TEMA 6 ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN

1.- SOLUCIONES

Definición 1.- Ecuación diferencial ordinaria
Se llama ecuación diferencial ordinaria a toda relación funcional entre una variable independiente x, una función y desconocida de dicha variable y sus derivadas sucesivas, llamándose orden de la ecuación al máximo orden de derivación con que aparece la función incógnita y en la expresión de la ecuación.

● $G(x, y, y', y'', \ldots, y^{n)}) = 0$ será una EDO de orden n, donde $y = f(x)$ es la función incógnita.

Ejemplo.- $x^2 + yy' = 2y$ es una ecuación de primer orden y $x + y' = y''$ es una ecuación de segundo orden.

● En este tema estudiaremos ecuaciones de primer orden escritas en forma normal, $y' = F(x, y)$, esto es, donde y' aparece despejada.

Ejemplo.- $y' = x + y$, $y' = y\,Lx$

Definición 2.- Solución general
Se llama solución general de una EDO de primer orden a la familia uniparamétrica de funciones reales de variable real con derivada continua $y = f(x, C)$, definida en un cierto intervalo, que verifica la ecuación diferencial para todo valor real del parámetro (constante).

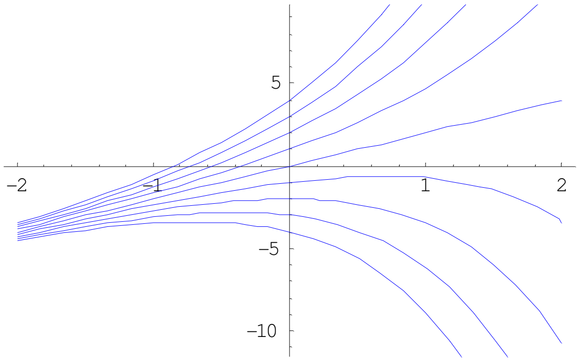
Ejemplo.- Demostrar que $y = 2x + Ce^x$ es la solución general de la ecuación diferencial $y' - y = 2 - 2x$.

Derivamos y comprobamos verifica la ecuación para cada valor real de C:

$$y' = 2 + Ce^x \;\rightarrow\; y' - y = 2 + Ce^x - 2x - Ce^x = 2 - 2x = 2(1 - x)$$

Definición 3.- Solución particular
Se llama solución particular a la que se tiene de la general para cada valor real del parámetro.

Ejemplo.- Las funciones $y = 2x$, $y = 2x + 5e^x$, $y = 2x - 4e^x$ son soluciones particulares de la ecuación.



● En la figura están representadas algunas soluciones particulares de la ecuación.

Definición 4.- Problema de valor inicial (p.v.i)

Sea $y' = F(x, y)$ y $(x_0, y_0) \in D$, donde $D \subseteq R^2$ es el dominio de $F(x, y)$.

Se llama p.v.i. a encontrar una solución $y = f(x)$ de la ecuación que pase por el punto dado.

● Escribiremos: $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Ejemplo.- Hallar la solución de la ecuación $y' - y = 2 - 2x$ que pasa por el punto $(0, 2)$.

Para resolver el p.v.i. $\begin{cases} y' - y = 2 - 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

determinamos el valor de C, llevando la condición inicial a la expresión de la solución general:

$$y = 2x + Ce^x \rightarrow y(0) = 2 \rightarrow 2 = 0 + Ce^0 \rightarrow C = 2 \rightarrow y = 2x + 2e^x = 2(x + e^x)$$

Teorema (existencia y unicidad de solución)

Sea el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ donde $(x_0, y_0) \in D$

Entonces, si:

1. $F(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in D$
2. $\partial F(x, y) / \partial y$ es continua en $(x_0, y_0) \in D$

Existe solución única al problema, definida en un entorno de x_0 .

Ejemplo.- El p.v.i. $y' = x + y$, $y(0) = 2$ tiene solución única, puesto que $F(x, y) = x + y$ es continua y su derivada respecto de y es 1, que es también continua (estos conceptos los estudiaremos en los temas 9 y 10).

