



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA

INGENIERÍA INFORMÁTICA
ESPECIALIDAD: COMPUTACIÓN
CUARTO CURSO. SEGUNDO CUATRIMESTRE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LA
COMPUTACIÓN.

Práctica 4

1. Móvil sujeto a un muelle

Manuel Luque Cuesta
70959043H
i62lucum@uco.es

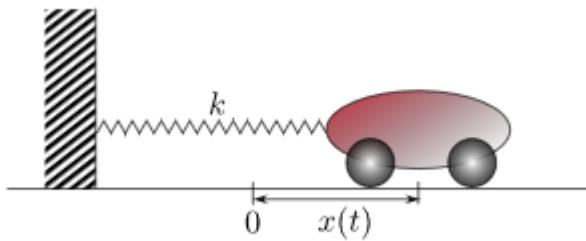
Curso académico 2019-2020
Córdoba, 15 de mayo de 2020

Índice

1. Introducción	1
2. Desarrollo	3
2.1. Apartado A	4
2.1.1. Caso sin rozamiento	5
2.1.2. Caso subamortiguado	7
2.1.3. Caso sobreamortiguado	9
2.1.4. Caso críticamente amortiguado	10
2.2. Apartado B	13
2.2.1. Rozamiento nulo	15
2.2.2. Coeficiente de rozamiento 0.1	18
2.2.3. Coeficiente de rozamiento 0.6	21
2.3. Apartado C	25
2.4. Apartado D	29
2.5. Apartado E	33
2.6. Apartado F	38

1. Introducción

A lo largo de este documento, se realizará una resolución de un problema de física en el cual hay un móvil de masa m sujeto a una mediante un muelle. La pared se encuentra a la izquierda, por lo que se considerará positivo el movimiento ($x(t)$) hacia la derecha. El punto de equilibrio sera el origen de coordenadas.



Sobre dicho móvil actúan tres tipos de fuerzas:

- **Fuerza elástica:** producida por el muelle. Según la ley de Hooke esta fuerza es proporcional a la elongación del muelle, siendo k la constante de proporcionalidad.
- **Fuerza de rozamiento:** producida por el contacto con el medio. Esta fuerza es proporcional a la velocidad, siendo β la constante de proporcionalidad.
- **Fuerzas externas:** se denotarán por $F_{ext}(t)$

Tras lo dicho anteriormente (que el móvil se mueve alejándose de la pared), la fuerza producida por el muelle será una fuerza negativa. Además, esta depende de la distancia que es x . Por otro lado, la fuerza de rozamiento va en contra del movimiento, por lo que también es negativa, dependiendo de la velocidad la cual es la derivada de la distancia recorrida con respecto al tiempo, es decir, $\frac{dx}{dt}$, pudiéndose expresar como x' . En cuanto a las fuerzas externas, se suponen positivas ya que se ha dicho que el móvil se mueve alejándose de la pared.

Todas estas afirmaciones se pueden unir mediante la *Segunda Ley de Newton*, que dice que el sumatorio de fuerzas sobre un cuerpo es igual a la masa

por la aceleración. Si la velocidad es la derivada de x , entonces, la aceleración que es la variación de la velocidad es x'' . Por lo que se tiene el siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} mx'' = -kx - \beta x' + F_{ext} \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

2. Desarrollo

2.1. Apartado A

Suponer que $F_{ext} = 0$. Fijar $m = 1$ y cambiar los nombres $2a = \beta$ y $b^2 = k$. Asociada a la ecuación resultante, se define el polinomio característico, que es un polinomio $p(\lambda)$ de grado 2 en el que el coeficiente de cada grado coincide con el coeficiente de la E.D.O. del mismo orden de derivación. Observar que las raíces de ese polinomio dependen del signo de $a^2 - b^2 < 0$. Se llama caso subamortiguado cuando $a^2 - b^2 < 0$, caso sobreamortiguado cuando $a^2 - b^2 > 0$ y críticamente amortiguado cuando $a^2 - b^2 = 0$. Resolver numéricamente con un método de al menos orden dos los distintos casos para distintos valores de los parámetros e interpretar las soluciones

Se tiene por lo tanto el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x'' = -b^2x - 2ax' \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Que realizando el siguiente cambio de variable $z'_0 = z_1$ y $z'_1 = -b^2z_0 - 2az_1$:

$$\begin{cases} z_1 = z'_0 \\ z'_1 = -b^2z_0 - 2az_1 \\ z_0(0) = x_0 \\ z_1(0) = v_0 \end{cases}$$

Se contemplarán los cuatro posibles casos:

- **Sin rozamiento:** $a = 0$ y $b = 1$
- **Subamortiguado:** $a = 0,1$ y $b = 1$
- **Sobreamortiguado:** $a = 1,2$ y $b = 1$
- **Críticamente amortiguado:** $a = 1$ y $b = 1$

Para todos ellos, se tendrá los siguientes valores sobre los que se harán pruebas:

x_0	v_0
5	10
5	0
0	10

Como método numérico a utilizar se ha escogido el *método de Heun* con un $h = 0,1$.

2.1.1. Caso sin rozamiento

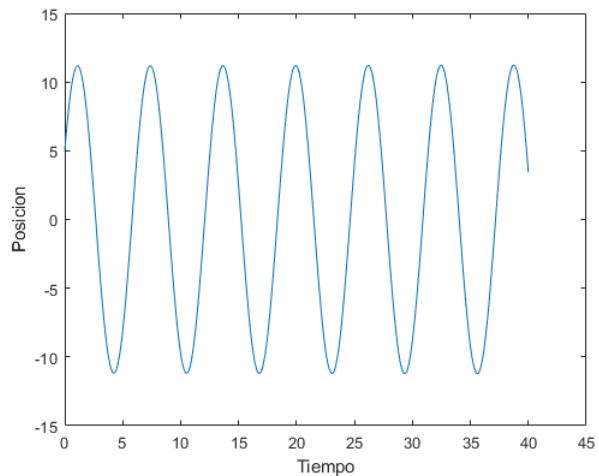


Figura 1: Apartado A: caso sin rozamiento, $a = 0$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 10$

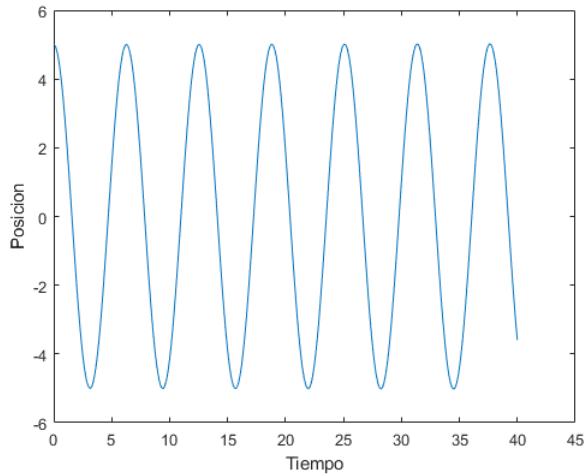


Figura 2: Apartado A: caso sin rozamiento, $a = 0$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 0$

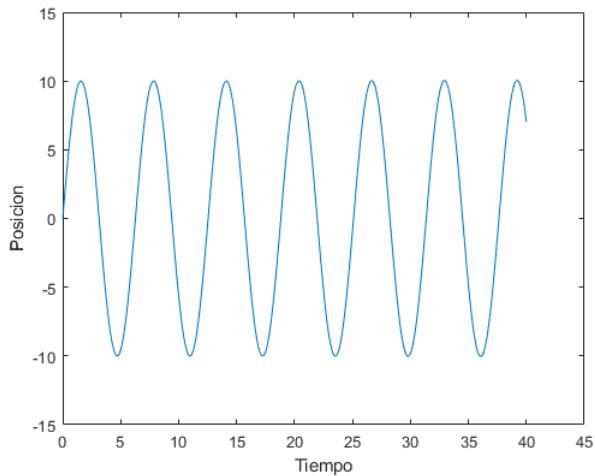


Figura 3: Apartado A: caso sin rozamiento, $a = 0$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 10$

En este caso (Figuras 1, 2 y 3), el movimiento se asemeja al movimiento armónico simple, ya que no hay rozamiento. En el momento inicial se tiene, ya sea una velocidad positiva, una posición positiva o ambas, en el caso de la velocidad, hará que inicialmente el móvil se desplace 'estirando' el muelle, con lo que se ejerce la fuerza del muelle en sentido contrario y como no hay rozamiento, la energía se conserva, provocando que el muelle se contraiga hasta el punto de igual energía, pero en sentido contrario. En este punto, el muelle esta contraído, provocando un 'impulso' en sentido positivo, hasta

llegar de nuevo al punto inicial, donde se tiene la velocidad de nuevo y vuelve a comenzar el proceso, convirtiéndose en periódico.

En cuanto a los diferentes valores de velocidad y posición, solo determinan la cantidad de energía que tiene almacenado el sistema, denotándose en los casos de velocidad que hay un incremento inicial en la posición, como una especie de desfase en el movimiento ondulatorio.

