Práctica 4

Ejercicio 1 (lápiz y papel)

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que se puede calcular ABC

b) ¿Cuántas multiplicaciones hay que efectuar para calcular $(AB)C$?

c) ¿Cuántas multiplicaciones hay que efectuar para calcular $A(BC)$?

Para unas matrices A de tamaño 5×14, B de tamaño 14×87, C de tamaño 87×3, D de tamaño 3×42, podemos calcular $ABCD$ de varias formas:

d) ¿Cuántas multiplicaciones hay que efectuar para calcular $(A(BC))D$?

e) ¿Cuántas multiplicaciones hay que efectuar para calcular $A(B(CD))$?

Sol. d) 4494 e) 65058

Ejercicio 2 (lápiz y papel)

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Determinar α y β de modo que: $A^2 + \alpha A + \beta I = \theta$.

b) Calcular, **usando el apartado anterior**, la matriz A^{-1}

Ayuda: En la página 8 del tema 1 tienes un ejemplo similar.

Nota: La orden de Matlab inv(A) calcula la inversa de una matriz A. Puedes usarla en este ejercicio para comprobar que el resultado del apartado b es correcto.

Sol. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$

Ejercicio 3 (lápiz y papel)

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, hallar a y b sabiendo que: $S = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \ldots = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Ayuda: Este ejercicio se parece al ejercicio 6 de la práctica 2. Las potencias pares son de una forma y las impares de otra. Debes sumar las potencias pares, después las potencias impares y después obtener

S sumando las dos matrices anteriores. Después deberás igualar el resultado obtenido con la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$ obteniendo un sistema de ecuaciones con las incógnitas a y b.

Sol. $a = 2$; $b = \frac{1}{4}$

Ejercicio 4 (lápiz y papel)

Sabemos que una cierta matriz A verifica: $A^2 = 3I$

a) Calcular la matriz A^8

b) Calcular la matriz A^{-1}

Ejercicio 5 (lápiz y papel)

Simplificar las siguientes expresiones:

a) $A^t(A^{-1})^t$
b) $(AB)^{-1}A\,B^2$
c) $A^t\,(B^{-1}A^{-1})^t\,(AB)^t$

Matriz reducida de Gauss-Jordan

En este caso, mediante operaciones elementales, ***en cada iteración se hace el pivote unitario en primer lugar y después se hacen ceros por encima y por debajo del pivote***. Veámoslo con un ejemplo. Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

-1ª Iteración: Pivote $a_{11} = 3$. Primero se hace el pivote unitario y después se hacen ceros el resto de elementos de la primera columna (por arriba y por abajo).

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 + 3f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 5 & -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

-2ª Iteración: Pivote $a_{22} = 5$. Primero se hace el pivote unitario y después se hacen ceros el resto de elementos de la segunda columna (por arriba y por abajo).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{5} & -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_2]{f_1 \to f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{43}{15} \end{pmatrix}$$

-3ª Iteración: Pivote $a_{33} = -\frac{1}{15}$. Primero se hace el pivote unitario y después se hacen ceros el resto de elementos de la tercera columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{15}} & \frac{43}{15} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3(-15)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -43 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 + f_3\left(\frac{14}{15}\right)]{f_1 \to f_1 + f_3\left(-\frac{11}{15}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -43 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida se llama **matriz reducida de Gauss-Jordan**.

Podemos usar Matlab para ayudarnos con las cuentas que son más tediosas:

```
clc;

A=[3 -3 5 1;1 4 -3 1;-3 4 -6 2];
disp('matriz original');
disp(A);

format rat
disp('Primera iteración');
disp('Hacemos unitario el pivote a11');
A(1,:)=A(1,:)/3;
disp(A);
```

Esto nos permite hacer unitario el pivote a_{11}, obteniendo la matriz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

```
disp('Hacemos ceros');
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-1);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(3);
disp(A);
```

Esto nos permite obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 5 & -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
disp('Segunda iteración');
disp('Hacemos unitario el pivote a22');
A(2,:)=A(2,:)/5;
disp(A);
```

Esto nos permite obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
disp('hacemos ceros por arriba y por debajo del pivote');
A(1,:)=A(1,:)+A(2,:)*(1);
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(-1);
disp(A);
```

Esto nos permite obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{15}} & \frac{43}{15} \end{pmatrix}$$

```
disp('Tercera iteración');
disp('Hacemos unitario el pivote a33');
A(3,:)=A(3,:)*(-15);
disp(A);
```

Esto nos permite obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -43 \end{pmatrix}$$

```
disp('Hacemos ceros por arriba del pivote');
A(1,:)=A(1,:)+A(3,:)*(-11/15);
A(2,:)=A(2,:)+A(3,:)*(14/15);
disp(A);
format
```

Ejercicio 6 (lápiz y papel, ayudándote con Matlab)

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Averiguar:

a) Una matriz escalonada equivalente.

b) Una matriz reducida de Gauss equivalente.

c) Una matriz de Gauss-Jordan equivalente.

