Asignatura: <u>Matemática General</u> (1º Grado de BIOQUÍMICA)

Profesor: *José Antonio Herencia González*

Introducción a las ecuaciones diferenciales

El cálculo de primitivas consiste en la búsqueda de una función de la que se conoce su derivada. De forma análoga, en muchas aplicaciones a las más variadas disciplinas, surge la cuestión de buscar la función o funciones cuyas derivadas cumplen ciertas condiciones, expresadas mediante una ecuación. Se denominan *ecuaciones diferenciales* a este tipo de ecuaciones.

A pesar de que en cursos anteriores no se han estudiado expresamente las ecuaciones diferenciales, han aparecido situaciones en las que debíamos calcular cierta función conociendo alguna propiedad de sus derivadas, que se podía expresar mediante una ecuación diferencial (aunque no se empleara esa nomenclatura). Una de esas situaciones, como hemos dicho, es la resolución de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ que requiere encontrar una función y que sea primitiva de $f(x)$, lo que equivale a decir que cumpla la igualdad $y' = f(x)$. Esta igualdad es un ejemplo de ecuación diferencial. La forma de resolverla consiste precisamente en calcular la integral indefinida planteada. En general, se dice "integrar una ecuación diferencial" como sinónimo de "resolver una ecuación diferencial"; es decir, encontrar la función o funciones que la cumplen. Tal como ocurre en el cálculo de integrales indefinidas, en cualquier ecuación diferencial en la que aparezca la derivada primera de la función incógnita se suelen encontrar infinitas soluciones, que se pueden expresar en una sola fórmula que incluye una constante arbitraria (la denominada "constante de integración"). Recordemos que, en efecto, si $g(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, entonces la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ (que representa la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x)$) incluye las infinitas funciones $g(x) + C$, donde $C \in \mathbb{R}$ puede tomar cualquier valor real.

En cursos anteriores también se han estudiado las ecuaciones que rigen el movimiento rectilíneo de un objeto. Si denominamos, por ejemplo, t al tiempo, s al espacio recorrido, v a la velocidad y a a la aceleración, tienen interés sobre todo los dos casos siguientes:

- El movimiento rectilíneo uniforme.

  En este caso v es constante (por lo que $a = 0$), interesando calcular el espacio s en función del tiempo t. Se sabe que esta función es:

  $$s = s_0 + vt \tag{1}$$

  donde s_0 es el espacio que ya se ha recorrido en el instante inicial en que comenzamos a contar el tiempo; es decir, $s(0) = s_0$.

- El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

  En este caso a es constante, mientras que s y v son función de t. Por analogía con el caso anterior (poniendo v en lugar de s y a en lugar de v) se deduce que $v = v_0 + at$, donde $v(0) = v_0$ es la velocidad inicial. Pero interesa sobre todo calcular el espacio s en función del tiempo t. Se sabe que esta función es:

  $$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

donde, como antes, s_0 es el espacio inicial: $s(0) = s_0$.

Las ecuaciones (1) y (2) puede que se hayan aprendido de memoria o que se hayan deducido por algún método de los varios posibles. Veamos que el método más directo y simple para su deducción lo ofrecen precisamente las ecuaciones diferenciales:

- Para el movimiento rectilíneo uniforme.

  Por definición, este movimiento viene caracterizado por el hecho de que la velocidad v es constante. Lo cual se expresa mediante la ecuación diferencial $s' = v$. Para calcular s en función del tiempo t basta resolver esta ecuación diferencial, que es del tipo considerado en el apartado anterior. Dicho de otra manera, basta calcular la integral indefinida

  $$s = \int v\,dt = v\int dt = vt + C \tag{3}$$

  De las infinitas primitivas que contiene esta integral, debemos calcular qué valor de la constante de integración C ofrece la única solución válida. Para ello aportamos la condición $s(0) = s_0$. Aplicándola en la igualdad (3), sustituyendo s por s_0 y t por 0, deducimos que $s_0 = C$, resultando así la fórmula (1) buscada.