2.1.2. Caso subamortiguado

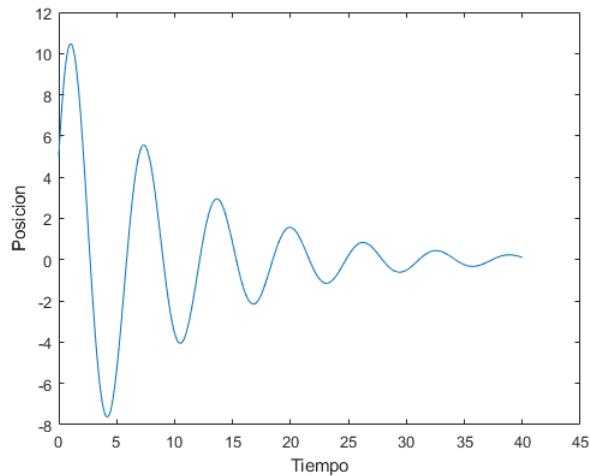


Figura 4: Apartado A: caso subamortiguado, $a = 0,1$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 10$

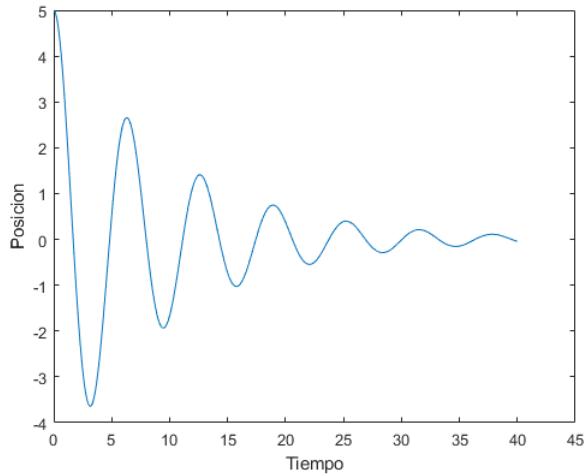


Figura 5: Apartado A: caso subamortiguado, $a = 0,1$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 0$

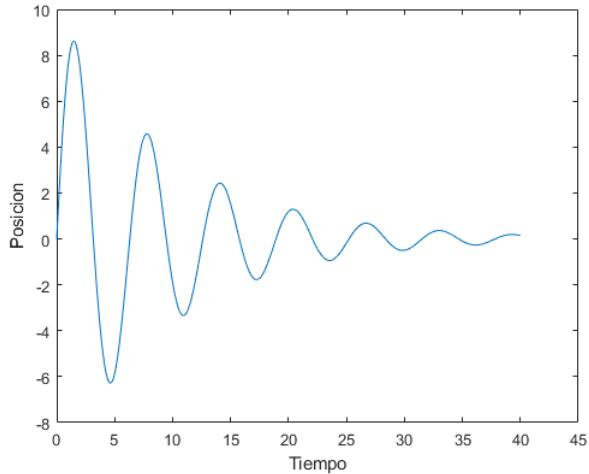


Figura 6: Apartado A: caso subamortiguado, $a = 0,1$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 10$

En este caso (Figuras 4, 5 y 6), se observa como el rozamiento hace que la energía desaparezca progresivamente del sistema, provocando que en cada oscilación, la posición extrema a la que llega sea menor, hasta probablemente acabar siendo prácticamente nula.

Si se habla de los parámetros de posición y velocidad iniciales, ocurre lo mismo que en el caso anterior, son el factor que determina la energía inicial del sistema.

2.1.3. Caso sobreamortiguado

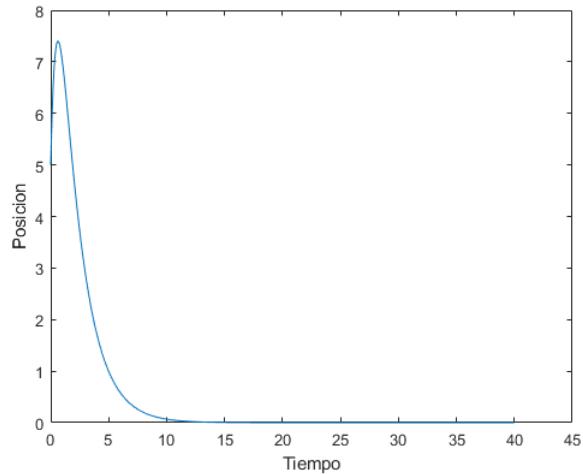


Figura 7: Apartado A: caso sobreamortiguado, $a = 1,2$, $b = 1$, $x_0 = 5$,
 $v_0 = 10$

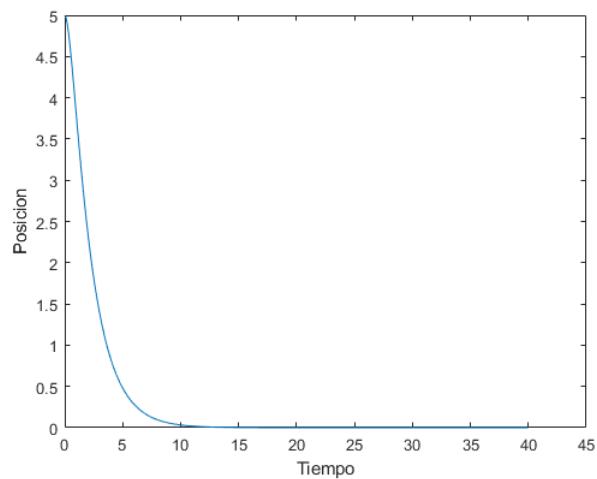


Figura 8: Apartado A: caso sobreamortiguado, $a = 1,2$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 0$

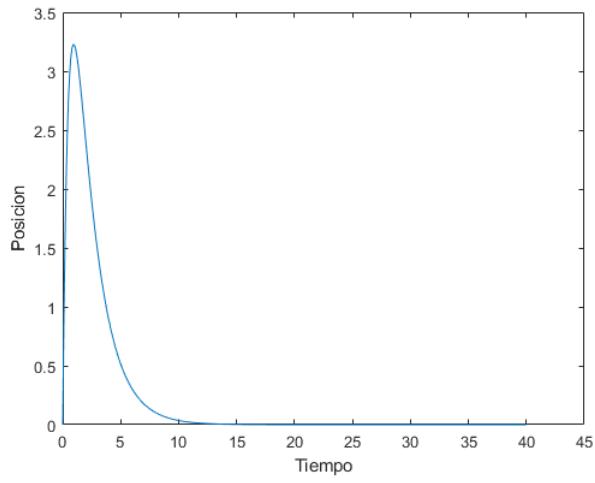


Figura 9: Apartado A: caso sobreamortiguado, $a = 1,2$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 10$

En este caso (Figuras 7, 8 y 9), el rozamiento es tan grande en comparación a la fuerza del muelle, que provoca que desaparezca la energía del sistema, antes incluso de llegar a producirse una oscilación.

2.1.4. Caso críticamente amortiguado

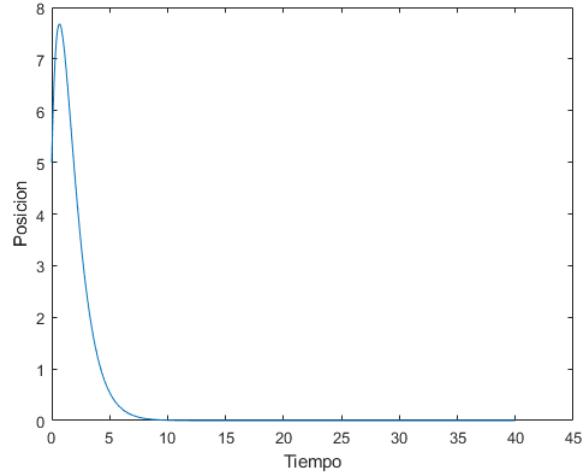


Figura 10: Apartado A: caso críticamente amortiguado, $a = 1$, $b = 1$, $x_0 = 5$, $v_0 = 10$

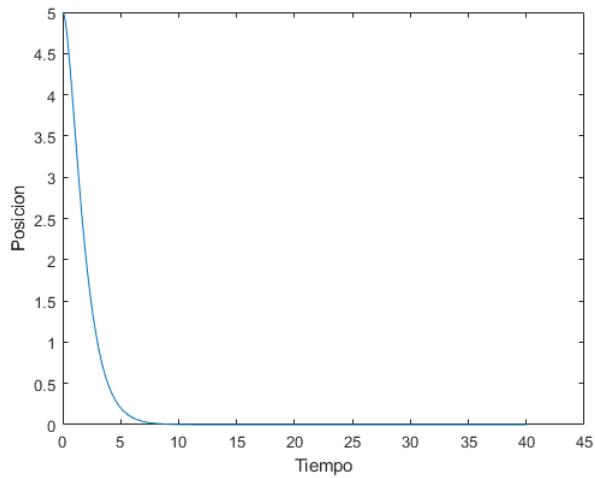


Figura 11: Apartado A: caso críticamente amortiguado, $a = 1$, $b = 1$,
 $x_0 = 5$, $v_0 = 0$

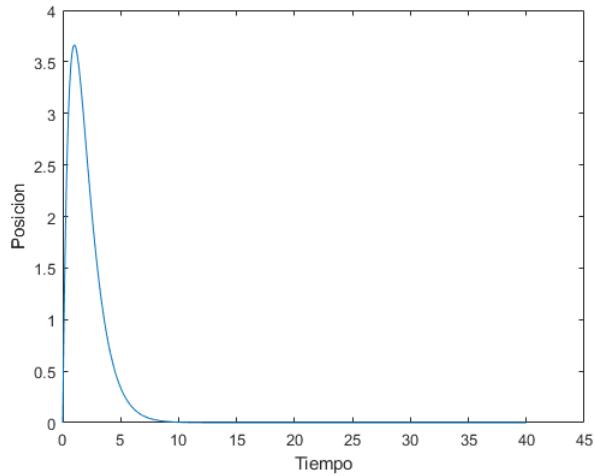


Figura 12: Apartado A: caso críticamente amortiguado, $a = 1$, $b = 1$,
 $x_0 = 0$, $v_0 = 10$

En este caso (Figuras 10, 11 y 12), es muy similar al caso anterior de sobreamortiguación, solo que probablemente, a partir de este punto, si se disminuyera la amortiguación si que se produciría una oscilación. Para comprobarlo se realizará un experimento más: $a = 0,9$ y $b = 1$.

