1.-VECTORES EN EL ESPACIO.

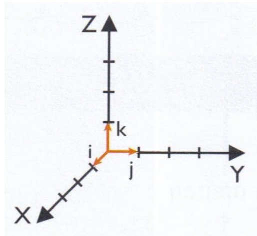
Un **vector fijo** es un segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el origen, y el punto B, el extremo.

Las características de un vector $\overrightarrow{AB}$ son:

- a) El **módulo**: es su longitud. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
- b) La **dirección**: es la dirección de la recta que lo contiene. Dos vectores tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o rectas paralelas.
- c) El **sentido**: es el que va del origen al extremo.

Un **vector libre** es un vector fijo $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ que representa a todos los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

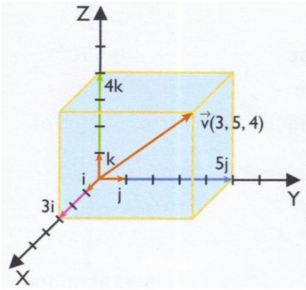
1.1.-Coordenadas cartesianas de un vector.

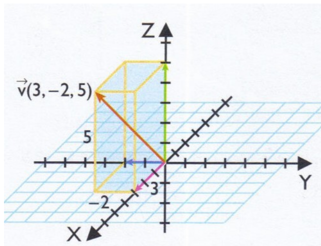


$B=\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}$ es una **base ortonormal** porque sus vectores son perpendiculares dos a dos y de módulo uno. Cualquier vector del espacio se puede poner como combinación lineal de ellos. *[El vector $\vec{a}$ es <u>combinación lineal</u> de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ si existen números reales x, y, z tales que: $\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$]*

Un **sistema de referencia** del espacio está formado por un punto O y una base B. El sistema de referencia más sencillo del espacio es el formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y la base canónica: $\{O(0,0,0);\{\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}\}$

Las **coordenadas cartesianas del vector** $\vec{v}$ en la base $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ son los coeficientes de los vectores $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ que generan el vector $\vec{v}$. Si se tiene que $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, las coordenadas de $\vec{v}$ son (x,y,z).





1 Dados $\vec{u}=(1,0,-2)$, $\vec{v}=(3,4,-1)$, $\vec{w}=(1,-1,3)$ y $\vec{x}=(8,5,9)$; calcula el valor de a, b y c para que: $\vec{x}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.

2 Estudia si $\vec{a}=(-6,15,9)$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}=(3,-1,2)$, $\vec{v}=(4,3,-1)$ y $\vec{w}=(-2,5,1)$.

1.2.-Dependencia e independencia lineal de vectores.

Un conjunto de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, …, $\vec{v}_n$ es **linealmente dependiente** si alguno de ellos es combinación lineal de los restantes, es decir, si $\vec{v}_n=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_{n-1}\vec{v}_{n-1}$ con λ_1, λ_2, …, λ_{n-1} números reales.

Los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, …, $\vec{v}_n$ son **linealmente independientes** cuando no son linealmente dependientes.

El rango de un conjunto de vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, …, $\vec{v}_n$ es el máximo número de esos vectores que forman un subconjunto linealmente independiente. De ahí se deduce que <u>n vectores dados serán linealmente independientes si y sólo si su rango es igual a n</u>. En particular, tres vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ serán linealmente independientes si su rango es 3, es decir, si: $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}\neq 0$.

3 Sean los vectores $\vec{v}_1=(0,1,0)$, $\vec{v}_2=(2,1,-1)$ y $\vec{v}_3=(2,3,-1)$:

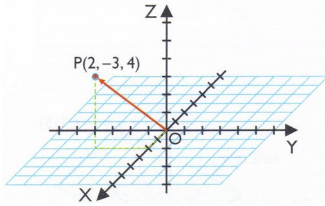
a) ¿Son los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ linealmente dependientes?

b) ¿Para qué valores de a el vector $(4,a+3,-2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

4 Halla los valores de x para los que los vectores $u=(x,2,0)$, $v=(x,-2,1)$ y $w=(2,-x,-4x)$ son linealmente independientes.