2.- ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Definición.- Ecuación de variables separables
Una EDO de primer orden se dice que es de variables separables si se puede escribir en la forma:

$$\boxed{y' = f_1(x).f_2(y)}$$

La solución general de estas ecuaciones se puede obtener integrando directamente la ecuación:

$$\boxed{\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx \quad si \ \ f_2(y) \neq 0}$$

● Hay que tener en cuenta los valores de y que hacen $f_2(y) = 0$. Estas funciones pueden ser o no soluciones de la ecuación, habrá que verificarlo.

Ejemplo.- Resolver el p.v.i. $\begin{cases} (x^2+4)y' = xy \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Reescribimos la ecuación:

$$y' = \frac{xy}{x^2+4} = y \cdot \frac{x}{x^2+4}$$

Separamos las variables e integramos:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{x}{x^2+4} \ \rightarrow \ \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2+4} \ \ \{y \neq 0\} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{x^2+4} \ \rightarrow \ Ly = \frac{1}{2} L(x^2+4) + C$$

Simplificamos la expresión de la solución general quitando denominadores y logaritmos:

$$Ly = \frac{1}{2} L(x^2+4) + C \ \rightarrow \ 2Ly = L(x^2+4) + C \ \rightarrow \ L(y^2) = L(x^2+4) + C$$

Entonces, la solución general simplificada es $y^2 = C(x^2+4)$

Finalmente, determinamos el valor de C:

$$y^2 = C(x^2+4) \to y(0)=2 \to 4 = C(0+4) \to C=1 \to y^2 = x^2+4 \to y^2 - x^2 = 4$$

● La función $y=0$ verifica la ecuación, pero no es solución del p.v.i, puesto que no pasa por el punto $(0,2)$. Está incluida en la solución general ($C=0$).

3.- LA ECUACIÓN LINEAL

Definición.- Ecuación lineal
Se llama ecuación lineal completa de primer orden en forma canónica toda expresión del tipo:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones reales de variable real.

• Si $q(x)=0$, la ecuación se llama lineal homogénea.

• Si llamamos $y_h(x)$ a la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada a una ecuación completa, que es de variables separables, e $y_p(x)$ a una solución particular de la ecuación completa, que puede obtenerse a partir de $y_h(x)$, entonces la solución general de una ecuación lineal completa es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

Esta solución general puede obtenerse directamente por medio de la expresión:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]}$$

<u>Ejemplo</u>.- Resolver el problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 2$.

La ecuación es lineal, la escribimos en forma canónica y la integramos directamente:

$$y' = x + y \quad \to \quad y' - y = x \quad \to \quad y = e^{-\int -dx}\left[C + \int x e^{\int -dx} dx\right] = e^{x}\left[C + \int x e^{-x} dx\right] =$$

$$= e^{x}\left[C + \int x e^{-x} dx\right] = \left\{\begin{array}{l} x = u \;\to\; dx = du \\ e^{-x} dx = dv \;\to\; -e^{-x} = v \end{array}\right\} = e^{x}\left[C - xe^{-x} + \int e^{-x} dx\right] = Ce^{x} - x - 1$$

Entonces, la solución general es $y = Ce^{x} - x - 1$

La solución particular la determinamos llevando la condición inicial a la solución general:

$$y(0) = 2 \;\to\; C - 1 = 2 \;\to\; C = 3 \;\to\; y = 3e^{x} - x - 1$$

4.- MÉTODO DE EULER

Sea el problema de valor inicial $\left\{\begin{array}{l} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$ que suponemos verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad de soluciones, esto es, tiene solución única y definida en un entorno de x_0 .

El método de Euler es un método numérico para resolver de un modo aproximado este problema. Este procedimiento no pretende calcular la expresión matemática de una función que se aproxime a la solución $y = f(x)$, sino que nos da su valor para una secuencia discreta de puntos x_i a partir uno x_0, en el que sí se conoce su valor exacto y_0. Esto es, permite construir una tabla de valores aproximados para la función solución en una serie de puntos con la condición de éstos estén en progresión aritmética, es decir:

$$x_1 = x_0 + h,\; x_2 = x_1 + h,\; x_3 = x_2 + h,\; \cdots ,\; x_{n+1} = x_n + h$$

De esta manera, los valores $y_i \approx f(x_i),\; i = 1, 2, 3, \ldots$ que da el método permiten conocer de un modo aproximado tanto el valor de la solución en cada x_i, como intuir la gráfica de la solución.