- Para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

  La característica que define este movimiento es que la aceleración a es constante. Lo cual se expresa mediante la ecuación diferencial $s'' = a$. También aquí podemos calcular s (y v) en función del tiempo t sin más que resolver esta ecuación diferencial. Pero en este caso, al aparecer la derivada segunda, deberemos integrar dos veces. Integrando una primera vez resulta que

  $$s' = \int a\,dt = a\int dt = at + C_1 \tag{4}$$

  Para calcular qué valor debe tomar la constante de integración C_1 aplicamos la condición $v(0) = v_0$, sustituyendo en la igualdad (4) s' por v_0 y t por 0, resultando que $v_0 = C_1$. Así obtenemos la fórmula $v = v_0 + at$. Para calcular s, volvemos a integrar en (4):

  $$s = \int (at + C_1)\,dt = a\int t\,dt + C_1\int dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2 \tag{5}$$

  Ya hemos deducido que $C_1 = v_0$. Para calcular la constante de integración C_2 aplicamos la condición $s(0) = s_0$, sustituyendo en la igualdad (5) s por s_0 y t por 0. Entonces se tiene que $s_0 = C_2$, resultando finalmente la fórmula (2) buscada.

En las deducciones anteriores observamos varios hechos, que destacamos y generalizamos por ser válidos también para el estudio de muchas otras ecuaciones diferenciales:

- Cuando conocemos propiedades que deben cumplir las derivadas de cierta función, estas propiedades se expresan mediante una ecuación diferenical. Resolviendo (o integrando) esta ecuación, podremos calcular la función incógnita. En particular, el conocimiento de cierta propiedad sobre la velocidad o la aceleración de un movimiento rectilíneo, se expresa mediante la ecuación diferencial cuya incógnita es el espacio recorrido. Por ejemplo, si se conoce el valor de la velocidad $s' = f(t)$ en función del tiempo t, basta integrar para hallar el espacio $s = \int f(t)\,dt$ y aplicar en el resultado de esta integral la condición $s(0) = s_0$ (u otra similar conocida), para calcular el valor de la constante de integración. Mientras que si se conoce el valor de la aceleración $s'' = f(t)$ en función del tiempo t, hay que integrar dos veces para hallar el espacio $s(t)$ y aplicar en el resultado de esta doble integración las condiciones iniciales $s(0) = s_0$ y $s'(0) = v_0$ (u otras similares conocidas), para calcular el valor de las dos constantes de integración.

- Si en la ecuación diferencial aparece solamente la derivada primera (en cuyo caso se dice que es una ecuación diferencial *de primer orden*), bastará con integrar una vez, apareciendo así una constante de integración. Para calcular el valor que debe tomar esta constante, deberemos aplicar un dato o condición adicional (que se denomina *condición inicial* cuando hace referencia al valor inicial entre los que puede tomar la variable independiente).

- Si en la ecuación diferencial aparece la derivada segunda (en cuyo caso se dice que es una ecuación diferencial *de segundo orden*), habrá que integrar dos veces, apareciendo así dos constantes de integración. Para calcular el valor que deben tomar estas constantes, deberemos aplicar dos datos o condiciones adicionales (que se denominan *condiciones iniciales* cuando hacen referencia al valor inicial entre los que puede tomar la variable independiente).

- Se dice que la ecuación diferencial es *de orden* n si es n el máximo orden de derivación que aparece en ella. Lo usual en este caso (aunque no ocurre siempre necesariamente) es que las infinitas soluciones de la ecuación contengan n constantes de integración, incluidas en una expresión que se denomina **solución general** de la ecuación diferencial. Si aplicamos n condiciones adicionales que debe cumplir la función incógnita, obtenemos entonces la única solución del problema. Se trata de una **solución particular**, porque resulta de la solución general dándole valores concretos a las n constantes de integración (los valores que satisfacen las n condiciones adicionales impuestas a la ecuación).

- En Matemáticas, al estudiar funciones reales de una variable, se suele denominar x a la variable independiente e y a la variable dependiente o función. De esta manera se tratan variables "genéricas" que pueden representar cualquier variable escalar. No obstante, en problemas aplicados, en los que las variables tienen un significado específico, se suelen denominar por letras que representan dicho significado (como t para el tiempo, s para el espacio, v para la velocidad, a para la aceleración, A para el área, V para el volumen, T para la temperatura, p para la presión, etcétera). Esto es lo que suele ocurrir en la aplicación de las ecuaciones diferenciales, que tienen utilidad en las más variadas disciplinas. Observemos que, en caso de usar la nomenclatura "general" en la deducción de las ecuaciones de los movimientos rectilíneos uniforme y uniformemente acelerado, habríamos denominado x al tiempo e y al espacio recorrido en ese tiempo, viniendo entonces dados esos movimientos, respectivamente, por las ecuaciones diferenciales $y' = v$ constante e $y'' = a$ constante.