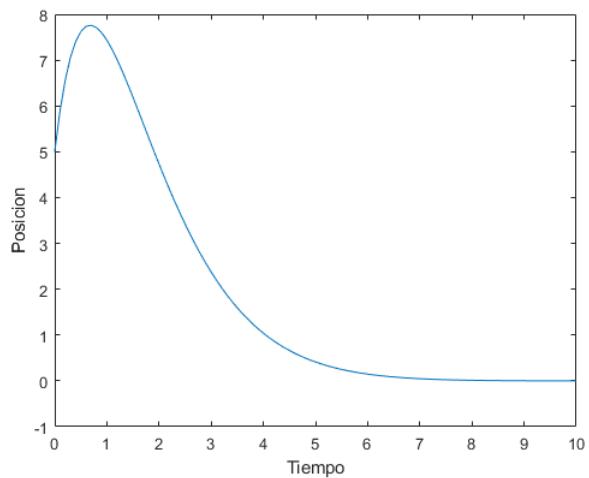


Figura 13: Apartado A: caso subamortiguado, $a = 0,9$ y $b = 1$

En la Figura 13, se observa como se incluyen los valores negativos en el eje y de la gráfica, cosa que solo ocurre si existen valores negativos, contrastando la hipótesis antes mencionada sobre el caso críticamente amortiguado.

2.2. Apartado B

Supongamos que $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ donde F_0 y ω son constantes conocidas. Resolver ahora el caso subamortiguado para distintos valores usando un método numérico.

Al incluirse esta fuerza en el sistema anterior se tiene:

$$\begin{cases} z_1 = z'_0 \\ z'_1 = -b^2 z_0 - 2az_1 + F_0 \cos(\omega t) \\ z_0(0) = x_0 \\ z_1(0) = v_0 \end{cases}$$

Para llevar a cabo los experimentos, se harán diversas configuraciones con el fin de comprobar la influencia de los parámetros, todas ellas para el caso subamortiguado, fijando $b = 1$. Como se comentó en el apartado anterior, la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 influyen ambas en la cantidad de energía del sistema, por lo que, solo se considerará los cambios en una de estas para reducir el número de experimentos.

Los diferentes valores para los parámetros son:

<i>Etiqueta</i>	<i>a</i>	<i>x</i> ₀	<i>ω</i>	<i>F</i> ₀
1	0	0	2	5
2	0	2	2	5
3	0	5	2	5
4	0	0	4	5
5	0	2	4	5
6	0	5	4	5
7	0.1	0	2	5
8	0.1	2	2	5
9	0.1	5	2	5
10	0.1	0	4	5
11	0.1	2	4	5
12	0.1	5	4	5
13	0.6	0	2	5
14	0.6	2	2	5
15	0.6	5	2	5
16	0.6	0	4	5
17	0.6	2	4	5
18	0.6	5	4	5

Como método numérico a utilizar se ha escogido el *método de Heun* con un $h = 0,1$.

2.2.1. Rozamiento nulo

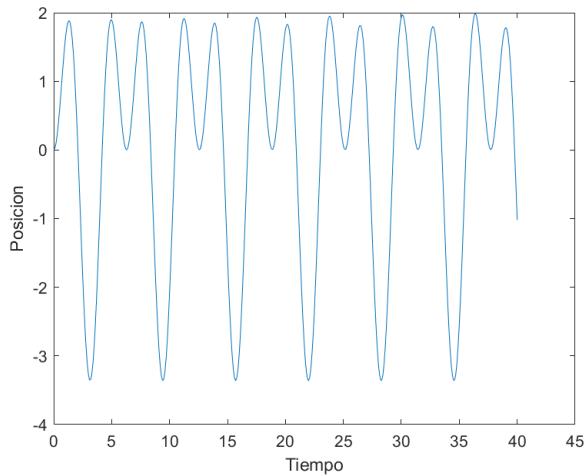


Figura 14: Apartado B: experimento 1

En esta Figura 14, se denota que los movimientos ondulares producidos por el muelle y la fuerza se combinan, produciendo en la parte positiva, una doble oscilación. Como la energía inicial es nula para este caso ($x_0 = 0$), esta doble puede ser debida a la velocidad que lleva de la fuerza de la contracción del muelle, más la fuerza oscillatoria, que al llegar a la parte positiva, la fuerza del muelle se vuelve negativa y durante unos instantes la fuerza externa también, sin embargo, aun conserva la inercia anterior, por lo que llega hasta el punto máximo, para decrecer momentáneamente y, luego, la fuerza externa crece para producir esta doble oscilación. Además, la amplitud negativa es mayor debido a que en ese punto se combinan la inercia de la fuerza negativa del muelle, más la fuerza externa cuando se vuelve negativa.

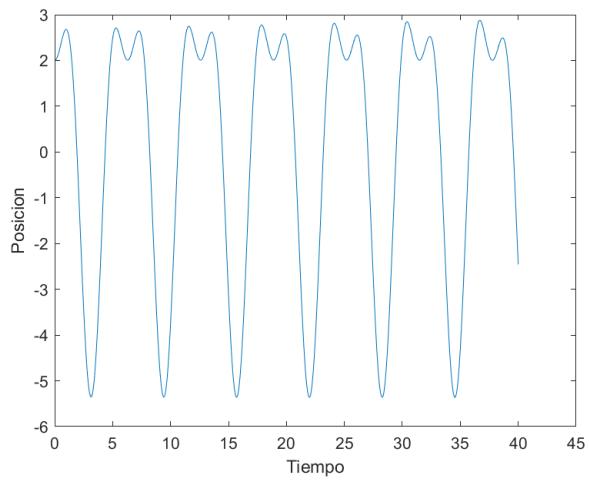


Figura 15: Apartado B: experimento 2

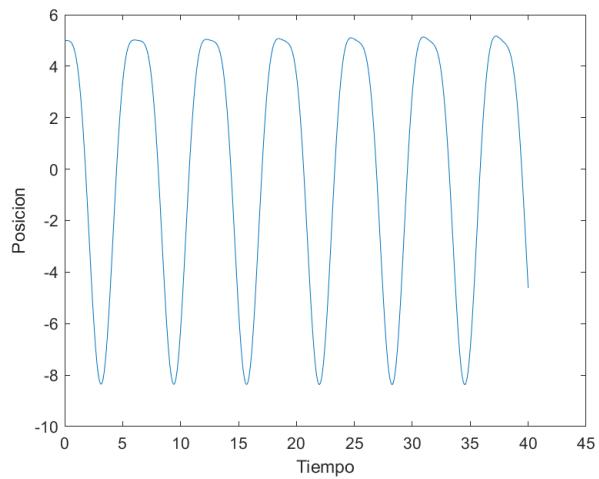


Figura 16: Apartado B: experimento 3

En estas Figuras 15 y 16, se observa que al introducir energía inicial ($x_0 = 2$ y $x_0 = 5$), la fuerza ejercida por el muelle es mucho mayor, provocando un solape en las ondas, ya que la fuerza externa no influye en la misma medida sobre la velocidad del móvil.

