Ejercicio 2.2

Manuel Luque Cuesta

Se desea comprobar cual es el grado de exactitud para la regla de Simpson aplicándola a los polinomios $1, x, x^2, x^3, ...$ en el intervalo $[-1, 1]$, la cual permite aproximar la integral entre dos puntos mediante una parábola. Siendo su formula:

$$Simpson = \frac{(b-a)}{2}(\frac{f(a)}{3} + \frac{4}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f(b)}{3}$$

donde a y b son los extremos del intervalo.

Grado 0

Dado $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 1$

$$\int_{x=-1}^{x=1} 1dx = [x]_{x=-1}^{x=+1} = 2$$

$$Simpson = \frac{(1+1)}{2}(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}0 + \frac{1}{3}) = 1 * (\frac{6}{3}) = 2$$

Para este grado, la aproximación sale exacta.

Grado 1

Dado $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = -1$, $f(b) = 1$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 0$

$$\int_{x=-1}^{x=1} xdx = [\frac{x^2}{2}]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{1^2 - (-1)^2}{2} = 0$$

$$Simpson = \frac{(1+1)}{2}(\frac{-1}{3} + \frac{4}{3}0 + \frac{1}{3}) = 1 * (0) = 0$$

Para este grado, la aproximación sale exacta.

Grado 2

Dado $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 0$

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Simpson = \frac{(1+1)}{2}(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}0 + \frac{1}{3}) = 1 * (0) = 0$$

Para este grado, la aproximación sale exacta, cosa que no se conseguía con la regla del trapecio.

Grado 3

Dado $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = -1$, $f(b) = 1$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 0$

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{1^4 - (-1)^4}{4} = 0$$

$$Simpson = \frac{(1+1)}{2}(\frac{-1}{3} + \frac{4}{3}0 + \frac{1}{3}) = 1 * (0) = 0$$

Para este grado, la aproximación sale exacta.

Grado 4

Dado $a = -1$, $b = 1$, $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 0$

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^4 dx = [\frac{x^5}{5}]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{1^5 - (-1)^5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Simpson = \frac{(1+1)}{2}(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}0 + \frac{1}{3}) = 1 * (\frac{2}{3})$$

Para este grado la aproximación no sale exacta.

Conclusión

El grado de exactitud de la regla de Simpson es, por tanto, de 3. Suponiendo otro ejemplo, nos aseguramos.

Dado $a = 0$, $b = 4$, $f(a) = 0$, $f(b) = 64$ y $f(\frac{a+b}{2}) = 8$

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_{x=0}^{x=4} = \frac{4^4 - (0)^4}{4} = 64$$

$$Simpson = \frac{(4)}{2}(\frac{0}{3} + \frac{4}{3}8 + \frac{64}{3}) = 2 * (\frac{96}{3}) = 64$$