

Práctica 3**Ejercicio 1 (lápiz y papel)**

Resolver la ecuación: $3X - 2A = 5B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Sol. } \begin{pmatrix} 7 & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (lápiz y papel)

Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left. \begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ A - 3B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Sol. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (lápiz y papel)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $S = A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^{50}$

$$\text{Sol. } \begin{pmatrix} 50 & 2550 & 3825 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 (ordenador)

Resolver el ejercicio anterior con ordenador de una forma eficiente (ver ejercicio 5 de la práctica 2).

Ejercicio 5 (lápiz y papel)

Hallar una matriz triangular superior T tal que, si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Se cumpla que $A = T T^t$

Nota: Recuerda que T^t significa la transpuesta de la matriz T .

La transpuesta de una matriz es otra matriz que se obtiene cambiando filas por columnas en la matriz original.

Ejercicio 6 (ordenador)

Dadas dos matrices A y B , Matlab calcula el producto de ambas usando la orden $A * B$, siempre que las dimensiones de ambas matrices sean las adecuadas.

Dadas dos matrices, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, haz un programa de ordenador

que calcule el producto de ambas matrices sin usar el operador * del producto matricial.

El programa debe ser genérico, en el sentido de que debe funcionar siempre independientemente de las matrices A y B empleadas al inicio del programa (debe averiguar si las dimensiones de las matrices son las adecuadas y si lo son, calcular el producto de ambas sin usar el operador * del producto matricial)

Ejercicio 7 (ordenador)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Debes calcular la matriz $B = A^2 - 6A + 5I$

- Hazlo, de una forma breve, usando el operador * que permite el producto de matrices en Matlab y el producto de un escalar por una matriz.
- Hazlo sin usar dicho operador, modificando el código del ejercicio 6.

Los programas deben ser genéricos y debe valer para cualquier matriz A que escribamos al inicio del programa y no sólo para ésta.

Operaciones elementales y proceso de Gauss

Vamos a ver a continuación las llamadas operaciones elementales por filas descritas en la página 12 del tema 1. Se podría hacer también operaciones elementales por columnas, pero nosotros vamos a fijarnos por filas.

En una matriz, se consideran operaciones elementales por filas a las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos filas.
- Multiplicar una fila por un número real no nulo.
- Sustituir una fila por la suma de ella misma con el producto de otra por un escalar.

Las matrices resultantes de aplicar operaciones elementales diremos que son ***equivalentes***.

Dada una matriz A , vamos a ver cómo se calcula cómo la ***matriz escalonada de Gauss*** por filas equivalente a la matriz original. El proceso de Gauss es el siguiente:

- En la primera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (1, 1) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la segunda iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (2,2) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la tercera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (3,3) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.

- Etc.

Por ejemplo, vamos a obtener la matriz escalonada equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

usando el llamado *proceso de Gauss*.

Primera iteración: El pivote es $a_{11} = 1$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él.

Para ello:

- la segunda fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2
- La tercera fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -1
- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -3

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 \rightarrow f_2 + f_1(-2) \\ f_3 \rightarrow f_3 + f_1(-1) \\ f_4 \rightarrow f_4 + f_1(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -20 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacer los cálculos del ejemplo anterior te puedes ayudar de Matlab.

La primera iteración del proceso se obtiene de la forma:

```
A=[1 -3 -2 7 0;2 -1 15 3 1;1 7 -1 8 -1;3 1 0 1 1];
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-2);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(-1);
A(4,:)=A(4,:)+A(1,:)*(-3);
disp(A);
```

Segunda iteración: El pivote es $a_{22} = 5$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él.

Para ello:

- La tercera fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2
- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{f_3 \rightarrow f_3 + f_2(-2) \\ f_4 \rightarrow f_4 + f_2(-2)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -37 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & -32 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(-2);
A(4,:)=A(4,:)+A(2,:)*(-2);
disp(A);
```

Tercera iteración: El pivote es $a_{33} = -37$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él.

Para ello:

- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por $-\frac{32}{37}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -37 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & -32 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 \rightarrow f_4 + f_3(-\frac{32}{37})} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -37 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -662/37 & 59/37 \end{pmatrix}$$

Para obtener lo anterior usaremos:

```
format rat
A(4,:) = A(4,:) + A(3,:) * (-32/37);
disp(A);
```

Usamos la orden “format rat” para que escriba los resultados como fracciones.

Con esto ya hemos terminado el proceso.

Observa que la matriz resultante del proceso de Gauss es una *matriz triangular superior*.

El proceso completo con Matlab sería:

```
clc;

A=[1 -3 -2 7 0; 2 -1 15 3 1; 1 7 -1 8 -1; 3 1 0 1 1];
disp(A);

format rat

disp('primera iteración');
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-2);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(-1);
A(4,:)=A(4,:)+A(1,:)*(-3);
disp(A);

disp('segunda iteración');
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(-2);
A(4,:)=A(4,:)+A(2,:)*(-2);
disp(A);

disp('tercera iteración');
A(4,:)=A(4,:)+A(3,:)*(-32/37);
disp(A);

format
```

Ejercicio 8 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Dada la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, aplicar el método de Gauss anteriormente descrito.

Sol. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{17}{5} & \frac{17}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 19 \end{pmatrix}$

Matriz reducida de Gauss

Es frecuente usar una variación del método de Gauss que consiste en hacer unitario el pivote en cada iteración del proceso.

- En la primera iteración el pivote es el elemento situado en la posición (1, 1) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la segunda iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (2,2) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la tercera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (3,3) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- Etc.

La **matriz reducida de Gauss** es una matriz escalonada o triangular superior con la particularidad de que en cada fila el primer elemento no nulo de la matriz debe ser un 1.

Ejercicio 9 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz reducida de Gauss.

Sol. La matriz reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

Ejercicio 10 (ordenador)

Haz un programa en Matlab que permita obtener la matriz reducida de Gauss. Comprueba que el código funciona correctamente aplicándolo a la matriz del ejemplo anterior.