Ejercicio 2.4

Manuel Luque Cuesta

Consideremos una regla de cuadratura de 3 puntos:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1)$$

- **¿Qué grado de exactitud (cuántas condiciones) puedo pedir a priori?**

  Se puede pedir grado 2, ya que al haber 3 incógnitas, se necesitan 3 ecuaciones, una obtenida de grado 0, otra de grado 1 y otra de grado 2, de forma que se aproximaría exactamente estos 3 grados.

- **Calcular los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ para que el grado de exactitud sea máximo.**

$$f(x) = 1, 2 = \int_{-1}^{1} 1dx = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$$

$$f(x) = x, 0 = \int_{-1}^{1} xdx = \alpha_0(-1) + \alpha_1(0) + \alpha_2(1)$$

$$f(x) = x^2, \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2dx = \alpha_0(1) + \alpha_1(0) + \alpha_2(1)$$

  Se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ -\alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

  Se deduce por la segunda ecuación que $\alpha_0 = \alpha_2$, mientras que en la tercera:

$$\alpha_0 + \alpha_2 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_0 + \alpha_0 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} = \alpha_2$$

Sustituyendo en la primera:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$
$$\frac{2}{3}\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_1 = \frac{4}{3}$$

La regla obtenida es:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

- **La regla de cuadratura obtenida, ¿tiene a posteriori un grado de exactitud mayor?**

$$f(x) = x^3, 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$
$$0 = \frac{1}{3}(-1) + \frac{4}{3}(0) + \frac{1}{3}(1)$$
$$0 = \frac{1-1}{3}$$
$$0 = 0$$

Si, lo tiene debido a que esta formula coincide con la de Simpson, y en el ejercicio anterior (2.2) ya se demostró que esta regla tiene un grado de exactitud de 3.

- **La regla que has obtenido, ¿con cuál de las vistas anteriormente se corresponde?**

Se corresponde con la de Simpson en el intervalo $[-1, 1]$:

$$Simpson = \frac{(b-a)}{2}(\frac{f(a)}{3} + \frac{4}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f(b)}{3})$$
$$Simpson = \frac{(1-(-1))}{2}(\frac{f(-1)}{3} + \frac{4}{3}f(\frac{1-1}{2}) + \frac{f(1)}{3})$$
$$Simpson = \frac{f(-1)}{3} + \frac{4}{3}f(0) + \frac{f(1)}{3}$$