Práctica 3

Ejercicio 1 (lápiz y papel)

Resolver la ecuación: $3X - 2A = 5B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sol. $\begin{pmatrix} 7 & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (lápiz y papel)

Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ A - 3B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Sol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3 (lápiz y papel)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $S = A^1 + A^2 + A^3 + \cdots A^{50}$

Ayuda: En este ejercicio vas a necesitar la fórmula de la suma de un número finito de términos de una progresión aritmética (aquella en la que un término se calcula sumando al anterior una cantidad constante): $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n$

Sol. $\begin{pmatrix} 50 & 2550 & 3825 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 (ordenador)

Resolver el ejercicio anterior con ordenador de una forma eficiente (ver ejercicio 5 de la práctica 2).

Ejercicio 5 (lápiz y papel)

Hallar una matriz triangular superior T tal que, si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Se cumpla que $A = T\,T^t$

Nota: Recuerda que T^t significa la transpuesta de la matriz T.

La transpuesta de una matriz es otra matriz que se obtiene cambiando filas por columnas en la matriz original.

Ejercicio 6 (ordenador)

Dadas dos matrices A y B, Matlab calcula el producto de ambas usando la orden $A * B$, siempre que las dimensiones de ambas matrices sean las adecuadas.

Dadas dos matrices, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, haz un programa de ordenador que calcule el producto de ambas matrices sin usar el operador * del producto matricial.

El programa debe ser genérico, en el sentido de que debe funcionar siempre independientemente de las matrices A y B empleadas al inicio del programa (debe averiguar si las dimensiones de las matrices son las adecuadas y si lo son, calcular el producto de ambas sin usar el operador * del producto matricial)

Ejercicio 7 (ordenador)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Debes calcular la matriz $B = A^2 - 6A + 5I$

a) Hazlo, de una forma breve, usando el operador * que permite el producto de matrices en Matlab y el producto de un escalar por una matriz.
b) Hazlo sin usar dicho operador, modificando el código del ejercicio 6.

Los programas deben ser genéricos y debe valer para cualquier matriz A que escribamos al inicio del programa y no sólo para ésta.

Operaciones elementales y proceso de Gauss

Vamos a ver a continuación las llamadas operaciones elementales por filas descritas en la página 12 del tema 1. Se podría hacer también operaciones elementales por columnas, pero nosotros vamos a fijarnos por filas.

En una matriz, se consideran operaciones elementales por filas a las siguientes operaciones:

1. Intercambiar dos filas.
2. Multiplicar una fila por un número real no nulo.
3. Sustituir una fila por la suma de ella misma con el producto de otra por un escalar.

Las matrices resultantes de aplicar operaciones elementales diremos que son ***equivalentes***.

Dada una matriz A, vamos a ver cómo se calcula cómo la ***matriz escalonada de Gauss*** por filas equivalente a la matriz original. El proceso de Gauss es el siguiente:

- En la primera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (1, 1) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la segunda iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (2,2) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.

- En la tercera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (3,3) (siempre que sea no nulo) y debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- Etc.

Por ejemplo, vamos a obtener la matriz escalonada equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

usando el llamado ***proceso de Gauss***.

Primera iteración: El pivote es $a_{11} = 1$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él. Para ello:

- la segunda fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2
- La tercera fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -1
- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -3

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 \to f_4 + f_1(-3)]{\substack{f_2 \to f_2 + f_1(-2) \\ f_3 \to f_3 + f_1(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -20 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacer los cálculos del ejemplo anterior te puedes ayudar de Matlab.

La primera iteración del proceso se obtiene de la forma:

```
A=[1 -3 -2 7;2 -1 15 3;1 -8 -21 11];
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-2);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(-1);
A(4,:)=A(4,:)+A(1,:)*(-3);
disp(A);
```

Segunda iteración: El pivote es $a_{22} = 5$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él. Para ello:

- La tercera fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2
- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por -2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 \to f_4 + f_2(-2)]{f_3 \to f_3 + f_2(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -37 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & -32 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(-2);
A(4,:)=A(4,:)+A(2,:)*(-2);
disp(A);
```

Tercera iteración: El pivote es $a_{33} = -37$. Debemos hacer ceros todos los elementos por debajo de él. Para ello:

- La cuarta fila se sustituye por ella misma más la fila del pivote multiplicada por $-\frac{32}{37}$

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1\\ 0 & 0 & \boxed{-37} & 23 & -3\\ 0 & 0 & -32 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 \to f_4 + f_3(-\frac{32}{37})} \begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 19 & -11 & 1\\ 0 & 0 & -37 & 23 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -662/37 & 59/37\end{pmatrix}$$

Para obtener lo anterior usaremos:

```
format rat
A(4,:)=A(4,:)+A(3,:)*(-32/37);
disp(A);
```

Usamos la orden “format rat” para que escriba los resultados como fracciones.

Con esto ya hemos terminado el proceso.

Observa que la matriz resultante del proceso de Gauss es una ***matriz triangular superior***.

El proceso completo con Matlab sería:

```
clc;

A=[1 -3 -2 7 0;2 -1 15 3 1;1 7 -1 8 -1;3 1 0 1 1];
disp(A);

format rat

disp('primera iteración');
A(2,:)=A(2,:)+A(1,:)*(-2);
A(3,:)=A(3,:)+A(1,:)*(-1);
A(4,:)=A(4,:)+A(1,:)*(-3);
disp(A);

disp('segunda iteración');
A(3,:)=A(3,:)+A(2,:)*(-2);
A(4,:)=A(4,:)+A(2,:)*(-2);
disp(A);

disp('tercera iteración');
A(4,:)=A(4,:)+A(3,:)*(-32/37);
disp(A);

format
```

Ejercicio 8 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Dada la matriz $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, aplicar el método de Gauss anteriormente descrito.

.

Sol. $\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 4 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{17}{5} & \frac{17}{10}\\ 0 & 0 & 0 & 36 & 19\end{pmatrix}$

Matriz reducida de Gauss

Es frecuente usar una variación del método de Gauss que consiste en hacer unitario el pivote en cada iteración del proceso.

- En la primera iteración el pivote es el elemento situado en la posición (1, 1) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la segunda iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (2,2) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- En la tercera iteración del proceso el pivote es el elemento situado en la posición (3,3) (siempre que sea no nulo). Lo hacemos unitario en primer lugar y después debemos hacer ceros todos los elementos por debajo del pivote.
- Etc.

La ***matriz reducida de Gauss*** es una matriz escalonada o triangular superior con la particularidad de que en cada fila el primer elemento no nulo de la matriz debe ser un 1.

Ejercicio 9 (lápiz y papel pero ayudándote de Matlab)

Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz reducida de Gauss.

Sol. La matriz reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

Ejercicio 10 (ordenador)

Haz un programa en Matlab que permita obtener la matriz reducida de Gauss. Comprueba que el código funciona correctamente aplicándolo a la matriz del ejemplo anterior.