Práctica 5

Ejercicio 1 (ordenador)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular AB y BA ¿coinciden los resultados? ¿era previsible?

b) Calcular $(A+B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$ ¿coinciden los resultados? ¿era previsible?

c) Calcular $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$ ¿coinciden los resultados? ¿era previsible?

Ejercicio 2 (lápiz y papel)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, si existe, la matriz A^{-1} usando operaciones elementales por filas.

b) Hallar X que verifique la ecuación $AXA = AB$, despejando la X de la expresión anterior y luego usando la inversa obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 3 (lápiz y papel)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, si existe, la matriz A^{-1}.

b) Hallar X que verifique la ecuación $AX = AB$

Ejercicio 4 (lápiz y papel)

Una matriz cuadrada se dice que es ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta. Es decir:

$$A^{-1} = A^t$$

Por lo tanto: $A\,A^t = AA^{-1} = I$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x & 0 \\ y & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar x e y para que la matriz A sea ortogonal, es decir, para que cumpla: $A\,A^t = I$

Ejercicio 5 (lápiz y papel)

Usando operaciones elementales, calcular la inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 (lápiz y papel)

Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 18 & 5 & 7 & 8 \\ 18 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 & -3 & 7 \\ 0 & 21 & 23 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Sol. a) 3; b) 4; c) 9; d) 138

Observación: La función det(A) de Matlab permite calcular el determinante de una matriz cuadrada A.

Ejercicio 7 (lápiz y papel)

Demuestra, **usando las propiedades de los determinantes**, que:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & d+e \\ 3a & 3b+4c & 3d+4e \\ 2a & 2b+3c & 2d+2e \end{vmatrix} = -ace$$

Ejercicio 8 (lápiz y papel)

Calcular las inversas de las siguientes matrices usando determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9 (lápiz y papel)

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de A y estudia para qué valores de m es la matriz A inversible.

b) Calcula la inversa en función de m.

Solución: La matriz es inversible siempre que $m \neq 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{3-4m}{m-1} & 3 & -2 & \frac{1}{m-1} \\ \frac{m}{m-1} & -1 & 1 & -\frac{1}{m-1} \\ -\frac{1}{m-1} & 0 & 0 & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10 (lápiz y papel)

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a+1 \\ 1 & 0 & a & a+1 \\ a & a & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula su determinante.

b) Averigua los valores de a que anulan el determinante.

c) Averiguar su rango.

Solución: a) $|A| = a^3 - a^2 - a + 1 = (a^2 - 2a + 1)(a + 1)$ b) $a = -1$ y $a = 1$