1.3.-Vector de posición.

El vector de posición de un punto P es el que nace en el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y tiene su extremo en el punto P. Las coordenadas del vector de posición coinciden con las del punto P.



Ejemplo:

El vector de posición del punto $P(2,-3,4)$ es $\overrightarrow{OP}=(2,-3,4)$.

1.4.-Coordenadas de un vector definido por dos puntos.

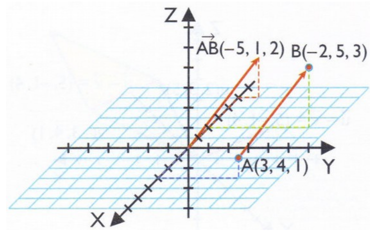
El vector definido por dos puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ es el que se obtiene al restar al vector de posición del extremo $\overrightarrow{OB}$ el vector de posición del origen $\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ Sus coordenadas son $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

Ejemplo:

Dados los puntos $A(3,4,1)$ y $B(-2,5,3)$, calcula analítica y gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=(-2-3,5-4,3-1)=(-5,1,2)$



5 Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$; demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

6 Dados los puntos $A(3,-1,2)$ y $B(-1,2,1)$, calcula analítica y gráficamente los vectores: a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BA}$
¿Qué relación hay entre los dos vectores?

1.5.-Centros de gravedad.

1.5.1-Punto medio de un segmento.

El punto medio de un segmento se calcula haciendo la semisuma de las coordenadas de los extremos; es decir, dado el segmento de extremos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, el punto medio es: $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

1.5.2.-Baricentro de un triángulo.

Dado el triángulo de vértices $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, el baricentro es el centro de gravedad del triángulo y se calcula sumando las coordenadas de los vértices y dividiendo entre 3. Se representa por G.

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

1.5.3-Centro de gravedad de un tetraedro.

Las coordenadas del centro de gravedad de un tetraedro vienen dadas por la fórmula siguiente:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

2.-OPERACIONES CON VECTORES.

2.1.-Operaciones básicas con vectores.

2.1.1.-Suma y resta de vectores.

Para sumar y restar <u>analíticamente</u> vectores, se suman o se restan sus coordenadas.

Para sumar <u>geométricamente</u> vectores, se traslada uno sobre el extremo del otro, y la suma es el vector que tiene como origen, el origen del primero, y como extremo, el extremo del segundo. Para restar geométricamente dos vectores, se le suma al primero el opuesto del segundo.

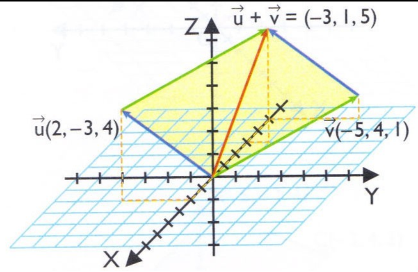
Ejemplo:

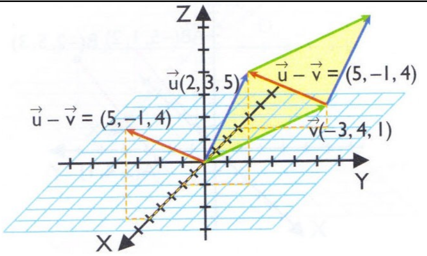
a) $u=(2,-3,4)$ y $v=(-5,4,1)\ \Rightarrow$

$u+v=(-3,1,5)$

b) $u=(2,3,5)$ y $v=(-3,4,1)\ \Rightarrow$

$u-v=(5,-1,4)$





2.1.2.-Producto de un número por un vector.

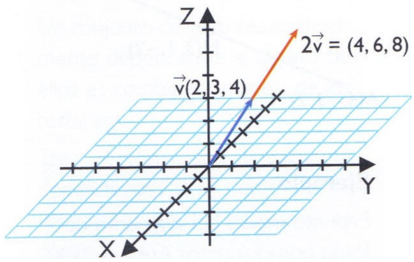
Para multiplicar <u>analíticamente</u> un número por un vector, se multiplica el número por las coordenadas del vector.

