Ejercicio 1.2

Manuel Luque Cuesta

Se tienen tres puntos x_1, x_2 y x_3, y sus respectivas imágenes. Se va a calcular la base de lagrange a partir de esos puntos $l_1(x), l_2(x)$ y $l_3(x)$.

$$l_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Utilizando la regla de Leibniz se calcularán $l_1'(x), l_2'(x)$ y $l_3'(x)$.

$$l_1'(x) = \frac{(x - x_3) + (x - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2'(x) = \frac{(x - x_3) + (x - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3'(x) = \frac{(x - x_2) + (x - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Realizando la simplificación en la que los puntos están ordenados y equiespaciados, se llamará al punto central x_0 y a la distancia entre puntos h.

$$x_1 = x_0 - h, \qquad x_2 = x_0, \qquad x_3 = x_0 + h$$

$$l_1'(x) = \frac{(x - x_0 - h) + (x - x_0)}{(x_0 - h - x_0)(x_0 - h - x_0 - h)}$$

$$l_2'(x) = \frac{(x - x_0 - h) + (x - x_0 + h)}{(x_0 - x_0 + h)(x_0 - x_0 - h)}$$

$$l'_3(x) = \frac{(x - x_0) + (x - x_0 + h)}{(x_0 + h - x_0 + h)(x_0 + h - x_0)}$$

$$l'_1(x) = \frac{2x - 2x_0 - h}{(-h)(-2h)}$$

$$l'_2(x) = \frac{2x - 2x_0}{(h)(-h)}$$

$$l'_3(x) = \frac{2x - 2x_0 + h}{(2h)(h)}$$

La derivada de la función aproximada mediante el polinomio interpolador de lagrange es este polinomio con la base derivada:

$$f'(x) \approx f(x_0 - h) * l'_1(x) + f(x_0) * l'_2(x) + f(x_0 + h) * l'_3(x)$$

Al evaluarlo en x_0:

$$l'_1(x_0) = \frac{2x_0 - 2x_0 - h}{(-h)(-2h)} = \frac{-h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

$$l'_2(x_0) = \frac{2x_0 - 2x_0}{(h)(-h)} = \frac{0}{-h^2} = 0$$

$$l'_3(x_0) = \frac{2x_0 - 2x_0 + h}{(2h)(h)} = \frac{h}{2h^2} = \frac{1}{2h}$$

$$f'(x) \approx \frac{-f(x_0 - h)}{2h} + f(x_0) * 0 + \frac{f(x_0 + h)}{2h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Esta última es la formula de la derivada centrada.