Universidad de Córdoba
Escuela Politécnica Superior de Córdoba

Ingeniería Informática
Especialidad: Computación
Cuarto curso. Segundo cuatrimestre

Matemáticas Aplicadas a la Computación.

Práctica 1
2. Solicitando una hipoteca

Manuel Luque Cuesta
70959043H
i62lucum@uco.es

Curso académico 2019-2020
Córdoba, 25 de marzo de 2020

1. Introducción

A lo largo de este documento, se realizará un estudio sobre un problema de cierta complejidad resolutiva mediante métodos exactos, por ello será necesaria la utilización de métodos alternativos que aproximen la solución, hasta un punto aceptable.

El problema en cuestión versa del interés que ha de establecer un banco dados unos determinados pagos anuales y los años, así como la cantidad total a pagar, por lo que, se utilizará la siguiente formula que corresponde a las hipotecas:

$$A = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

donde A son los pagos por periodo, C es el capital de la hipoteca solicitada, i es la tasa de interés por periodo para n periodos.

Para facilitar la resolución de este sistema, en el cual lo que se desea obtener es el interés dadas el resto de variables, se desarrollará la ecuación de la siguiente forma:

$$A = C \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$A \cdot ((1+i)^n - 1) = C \cdot i \cdot (1+i)^n$$

$$A \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{(1+i)^n} = C \cdot i$$

$$A \cdot (1 - \frac{1}{(1+i)^n}) = C \cdot i$$

$$A \cdot (1 - (1+i)^{-n}) - C \cdot i = 0$$

Ahora el problema es equivalente a encontrar un cero en la ecuación, pero sigue existiendo otro problema: la incógnita (i) esta elevado a $-n$ pudiendo ser esta cualquier valor y dando como resultado una ecuación de un grado posiblemente alto, por lo tanto, irresoluble por métodos exactos. Para ello se realizará un estudió de tal forma que se halle un intervalo en el cual se encuentre la solución mediante métodos aproximados.

2. Estudio

Para poder utilizar métodos aproximados, se necesita establecer un intervalo en el cual buscar las soluciones a la ecuación, dado que en caso contrario, el espacio de búsqueda sería infinito. A continuación, se propondrá un intervalo de búsqueda y se analizará si este intervalo cumple las condiciones (o teoremas) que aseguren que en su dominio existe al menos una raíz o solución del problema.

$$f(x) = A \cdot (1 - (1 + x)^{-n}) - C \cdot x$$

$f(x)$ es continua en los $\mathbb{R} - \{-1\}$, dado que los n periodos van a ser siempre un número $\mathbb{N}$. Además, el interés (x) que se va a seleccionar es siempre positivo debido al conocimiento del problema, ya que se trata de una hipoteca, por lo que el "-1", nunca se encontrará en el intervalo, de modo que el dominio del problema es $(0, \infty)$. En adelante, se van a sustituir las variables por valores específicos con el fin de poder hallar un intervalo. $A = 12000$ euros/año, $n = 30$ años, $C = 135000$ euros.

$$f(x) = 12000 \cdot (1 - (1 + x)^{-30}) - 135000x$$

Con el fin de hallar el intervalo $[a, b]$, se utilizará el **teorema de Bolzano** que asegura que, si existe un cambio signo al menos hay una raíz; y el **teorema de Rolle** que afirma que, si en el intervalo hay dos puntos con la misma imagen, entonces existe al menos un punto donde la derivada toma valor 0. De estos dos teoremas, se deduce que si la derivada $f'(x)$ no cambia de signo en el intervalo, significa que la función $f(x)$ en el intervalo solo crece o decrece y mediante el teorema de Bolzano, si existe un cambio de signo entre los extremos del intervalo, es decir, si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces hay una única raíz $f(x) = 0$ entre esos dos puntos.