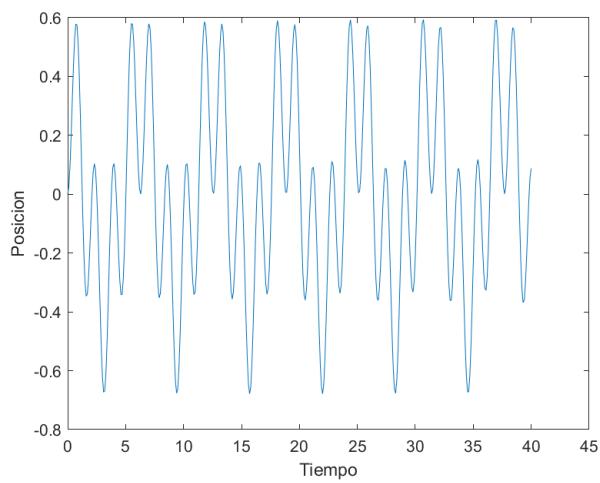


Figura 17: Apartado B: experimento 4

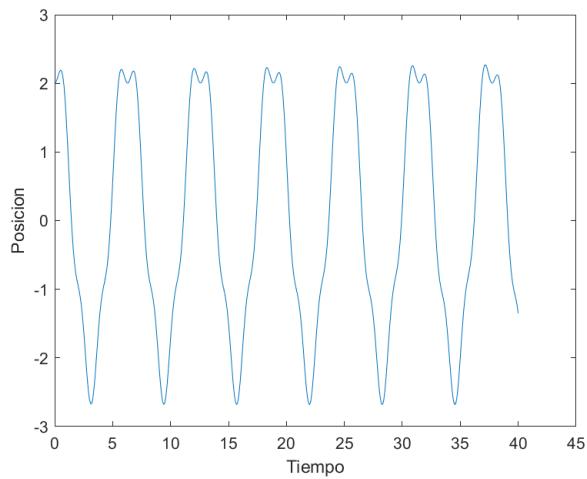


Figura 18: Apartado B: experimento 5

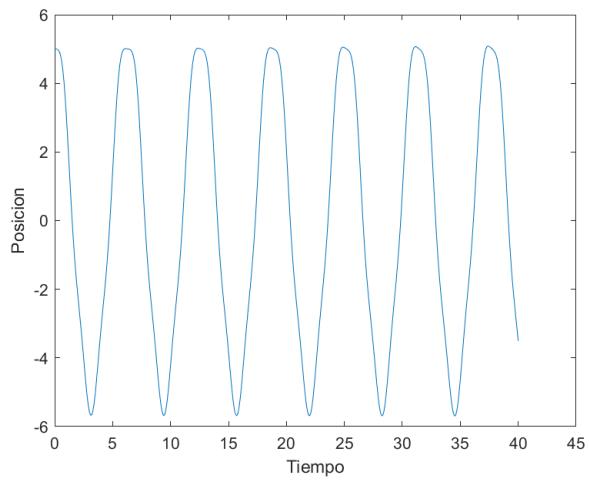


Figura 19: Apartado B: experimento 6

En estas tres Figuras 17, 18 y 19, se observa que al aumentar la velocidad angular ω , se producen muchas más oscilaciones, las cuales se van viendo mermadas conforme se aumenta la energía inicial, lo mismo que ocurría anteriormente, aún así se puede apreciar la influencia de la velocidad angular con claridad en las dos primeras figuras.

2.2.2. Coeficiente de rozamiento 0.1

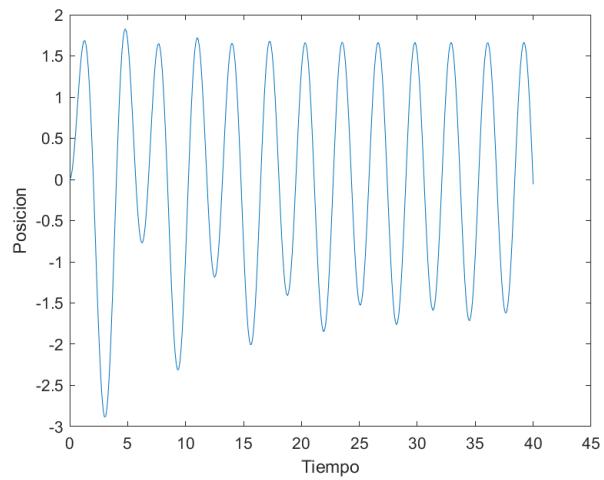


Figura 20: Apartado B: experimento 7

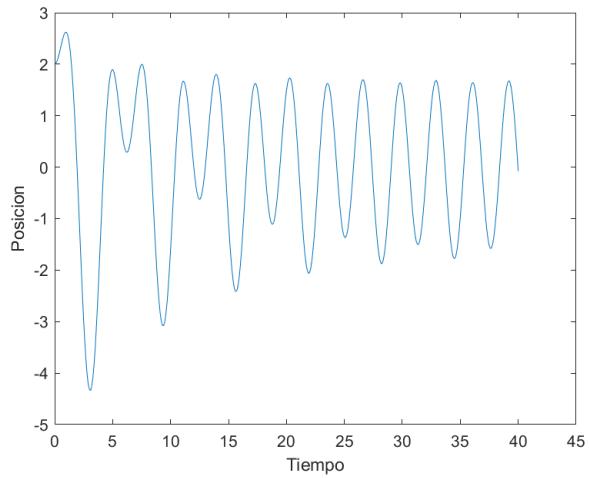


Figura 21: Apartado B: experimento 8

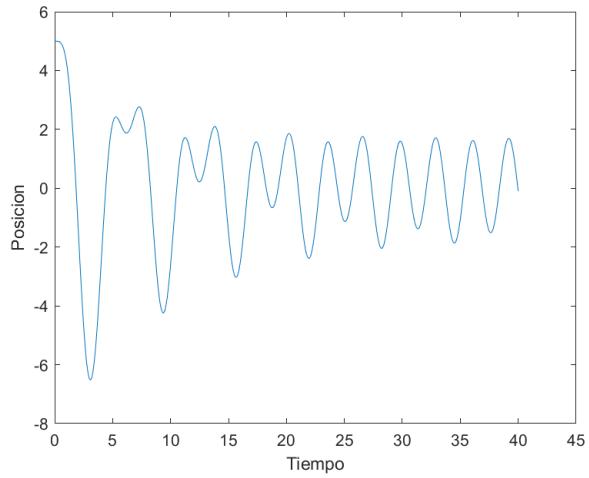


Figura 22: Apartado B: experimento 9

Se puede observar (Figuras 20, 21 y 22) que, el rozamiento provoca una estabilización del movimiento, alcanzando un punto de equilibrio entre la fuerza del muelle y la fuerza externa, en el que la onda se vuelve armónica. Además, se observa que la energía inicial que se introduzca en el sistema desaparece eventualmente debido a este rozamiento, como ocurría en el *Apartado A*.

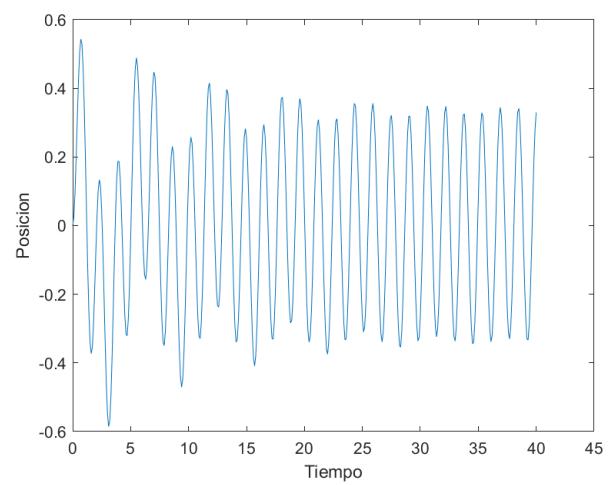


Figura 23: Apartado B: experimento 10

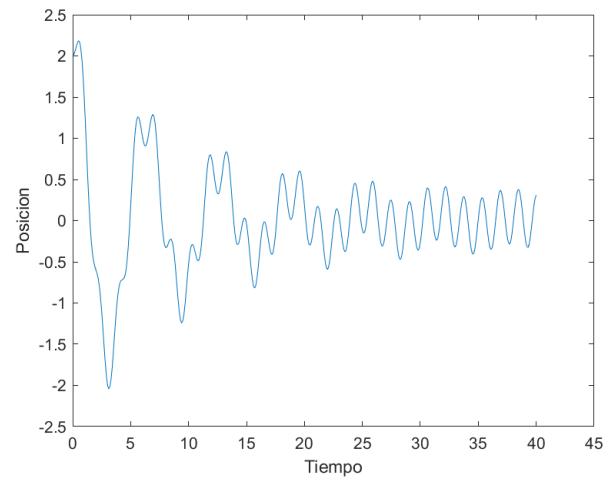


Figura 24: Apartado B: experimento 11

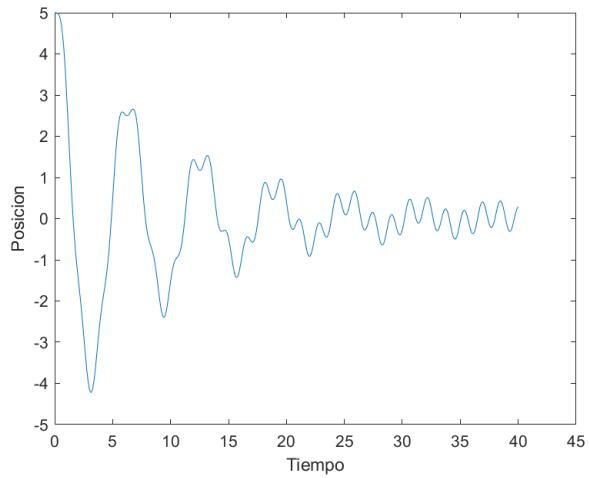


Figura 25: Apartado B: experimento 12

Al aumentar ω (Figuras 23, 24 y 25), se observa que la amplitud que alcanza la onda se reduce considerablemente, debido a que la fuerza externa contribuye en ciertos momentos a decrementar la velocidad dada su rápida oscilación entre fuerza positiva y negativa, contribuyendo con el rozamiento a disminuir la velocidad y, por lo tanto, a alcanzar puntos menores de amplitud.