Al igual que ocurre en las situaciones antes consideradas, aparecen muchas otras situaciones en las más variadas disciplinas (Matemáticas, Física, Química, Biología, Bioquímica, Economía, Sociología, etc.) en las que interesa calcular la función o funciones $y = y(x)$ que cumplen cierta ecuación en la que intervienen al menos una de sus derivadas. Esto se debe al significado de la derivada y', que mide cómo cambia la variable y, existiendo muchas leyes teóricas que describen el comportamiento de dicho cambio, cuya expresión matemática se traduce en ecuaciones de este tipo, que se denominan **ecuaciones diferenciales**. Especificamos a continuación su definición y algunas características de interés general sobre las mismas.

Definición 1 *Si una ecuación contiene derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se dice que es una* **ecuación diferencial**.

Recordemos que el *diferencial* es un concepto íntimamente relacionado con la *derivada*, por lo cual resulta inmediato cambiar en una ecuación diferencial las derivadas por diferenciales o viceversa. Concretando más, recordemos la equivalencia entre las siguientes notaciones de las derivadas ordinarias:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = y^{3)} = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{4)} = \frac{d^4y}{dx^4}, \quad \text{etc.}$$

En la primera derivada, además, se puede identificar la expresión $\frac{dy}{dx}$ con un cociente de diferenciales, ya que por definición el diferencial de y es $dy = y'\,dx$; mientras que en las derivadas sucesivas, la expresión $\frac{d^ny}{dx^n}$ supone meramente una forma de indicar la derivada (similar a la generalmente usada para las derivadas parciales), no teniendo ningún sentido su identificación con una fracción o cociente.

1. Ecuaciones separables

Ya hemos visto el caso más simple de ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{6}$$

que se puede resolver directamente por integración, obteniéndose

$$y = \int g(x)\, dx + C$$

La ecuación (6), así como su método de resolución, es solo un caso particular de lo siguiente.

Definición 2 *Se dice que una ecuación diferencial es* **separable** *o* **de variables separables** *si admite la expresión*

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{7}$$

(o la equivalente $h(y)\,dy = g(x)\,dx$). Puede ser que la ecuación tenga directamente la expresión (7), en cuyo caso se dice también que es **de variables separadas**, *o que se pueda llegar a ella a*

partir de otra expresión equivalente efectuando operaciones (que generalmente consistirán en sacar factores comunes y pasar factores de un miembro a otro de la ecuación).

Observemos que cuando $h(y) = 1$, la edo separable (7) se reduce a (6). Ahora bien, si $y = f(x)$ es una solución de (7), se debe de cumplir que

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

y por tanto

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + C \tag{8}$$

pero $dy = f'(x)dx$, luego (8) es lo mismo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C \tag{9}$$

La ecuación (9) nos indica el procedimiento a seguir para resolver las ecuaciones diferenciales separables: se deja en cada miembro una de las variables (es decir, se separan las variables) y se integra cada uno de los miembros con respecto a su variable. Se obtiene así una familia uniparamétrica de soluciones, la cual queda generalmente expresada implícitamente (si se puede despejar la variable y obtendremos entonces las soluciones en forma explícita).

Asimismo, la ecuación (9) muestra el significado de la definición de las ecuaciones separables: son aquellas en las que, efectuando operaciones si es preciso, se pueden separar las dos variables que intervienen en la ecuación, dejando todos los términos en los que aparece la función y en un miembro junto con el diferencial dy y dejando los términos en los que aparece la variable independiente x junto con el diferencial dx en el otro miembro. Notemos que esta posibilidad de separar ambas variables indica que en las ecuaciones separables, en contra de lo que ocurre en general, no importa cuál sea la variable independiente y cuál sea la función incógnita, sino que tenemos una relación entre ambas variables que permite considerar tanto y como función de x como al contrario.

