Комбинаторная оптимизация, первое теоретическое домашнее задание

Задача 1 (1 балл)

Рассмотрим следующую линейную программу:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x \to \max \end{cases}$$

Предположим, что данная программа неограничена. Заменим правую часть на b'.

1. (0.5 балла) Верно ли, что программа будет неограничена при такой замене?
2. (0.5 балла) Может ли при некотором b' программа оказаться совместной и ограниченной?

Задача 2 (2 балла)

Задан двудольный граф $G = (V, E)$, а также веса на ребрах $w : E \to \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу поиска максимального по весу паросочетания размера не больше k.

1. (1 балл) Постройте целочисленную линейную программу для данной задачи. Покажите, что матрица данной программы будет тотально-унимодулярной.
2. (1 балл) Постройте двойственную программу, запишите условия дополняющей нежесткости. По возможности опишите комбинаторный смысл полученной задачи.

Задача 3 (2 балла)

Пусть есть n корзин и m типов фруктов, i-я корзина содержит a_{ij} грамм фруктов j-го типа ($a_{ij} \geq 0$).

1. (1 балл) Докажите, что существует подмножество из не более чем $n/2 + m$ корзин, суммарно содержащих не менее половины фруктов каждого типа.
2. (1 балл) Докажите, что достаточно даже $(n + m)/2$ корзин.

Указание. Запишите задачу в виде линейной программы и исследуйте целочисленные вершины полиэдра.

Задача 4 (2 балла)

Дан ненаправленный граф $G = (V, E)$. Определим для подмножества вершин $U \subseteq V$ понятие плотности, то есть величину, равную:

$$d(U) = \frac{|E(U)|}{|U|}, \quad \text{где } E(U) = \{(u, v) | u, v \in U, (u, v) \in E\}$$

Величиной $d(G)$ будем называть максимальную плотность подграфа в заданном графе.

Введем переменные x_i на вершинах графа и переменные y_{ij} на ребрах графа и рассмотрим следующую линейную программу:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 \\ y_{ij} \leq x_i \\ y_{ij} \leq x_j \\ \sum_i x_i = 1 \\ \sum_{ij} y_{ij} \to max \end{cases}$$

Докажите следующие утверждения:

1. (0.5 балла) Для любого подмножества U существует допустимое решение (x, y) у которого $\sum_{ij} y_{ij}$ равен $d(U)$.
2. (1.5 балла) Рассмотрим некоторое допустимое решение (x, y). Методом '*округления*' решения покажите, что существует множество $U \subseteq V$ для которого $d(U)$ не меньше $\sum_{ij} y_{ij}$.

Задача 5 (2 балла)

Задан направленный граф $G = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами s и t. На дугах графа заданы целые неотрицательные длины $l : E \to \mathbb{Z}_+$. Длину дуг графа можно увеличивать на целые значения, при этом увеличения длины дуги (u, v) на единицу стоит c_{uv}, где $c : E \to \mathbb{Z}_+$. Увеличим длины дуг так, чтобы минимальная длина пути из s в t стала не меньше заданной константы a. Среди всех таких увеличений длин дуг необходимо найти минимальное по стоимости.

1. (1 балл) Постройте линейную программу с целочисленным полиэдром, которая позволяет решить указанную задачу.
2. (1 балл) Сведите задачу к некоторой полиномиально-разрешимой потоковой задаче.

Указание. Изучите прямую и двойственную программы для задачи поиска кратчайшего пути в графе.