2.2.3. Coeficiente de rozamiento 0.6

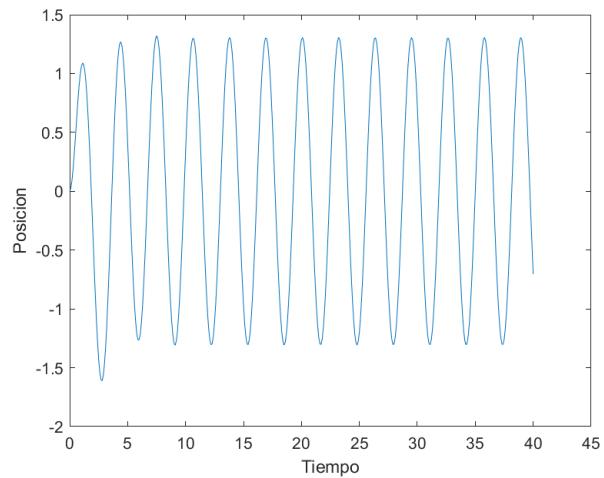


Figura 26: Apartado B: experimento 13

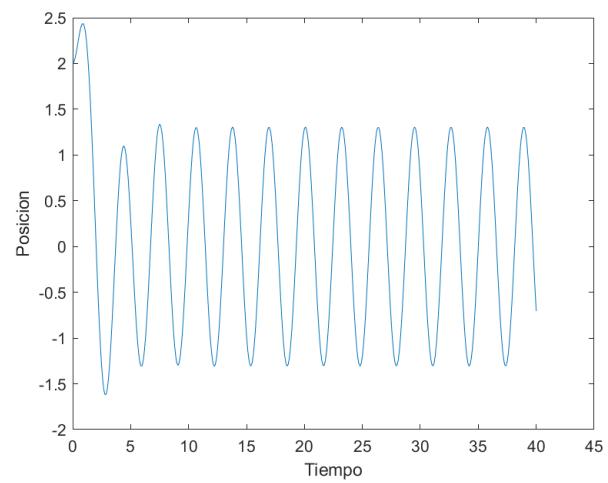


Figura 27: Apartado B: experimento 14

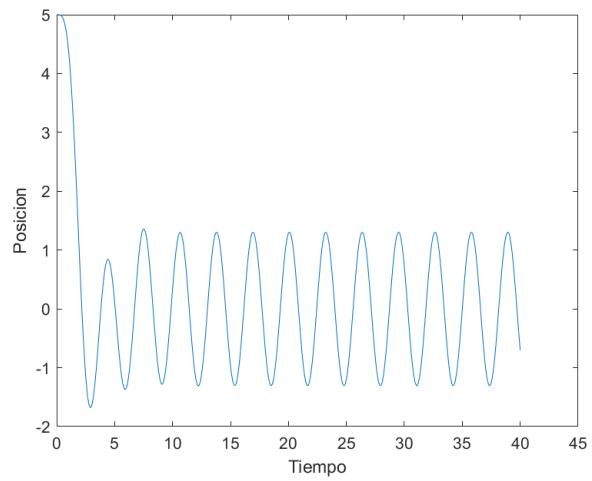


Figura 28: Apartado B: experimento 15

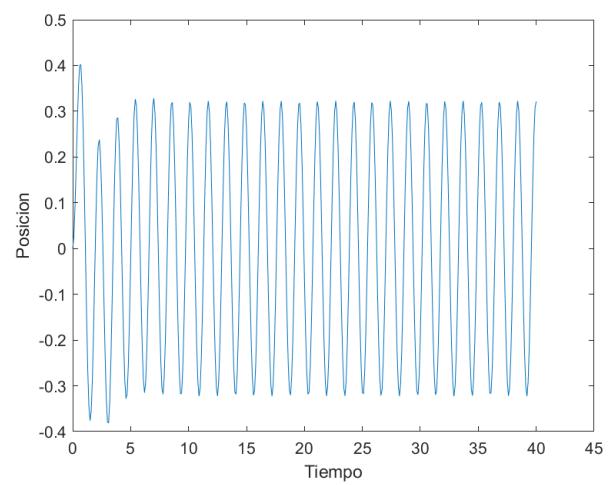


Figura 29: Apartado B: experimento 16

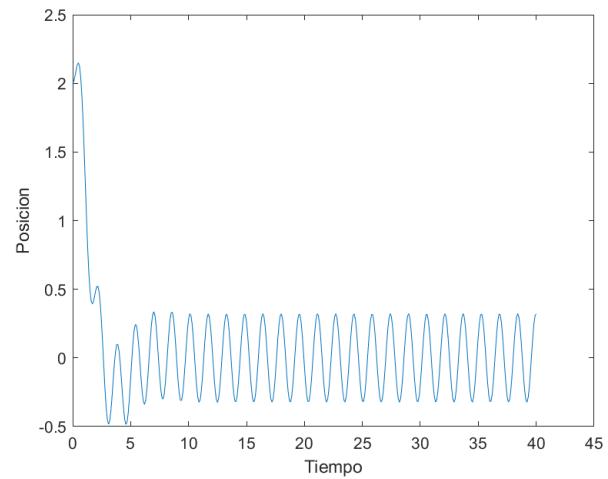


Figura 30: Apartado B: experimento 17

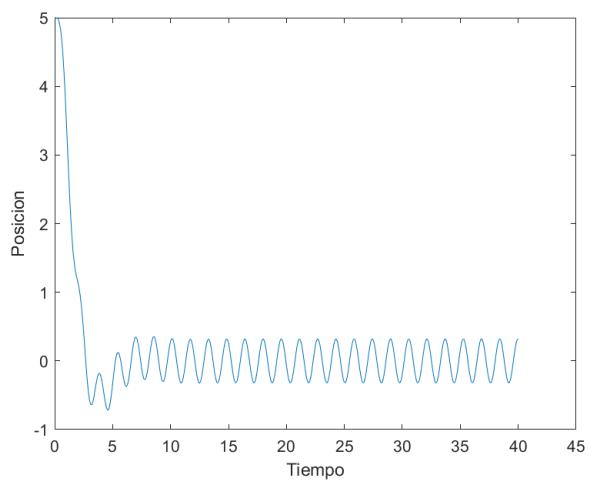


Figura 31: Apartado B: experimento 18

Estas últimas Figuras 26, 27, 28, 29, 30 y 31, proporcionan la misma información que la deducida hasta ahora. Al aumentar el rozamiento, provoca una mayor estabilización, al mismo tiempo que reduce la amplitud alcanzada, sobre todo cuando se introduce una posición inicial.

2.3. Apartado C

Para el caso en que la fuerza externa viene dada por la función anterior, se puede calcular una solución particular por métodos usuales. Se supondrá que inicialmente el móvil está a $1m$ de la posición de equilibrio y en reposo. Se pide estudiar las diferencias entre la solución exacta y la solución aproximada usando distintos métodos numéricos.

Como parámetros se tomarán:

- a: 0.2
- b: 1
- ω : 2
- F_0 : 5
- x_0 : 2

Y como métodos numéricos, con $h = 0,1$, se utilizarán el *método de Euler*, el *método de Heun* y el *método de Runge-Kutta*, este último con el siguiente *tablero de Butcher*:

0	0	0	0
2/3	2/3	0	0
2/3	1/3	1/3	0
	1/4	0	3/4

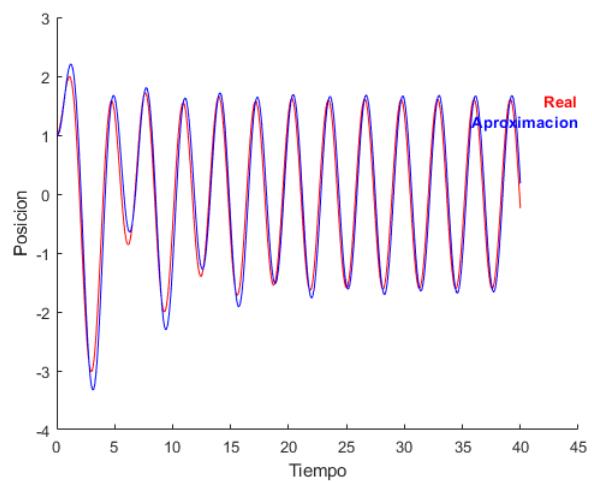


Figura 32: Apartado C: Euler

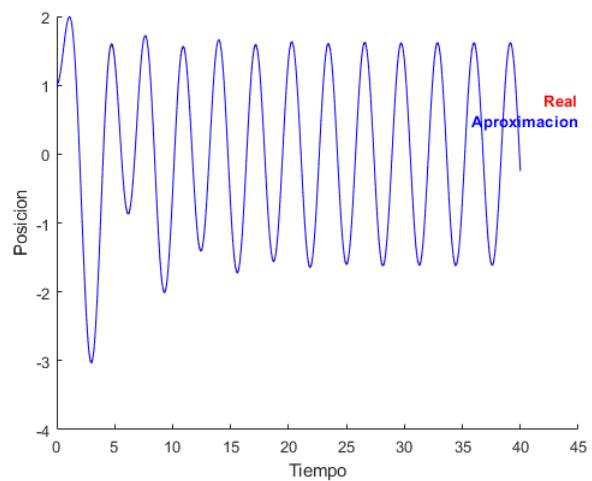


Figura 33: Apartado C: Heun

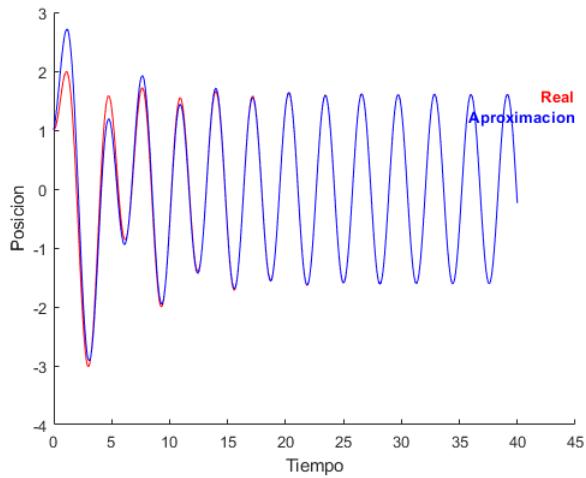


Figura 34: Apartado C: Runge-Kutta

El *método de Euler* (Figura 32), para este problema, produce siempre error, incrementándose este en los extremos de la amplitud. Por otro lado, el *método de Heun* (Figura 33) aproxima extremadamente bien, solapándose la aproximación con la solución real; mientras que, el *método de Runge-Kutta* (Figura 34), con el *tablero de Butcher* dado, inicialmente approxima muy mal, cometiendo un gran error, pero cuando la onda se estabiliza approxima a la perfección, cabría ver qué ocurría si la onda no se transforma en armónica lo que ocurriría, se hará una experimentación más para ello sobre *Runge-Kutta* y sin rozamiento.

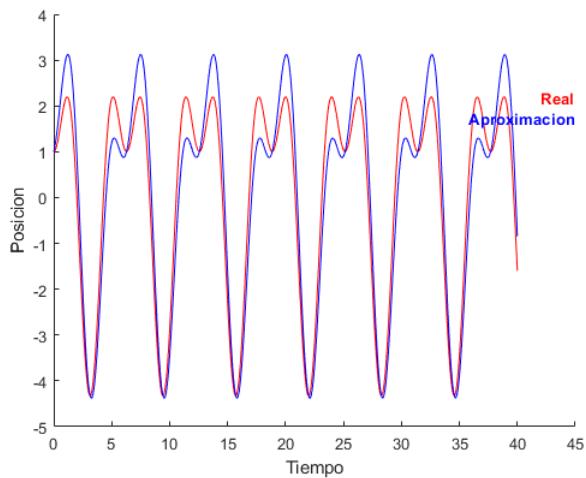


Figura 35: Apartado C: Runge-Kutta sin rozamiento

Como se observa (Figura 35), los resultados son muy malos para este *tablero de Butcher* y este sistema.

2.4. Apartado D

Se va a suponer primero que no hay fuerza externa $F_0 = 0$ y que $b = 0,5$. El objetivo es estudiar cómo afecta la amortiguación (parámetro a) sobre la solución. Dibujar las soluciones para los casos $a = 0,0,01,0,05,0,1,0,2,0,4$ e interpretar los resultados.

Como posición inicial se va a fijar $x_0 = 2$ y el método numérico a utilizar va a ser el *método de Heun* con un $h = 0,1$.

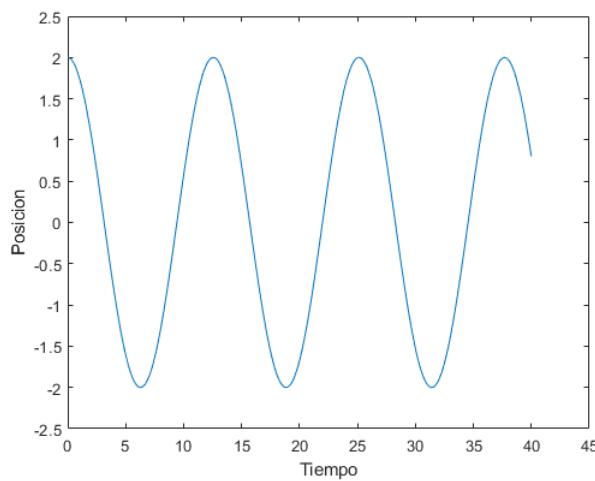


Figura 36: Apartado D: $a=0$

Sin rozamiento, Figura 36, y sin fuerza externa, el movimiento se convierte en armónico.

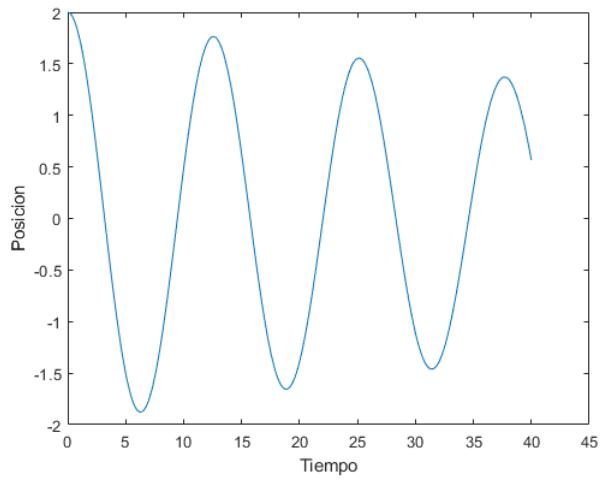


Figura 37: Apartado D: $a=0.01$

Incrementando el rozamiento, Figura 37, la energía del sistema comienza a disminuir, haciendo que las oscilaciones tengan cada vez menos amplitud, como se comentó en previos apartados.

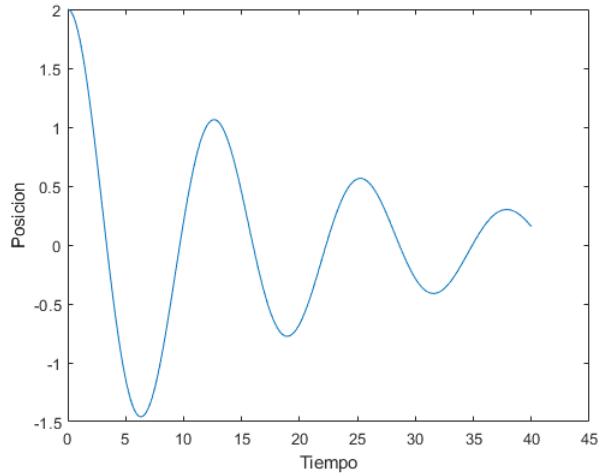


Figura 38: Apartado D: $a=0.05$

Figura 38, la energía se reduce aún más rápido, siendo la amplitud de cada oscilación, la mitad que la anterior, aproximadamente.