MÉTODO DE EULER

Este método se basa en que en el punto (x_0 , y_0), la pendiente de la tangente a la solución es conocida:

$$y'(x_0) = F(x_0, y_0)$$

Entonces, puede suponerse que el comportamiento de la función solución desconocida es el mismo que el de un segmento de recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene de pendiente $F(x_0, y_0)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$, donde $x_1 = x_0 + h$, con h suficientemente pequeño. Entonces, como la ecuación de la recta es:

$$y - y_0 = (x - x_0)\,F(x_0\,, y_0)$$

Si llegamos a x_1 por medio de ese segmento, tendremos:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\,F(x_0\,, y_0)$$

Si ahora suponemos que la solución pasa por el punto (x_1, y_1), entonces la pendiente de la solución que pasa por ese punto será $F(x_1, y_1)$ y repetimos el proceso. En realidad, lo que hacemos en cada paso es utilizar la tangente a la solución como la verdadera solución.

Entonces, el método de Euler calcula $y_1 \approx f(x_1)$ por medio de la regla siguiente:

$$f(x_1) \approx y_1 = y_0 + h\,F(x_0\,, y_0)$$

y, una vez obtenido y_1, en la misma forma aproxima $y_2 \approx f(x_2)$:

$$f(x_2) \approx y_2 = y_1 + h\,F(x_1\,, y_1)$$

Repitiendo el proceso, se llega a la expresión conocida como fórmula de Euler:

$$\boxed{f(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + h\,F(x_n\,, y_n)}$$

<u>Ejemplo</u>.- Hallar una tabla de valores para la solución aproximada del problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 2$ usando $n = 10$ pasos de tamaño $h = 0.1$. Comparar los resultados con el valor exacto de la solución obtenido en el ejemplo anterior.

<u>Solución:</u>

Hallamos los valores aproximados de la solución a partir del valor exacto conocido:

$y_0 = 2$

$y_1 = y_0 + h\,F(x_0\,,y_0) = 2 + (0.1)(0+2) = 2.2$

$y_2 = y_1 + h\,F(x_1\,,y_1) = 2.2 + (0.1)(0.1+2.2) = 2.43$

$y_3 = y_2 + h\,F(x_2\,,y_2) = 2.43 + (0.1)(0.2+2.43) = 2.693$

$y_4 = y_3 + h\,F(x_3\,,y_3) = 2.693 + (0.1)(0.3+2.693) = 2..992$

$y_5 = y_4 + h\,F(x_4\,,y_4) = 2.992 + (0.1)(0.4+2.992) = 3..332$

$y_6 = y_5 + h\,F(x_5\,,y_5) = 3.332 + (0.1)(0.5+3.332) = 3.715$

$y_7 = y_6 + h\,F(x_6\,,y_6) = 3.715 + (0.1)(0.6+3.715) = 4.146$

$y_8 = y_7 + h\,F(x_7\,,y_7) = 4.146 + (0.1)(0.7+4.146) = 4.631$

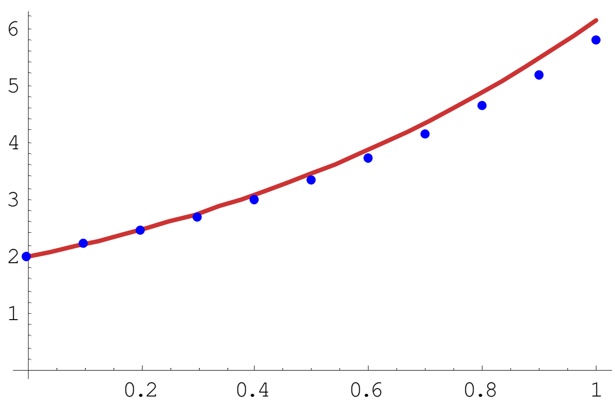
$y_9 = y_8 + h\,F(x_8\,,y_8) = 4.631 + (0.1)(0.8+4.631) = 5.174$

