TEMA 8 SERIES DE FUNCIONES

1.- SERIES DE TAYLOR

Definición 1.- Serie de potencias
Se llama serie de potencias centrada en $x = 0$ a toda expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad a_i \in R \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

● Se trata de una serie de funciones, de tal modo que, para cada valor de x resulta una serie numérica. Estas series son un caso particular de la serie general centrada en $x = a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots$$

Ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n} + \cdots$$

Definición 2.- Campo de convergencia
Se llama campo de convergencia de una serie de potencias al conjunto de valores $x \in R$ para los cuales la serie numérica es convergente.

Ejemplo.- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ converge $\forall x \in (-1,1)$

Teorema (convergencia de una serie de potencias)
Para toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, es cierta una de las condiciones siguientes:

1. La serie es absolutamente convergente $\forall x \in R$
2. La serie es convergente solamente en $x = a$
3. Existe un número real $r > 0$, llamado radio de convergencia, tal que la serie es absolutamente convergente $\forall x$ tal que $|x-a| < r$, y divergente para $|x-a| > r$

Definición.- Serie de Taylor

Sea $f(x)$ una función con derivadas de cualquier orden en $x=a$. Se llama serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $x=a$ a la serie de potencias:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

● En el caso particular en que $x=0$, la serie se llama de McLaurin:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f(x)$ una función con derivadas sucesivas hasta el orden $n+1$ en el intervalo $(a-r,a+r)$.

Entonces, $f(x)$ puede escribirse en la forma:

$$\boxed{f(x)=P_n(x)+R_n(x)}$$

donde:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama polinomio de Taylor de orden n y:

$$R_n(x)=\frac{f^{n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad a<\theta<x \;\; (x<\theta<a) \qquad \theta\in R$$

es la forma de Lagrange del resto de la serie.

Además:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

esto es, la serie converge cuando $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

● El teorema afirma que la serie formada por los coeficientes de Taylor converge a la función de la que proviene en los valores en los que el resto tiende a cero. El valor absoluto del resto permite estimar la cota de error asociada a la aproximación de la función por los polinomios de Taylor.

● Cuando hacemos $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, decimos que se ha hecho un desarrollo limitado de Taylor de orden n.

2.- SERIES DE TAYLOR DE FUNCIONES ELEMENTALES

Los desarrollos de Taylor de las funciones elementales están tabulados. En la lista básica que hay al final del tema aparecen algunas de estas funciones, sus series de Taylor y el intervalo de convergencia. En todos los casos, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

● En las gráficas siguientes están representadas la función $f(x) = sen x$ y la suma parcial S_3 de su serie de Taylor en $x = 0$ (Fig.1), y la suma parcial S_9 (Fig.2).

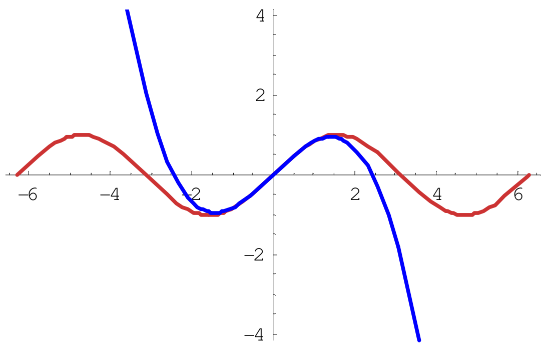


Fig.1

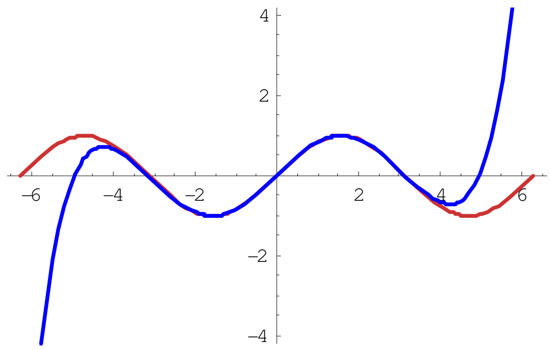


Fig.2

Particularmente importante es la serie binómica, desarrollo correspondiente a funciones de la forma $f(x) = (x+1)^k$ $k \in R$. En el caso particular que se tiene para $k \in N$, resulta el binomio de Newton, esto es, la suma sería finita.