Para multiplicar <u>geométricamente</u> un número por un vector, se lleva el vector sobre sí mismo tantas veces como indique el número.

Ejemplo:

$v=(2,3,4)$

$2v=(4,6,8)$



$\boxed{7}$ Dados los vectores $u=(3,-2,5)$ y $v=(-1,4,-6)$, calcula: a) $2u$ b) $-v$ c) $u+v$ d) $u-v$

$\boxed{8}$ Dados los vectores $u=(1,-4,-3)$, $v=(2,5,-1)$ y $w=(-6,0,5)$, calcula: a) $u+v-w$ b) $2u-v+w$

$\boxed{9}$ Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}$. Calcula el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.

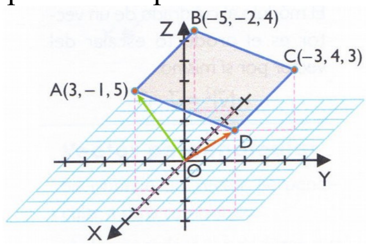
$\boxed{10}$ Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, halla las coordenadas del punto C sabiendo que $\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}$.

2.1.3.-Determinación de puntos en el espacio.

Para determinar puntos en el espacio, se aplican las operaciones con vectores a los vectores de posición.

Ejemplo:

Las coordenadas de tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3,-1,5)$, $B(-5,-2,4)$ y $C(-3,4,3)$. Halla el vértice D.



El vector $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

Como $\overrightarrow{BC}=(2,6,-1)$ entonces

$\overrightarrow{OD}=(3,-1,5)+(2,6,-1)=(5,5,4)$

2.2.-Operaciones que permiten medir en el espacio (longitudes, áreas, volúmenes y ángulos).

2.2.1.-Producto escalar.

El producto escalar de dos vectores es el <u>número</u> que se obtiene al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman. $u\cdot v=|u|\cdot|v|\cdot\cos\alpha$

<u>Propiedades:</u>

a) El producto escalar de un vector por sí mismo es un número real positivo o cero. $v\cdot v\geq 0$

b) $u\cdot v=v\cdot u$

c) $k(u\cdot v)=(ku)\cdot v=u\cdot(kv)$ $\quad k\in\Re$

d) $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$

Consecuencias que se derivan:

- Si dos vectores tienen la misma dirección $\begin{cases}\text{y mismo sentido: } u\cdot v=|u|\cdot|v|\cdot\cos 0=|u|\cdot|v|\\ \text{y distinto sentido: } u\cdot v=|u|\cdot|v|\cdot\cos 180=-|u|\cdot|v|\end{cases}$
- Dos vectores no nulos son perpendiculares (u ortogonales) si y sólo si su producto escalar es cero.

$u\perp v \iff u\cdot v=0$ siendo $u\neq 0$ y $v\neq 0$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|u\cdot v|\leq|u|\cdot|v|$

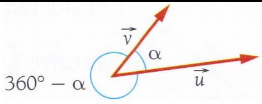
<u>Aplicaciones del producto escalar:</u>

Módulo de un vector: Sea v un vector no nulo cualquiera del espacio. Si efectuamos el producto escalar de u por sí mismo, obtenemos: $v\cdot v=|v|\cdot|v|\cdot\cos 0=|v|^2\cdot 1=|v|^2$; entonces: $|v|=+\sqrt{v\cdot v}$

Un **vector unitario** tiene de módulo uno. Para hallar un vector unitario en la dirección del vector $v=(v_1,v_2,v_3)$, se dividen sus coordenadas por el módulo de v: $\vec{u}=\left(\frac{v_1}{|v|},\frac{v_2}{|v|},\frac{v_3}{|v|}\right)$.