Se procederá a obtener la derivada y hallar los puntos donde esta es 0, de manera que se obtengan los puntos de cambio de signo que indicarán donde es creciente o decreciente la función.

$$f'(x) = A \cdot n \cdot (1 + x)^{-(n+1)} - C$$

$$f'(x) = 0 = 12000 \cdot 30 \cdot (1 + x)^{-31} - 135000$$

$$0 = 360000 \cdot (1+x)^{-31} - 135000$$

$$135000 = \frac{360000}{(1+x)^{31}}$$

$$(1+x)^{31} = \frac{360000}{135000}$$

$$\ln{(1+x)^{31}} = \ln\frac{360}{135}$$

$$31 \cdot \ln{(1+x)} = \ln\frac{360}{135}$$

$$\ln{(1+x)} = \frac{\ln\frac{360}{135}}{31}$$

$$\ln{(1+x)} = 0{,}0316396$$

$$e^{\ln{(1+x)}} = e^{0{,}0316396}$$

$$1 + x = 1{,}0321455$$

$$x = 0{,}0321455$$

Se tienen por lo tanto dos intervalos, de $(0, 0{,}0321455)$ y de $(0{,}0321455, +\infty)$, en los cuales se analizará el signo de la derivada.

	$(0, 0{,}0321)$	$(0{,}0321, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(0{,}001) = 219{,}47$ $\qquad$ $f(0{,}0321) = 2997{,}36$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

El intervalo que cumple la propiedad de cambiar de signo es $(0{,}0321, +\infty)$, como además, en este intervalo la función es siempre decreciente, denota que hay una única raíz. Sin embargo, no se puede establecer como extremo del intervalo el infinito, de manera que se reducirá a un valor mucho menor y con sentido, por ejemplo, un 15 % de interés, o lo que es lo mismo, un 0.15. $f(0{,}15) = -143431{,}23$, que sigue cumpliendo el **teorema de Bolzano** y sumado a que $f'(x)$ es decreciente en el intervalo, se tiene que hay una única raíz en $(0{,}0321, 0{,}15)$

3. Resultados

Los métodos empleados en la resolución de este problema son el **método de la bipartición** y el **método de Newton-Raphson**. Para el primero no se necesita comprobar nada adicional a parte del intervalo calculado antes, mientras que para el segundo hay que comprobar la convergencia en ese intervalo y seleccionar un valor inicial.

La convergencia de Newton-Raphson se puede determinar mediante la **Regla de Fourier**, de la cual las dos primeras condiciones ya han sido cumplidas, que son: que se produzca un cambio de signo en el intervalo y que la derivada no cambie de signo; ambas se cumplen. La última es que la segunda derivada tampoco cambie de signo, para ello:

$$f''(x) = -A \cdot n \cdot (n+1) \cdot (1+x)^{-(n+2)}$$

$$f''(x) = -12000 \cdot 30 \cdot 31 \cdot (1+x)^{-32} = 0$$

$$\frac{-12000 \cdot 30 \cdot 31}{(1+x)^{32}} = 0$$

No tiene ninguna raíz, por lo tanto siempre mantiene el mismo signo la segunda derivada y Newton-Raphson converge escogiendo cualquier x_0 dentro del intervalo.

Los resultados obtenidos son los siguientes, además, se mostrará el tiempo medio para 40 ejecuciones para cada uno de los dos métodos. Como intervalo para bipartición se escoge $(0{,}0321, 0{,}15)$, mientras que como punto inicial x_0 para Newton-Raphson se escoge 0,0321, permitiendo una tolerancia en el error de 10^{-8}:

	Resultado	**Tiempo (s)**
Bipartición	0.080073	0.000268
Newton-Raphson	0.080073	0.000551

El interés, por lo tanto, para los datos aportados se encuentra en torno al 8,0073 %, ya que ambos métodos convergen en el mismo valor. Cabe decir que, Newton-Raphson suele ser más rápido, pero en este caso no ha sido así, probablemente debido a dos factores:

- El intervalo de bipartición era relativamente pequeño y ha convergido con celeridad.
- Las función a evaluar depende de una potencia bastante alta (30) y mientras que, en bipartición solo se evalúa la función, en Newton-Raphson y aunque, posiblemente, este haya realizado un menor número de iteraciones, el método evalúa la función (potencia de 30) y su derivada que posee una potencia de 31, añadiendo más carga computacional.