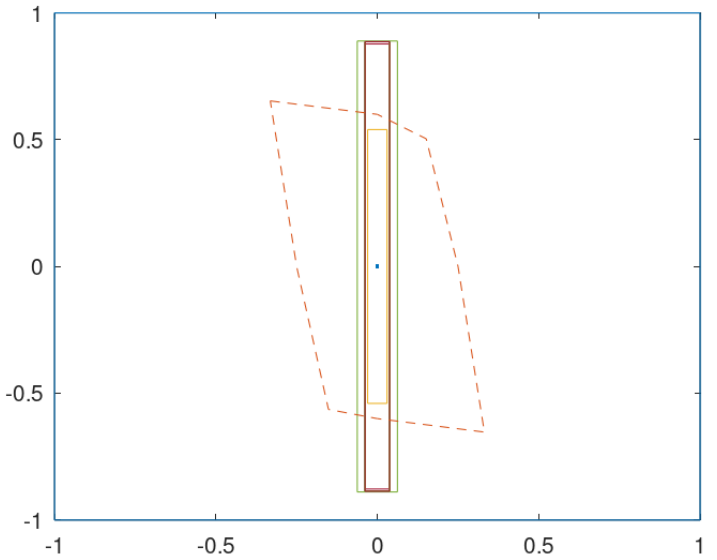

Рис. 1: Изображение брусов при решении задачи (1)

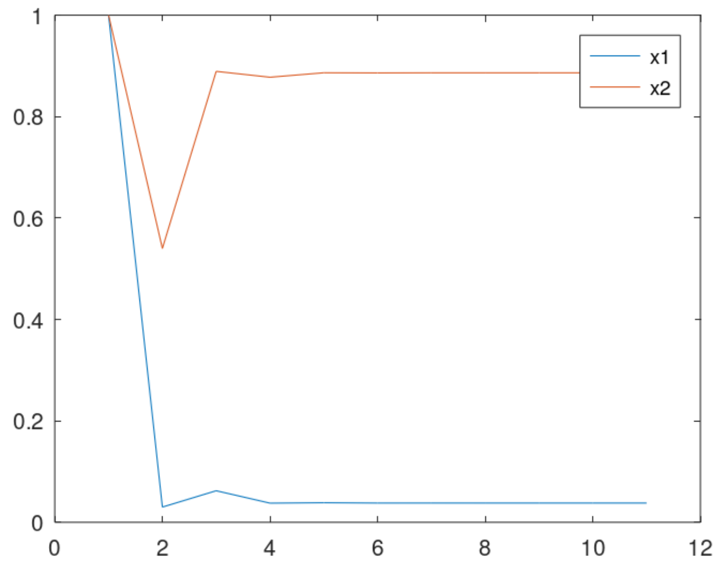

Рис. 2: Зависимость радиусов брусов от числа итераций при решении задачи (1)

4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона

Здесь и далее брусы, полученные по мере итераций обозначены пунктирными линиями с мелкой штриховкой, последний брус - сплошной линией красного цвета. При решении задачи (2) использовался параметр $\tau = 1$, финальный брус получен на четвертой итерации метода.