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $y' \operatorname{sen} y = x^2 + x - 2$ basta efectuar los cálculos siguientes:

$$\operatorname{sen} y \, dy = (x^2 + x - 2)dx$$

$$\int \operatorname{sen} y \, dy = \int (x^2 + x - 2)dx \quad \Rightarrow \quad -\cos y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

$$y = \arccos\left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - C\right)$$

Esta es la solución general de la ecuación dada. Si exigimos además el cumplimiento de la condición inicial $y(0) = \pi$ entonces obtenemos la solución particular siguiente:

$$y = \arccos\left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right)$$

Nota: Como aquí hemos hecho una pequeña introducción a las ecuaciones diferenciales (viendo solamente cómo resolver las más sencillas, las ecuaciones separables), en todas las ecuaciones diferenciales que han aparecido la función incógnita ha tenido solo una variable independiente. Siempre que ocurra esto se dice que se trata de una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**, ya que las derivadas que aparecen en ella son derivadas ordinarias. También tiene mucho interés el estudio (que se hará en otras asignaturas) de ecuaciones diferenciales cuya función o funciones incógnita dependa de varias variables. En tal caso, al aparecer derivadas parciales (en lugar de derivadas ordinarias), la ecuación diferencial se denomina **ecuación diferencial parcial** o **ecuación en derivadas parciales (EDP)**. Por ejemplo, son ecuaciones en derivadas parciales las dos siguientes (siendo la primera de orden 1 y la segunda de orden 2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} - k \quad \blacktriangleright$$

2. Tres aplicaciones similares de las EDO separables

Entre las muchas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, vamos a considerar tres elementales, basadas en el mismo tipo de ecuación. En las tres la variable independiente es el tiempo y se denota por la letra t.

2.1. Reacciones químicas de primer orden

Se denominan reacciones químicas *"de primer orden"* a aquellas en las que el compuesto o compuestos obtenidos se obtiene(n) a partir de un único reactivo A. Si las moléculas de la sustancia A se descomponen en moléculas más pequeñas, es natural suponer que la rapidez con que esta descomposición tiene lugar es proporcional a la cantidad de sustancia inicial que no ha experimentado conversión. Por tanto, si $x(t)$ es la cantidad de sustancia A restante en un instante cualquiera, entonces se cumple que

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{10}$$

siendo $k > 0$. El signo menos se debe a que x es decreciente. Esta misma ecuación diferencial aparece en las dos situaciones siguientes (en las que la resolvemos, obteniendo su función solución).

2.2. Desintegración radiactiva. Fechado de sucesos

El físico Rutherford mostró que la radiactividad de una sustancia es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma. Por tanto, si $y(t)$ denota el número de átomos existentes en el tiempo t entonces dy/dt, que representa el número de átomos que se desintegra por unidad de tiempo, es proporcional a y. Lo cual se traduce en la edo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{11}$$

donde la constante de proporcionalidad k es positiva (por eso va acompañada del signo menos, ya que la cantidad y debe ser positiva y decreciente, con lo que su derivada es negativa). Observamos que coincide con la ecuación (10), la cual es separable, fácil de resolver. Si se supone que en el instante inicial $t = 0$ es $y(0) = y_0$, la solución general de la edo (11) junto con esta condición inicial aporta la solución

$$y(t) = y_0 e^{-kt} \tag{12}$$

A la constante k se le llama *constante de decrecimiento o de ritmo*, porque su valor mide el ritmo al que se produce la reacción. Esta constante es diferente para cada sustancia radiactiva, por lo que en cada caso ha de encontrarse experimentalmente. En la práctica no se suele medir directamente k, sino lo que se denomina **semivida** o **vida media**, que es el tiempo requerido para que la cantidad inicial de sustancia se reduzca a la mitad. Sustituyendo y por $y_0/2$ en (12) se llega a la expresión

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kT}$$

siendo T la semivida. Así

$$kT = \ln 2$$

De esta manera, si se conocen k o T experimentalmente, esta ecuación nos permite calcular la otra cantidad.