Ejemplo.- Escribir el desarrollo limitado de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$

Como $k = \frac{1}{2}$:

$$f(x) = (x+1)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}x^3 + \cdots$$

Entonces:

$$(x+1)^{1/2} = P_2(x) + R_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+\theta)^{-5/2}x^3 \qquad 0 < \theta < x$$

● A partir de la tabla básica pueden obtenerse nuevas series de potencias para otras funciones mediante sumas, restas, composiciones, derivación, integración,...

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

Dadas las series de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, son válidas las propiedades siguientes:

1. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

2. $f(k \cdot x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

3. $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k \cdot n}$

● En cada caso habrá que estudiar el nuevo campo de convergencia de la serie.

● Los resultados son igualmente válidos para series centradas en $x = a$. En general, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $I = (-r, r)$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge en $I = (a-r, a+r)$

Ejemplo.- Hallar la serie de Taylor de $f(x) = arctg(2x)$ en $x = 0$ y hallar su campo de convergencia.

Como:

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad \forall x \in [-1,1]$$

Sustituimos $x \to 2x$ y tenemos:

$$arctg\,(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} - \frac{(2x)^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{2n+1} + \cdots =$$

$$= 2x - \frac{2^3 x^3}{3} + \frac{2^5 x^5}{5} - \frac{2^7 x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

y el campo de convergencia será $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Por ejemplo, para $x = \frac{1}{2}$:

$$arctg\,(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Teorema (derivación e integración)

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ definida en el intervalo $(a-r, a+r)$. Entonces:

1. La serie puede derivarse término a término y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\,(x-a)^{n-1}$
2. La serie puede integrarse término a término y $\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

   En particular, $\forall x \in (a-r, a+r)$:

$$\boxed{\int_a^x f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}}$$

<u>Ejemplo</u>.- Calcular $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ utilizando el desarrollo de Taylor de $f(x) = e^{-x^2}$ en $x = 0$.

Como:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \forall x \in R$$

tenemos:

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots \qquad \forall x \in R$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \qquad \forall x \in R$$

Entonces, integrando término a término:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \right] dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx + \cdots +$$

$$+ \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx + \cdots = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

● Si aproximamos la suma por la suma parcial $S_4 = 0.7428$, el error cometido será menor que $\frac{1}{216} \cong 0.0046$.

3.- SERIES DE FOURIER

Definición.- Serie de Fourier

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $(-p, p)$. Se llama serie de Fourier de $f(x)$ a la serie trigonométrica:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x \right)}$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) sen \frac{n\pi}{p} x dx$$

son los coeficientes de Fourier de la serie, suponiendo su existencia cuando $f(x)$ es continua a trozos, puesto que en ese caso existen las integrales.

● Las expresiones anteriores se conocen como fórmulas de Euler, y son válidas en cualquier intervalo de la forma $(a\,,\,a+2p)$; en particular, en el intervalo $(0\,,\,2p)$.

● La idea es descomponer $f(x)$ en una componente continua, $\dfrac{a_0}{2}$, y una suma de infinitos armónicos, cuya amplitud viene fijada por a_n y b_n.

● Representamos así funciones muy generales, con muchas discontinuidades, que no pueden ser descritas por series de potencias.

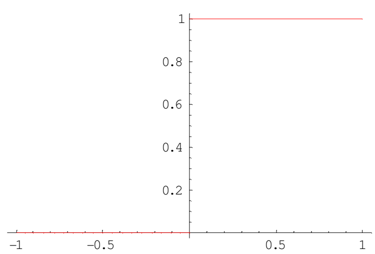
Teorema (condición suficiente de convergencia)

Sean $f(x)$ y $f'(x)$ continuas a trozos en el intervalo $(-p, p)$. Entonces:

1. En un punto de continuidad, la serie converge a $f(x)$
2. En un punto de discontinuidad, la serie converge a $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

Ejemplo.- Hallar la serie de Fourier de la función $f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$ y estudiar su convergencia.