Ángulo que forman dos vectores: $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|u|\cdot|v|}$

Para cada valor de a, tal que $-1 \le a \le 1$, existen dos ángulos cuyo coseno vale a: $\cos\alpha = a$ y $\cos(360^{o} - \alpha) = a$. Consideraremos que el ángulo entre los dos vectores es el menor de estos.



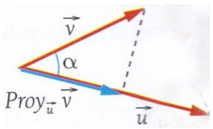
Expresión analítica del producto escalar (en una base ortonormal):

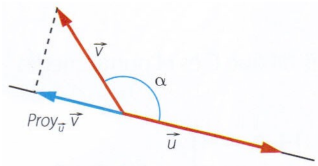
El producto escalar de dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ es la suma del producto de sus coordenadas:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 v_2 + u_3 \cdot v_3$$

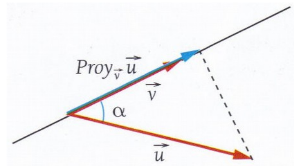
Interpretación geométrica del producto escalar:

Dados dos vectores u y v, no nulos, la proyección de v sobre u, $Proy_{\vec{u}}\, v$, es el cateto, que sigue la dirección de u, del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es v.





Análogamente, $Proy_{\vec{v}}\, u$, proyección de u sobre v:



El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él:

$$u \cdot v = |u| \cdot Proy_{\vec{u}}\, v \qquad\qquad u \cdot v = |v| \cdot Proy_{\vec{v}}\, u$$

11 Halla el producto escalar de los vectores $u = (5, -3, 2)$ y $v = (2, 1, 4)$.

12 Calcula la proyección del vector u sobre el vector v siendo $u = (2, -1, 3)$ y $v = (1, 5, 2)$.

13 Calcula el ángulo que forman los vectores $u = (1, -3, 2)$ y $v = (4, 1, 5)$.

14 Calcula el valor de k para que el vector $u = (7, 4, k)$ sea perpendicular al vector $v = (-2, -1, 6)$.

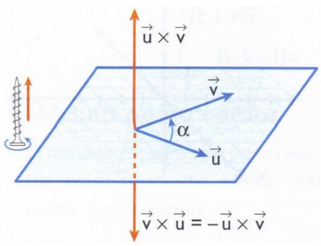
15 Sea el vector $v = (3, -2, 5)$.

a) Calcula su módulo. b) Halla un vector unitario en la dirección de v. c) Halla otro vector unitario en la dirección de v.

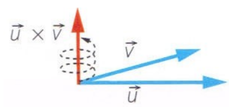
16 Se sabe que un vector del espacio es $v = 4i - 12j + zk$. Determina los valores posibles de la coordenada z sabiendo que $|v| = 13$.

17 Calcula un vector unitario ortogonal al vector $v = (2, 0, -1)$.

2.2.2.-Producto vectorial.



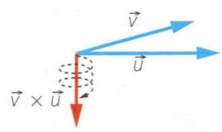
El **producto vectorial** de dos vectores, u y v, es otro vector que se representa por $u \times v$ y que tiene las siguientes características:



Módulo: es el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman: $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot sen\alpha$. [$\alpha$ es el menor ángulo entre los vectores]

Dirección: es perpendicular al plano determinado por los vectores u y v.

Sentido: avanza en el sentido de avance de un tornillo que rota de u hacia v.



Expresión analítica (en una base ortonormal):

El producto vectorial de dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ se obtiene desarrollando el siguiente determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

por tanto,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Desarrollando el determinante por los adjuntos de la primera columna.

En la práctica, el desarrollo del determinante se hace mentalmente, y se escriben directamente las componentes del vector.

18 Calcula el producto vectorial de los vectores:

a) $u = (3, -1, 2)$ y $v = (4, 2, 5)$. b) $u = (-1, 1, 0)$ y $v = (1, 1, 1)$. c) $u = (1, 0, 1)$ y $v = (-1, 1, 0)$.

