Práctica 10

Métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Método de Jacobi y método de Gauss-Seidel

Método de Jacobi

Vamos a introducir de forma intuitiva el método iterativo de Jacobi (matemático alemán 1805-1851).

Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{array}\right\} \text{ solución exacta es: } x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

El método de Jacobi consiste en despejar x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda ecuación y x_3 de la tercera ecuación, obteniendo:

$$x_1 = \frac{14 - 3x_2 - x_3}{10}$$
$$x_2 = \frac{5 + 2x_1 + 3x_3}{10}$$
$$x_3 = \frac{14 - x_1 - 3x_2}{10}$$

Después empezaremos por unos valores iniciales de $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ y aplicaremos de manera iterativa las ecuaciones anteriores, es decir:

$$x_1^{(n)} = \frac{14 - 3x_2^{(n-1)} - x_3^{(n-1)}}{10}$$
$$x_2^{(n)} = \frac{5 + 2x_1^{(n-1)} + 3x_3^{(n-1)}}{10}$$
$$x_3^{(n)} = \frac{14 - x_1^{(n-1)} - 3x_2^{(n-1)}}{10}$$

Por ejemplo, partiendo de $x_1^{(0)} = 0 \quad x_2^{(0)} = 0 \quad x_3^{(0)} = 0$ se obtienen los resultados siguientes:

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	error
0	0	0	0	$\left.\begin{array}{l}\lvert 1-0\rvert = 1\\ \lvert 1-0\rvert = 1\\ \lvert 1-0\rvert = 1\end{array}\right\}$ error máximo=1
1	1.4	0.5	1.4	$\left.\begin{array}{l}\lvert 1.4-1\rvert = 0.4\\ \lvert 0.5-1\rvert = 0.5\\ \lvert 1.4-1\rvert = 0.4\end{array}\right\}$ error máximo=0.5
2	1.11	1.2	1.11	0.2
3	0.929	1.055	0.929	0.071
4	0.9906	0.9645	0.9906	0.0355

Ejercicio 1 (ordenador)

Hacer un programa de ordenador que permita rellenar la tabla anterior. Efectuar 10 iteraciones del método de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

También vamos a introducir de forma intuitiva el método de Gauss-Seidel (dos matemáticos alemanes del siglo XIX). Resolvemos el mismo ejemplo del problema anterior:

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{array}\right\} \quad \text{Solución exacta: } x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Gauss-Seidel introduce la siguiente modificación: usar el valor más actual de las variables a medida que se van recalculando. En este caso, las fórmulas serían:

$$x_1^{n)} = \frac{14 - 3x_2^{(n-1)} - x_3^{(n-1)}}{10}$$

$$x_2^{n)} = \frac{5 + 2x_1^{(n)} + 3x_3^{(n-1)}}{10}$$

$$x_3^{n)} = \frac{14 - x_1^{(n)} - 3x_2^{(n)}}{10}$$

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	|error|
0	0	0	0	1
1	1.4	0.78	1.026	0.4
2	1.0634	1.02048	0.9875	0.0634
3	0.9951	0.9952	1.001	0.0049
…	…	…	…	…
8	1	1	1	0

Ejercicio 2 (ordenador)

Hacer un programa de ordenador que permita rellenar la tabla anterior. Efectuar 8 iteraciones del método de Gauss-Seidel.

Convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Supongamos que tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \end{array}\right\}$$

Podemos comprobar que se trata de un sistema compatible determinado cuya solución exacta es

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$

Tomando como valor inicial $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 0$ aplicamos el método de Jacobi. Obteniendo:

$x_1{}^{n)} = \frac{4 - x_2{}^{(n-1)} - x_3{}^{(n-1)}}{3}$

$x_2{}^{(n)} = 4 + x_1{}^{(n-1)} - 3\ x_3{}^{(n-1)}$

$x_3{}^{(n)} = -1 - 2x_1{}^{(n-1)} - 5x_2{}^{(n-1)}$

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0	0	0
1	1.333	4	-1
2	0.333	8.333	-23.666
…	…	…	…
9	19786.6	273015	-157407

Vemos que las iteraciones cada vez van a peor. Por lo tanto el método de Jacobi no nos sirve para resolver este sistema.

Ejercicio 3 (ordenador)

Hacer un programa de ordenador que permita rellenar la tabla anterior.

Algo parecido ocurre con Gauss-Seidel.

Por lo tanto, para poder resolver un sistema con estas técnicas iterativas será necesario asegurarnos previamente la convergencia. Pues bien, puede demostrarse que ambos métodos iterativos convergen siempre que la diagonal de la matriz de los coeficientes del sistema sea **"estrictamente dominante"**: el valor absoluto del elemento de la diagonal debe ser estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de los restantes elementos de la fila.

Analizamos la matriz de los coeficientes de nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |3| > |1| + |1| \\ |1| \ngtr |-1| + |3| \\ |1| \ngtr |2| + |5| \end{matrix}$$

La matriz no tiene la diagonal estrictamente dominante.

Para conseguirlo, basta con intercambiar las dos últimas ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{matrix}\right\}$$

Ahora sí tiene la diagonal estrictamente dominante y el método de Jacobi será seguro convergente y no ocurrirá la situación anterior.

Ejercicio 4 (ordenador)

Se considera el sistema lineal: $\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18 \end{array}\right\}$

Efectuar 100 iteraciones del método de Gauss-Seidel y escribe en pantalla la solución exacta y la solución aproximada que da el método de Gauss-Seidel.

