Графы: DFS. Мосты. Точки сочленения.

Сапожников Денис

Contents

1 Определения

Определение (Граф)**.** Граф $G(V, E)$ — это множество вершин V и множество рёбер E — множество пар вершин $(a, b) : a, b \in V$, которые "соединены".

Определение (Подграф)**.** Подграф $G'(V, E') \subset G(V, E)$ — это граф на том же множестве вершин V, и подмножестве рёбер $E' \subseteq E$.

Везде ниже мы будем считать, что $|V| = n, |E| = m$.

Определение (Петля)**.** Ребро $(a, b) \in E$ называется петлёй, если оно соединяет вершину с самой собой, т.е. $a = b$.

Определение (Кратное ребро)**.** Два ребра называются кратными, если они соединяют две одинаковые пары рёбер.

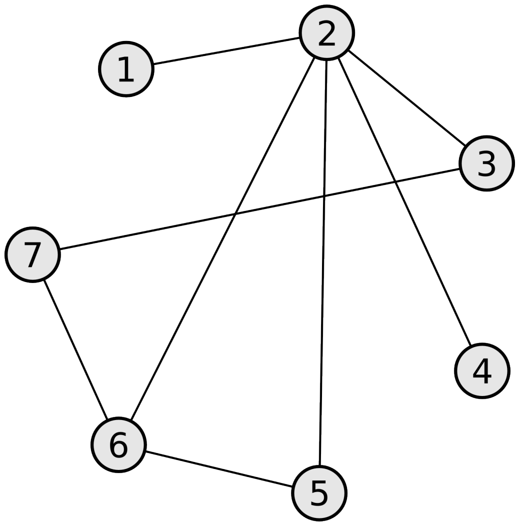
Как правило в задачах указано, что нет петель и кратных рёбер, но если такое не написано, то с ними стоит быть осторожнее!

Определение (Взвешенный граф)**.** Граф называется взвешенным, если есть функция $w : E \to \mathbb{R}$, называемая весом ребра; иначе говоря, каждому ребру сопоставляется вещественное число.

Определение (Дерево)**.** Дерево — это связный граф на n вершинах и $n - 1$ ребре.

2 Хранение графов

Чтобы решать задачки на графы, вы рисуете их на бумажке в виде вершин и рёбер.



Но как же сохранить графы в памяти? Существуют два подхода.

2.1 Матрица смежности

Вы можете сознать матрицу $n \times n$, состоящую из 0 и 1, где 1 в позиции (i, j) обозначает наличие ребра из i-й вершины в j-ю. У данного подхода есть масса преимуществ:

1. Простота. Действительно, заполнить матрицу очень просто, а хранить вам нужно лишь двумерный массив.

2. Легко проверять наличие ребра между любыми двумя вершинами.

3. Легко делать граф ориентированным/неориентированным, взвешенным/не взвешенным (для взвешенного графа можно хранить не 1 при наличии ребра, а вес ребра между вершинами).

Например, хранение неориентированного взвешенного графа будет следующим:

```
int n, m; // vertexes, edges
cin >> n >> m;
vector<vector<int>> adj(n, vector<int>(n));
for (int i = 0; i < m; ++i) {
  int a, b, w;
  cin >> a >> b >> w; // weight of edge between a and b is w
  adj[a - 1][b - 1] = adj[b - 1][a - 1] = w;
}
```

Однако, есть очень большой недостаток: если в графе 10^5 вершин и 10^5 рёбер, то вам придется сохранить таблицу размера $10^5 \times 10^5$, при этом единицы в такой таблице будет очень мало. Такие графы называются разреженными и очень часто в задачах даны именно разреженные графы. Как хранить разреженные графы?

2.2 Список смежности

Вместо того, чтобы хранить всю матрицу смежности давайте для каждой вершины хранить список её соседей — список смежности.

Такой подход, очевидно, занимает $O(n + m)$ памяти, где n – количество вершин, m – количество рёбер.

Но есть и пара проблем:

1. Неудобно проверять наличие ребра между парой вершин. Для этого придется хранить не список смежных вершин, а множество смежных вершин, что увеличивает асимптотику. Благо, в задачах почти никогда не надо проверять наличие ребра между конкретными двумя вершинами.

2. Не очень удобно хранить веса рёбер: вместе с соседом вершины придется хранить ещё и вес ребра (то есть хранить пару).

