

# Семинар по префикс-функции

Сапожников Денис

**Задача 1.** Дана строка  $s$  и текст  $t$ . Требуется найти количество вхождений строки  $s$  в текст  $t$  за  $O(|s| + |t|)$ .

**Решение.** Запишем строку  $s\#t$  и вычислим на ней префикс-функцию, где  $\#$  — символ-разделитель, который не встречается в  $s$  и  $t$ . Если на какой-то позиции  $i$ :  $\pi_i = |s|$ , то это означает, что текущий суффикс строки  $t$  равен строке  $s$ , а это то, что мы и хотели найти. Три человека трудилось в поте лица над этим алгоритмом и теперь у него есть название: **алгоритм Кнута-Морриса-Пратта**.

**Задача 2.** Пусть у вас есть функция `isSubstring`, которая проверяет, является ли одна строка подстрокой другой строки. Вам нужно определить, является ли строка  $s_1$  циклическим сдвигом строки  $s_2$ , используя только один вызов функции `isSubstring`.

**Задача 3.** Дана строка  $s$ . Для каждого префикса  $s$  необходимо найти количество его вхождений за.

1.  $O(|s|^2)$
2.  $O(|s|)$

**Задача 4.** Дана строка  $s$ . Необходимо найти наименьший период строки<sup>1</sup> за линейное время.

**Задача 5.** Придумайте линейный по сложности алгоритм для вычисления количества различных циклических сдвигов строки  $s$ .

**Задача 6.** Даны строки  $p$  и  $s$ .  $s$  состоит только из маленьких букв английского алфавита, в то время как  $p$  может содержать ещё и символы `*`. Требуется определить, можно ли подставить вместо символов `*` какие-то строки (возможно, различные), так чтобы строка  $p$  стала подстрокой  $s$ .

1.  $O(|s|^2 + |p| \cdot |s|)$
2.  $O(|s| + |p|)$

Например, если  $p = \text{«*hello**!»}$ , а  $s = \text{«hello world!!!!!»}$ , то первую и третью звездочку можно превратить в пустую строку, вторую — в `« world!!!!!»` и тогда строки совпадут.

Есть ещё одна интересная теорема, которая очень часто применяется в теории строк, но не в этой лекции.

**Задача 7** (Fine and Wilf's theorem). Если у строки  $w$  есть периоды  $p$  и  $q$ , где  $|w| \geq p + q - \gcd(p, q)$ , то  $\gcd(p, q)$  также является периодом этой строки.

Зачем она нужна? С помощью неё можно умудриться считать префикс-функцию в онлайн с добавлением и удалением символов за  $O(\log n)$ .

---

<sup>1</sup>Периодом строки  $s$  называется такое наименьшее число  $T$ , что  $\forall i : s_i = s_{i+T}$