TEMA 7 SERIES DE NÚMEROS REALES

Estudiar el carácter de las series siguientes:

1. $3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{3}+\cdots+\sqrt[n]{3}+\cdots$ Solución: Divergente

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ Solución: Convergente

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{Ln}}$ Solución: Divergente

4. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Hallar una cota del error al aproximar su suma por la suma parcial S_{10}.

Solución: Convergente. $\left|R_{10}\right|\le 0.0997$

5. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-5n}$. Cuántos términos hay que sumar para conseguir una aproximación para la suma con error menor que 0.001?

Solución: Convergente. $n=2$

Estudiar la convergencia de las series siguientes y sumar las que resultan convergentes.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n}$ Solución: Divergente

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ Solución: Divergente

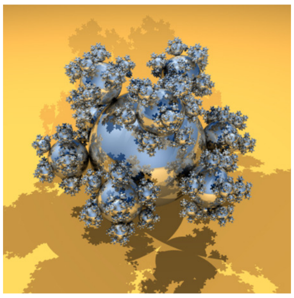
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]$ Solución: Divergente

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctg\,n-arctg\,(n+1)\right]$ Solución: Convergente. $S=-\pi/4$

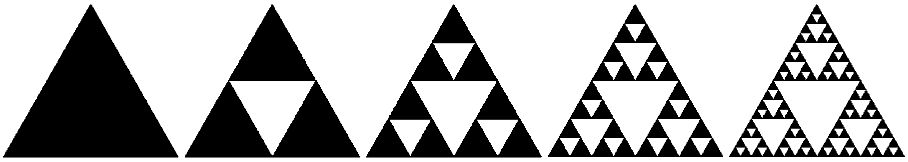
10. Una empresa de videojuegos para ordenador fabrica un nuevo producto y estima que las ventas anuales serán de 8000 unidades. Cada año, el 10% de las unidades vendidas deja de funcionar. ¿Cuántos videojuegos estarán funcionando al cabo de 4 años? A la larga, ¿cuántos estarán funcionando?

Solución: a) 27512 b) 80000

11. El copo esférico de la figura es un fractal generado por ordenador por Eric Haines.
El radio de la esfera mayor es 1.
A esta esfera se unen 9 esferas de radio $\frac{1}{3}$.
A cada una de éstas se unen 9 esferas de radio $\frac{1}{9}$.
Este proceso es infinitamente continuo.
Demostrar que el copo esférico tiene una superficie de área infinita y volumen finito.



12. El triángulo de Sierpinski de la figura es un fractal generado de la manera siguiente: En una primera etapa, se construye un triángulo equilátero. En una segunda, se construye un segundo triángulo equilátero uniendo los puntos medios de los lados del primero y se extrae. En una tercera etapa, se construyen otros tres triángulos en la misma forma y se extraen también. En una cuarta etapa, se construyen otros nueve triángulos en la misma forma y se extraen también. Este proceso es infinitamente continuo. Demostrar que el fractal tiene área nula.



Estudiar la convergencia o divergencia de las series siguientes:

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2}{2+\sqrt{n}}+\frac{4}{n\sqrt{n}}\right]$ Solución: Divergente

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}$ Solución: Convergente

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}$ Solución: Convergente

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{e^n}$ Solución: Convergente

17. Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$.
Aproximar su suma por la suma parcial S_6. Cuántos términos hay que considerar para aproximar su suma con un error menor que 0.01?

Solución: Convergente y absolutamente convergente. $S \in [0.63174, 0.63214]$. $n = 4$.