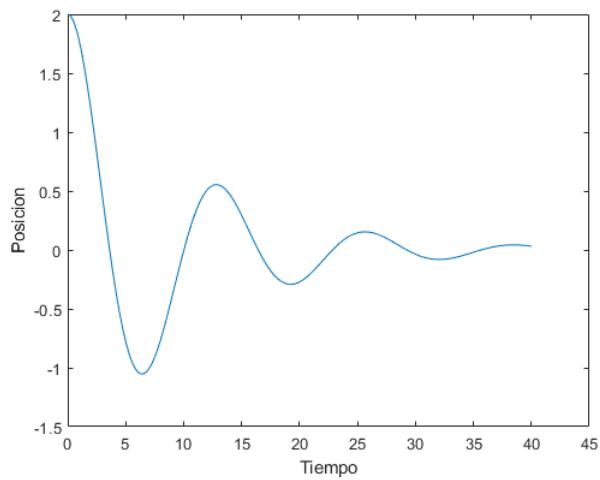


Figura 39: Apartado D: $a=0.1$

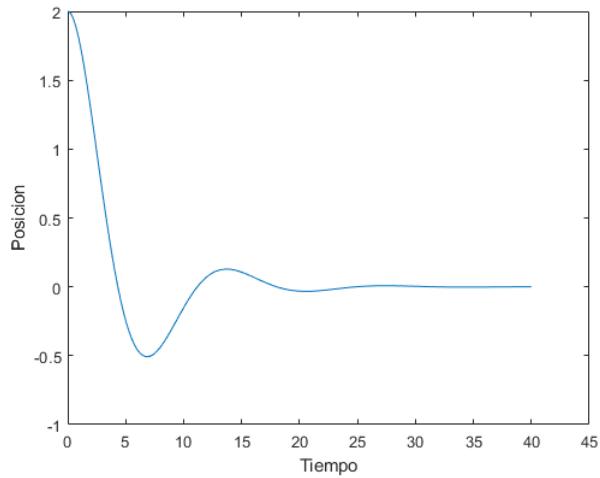


Figura 40: Apartado D: $a=0.2$

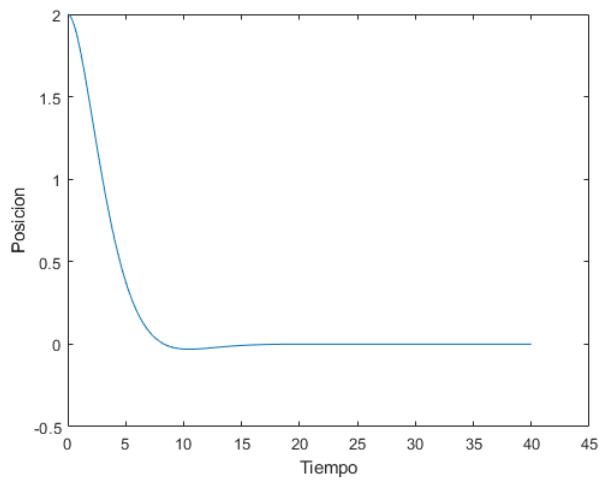


Figura 41: Apartado D: $a=0.4$

En estos últimos tres casos, 39, 40 y 41, el número de oscilaciones se reduce, hasta casi no llegar a hacer ninguna para $a = 0,4$, donde es casi el punto de críticamente amortiguado. Escapándose toda la energía del sistema mediante el rozamiento, el móvil se quedaría, finalmente, en reposo.

2.5. Apartado E

Seguiremos suponiendo $b = 0.5$. Vamos a estudiar ahora el caso en que se aplica una fuerza externa $F_0 = 0.5$ y con diferentes frecuencias $\omega = 0.7, 0.6, 0.3, 0.1$. Dibujar las soluciones sin amortiguación $a = 0$ y con amortiguación $a = 0.05$ e interpretar los resultados.

Como posición inicial se va a fijar $x_0 = 2$ y el método numérico a utilizar va a ser el *método de Heun* con un $h = 0.1$.

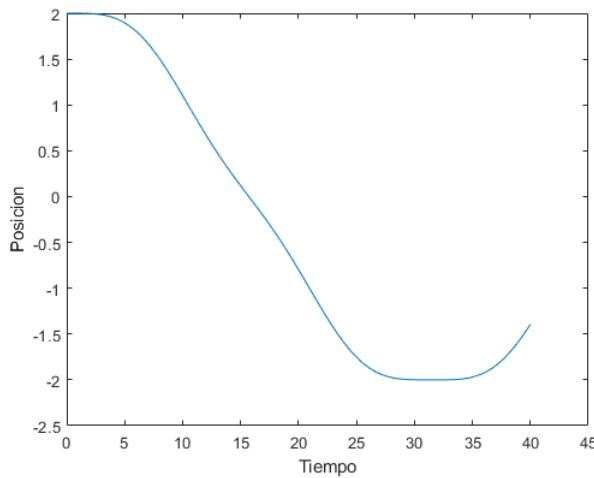


Figura 42: Apartado E: $a=0$ y $\omega = 0.1$

Figura 42, debido a la baja velocidad angular ω , la fuerza externa comienza siendo positiva y disminuye muy paulatinamente, momento en el cual, el muelle comienza a 'ganarle terreno' a la fuerza y empieza a, lentamente, mover el móvil. Además, se denotan pequeñas curvaturas en ciertos puntos, como $t = 15$ o $t = 30$, que son los puntos en los que la fuerza cambia de sentido, debido al $\cos(0.1*t)$, al rededor de $t = 15,7$, sera el $\cos(\frac{\pi}{2})$ y cambia de signo.

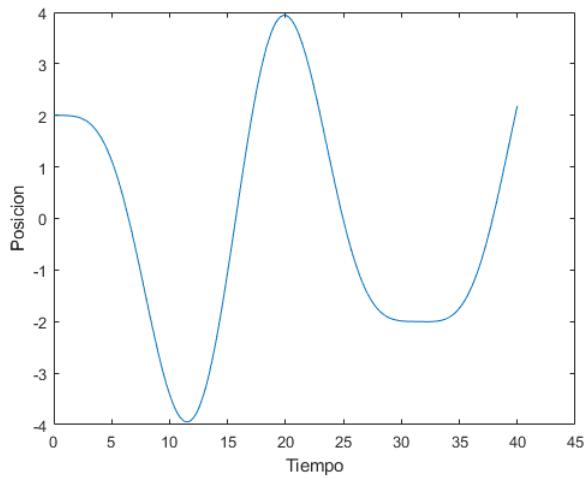


Figura 43: Apartado E: $a=0$ y $\omega = 0.3$

En esta Figura 43, inicialmente la fuerza externa obstaculiza al muelle, pero, posteriormente, se unen las dos fuerzas para lograr un mayor grado de amplitud que el inicial que es 2, como se puede observar. En cambio, al final, durante un periodo de tiempo las dos fuerzas se oponen, provocando que el móvil se mantenga quieto.

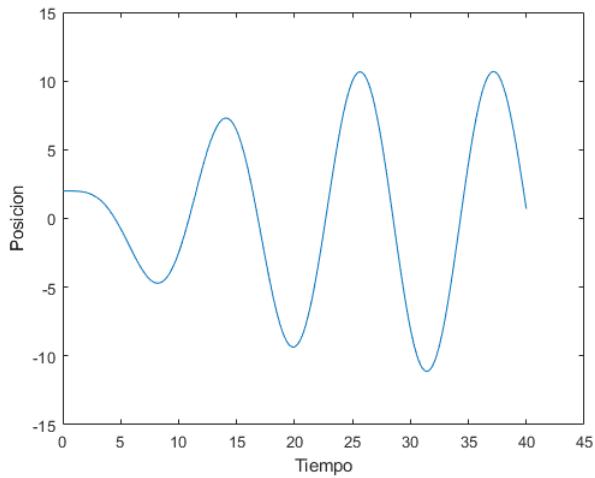


Figura 44: Apartado E: $a=0$ y $\omega = 0.6$

En este caso (Figura 44), las dos fuerzas se unen poco a poco para alcanzar un mayor punto de amplitud, ya que cuanto mayor sea el punto,

mayor será la fuerza ejercida por el muelle. Al final, parece que alcanzan un punto de equilibrio, debido a que cuanta más distancia haya que recorrer, más fuerza tiene el muelle, pero también le da tiempo a la fuerza externa a ponerse en sentido opuesto a esta fuerza, por ello no se incrementa más esta amplitud.

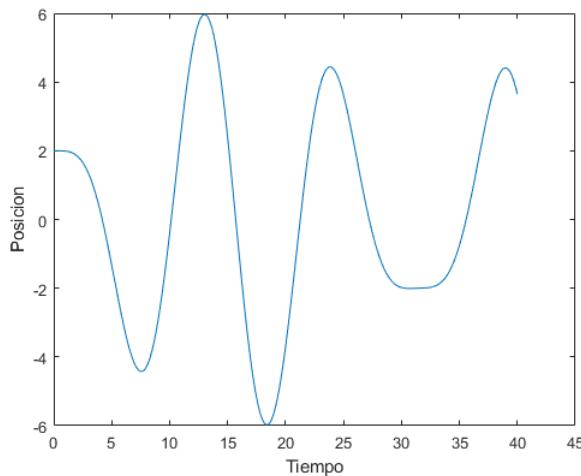


Figura 45: Apartado E: $a=0$ y $\omega = 0.7$

En la Figura 45, ocurre lo mismo que en lo comentado en la Figura 43, solo que al ser mayor la velocidad, las oscilaciones se dan con mayor velocidad.

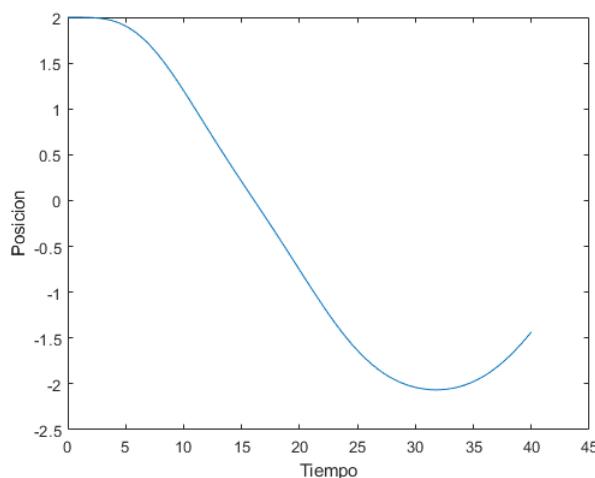


Figura 46: Apartado E: $a=0.05$ y $\omega = 0.1$

En esta Figura 46, con respecto a su versión sin rozamiento, parecen haber desaparecido los puntos de disruptión, suavizándose el contorno. Sin embargo, y aunque no es muy apreciable, tarda más tiempo en llegar a la amplitud negativa.

