Ejercicio 2.1

Manuel Luque Cuesta

Se desea comprobar cual es el grado de exactitud para la regla del trapecio, la cual permite aproximar la integral entre dos puntos. La regla del trapecio se basa en calcular el área del trapecio entre los dos extremos, a y b, por lo que su formula es:

$$AreaTrapecio = \frac{(baseMenor + baseMayor)}{2} altura$$

donde las bases son las imágenes de los puntos y la altura, la diferencia entre estos:

$$AreaTrapecio = \frac{(f(a) + f(b))}{2} altura$$

Para un polinomio de **grado 1** entre $[-1, 1]$:

$$\int_{x=-1}^{x=1} 2x + 1dx = [x^2 + x]_{x=-1}^{x=+1} = (1 + 1) - (1 - 1) = 2$$

Las variables serían $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = -1$ y $f(b) = 3$

$$AreaTrapecio = \frac{-1 + 3)}{2}(2) = 2$$

El área sale exacta.

Suponiendo un caso más genérico.

$$\int_{x=a}^{x=b} xdx = [\frac{x^2}{2}]_{x=a}^{x=b} = (\frac{b^2}{2}) - (\frac{a^2}{2}) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Siendo en este caso $a = a$, $b = b$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$

$$AreaTrapecio = \frac{a+b)}{2}(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Como se puede observar sale idéntica, por lo que, para polinomios de grado 1, la regla del trapecio es exacta.

Para un polinomio de **grado 2** entre $[a,b]$:

$$\int_{x=a}^{x=b} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=a}^{x=b} = (\frac{b^3}{3}) - (\frac{a^3}{3}) = \frac{b^3-a^3}{3}$$

Siendo en este caso $a = a$, $b = b$, $f(a) = a^2$ y $f(b) = b^2$

$$AreaTrapecio = \frac{a^2+b^2)}{2}(b-a) = \frac{a^2b-a^3+b^3-ab^2}{2}$$

Se observa que ambas expresiones difieren de ser igual, aun así, se realizará una prueba con $a = -1$ y $b = 1$:

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^2 dx = \frac{1^3-(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$AreaTrapecio = \frac{1^2+(-1)^2}{2}(1-(-1)) = \frac{2}{2}2 = 2$$

Como se observan los resultados son muy dispares, dado esto, se puede afirmar que el grado de exactitud de la regla del trapecio es de 1.