То есть теперь для хранения неориентированного взвешенного графа вам придется написать следующий код:

```
int n, m;
cin >> n >> m;
vector<vector<pair<int, int>>> gr(n); // from - { {to[1], w[1]}, ...}
for (int i = 0; i < m; ++i) {
  int a, b, w;
  cin >> a >> b >> w;
  --a, --b;
  gr[a].push_back({ b, w });
  gr[b].push_back({ a, w });
}
```

3 DFS

3.1 Алгоритм

Скорее всего, все уже знакомы с этим алгоритмом обхода графа. Напомню, что этот алгоритм «идёт, пока может», то есть:

```
bool used[N];
void dfs(int v) {
  used[v] = true;
  for (int u : gr[v])
    if (!used[u])
      dfs(u);
}
```

3.2 Красим в три цвета

Казалось бы, говорить об этих 7 строках кода нечего, но на самом деле тут есть потаенный смысл. Пусть ещё непосещённые вершины будут белыми, серыми те, которые лежат в стеке вызова, а чёрные — те, которые мы посетили и удалили из стека.

То есть:

```
enum { WHITE, GREY, BLACK };
int used[N];
void dfs(int v) {
  used[v] = GREY;
    for (int u : gr[v])
      if (used[u] == WHITE)
        dfs(u);
  used[v] = BLACK;
}
```

Лемма 1. *Не существует такого момента выполнения поиска в глубину, в который бы существовало ребро из чёрной вершины в белую.*

Proof. Пусть в процессе выполнения процедуры dfs нашлось ребро из чёрной вершины v в белую вершину u. Рассмотрим момент времени, когда мы запустили $dfs(v)$. В этот момент вершина v была перекрашена из белого в серый, а вершина u была белая. Далее в ходе выполнения алгоритма будет запущен $dfs(u)$, поскольку обход в глубину обязан посетить все белые вершины, в которые есть ребро из v. По алгоритму вершина v будет покрашена в чёрный цвет тогда, когда завершится обход всех вершин, достижимых из неё по одному ребру, кроме тех, что были рассмотрены раньше неё. Таким образом, вершина v может стать чёрной только тогда, когда dfs выйдет из вершины u, и она будет покрашена в чёрный цвет. Получаем противоречие. ☐

3.3 Лемма о белом пути

Лемма 2 (о белом пути)**.** *Пусть дан граф G. Запустим $dfs(G)$. Остановим выполнение процедуры dfs от какой-то вершины u графа G в тот момент, когда вершина u была выкрашена в серый цвет (назовём его первым моментом времени). Заметим, что в данный момент в графе G есть как белые, так и чёрные, и серые вершины. Продолжим выполнение процедуры $dfs(u)$ до того момента, когда вершина u станет чёрной (второй момент времени). Тогда* *вершины графа $G \setminus u$, бывшие чёрными и серыми в первый момент времени, не поменяют свой цвет ко второму моменту времени, а белые вершины либо останутся белыми, либо станут чёрными, причём чёрными станут те, что были достижимы от вершины и по белым путям.*

Proof. Чёрные вершины останутся чёрными, потому что цвет может меняться только по схеме белый $\to$ серый $\to$ чёрный. Серые останутся серыми, потому что они лежат в стеке рекурсии и там и останутся.

Далее докажем два факта:

Утверждение. *Если вершина была достижима по белому пути в первый момент времени, то она стала чёрной ко второму моменту времени.*

Proof. Если вершина v была достижима по белому пути из u, но осталась белой, это значит, что во второй момент времени на пути из u в v встретится ребро из черной вершины в белую, чего не может быть по лемме, доказанной выше. □

Утверждение. *Если вершина стала чёрной ко второму моменту времени, то она была достижима по белому пути в первый момент времени.*

Proof. Рассмотрим момент, когда вершина v стала чёрной: в этот момент существует серый путь из u в v, а это значит, что в первый момент времени существовал белый путь из u в v, что и требовалось доказать. □

Отсюда следует, что если вершина была перекрашена из белой в чёрную, то она была достижима по белому пути, и что если вершина как была, так и осталась белой, она не была достижима по белому пути, что и требовалось доказать. □

3.4 Поиск цикла

Утверждение. *В ориентированном графе существует цикл тогда и только тогда, когда при обходе dfs-ом найдется момент времени, когда мы посмотрим из серой вершины в серую.*

```
bool has_cycle(int v) { // return true if has cycle
  used[v] = GRAY;
  for (int u : gr[v]) {
    if (used[u] == GRAY || used[u] == WHITE && dfs(u)) {
      return true;
    }
  }
  used[v] = BLACK;
  return false;
}
```

Подумайте, как можно восстановить этот цикл.