Estas ideas son la base de un método científico que ha tenido una profunda relevancia en geología, arqueología, historia del arte y otras disciplinas. Esencialmente, los elementos radiactivos que se encuentran en la naturaleza (de semividas conocidas) pueden utilizarse para fechar sucesos que ocurrieron con una antigüedad comprendida entre unos pocos años y miles de millones de años. Por ejemplo, el isótopo común del uranio se desintegra, tras varios pasos, en helio y un isótopo del plomo, con una semivida de 4.500 millones de años. Cuando la roca que contiene uranio está fundida, como la lava que fluye de un volcán, el plomo originado en ese proceso se dispersa por las corrientes de la lava; pero después de que la roca solidifica, el plomo queda acumulándose junto al uranio que lo produce. Un trozo de granito puede analizarse para determinar la relación entre el plomo y el uranio, y este cociente permite estimar el tiempo transcurrido desde el instante en que el granito cristalizó. De forma análoga, se pueden datar objetos históricos en base a otros elementos radiactivos. En particular es bien conocido el uso del *radiocarbono o carbono 14 (C^{14})*, un isótopo radiactivo del carbono, con una semivida de 5.600 años, para estudiar la antigüedad de objetos antiguos (pero más recientes) de origen orgánico como madera, carbón, fibra vegetal, huesos, piel etc.

Otras semividas conocidas de muy distinta duración son:

- Poco más de 138 días para el altamente radiactivo polonio 210, con el que fue envenenado el ex-espía ruso del KGB Aleksandr Litvinenko en 2006, cuando se hallaba refugiado en Londres (habiendo también sospechas de que muriera por la misma causa el líder palestino Yaser Arafat en 2004).

- 22 años para el radiactivo plomo 210 (comparando la radiactividad de las partículas de plomo 210 y de radio en una pintura se puede estimar su antigüedad).
- 1300 millones de años para el potasio (que se desintegra en argón).
- 50000 millones de años para el rubidio (que se desintegra en estroncio).

2.3. Crecimiento de poblaciones. Modelo exponencial de Malthus

Es éste uno de los modelos más sencillos que describe la dinámica de una población. Se debe al economista inglés Thomas Malthus y data de 1798. En dicho modelo, si $y = y(t)$ representa el número de miembros de una población en el instante t, entonces cuando se incrementa el tiempo en una cantidad Δt, se supone que los nacimientos y muertes son proporcionales al tamaño de la población en dicho intervalo de tiempo, es decir

$$\text{nacimientos} = \alpha y \Delta t \qquad\qquad \text{muertes} = \beta y \Delta t$$

siendo α y β constantes.

Por tanto, el incremento de la población Δy en dicho intervalo de tiempo Δt, estará dado por

$$\Delta y = \alpha y \Delta t - \beta y \Delta t = (\alpha - \beta) y \Delta t = k y \Delta t$$

donde $k = \alpha - \beta$. Dividiendo por Δt y tomando límite cuando $\Delta t \to 0$ se llega a la siguiente relación

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{13}$$

De nuevo se trata de la ecuación (11), con la única diferencia de que ahora no está determinado el signo de la constante k. Como se ha dicho antes, es una ecuación separable, cuya solución viene dada por

$$y(t) = Ce^{kt}$$

Si además se conoce la población inicial $y(0) = y_0$, entonces se llega a que

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

La predicción del comportamiento de la población depende del signo de la constante k. Así, la población crecerá en forma exponencial si $k > 0$, decrecerá si $k < 0$ y no experimentará cambios si $k = 0$ (como se indica en la figura 1).

Este es el llamado modelo de población malthusiano. Se trata realmente de un modelo muy sencillo, que ha sido muy fácil de resolver. La experiencia ha demostrado que este modelo se aproxima bastante bien a la realidad cuando se trata de poblaciones aisladas y en sus primeras fases de crecimiento (por ejemplo, poblaciones de células en un ensayo de laboratorio). Para poblaciones en cuyo crecimiento intervienen otros factores (como puede ser el número de habitantes de la Tierra), el modelo debe complicarse. Por eso, dependiendo del tipo de poblaciones, hay diversos

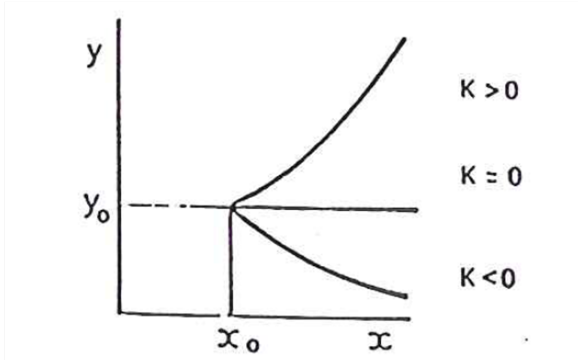

Figura 1: Crecimiento o decrecimiento según el modelo de Malthus.

modelos matemáticos para estudiar su crecimiento (como el considerado en la nota siguiente, entre muchos otros).

