# Ejercicio 5.3

*Manuel Luque Cuesta*

Escribe la fórmula del método de *Runge-Kutta* con el siguiente tablero de *Butcher*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

y úsalo para calcular una aproximación de $y(0{,}1)$ con $h = 0{,}1$ del siguiente P.V.I.:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x + 3y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dado que la matriz es de orden dos, se tendrán $k_1$ y $k_2$:

$$k_1 = f(x_n + 0(h), y_n + h(k_1\frac{1}{4} + k_2\frac{-1}{4}))$$
$$k_2 = f(x_n + h\frac{2}{3}, y_n + h(k_1\frac{1}{4} + k_2\frac{5}{12}))$$

En este caso se tiene que $x_n = x_0 = 0$, $y_n = y_0 = 1$ y $h = 0{,}1$, por lo que:

$$k_1 = f(0, 1 + 0{,}1(\frac{k_1 - k_2}{4}))$$
$$k_2 = f(\frac{2}{30}, 1 + 0{,}1(\frac{3k_1 + 5k_2}{12}))$$

Haciendo uso de la función:

$$k_1 = 2(0) + 3(1 + 0{,}1(\frac{k_1 - k_2}{4}))$$

$$k_2 = 2(\frac{2}{30}) + 3(1 + 0{,}1(\frac{3k_1 + 5k_2}{12}))$$

$$k_1 = 3 + 3(\frac{k_1 - k_2}{40})$$
$$k_2 = \frac{2}{15} + 3 + 3(\frac{3k_1 + 5k_2}{120})$$

$$k_1 = \frac{120 + 3k_1 - 3k_2}{40}$$
$$k_2 = \frac{47}{15} + 3(\frac{3k_1 + 5k_2}{120})$$

$$40k_1 = 120 + 3k_1 - 3k_2$$
$$k_2 = \frac{376 + 9k_1 + 15k_2}{120}$$

$$37k_1 = 120 - 3k_2$$
$$120k_2 = 376 + 9k_1 + 15k_2$$

$$k_1 = \frac{120 - 3k_2}{37}$$
$$120k_2 = 376 + 9k_1 + 15k_2$$

Sustituyendo $k_1$:

$$120k_2 = 376 + 9(\frac{120 - 3k_2}{37}) + 15k_2$$
$$120k_2 = 376 + \frac{1080}{37} - \frac{27k_2}{37} + 15k_2$$
$$\frac{3912k_2}{37} = 376 + \frac{1080}{37}$$

$$3912k_2 = 14992$$
$$k_2 = \frac{14992}{3912} = 3{,}832$$

Mientras que $k1$

$$k_1 = \frac{120}{37} - \frac{3\frac{14992}{3912}}{37}$$
$$k_1 = \frac{120}{37} - \frac{405}{1304} = 2{,}9326$$

Para obtener el siguiente valor de $y(0{,}1)$ mediante este método se tiene:

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{4}2{,}9326 + \frac{3}{4}3{,}832)$$

Siendo $y_n = y(0) = 1$ y $h = 0{,}1$:

$$y(0{,}1) = 1 + 0{,}1(\frac{1}{4}2{,}9326 + \frac{3}{4}3{,}832)$$
$$y(0{,}1) = 1 + 0{,}1(3{,}6071) = 1{,}36071$$
$$y(0{,}1) = 1{,}36071$$