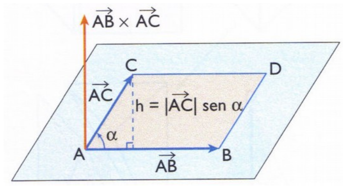
19 Halla un vector perpendicular a los vectores siguientes: $u=(2,-1,0)$ y $v=(5,1,-2)$

Propiedades:

a) $u \times u = 0$ para cualquier vector u.
b) u es paralelo a $v \Leftrightarrow u \times v = 0$
c) $u \times v = -v \times u$
d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$ $\quad k \in \Re$
e) $u \times (v+w) = u \times v + u \times w$

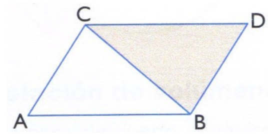
20 Sean dos vectores a y b perpendiculares entre sí. Si $|a|=3$ y $|b|=4$, calcula $|(a+b)\times(a-b)|$.

Interpretación geométrica del producto vectorial:



Área del paralelogramo:
El área del paralelogramo definido por dos vectores es el módulo del producto vectorial.

Área del paralelogramo $ABCD = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$



Área del triángulo:
El área del triángulo formado por dos vectores es un medio del módulo de su producto vectorial.

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

21 Calcula el área del triángulo ABC tal que: $A(1,2,1)$, $B(1,-1,0)$ y $C(2,1,1)$

2.2.3.-Producto mixto.

El **producto mixto** de tres vectores, u, v y w, es el número que se obtiene al realizar el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por $[u, v, w]$ y es: $[u, v, w] = u \cdot (v \times w)$

Expresión analítica (en una base ortonormal):

El producto mixto de tres vectores $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ y $w=(w_1,w_2,w_3)$ viene dado por el valor del siguiente determinante: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$

Ejemplo: Calcula el producto mixto de los vectores:

a) $u=(1,2,-3)$, $v=(4,1,1)$ y $w=(5,-2,6)$ b) $u=(1,0,-1)$, $v=(2,-1,0)$ y $w=(1,-1,2)$

Propiedades: Como $[u, v, w] = \det(u, v, w)$, todas las propiedades del producto mixto se deducen de las propiedades de los determinantes.

a) $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v] = -[w, v, u] = -[v, u, w] = -[u, w, v]$

b) $[u, v, w] = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ son linealmente dependientes o coplanarios.

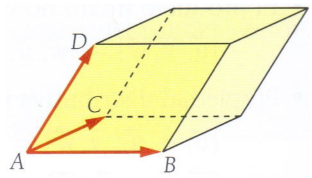
c) $[xu,\ yv,\ zw] = xyz\,[u,\ v,\ w]$

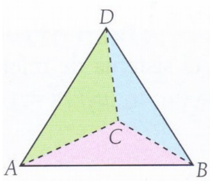
<u>Interpretación geométrica del producto mixto:</u>

Volumen del paralelepípedo:

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$$



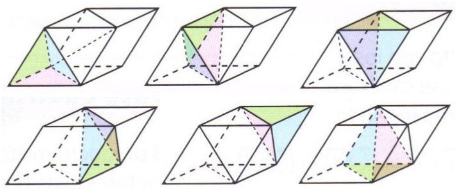


Volumen del tetraedro:

El volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.

Volumen del tetraedro

$$= \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right|$$



Un paralelepípedo se descompone en 6 tetraedros con idéntico volumen.

22 Halla el volumen del tetraedro definido por los puntos: $A(1,0,-2)$, $B(3,1,5)$, $C(-4,3,0)$ y $D(-6,-2,3)$.

23 Dados los vectores $u=(2,1,-1)$, $v=(-3,5,1)$ y $w=(4,k,2)$, calcula el valor de k para que el volumen del paralelepípedo definido por dichos vectores sea igual a 26 unidades cúbicas.

24 El volumen de un tetraedro es de 5 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos: $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ y $C(2,-1,3)$; halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y.

