Práctica 6

Cálculo simbólico con Matlab

El cálculo simbólico no es el punto fuerte de Matlab. Otros programas como Mathematica o Maxima (versión libre de Mathematica) son mejores para el cálculo simbólico.

Sin embargo vamos a ver cómo se puede trabajar con Matlab de forma simbólica. Para ello es necesario tener instalado el toolbox llamado "Symbolic Math".

Recuerda que con la orden `ver` (de versión) puedes ver qué versión de Matlab tienes instalado en tu ordenador y qué toolboxes están instaladas.

Veamos un ejemplo de cálculo simbólico con Matlab. Supongamos que tenemos la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Queremos calcular su determinante en función de los valores de a y después queremos averiguar qué valores de a anulan el determinante.

Entonces la orden: a=sym('a');

Le dice a Matlab que a es una variable simbólica.

También sirve la orden syms a;

Después podemos definir la matriz A y calcularle su determinante:

$A = [\, a\ 1\ 1\ 1;\ 1\ a\ 1\ 1;\ 1\ 1\ a\ 1;\ 1\ 1\ 1\ a]$

$det(A)$

Matlab devuelve: $a\hat{}4 - 6 * a\hat{}2 + 8 * a - 3$

Después podemos ver qué valores anulan este determinante haciendo:

$solve('\, a\hat{}4 - 6 * a\hat{}2 + 8 * a - 3 = 0\,', a)$

Matlab devuelve: $-3, 1, 1, 1$.

Es decir, admite dos raíces: -3 (una raíz simple) y 1 (raíz triple).

También podríamos haber factorizado el determinante con la orden: $factor(det(A))$

Matlab nos devuelve: $(a + 3) * (a - 1)\hat{}3$

Esto quiere decir que:

$$|A| = a^4 - 6a^2 + 8a - 3 = (a + 3)(a - 1)^3$$

El determinante vale cero cuando a vale -3 y 1.

Supongamos que $a = -3$ y queremos ver cuál será su determinante.

Hacemos en Matlab:

$B = subs(A, a, -3);\ \ det(B)$

entonces Matlab crea una matriz numérica B sustituyendo el valor de a por -3 y le calcula su determinante, que en este caso es cero, como era de esperar.

Ejercicio 1 (lápiz y papel)

Si A y B son dos matrices 2×2 tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcular el valor de:

$|A^2|$, $|A^{-1}|$, $|2A|$, $|A\,B^t|$

Dar un ejemplo de dos matrices A y B tales que $|A + B| \neq |A| + |B|$

Ejercicio 2 (lápiz y papel)

Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Comprobar el resultado con Matlab.

Ejercicio 3 (lápiz y papel)

Hallar la raíz múltiple de la ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Comprobar el resultado con Matlab.

Ejercicio 4 (lápiz y papel)

Calcular los valores de a que anulan el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 1+a & 2-a & a \\ a & 1 & 2-a & a \\ a & a & 2-a & a \\ a & a & 2-a & -1 \end{vmatrix}$

Comprobar el resultado con Matlab.

Ejercicio 5 (lápiz y papel)

Sean las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

a) Averiguar para qué valores de k es inversible la matriz $B^t A^t$

b) Resolver $(AB)^t X = I$

Rango de una matriz con Matlab

Supongamos que tenemos la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Vimos antes que el determinante se anulaba para $a = -3$ y para $a = 1$

Entonces está claro que el rango de A es 4 siempre que a sea distinto de -3 y 1.

Supongamos que $a = -3$ y queremos ver cuál será su rango.

Hacemos en Matlab:

$B = subs(A, a, -3)$

$rank(B)$

entonces Matlab crea una matriz numérica B sustituyendo el valor de a por -3 y le calcula el rango que en este caso es 3.

Análogamente:

$C = subs(A, a, 1)$

$rank(C)$

Nos devuelve 1.

Por lo tanto, la respuesta al cálculo del rango de esta matriz sería:

- Si $a \neq -3 \;\; y \;\; a \neq 1 \;\Rightarrow\; rango(A) = 4$
- Si $a = -3 \;\Rightarrow\; rango(A) = 3$
- Si $a = 1 \;\Rightarrow\; rango(A) = 1$

Ejercicio 6 (lápiz y papel y ordenador)

Calcular el rango de la matriz, según los valores de a:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1+a & 2-a & a \\ a & 1 & 2-a & a \\ a & a & 2-a & a \\ a & a & 2-a & -1 \end{pmatrix}$$

Tienes que hacer el ejercicio completamente a mano, pero también debes hacer paralelamente los cálculos con Matlab y comprobar que los resultados coinciden. Debes hacer ambas cosas.

Ejercicio 7 (lápiz y papel y ordenador)

Igual que en el ejercicio anterior pero con la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8 (lápiz y papel)

Averiguar para qué valores de a los vectores:

$$\{(1,1,a,1),(1,0,1,1),(0,1,1,a),(a,a,1,-1)\}$$

forman una base de $\mathbb{R}^4$

(Sol. $a \neq -1 \; y \; a \neq \sqrt{2} \; y \; a \neq -\sqrt{2} \quad \Rightarrow$ forman una base)

Aritmética Modular

En Matemática Discreta has estudiado la relación de congruencia módulo m.

Recuerda que $\mathbb{Z}_m = \{0,1,2,\dots,m-1\}$, ya que los restos de dividir un número entero entre m son $0,1,2,\dots,m-1$.

Vamos a hacer una serie de ejercicios relacionados con la aritmética modular.

Ejercicio 9 (lápiz y papel)

Construye la tabla de sumar y la tabla de multiplicar en $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$, es decir, rellena las siguientes tablas:

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Idem con $\mathbb{Z}_8$.

En Matlab necesitarás usar la orden mod (que equivale a la orden % de C).

Recuerda que:

Se dice que un número a en $\mathbb{Z}_m$ es **inversible** si hay otro número b también en $\mathbb{Z}_m$ de modo que:

$$a \cdot b = 1 \; (mod \; m)$$

Si miras en la tabla del producto en $\mathbb{Z}_5$ verás que todos los números no nulos tienen inverso. Por ejemplo, el inverso de 2 es el 3 ya que:

$$2 \cdot 3 = 1\ (mod\ 5)$$

Así que los números {1, 2, 3, 4} son inversibles módulo 5.

Sin embargo, si miras en la tabla de $\mathbb{Z}_8$ verás que eso ya no es así, por ejemplo, 2 no tiene inverso en $\mathbb{Z}_8$, ya que ningún número multiplicado por 2 nos como resultado 1 cuando trabajamos módulo 8. Así que, mirando la tabla de multiplicar de $\mathbb{Z}_8$, vemos que la lista de números inversibles es: {1, 3, 5, 7}

Ejercicio 10 (ordenador)

Hacer un programa de ordenador que nos diga si un número es inversible o no en $\mathbb{Z}_{256}$.

Pedirá un número al usuario (entre 0 y 255) y nos dirá si es capaz de encontrar o no otro número de $\mathbb{Z}_{256}$ tal que el producto de ambos dé como resultado 1 módulo 256.

Ejercicio 11 (ordenador)

Hacer un programa que nos pida un número entero positivo m y nos proporcione la lista de números inversibles en $\mathbb{Z}_m$, usando el código empleado en el problema anterior.