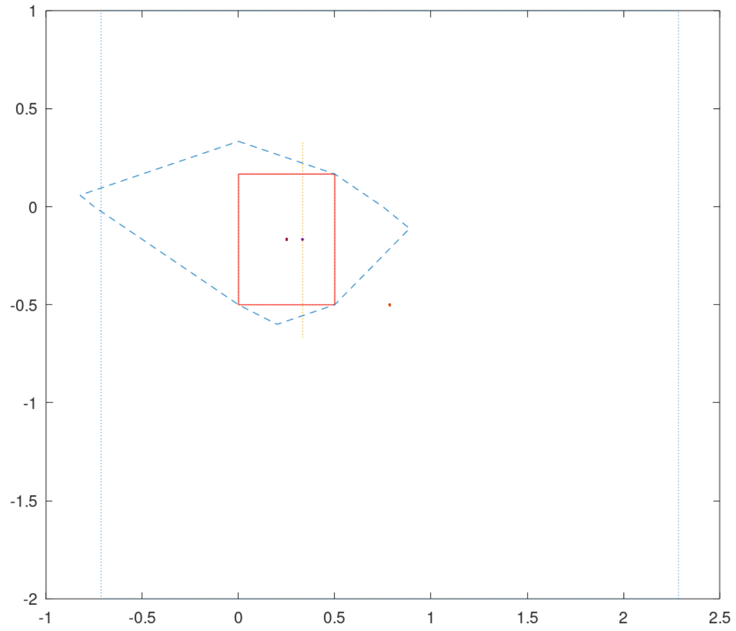

Рис. 3: Решение задачи (2) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 1$. Число итераций - 300.

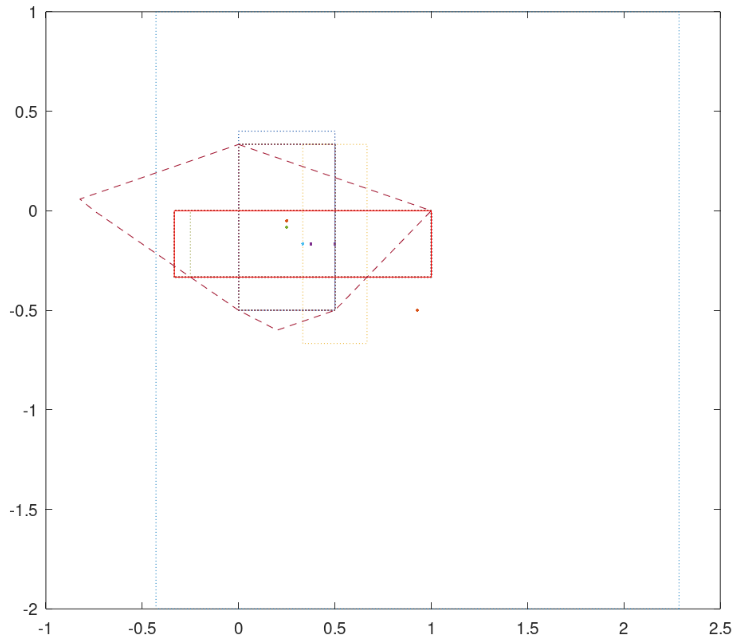

Рис. 4: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 0.05$. Число итераций - 300.

img/2_2_005.png

Рис. 5: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$

5 Обсуждение

1. Сопоставляя графики 1 и 2, обнаруживаем, что на второй итерации метод выдал более адекватную внутреннюю оценку Ξ_{tol}, чем на последней. Финальный результат выходит за пределы допускового множества. Середина брусов практически не меняется по мере итераций. После пятой итерации наблюдается стагнация в размере брусов.

2. При решении задачи 2 получена точная внутренняя оценка Ξ_{tol}, субградиентный метод Ньютона сошелся очень быстро - после четвертой итерации итерационный процесс остановился.

3. При решении задачи 3 не была получена внутренняя оценка Ξ_{tol}. Тем не менее, результат адекватный - около 85% площади полученного бруса находится внутри допускового множества. Метод проделал все 300 итераций вплоть до заданных извне ограничений.

4. При уменьшении параметра τ получен другой брус. Он все еще не является строгой внутренней оценкой Ξ_{tol}, но эта оценка более удачна, так как полученный брус

больше по площади, чем предыдущий, и еще большая его часть лежит внутри допускового множества.

5. С меньшим параметром τ изменение брусов по мере итераций меньше, эти изменения более плавные. Судя по графику 5, можно предположить, что при устремлении числа итераций к бесконечности, все же можно получить точную внутреннюю оценку. Такой вывод нельзя сделать, опираясь на график 4.

Исходный код

С исходным кодом программы и отчета можно ознакомиться в репозитории `https://github.com/i1ich/Interval`.