Estrategia del pivotaje parcial para obtener matrices escalonadas

Esta estrategia se puede aplicar o no al aplicar el método de Gauss. Es opcional.

Consiste en elegir como pivote en cada iteración, no el que toque coger en ese momento, sino el de mayor valor absoluto entre todos los posibles. Intercambiaremos las filas correspondientes si es necesario.

Por ejemplo para la primera iteración del método de Gauss el pivote en principio sería $a_{11} = 1$. Pues bien, en lugar de él se elige al de mayor valor absoluto entre todos los posibles:

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{|1|, |2|, |-1|\}$$

Por lo tanto, intercambiamos las filas 1 y 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 + (\frac{1}{2}) f_1]{f_2 \to f_2 + (-2) f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

En la segunda iteración del proceso, el pivote por defecto es a_{22}. Pues bien, con la estrategia de pivotaje parcial elegiremos el de mayor valor absoluto entre todos los candidatos, es decir:

$$\max\{|a_{22}|\,,|a_{32}|\,\} = \max\{|\,\tfrac{7}{2}|,\left|\tfrac{1}{2}\right|\}$$

En la segunda iteración del proceso no es necesario intercambiar filas en este ejemplo.

Ya se continúa como siempre para terminar el problema.

<u>Ejercicio 7 (lápiz y papel, ayudándote de Matlab)</u>

Aplicar el método de Gauss-Jordan con pivotaje parcial para obtener la matriz B reducida de Gauss-Jordan equivalente a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ayuda:</u> En la página 17 del tema 1 tienes un ejemplo similar.

Sol. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$

<u>Observaciones:</u> La orden $rref(A)$ de Matlab devuelve la matriz B.

Este comando usa el método de Gauss-Jordan con pivotaje parcial.

<u>Ejercicio 8 (ordenador)</u>

Haz un programa que te muestre paso a paso el proceso de Gauss-Jordan con pivotaje parcial. Aplícalo para la matriz del ejemplo anterior.

En cada iteración del proceso debe mostrar quién es el pivote, debe decir el intercambio de filas que debe hacerse (si es necesario) mostrando la matriz resultante, hacer el pivote unitario mostrando la matriz resultante, hacer ceros en la columna del pivote mostrando la matriz resultante. En definitiva, mostrar el proceso paso a paso.

<u>Ejercicio 9 (lápiz y papel)</u>

En la página 19 del tema 1 tienes un ejemplo de cómo se puede calcular la inversa de una matriz usando operaciones elementales.

Mira cómo se hace y después usa dicho método para obtener la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Nota: Puedes comprobar que tienes bien el resultado comparando con lo que devuelve Matlab. Puedes usar la orden inv(A) o rref([A eye(4)]

Ejercicio 10 (ordenador)

Consideremos una matriz T triangular superior con unos en la diagonal. Esas matrices son fáciles de invertir usando el método de Gauss-Jordan. Haz un programa que calcule la inversa de una matriz de este tipo (sin usar el comando inv o el comando rref). Comprueba con ese programa que la inversa de la matriz: $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & -41 \\ 0 & 1 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11 (ordenador)

Se quiere calcular la inversa de una matriz usando el método de Gauss-Jordan con la estrategia de pivotaje parcial. Implementa dicho código y prueba su correcto funcionamiento con una matriz cuya inversa conozcas. Basta con aplicar el código del ejercicio 8. Si A es una matriz de orden n deberás aplicar el código del ejercicio 8 a la matriz B siguiente:

```
B=[A eye(n)];
```

Una vez que funcione tu código, construye una matriz aleatoria de tamaño 7×7 de números enteros entre 0 y 5 (usando las funciones rand y ceil que viste en la práctica 1) y calcula la inversa de dicha matriz usando el código anterior.