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

25 Averigua la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores, explicando qué significa gráficamente dicho resultado:

a) $u=(2,\ -1,\ 1)$ y $v=(-3,\ 1'5,\ -1'5)$ Sol: L.D., misma dirección

b) $u=(1,\ 5,\ -2)$ y $v=(2,\ -1,\ 5)$ Sol: *L.I., distinta dirección;*

c) $u=(2,\ 3,\ -1)$, $v=(1,\ 2,\ 3)$ *y* $w(4,\ 7,\ 5)$ Sol: *L.D., son coplanarios*

d) $u=(1,\ -3,\ 5)$, $v=(2,\ -3\ \ 2)$ *y* $w=(4,\ 3,\ 0)$ Sol: L.I. no son coplanarios

26 Dados los vectores $u=(2,\ -3,\ 5)$ *y* $v=(6,\ -1,\ 0)$ calcula:

a) los módulos de u y v. *Sol:* $\sqrt{38}$ *y* $\sqrt{37}$

b) El producto escalar de u y v. *Sol: 15*

c) El coseno del ángulo que forman. *Sol: 0´40*

d) La proyección de u sobre v. *Sol: 2´47*

e) El valor de m para que el vector $(m,\ 2,\ 3)$ sea ortogonal a u. *Sol:* $-4'5$

27 Dados los vectores $u=(3,\ 1,\ -1)$ *y* $v=(2,\ 3,\ 4)$ hallar:

a) El producto vectorial de vectores u *y* v. Sol: $u\times v=(7,\ -14,\ 7)$

b) Un vector unitario perpendicular a u *y* v. *Sol:* $\left(\frac{7}{\sqrt{294}},\ \frac{-14}{\sqrt{294}},\ \frac{7}{\sqrt{294}}\right)$

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores u *y* v. *Sol:* $\sqrt{294}$

28 Sean los vectores $v_1=(0,\ 1,\ 0)$, $v_2=(2,\ 1,\ -1)$ y $v_3=(2,\ 3,\ -1)$ *(Selectividad Junio 2005)*

a) ¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente dependientes?

b) ¿Para qué valores de a el vector $(4,\ a+3,\ -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3?

c) Calcula un vector unitario y perpendicular a v_1 y v_2. *Sol.: a) L.D. ; b) para todos ; c)* $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad 0, \quad \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

29 Considera los vectores $u=(1,\ 1,\ m)$, $v=(0,\ m,\ -1)$, $w=(1,\ 2m,\ 0)$ *(Selectividad Septiembre 2007)*

a) Determina el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

b) Para ese valor de m expresa w como combinación lineal de u y v. *Sol.: a) m=1 ; b)* $w=u+v$

30 Determina el número máximo de vectores linealmente independientes entre los siguientes, y elige vectores que lo sean.

$$v_1=(1,2,3),\ v_2=(0,1,-2),\ v_3=(1,3,0) \text{ y } v_4=(0,2,-4)$$

31 Comprueba si los puntos $A(1,2,3)$, $B(1,-2,4)$ y $C(1,-3,5)$ están alineados.

32 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Estudia, según los valores de a, la dependencia lineal de los vectores $e_1=(1,0,a)$, $e_2=(2,a,-1)$ y $e_3=(0,1,a)$.

b) Para $a=2$, escribe el vector $e=(-4,-8,3)$ como combinación lineal de e_1, e_2 y e_3.

33 Dados los vectores $u=(2,1,0)$ y $v=(-1,0,1)$, halla un vector unitario w tal que sea coplanario con u y v y ortogonal a v.

34 Dados los vectores $u=(a,b,1)$, $v=(-3,4,1)$ y $w=(1,2,c)$, determina el valor de los parámetros $a,b,c\in\Re$ de manera que los vectores v y w sean perpendiculares y además $u \times w=v$. ¿Qué ángulo forman u y v en dicho caso?

35 Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, halla los puntos C en el eje X tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

36 Determina los puntos del segmento $\overline{AB}$ que lo dividen en tres partes iguales, siendo: $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$.

37 Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices $A(0,3,-1)$, $B(0,1,5)$ y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.