3.5 Прямые и обратные рёбра

Определение. Назовём ребро **прямым**, если мы прошли по нему во время обхода dfs.

Определение. Прямые ребра образуют **дерево обхода** dfs.

Определение. Ребра (u, v), соединяющие вершину u с её предком v в дереве обхода в глубину назовём **обратными рёбрами** (для неориентированного графа предок должен быть не родителем, так как иначе ребро будет являться ребром дерева).

Определение. Все остальные ребра назовём **перекрёстными рёбрами**.

Задача. Докажите, что при обходе неориентированного графа в глубину **не существует перекрёстных рёбер**.

4 Мосты и точки сочленения

4.1 Мосты

Определение. Ребро в графе будет называться **мостом**, если при удалении его, граф распадётся на 2 компоненты связности.

Лемма. *Пусть мы находимся в обходе в глубину, просматривая сейчас все рёбра из вершины v. Тогда, если текущее ребро (v, u) таково, что из вершины u и из любого её потомка в дереве обхода в глубину нет обратного ребра в вершину v или какого-либо её предка, то это ребро является мостом. В противном случае оно мостом не является.*

Proof. В самом деле, мы этим условием проверяем, нет ли другого пути из v в u, кроме как спуск по ребру (v, u) дерева обхода в глубину. □

Теперь осталось научиться проверять этот факт для каждой вершины эффективно. Для этого воспользуемся «временами входа в вершину», вычисляемыми алгоритмом поиска в глубину.

Итак, пусть h_v — это глубина вершины в дереве dfs. Теперь введём массив fup_v, который и позволит нам отвечать на вышеописанные запросы. Время fup_v равно глубине самой высокой вершины, в которую мы можем попасть из v или её поддерева, более формально это можно записать так:

$$fup_v = \min \begin{cases} h_v \\ h_p, & (v, p) - \text{это обратное ребро} \\ fup_u, & (v, u) - \text{это прямое ребро} \end{cases}$$

Тогда, из вершины v или её потомка есть обратное ребро в её предка тогда и только тогда, когда найдётся такой сын u, что $fup_u \leq h_v$. (Если $fup_u = h_v$, то это означает, что найдётся обратное ребро, приходящее точно в v; если же $fup_u < h_v$, то это означает наличие обратного ребра в какого-либо предка вершины v.)

Таким образом, если для текущего ребра (v, u) (принадлежащего дереву поиска) выполняется $fup_u > h_v$, то это ребро является мостом; в противном случае оно мостом не является.

```cpp
vector<pair<int, int>> gr[N];
bool used[N];
int h[N], fup[N];
vector<int> bridges;

void dfs(int v, int p_id = -1) {
  used[v] = true;
  fup[v] = h[v];

  for (auto [u, id] : gr[v]) {
    if (id != p_id) {
      if (used[u]) {
        fup[v] = min(fup[v], h[u]);
      }
      else {
        h[u] = h[v] + 1;
        dfs(u, id);
        fup[v] = min(fup[v], fup[u]);

        if (fup[u] > h[v]) {
          bridges.push_back(id);
        }
      }
    }
  }
}
```

Стоит заметить, то если в графе нет кратных рёбер, то реализация будет проще и не нужно будет хранить номера рёбер.

4.2 Точки сочленения

Определение. Вершина в графе будет называться **точкой сочленения**, если при удалении её, граф распадётся на 2 компоненты связности.

На самом деле это почти то же самое, что и мосты. Оставаясь в той же терминологии, что и в мостах, вершина будет точкой сочленения, если $fup_u \geq h_v$ для хоты бы одного сына u вершины v. Таким образом, код нужно поменять лишь в одном месте для всех вершин, кроме корня. Корень – это отдельный случай, он будет являться точкой сочленения, если из него мы запустимся хотя бы в 2 сына (не путать со степенью вершины!).

```cpp
vector<pair<int, int>> gr[N];
bool used[N];
int h[N], fup[N];
bool is_ap[N];

void dfs(int v, int p_id = -1) {
  used[v] = true;
  fup[v] = h[v];

  int cnt = 0;

  for (auto [u, id] : gr[v]) {
    if (id != p_id) {
      if (used[u]) {
        fup[v] = min(fup[v], h[u]);
      }
      else {
        h[u] = h[v] + 1;
        dfs(u, id);
        ++cnt;
        fup[v] = min(fup[v], fup[u]);

        if (p_id != -1 && fup[u] >= h[v]) {
          is_ap[v] = true;
        }
      }
    }
  }

  if (cnt > 1 && p_id == -1) {
    is_ap[v] = true;
  }
}
```