Ayuda: La solución exacta la puedes averiguar con la orden A\B (donde A debe ser la matriz de los coeficientes del sistema y B la matriz columna con los términos independientes).

Ejercicio 5 (ordenador)

Se trata de resolver un sistema tridiagonal de 100 ecuaciones con 100 incógnitas del siguiente tipo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{98} \\ x_{99} \\ x_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 / 10 \\ 2^2 / 10 \\ 3^2 / 10 \\ 4^2 / 10 \\ \vdots \\ 98^2 / 10 \\ 99^2 / 10 \\ 100^2 / 10 \end{pmatrix}$$

1) Debes resolverlo de forma exacta usando la orden de Matlab A\B
2) Efectúa 100 iteraciones del método de Gauss-Seidel.
3) Imprime por pantalla los valores exactos y los valores aproximados obtenidos para las variables: x_1, x_{25}, x_{50}, x_{75}, x_{100}

Ejercicio 6 (lápiz y papel)

Hallar los autovalores y autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

¿Es diagonalizable por semejanza?

(Solución: $\lambda = 2$ (doble) $\Rightarrow V(2) = < (2,1,1) >$; $\lambda = 1(simple) \Rightarrow V(1) = < (1,0,1)$
No diagonaliza)

Ejercicio 7 (lápiz y papel)

Comprobar si es diagonalizable por semejanza o no la siguiente matriz y en caso afirmativo efectuar la diagonalización:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(Solución: $\lambda = 0(doble) => V(0) = < (1,0,-1),(0,1,-1) >$;

$\lambda = 6(simple) => V(6) = < (1,1,1) >$

Es diagonalizable)

Ejercicio 8 (lápiz y papel)

Diagonalizar la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ mediante una matriz de paso ortogonal.

(Solución: Autovalores $-1, 2$ y 5)

Ejercicio 9 (lápiz y papel)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcula A sabiendo que $(2,0,1)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = -1$
b) Hallar los demás autovalores y autovectores.

(Sol. $a = -8; b = -6; c = 3; V(-1) =< (2,0,1),(0,1,0) >,\ V(7) =< (-4,-3,2) >$

Ejercicio 10 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Averiguar para qué valores de k se puede diagonalizar por semejanza dicha matriz.
   Para dichos valores de k, se pide lo siguiente:
b) Calcular los autovalores y autovectores de A.
c) Obtener la matriz A^n siendo $n = 1, 2, 3, 4, ...$ usando la diagonalización.

(Sol. a) $k = 6$)

Ejercicio 11 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Los informativos nocturnos de las cadenas de televisión WW y R7 compiten por la audiencia en la misma franja horaria. Diversos estudios muestran que, el 60% de los telespectadores del informativo WW lo siguen siendo el día siguiente, mientras que el 40% restante pasan a ver el de R7. Además, de los espectadores del informativo de R7, el 70% continúan siéndolo el día después, mientras que el otro 30% prefieren ver el de WW. Si se supone que la audiencia total permanece constante y que hoy se han repartido la audiencia al 50%.

¿Cuál será el porcentaje de espectadores del informativo mañana?

¿Cuál será el porcentaje de espectadores que ve cada informativo al cabo de una semana?

¿Cuál será el porcentaje que ve cada informativo el día n-ésimo?

¿Cuál será la distribución porcentual de espectadores en el futuro (infinito)?

(Sol. a) $(0.45, 0.55)$ b) $(0.428587, 0.571412)$ c) $\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) \approx (0.428587, 0.571412)$

Ejercicio 12 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Supongamos que hay tres centros logísticos de una empresa situados en Barcelona, Alicante y La Coruña. Cada mes, la mitad de los que están en Barcelona y Alicante van a La Coruña y la otra mitad se quedan donde están, mientras que los camiones de La Coruña se dividen igualmente entre Barcelona y Alicante. Construir la matriz de transición y encontrar el estado estacionario (a largo plazo).

Solución. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13 (lápiz y papel)

Hallar la descomposición SVD normalizada de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(Sol. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t$)

Ejercicio 14 (lápiz y papel)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la SVD normalizada de la matriz A.

b) Hallar la matriz de rango 1 más próxima a la original.

(Sol. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$)

Ejercicio 15 (ordenador)

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 8.165 & -0.0041 & -0.0041 \\ 4.0825 & -3.996 & 4.0042 \\ 4.0825 & 4.0042 & -3.996 \end{pmatrix}$

Que se redondea a dos cifras decimales obteniendo:

$$B = \begin{pmatrix} 8.17 & 0 & 0 \\ 4.08 & -4 & 4 \\ 4.08 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Obtener con Matlab el rango de las dos matrices y observa cómo afecta en el rango el redondeo efectuado. La orden es, como ya sabes, rank.

b) Obtener los valores singulares de ambas matrices.

(Sol. a) Rango de A es 3, rango de B es 2; b) valores singulares de A son 10, 8, 0.01; de B son 10.0021, 8, 0)

Nota: La orden svd de Matlab calcula la descomposición SVD

Ejercicio 16 (ordenador)

En Moodle tienes la imagen lena.bmp.

Mostrar la matriz de rango 50 que más se parece a la matriz original.

(**Ayuda:** La orden svd de Matlab calcula la descomposición SVD. Para este ejercicio debes usar:

[U, S, V]=svds(A,50)

que obtiene los 50 primeros vectores singulares por la izquierda (columnas de U), los 50 primeros valores singulares (diagonal de S) y los 50 primeros vectores singulares por la derecha (columnas de V). Así que: $A_{50} = U * S * (V')$)