Notas:

- El modelo de crecimiento de poblaciones de Malthus deja de verificarse cuando la población en cuestión lleva mucho tiempo creciendo y es demasiado grande, porque no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por los recursos y por el alimento disponible. Otro modelo que refleja estos hechos, introducido por el matemático y biólogo holandés Verhulst en 1837, usa la ecuación siguiente (en la que el término $-by^2$ disminuye el crecimiento exponencial asociado al término ay en atención a los hechos antes descritos):

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2. \tag{14}$$

  Se trata de una ecuación de variables separables que se conoce como **ley logística** de crecimiento de una población. Las constantes a y b se llaman *constantes vitales* de la población. Al resolverla resulta la siguiente solución (conocida como **función logística**):

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-at}} \tag{15}$$

  Su gráfica, que aparece en la figura siguiente, tiene la asíntota horizontal $y = a/b$ cuando $t \to +\infty$. Por tanto, este valor máximo a/b es el límite al que tiende. En la gráfica también se aprecia que, según este modelo de crecimiento, comienza habiendo un período de crecimiento acelerado hasta que la población alcanza la mitad de su valor límite. Desde este momento, la tasa de crecimiento disminuye hasta llegar a cero.

- A primera vista, tanto en el modelo malthusiano como en el logístico, parece imposible que realmente $y(t)$ describa el tamaño de la población, ya que se trata de una función continua, y sin embargo el crecimiento de una especie da lugar unicamente a números enteros. Sin embargo, si el tamaño de la población es grande y se incrementa en uno, entonces el cambio es muy pequeño comparado con el tamaño de la población. Así pues, se toma la aproximación de que poblaciones grandes cambian continuamente, e incluso de manera diferenciable con respecto al tiempo. ▶

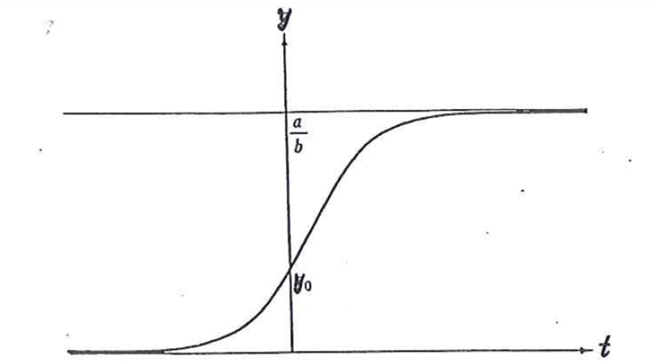

Figura 2: Curva logística.

Ejercicios y problemas

1. Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

   a) $y' = (2x+1)(x^2+x+1)^{30}$. Solución: $y = \dfrac{1}{31}(x^2+x+1)^{31} + C$.

   b) $y' = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$. Solución: $y = e^{\operatorname{sen} x} + C$.

   c) $y' = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$. Solución: $y = \operatorname{sen}(\ln x) + C$.

   d) $y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$. Solución: $y = \operatorname{artg} e^x + C$.

---

2. Verificar que la función indicada en cada apartado es una solución de la ecuación diferencial dada.

   a) $2y' + y = 0\,, \qquad y = e^{-x/2}$.

   b) $y' + 4y = 32\,, \qquad y = 8$.

   c) $y' - 2y = e^{3x}\,, \qquad y = e^{3x} + 10e^{2x}$.

   d) $y' + y = \operatorname{sen} x\,, \qquad y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{\cos x}{2} + 10e^{-x}$.