La función está definida en el intervalo $(-1,1)$ y no es continua en $x=0$.



Cálculo de los coeficientes:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\,dx=\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx=\frac{1}{n\pi}sen\,(n\pi x)\Big|_{x=0}^{x=1}=0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) sen \frac{n\pi}{p} x\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, sen\,(n\pi x)\, dx = \int_{0}^{1} sen\,(n\pi x)\, dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] = \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

Entonces, la serie de Fourier será:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\, sen\frac{n\pi}{p}x\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right) sen\,(n\pi x) =$$

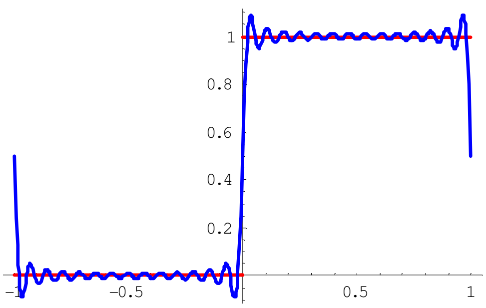
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} sen\,(\pi x) + \frac{2}{3\pi} sen\ (3\pi x) + \frac{2}{5\pi} sen\,(5\pi x) + \cdots \quad \forall x \in (-1,1) \quad x \neq 0$$

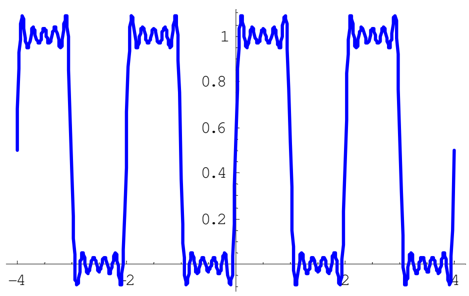
Convergencia:

Como la función es continua $\forall x \in (-1,1)$ excepto en $x = 0$, la serie converge al valor de la función en todos los puntos del intervalo menos en $x = 0$ en el que converge a:

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

● En la figura de la izquierda está representada la gráfica de la función y una suma parcial de su serie de Fourier. Puede observarse la deficiencia de la aproximación en el punto en el que la función no es continua y que su valor en ese punto es $\frac{1}{2}$. Dicha discrepancia recibe el nombre de efecto o fenómeno de Gibbs.





● Como cada término de la serie es una función periódica de periodo $2p$, 2 en este caso, la función suma será también periódica y la serie representará a la extensión periódica de la función fuera del intervalo. En la gráfica de la derecha aparece una suma parcial de la serie, donde puede apreciarse la periodicidad.

● En el caso particular en el que la función es par, los coeficientes $b_n = 0 \ \ \forall n$, y la serie de Fourier es una serie de cosenos:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p} x}$$

● En el caso en el que la función es impar, los coeficientes $a_n = 0 \ \ \forall n$, y la serie de Fourier es una serie de senos:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p} x}$$

Teorema (magnitud de los coeficientes)

Sea $f(x)$ una función que admite un desarrollo en serie de Fourier.
Entonces:

1. Si $f(x)$ es continua a trozos, los coeficientes de Fourier decrecen como $\frac{1}{n}$
2. Si $f(x)$ es derivable con continuidad hasta el orden k, entonces los coeficientes decrecen como $\frac{1}{n^{k+2}}$

● Esto es, la magnitud de los coeficientes de Fourier disminuye a medida que n crece. Así, los primeros coeficientes de la serie son los de mayor importancia.

SERIES DE POTENCIAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

$$\frac{1}{x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-\cdots\cdots+(-1)^n(x-1)^n+\cdots\cdots \qquad 0<x<2$$

$$\frac{1}{x+1} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\cdots \qquad -1<x<1$$

$$L\,x = (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\cdots\cdots \qquad 0<x\le 2$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$sen\,x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots \qquad -\infty<x<\infty$$

$$arctg\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots \qquad -1\le x\le 1$$

$$arcsen\,x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)}+\cdots\cdots \qquad -1\le x\le 1$$

SERIE BINÓMICA $\quad k\in R$

$$(1+x)^k = 1+k\,x+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}{n!}+\cdots\cdots \qquad -1<x<1$$