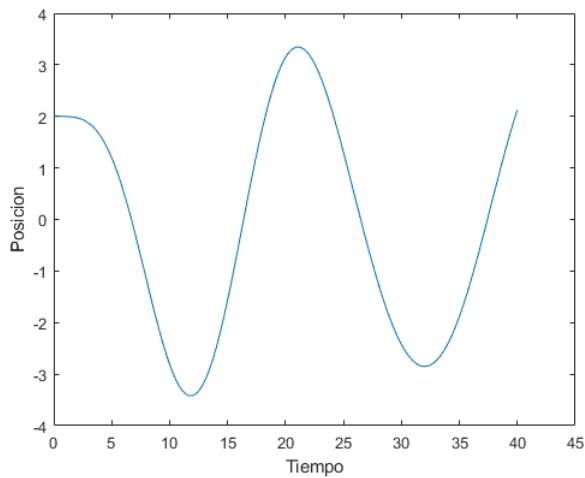


Figura 47: Apartado E: $a=0.05$ y $\omega = 0.3$

En esta Figura 47, ocurre algo similar a la figura anterior, y es que, se reducen las amplitudes de las oscilaciones previas, pero la onda parece más armónica.

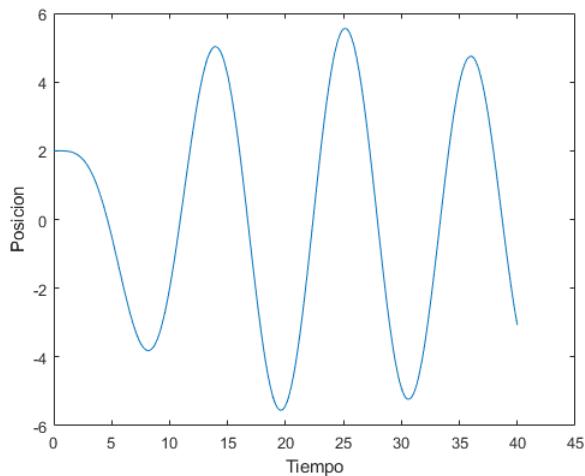


Figura 48: Apartado E: $a=0.05$ y $\omega = 0.6$

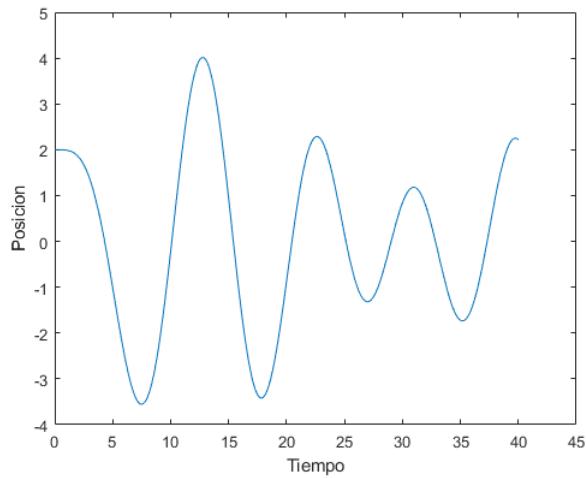


Figura 49: Apartado E: $a=0.05$ y $\omega = 0.7$

En esta dos Figuras 48 y 49, se observa como la presencia de rozamiento atenúa los puntos de inflexión entre las dos fuerzas, la del muelle y la externa, provocando que el movimiento sea 'más regular'. Esto probablemente sea debido a que el rozamiento reduce la energía en función de la velocidad del móvil, cuanta más velocidad, más la reduce, provocando menores puntos de amplitud, pero a su vez, como los puntos de amplitud son menores, la distancia a recorrer también y el tiempo, haciendo que coincidan el muelle y la fuerza externa, de manera que se desperdicie la menor energía.

2.6. Apartado F

Dibujar la soluciones obtenidas en el intervalo $t \in [0, 100]$ para $F_0 = 0,1$, $b = 0,5$, $a = 0,05$ y para valores $\omega = 0.55$, 0.51 , 0.505 , 0.501 y comprobar lo que ocurre.

Como posición inicial se va a fijar $x_0 = 1$ y el método numérico a utilizar va a ser el *método de Heun* con un $h = 0,1$.

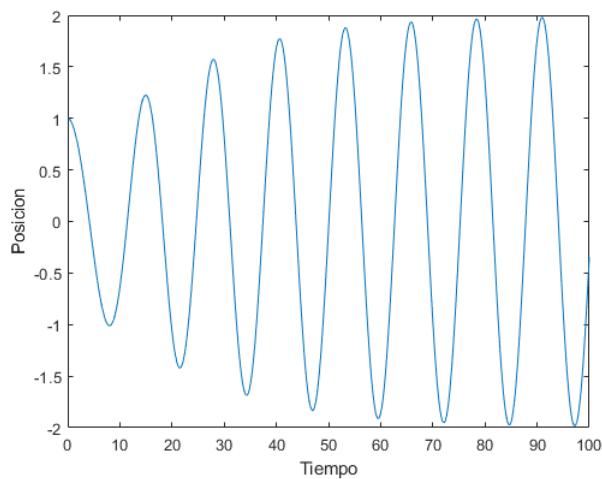


Figura 50: Apartado F: $\omega = 0.501$

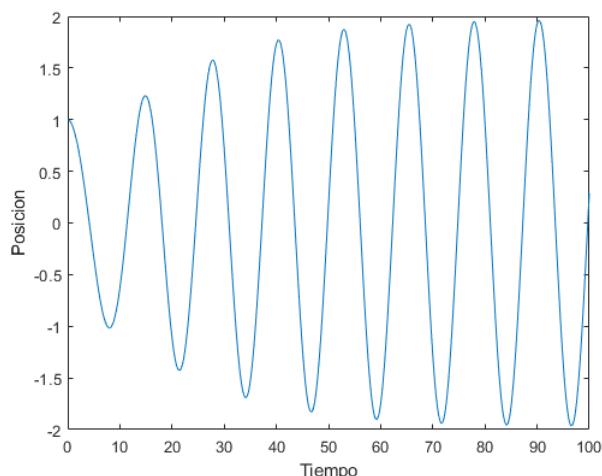


Figura 51: Apartado F: $\omega = 0.505$

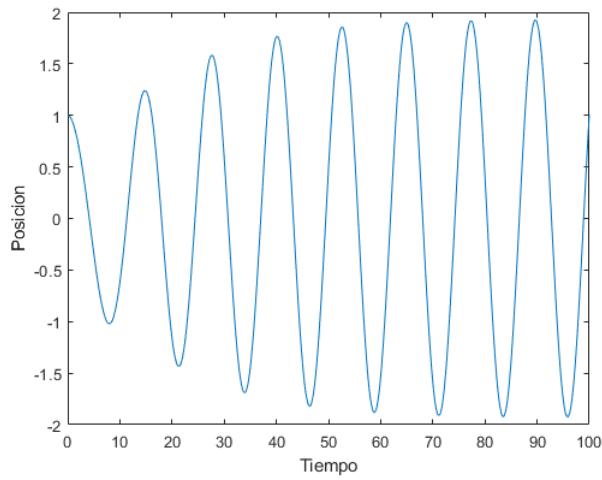


Figura 52: Apartado F: $\omega = 0.51$

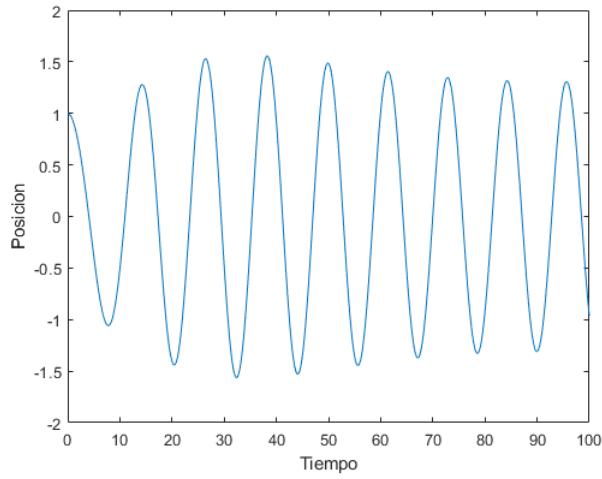


Figura 53: Apartado F: $\omega = 0.55$

En las Figuras 50, 51, 52 y 53, se observa que cuanto más se acerca ω a b , es decir, el punto de frecuencia de resonancia, lo que ocurre es que las dos fuerzas se combinan, la del muelle y la del móvil. Al unirse alcanzan un punto de amplitud mayor, como no se contrarrestan, cada vez se van potenciando un poco, más, sin embargo, como también hay rozamiento, este impide que crezcan mucho más, este y el propio muelle, que cuanto más grande sea la amplitud mayor será la fuerza en dirección contraria que ejerza en ese punto de amplitud.