---

3. Encontrar los valores de m para los que $y = e^{mx}$ es una solución de cada ecuación diferencial:

   a) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Solución: $m \in \{2, 3\}$.

   b) $y'' + 10y' + 25y = 0$. Solución: $m = -5$.

c) $y^{3)} - 3y'' - y' - 12y = 0.$ Solución: $m = 4.$

---

4. Encontrar los valores de m para los que $y = x^m$ es una solución de cada ecuación diferencial:

   a) $x^2\, y'' - y = 0.$ Solución: $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

   b) $x^2\, y'' + 6x\, y' + 4y = 0.$ Solución: $m \in \{-1, -4\}.$

---

5. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, expresando la solución en forma explícita (y siendo a constante en el tercer apartado):

   a) $y' = y.$ Solución: $y = Ce^x.$

   b) $ydx - xdy = 0.$ Solución: $y = Cx.$

   c) $(y - a)dx + x^2 dy = 0.$ Solución: $y = a + Ce^{1/x}.$

   d) $y \ln y dx + xdy = 0.$ Solución: $y = e^{C/x}.$

---

6. Un reactor transforma uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo plutonio 239, que es radiactivo. Después de 15 años se determina que 0,043 % de la cantidad inicial x_0 de plutonio se ha desintegrado. Encuéntrese la vida media de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & x' = -kx \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{-kt} \\ & e^{-15k} = 0,99957, \quad e^{-kT} = 0,5 \\ \underline{\text{Solución :}} & T = \dfrac{15 \ln 0,5}{\ln 0,99957} \approx 24\,170 \ \ \textit{años} \end{array}\right.$$

---

7. Se encuentra que un hueso fosilizado contiene $1/1000$ de la cantidad original de C_{14}. Determínese la edad del fósil, teniendo en cuenta que la vida media del C_{14} es $T = 5600$ años.

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & x' = -kx \quad \Rightarrow \quad x = x(0) e^{-kt} \\ & e^{-5600k} = 1/2, \quad e^{-kt} = 1/1000 \\ \underline{\text{Solución :}} & t = 5600 \dfrac{\ln 1000}{\ln 2} = 5600 \log_2 1000 \approx 55\,800 \ \ \textit{años} \end{array}\right.$$

---

8. En un trozo de madera quemada (o de carbón) se encontró que el 85,5 % del C_{14} se había desintegrado. ¿Qué edad tenía aproximadamente la madera (sabiendo que la vida media del C_{14} es $T = 5600$ años)? (*Es precisamente este dato el que los arqueólogos usaron para determinar la edad de las pinturas prehistóricas encontradas en una caverna del sur de Francia*).

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & x' = -kx \quad \Rightarrow \quad x = x(0)e^{-kt} \\ & e^{-5600k} = 1/2, \quad e^{-kt} = 145/1000 \\ \underline{\text{Solución :}} & t = 5600\dfrac{\ln(1000/145)}{\ln 2} = 5600 \log_2 \dfrac{1000}{145} \approx 15\,600 \;\; \textit{años} \end{array}\right.$$

---

9. En un cultivo de levadura la cantidad de fermento activo crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si se duplica la cantidad en 1 hora, ¿cuántas veces puede esperarse que se tenga la cantidad inicial después de 11/4 horas?

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & \textit{velocidad de crecimiento } x' = kx \quad \Rightarrow x = x(0)2^t \\ \underline{\text{Solución :}} & 2^{11/4} \approx 6,61 \;\; \textit{veces}. \end{array}\right.$$

---

10. Un cultivo tiene inicialmente un número N_0 de bacterias. Al cabo de 1 hora el número de bacterias medido es $(3/2)N_0$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determinar el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & \textit{velocidad de crecimiento } x' = kx \quad \Rightarrow x = N_0(3/2)^t \\ \underline{\text{Solución :}} & t = \log_{3/2} 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 1,5} \approx 2,71 \;\; \textit{horas}. \end{array}\right.$$

---

11. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en cinco años,

   a) ¿Cuánto tardará en triplicarse?

   b) ¿Cuánto tardará en cuadruplicarse?

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\text{Planteamiento :}} & x' = kx \;\; \textit{con} \;\; x(5) = 2x(0) \quad \Rightarrow x = x(0)2^{t/5} \\ \underline{\text{Solución :}} & a) \;\; t = 5\log_2 3 = 5\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 8 \;\; \textit{años} \quad b) \;\; t = 10 \;\; \textit{años} \end{array}\right.$$
