Ejercicio 1.6

Manuel Luque Cuesta

Este caso es similar al ejercicio 1.5, solo que en este caso se quiere averiguar para $n = 3$ y la suma de $x = x_0 + h$ y $x = x_0 - h$.

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{3'}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{4'}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$$

Sustituyendo $x = x_0 - h$ y $x = x_0 + h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f^{3'}(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{4'}(\xi_1)}{4!}h^4$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{3'}(x_0)}{3!}h^3 + \frac{f^{4'}(\xi_2)}{4!}h^4$$

Sumando $f(x_0 - h) + f(x_0 + h)$:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + 2\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{(f^{4'}(\xi_1) + f^{4'}(\xi_2))}{4!}h^4$$

$$2\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 = -2f(x_0) + f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - \frac{(f^{4'}(\xi_1) + f^{4'}(\xi_2))}{4!}h^4$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} - \frac{(f^{4'}(\xi_1) + f^{4'}(\xi_2))}{4!}h^2$$

Teniéndose que $\frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}$ es la formula de la segunda derivada centrada, el error que se comete es por lo tanto:

$$error = \frac{(f^{4'}(\xi_1) + f^{4'}(\xi_2))}{4!}h^2$$

Como se observa si la función es de grado 3, la aproximación es perfecta dado que la derivada cuarta sería nula y, por ende, el error también lo sería.