$y_{10} = y_9 + h\,F(x_9\,,y_9) = 5.174 + (0.1)(0.9+5.174) = 5.781$

y construimos la tabla. En la tercera fila están los valores exactos de la solución con dos decimales:

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_n	2	2.2	2.43	2.69	2.99	3.33	3.71	4.14	4.63	5.17	5.78
$y(x_n)$	2	2.21	2.46	2.74	3.07	3.44	3.86	4.34	4.87	5.47	6.15

● En la gráfica están representadas la función solución exacta del problema y la sucesión de puntos que da la regla de Euler. Puede observarse la pérdida de precisión en la aproximación al alejarnos del punto $(x_0\,,y_0)$:



5.- APLICACIONES

1. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Definición.- Ecuación diferencial asociada

Dada la familia uniparamétrica de curvas planas $F(x, y, C) = 0$, se llama ecuación diferencial asociada a la familia, a la expresión $y' = f(x, y)$ que se tiene cuando se elimina C entre F y $\frac{\partial F}{\partial x}$.

• Esta ecuación diferencial expresa una propiedad común a todas las curvas de la familia.

Cálculo de la ecuación de una familia de curvas ortogonal a otra dada

Sea $F_1(x, y, C_1) = 0$ una familia de curvas planas conocida y tal que todas ellas están definidas en una región $D \subseteq R^2$, de tal modo que por cada punto de D pasa una sola curva. Sea $F_2(x, y, C_2) = 0$ otra familia con las mismas propiedades pero desconocida.

El procedimiento a seguir para encontrar la ecuación de $F_2(x, y, C_2) = 0$, ortogonal a la familia conocida, esto es, que cada curva de F_1 corte a la correspondiente de F_2 de tal modo que en los puntos de corte las tangentes sean perpendiculares, es:

1. Hallar la ecuación diferencial del haz conocido: $y' = f(x, y)$
2. La ecuación diferencial del haz ortogonal será: $-\frac{1}{y'} = f(x, y)$
3. La solución general de esta última será la familia pedida.

<u>Ejemplo</u>.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = \frac{C}{x+1}$.

<u>Solución:</u>

Paso 1º. Hallar la ecuación diferencial asociada a la familia, derivando y eliminando la constante:

$$y' = -\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$C = (x+1)y$$

$$y' = -\frac{(x+1)y}{(x+1)^2} = -\frac{y}{x+1}$$

Paso 2º. Hallar la ecuación diferencial de la familia ortogonal:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x+1}$$

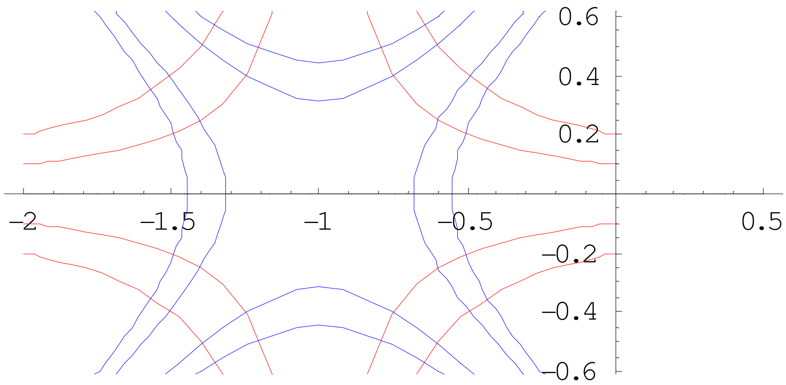
$$y' = \frac{x+1}{y}$$

Paso 3º. Resolver esta última ecuación:

Es una ecuación de variables separables:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y} \quad \rightarrow \quad \int y\,dy = \int (x+1)\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad y^2 - (x+1)^2 = C$$

En la gráfica siguiente están representadas algunas curvas de las dos familias:



2. PROBLEMAS DE COEFICIENTE DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Hay ciertos problemas en los que se conoce el coeficiente de variación instantánea con que varía una magnitud en función de una cantidad presente y/o el tiempo, y se desea hallar la propia magnitud. Así, el problema de valor inicial:

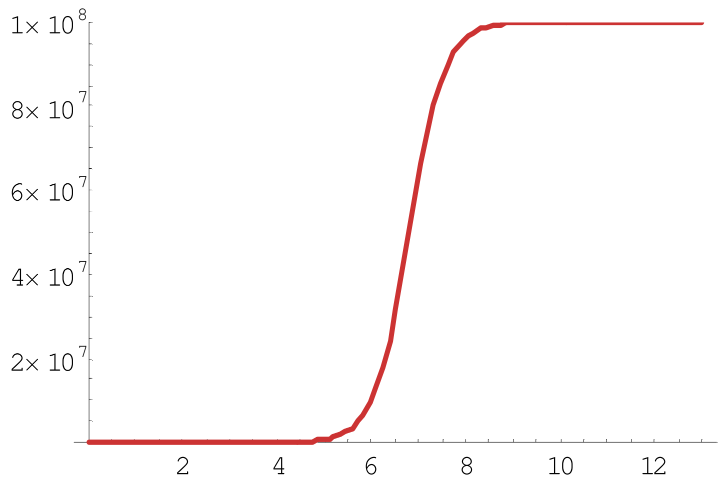
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = k.y \\ y(x_0) = y_0 \end{array}}$$

aparece con frecuencia en numerosas teorías científicas que comprenden crecimiento o descomposición y en diversas situaciones prácticas. En Física, por ejemplo, tal problema sirve de modelo para aproximar la cantidad restante de una sustancia que se desintegra radiactivamente, y proporciona un método, el del carbono 14, que permite determinar de un modo aproximado edades de fósiles, restos arqueológicos, ...

• La solución de tal problema presenta el modelo de crecimiento exponencial, ilimitado. En particular, cuando el problema describe el crecimiento de una población, con frecuencia existe algún límite superior L, por encima del cual no puede haber crecimiento. El modelo que se usa en ese caso es la ecuación logística:

$$y' = k\,y\left(1-\frac{y}{L}\right)$$

donde k y L son constantes positivas. La gráfica de la solución se llama curva logística.



• Otro caso particular, este de decrecimiento, es la ecuación de la ley del enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$$

que permite conocer la temperatura $T(t)$ de un cuerpo que se está enfriando, siendo T_0 la temperatura ambiente.

Ejemplo.- Entre los alumnos de Matemáticas se extiende el rumor (falso) de que el examen va a ser muy difícil. Si hay 100 alumnos matriculados en dicha asignatura, y el rumor se propaga de manera proporcional al número de alumnos que aún no lo han oído, cuántos días tardarán en saberlo 96 estudiantes, si a los dos días lo sabían 80 alumnos? Se supone que en el instante inicial el bulo no es conocido por ningún alumno, sino que proviene de una fuente externa.

Solución:

Sea $N(t)$ el número de alumnos que han oído la noticia después de t días.

El problema de valor inicial será:

$$\begin{cases} \dfrac{dN(t)}{dt} = k\left[100 - N(t)\right] \\ N(0) = 0 \end{cases}$$

puesto que el rumor procede de una fuente externa.

Resolvemos la ecuación diferencial, que es de variables separables:

$$\frac{dN(t)}{dt} = k\left[100 - N(t)\right] \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dN(t)}{100 - N(t)} = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad -L\left|100 - N(t)\right| = kt + C$$

$$L\left|100 - N(t)\right| = -kt - C \quad \Rightarrow \quad 100 - N(t) = e^{-kt-C} = Ce^{-kt} \quad \Rightarrow \quad N(t) = 100 - Ce^{-kt}$$

Con la condición inicial, determinamos la constante de integración C:

$$N(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 - Ce^{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 100$$

$$\boxed{N(t) = 100(1 - e^{-kt})}$$

El dato $N(2) = 80$ nos permite calcular la constante de proporcionalidad:

$$80 = 100(1 - e^{-2k}) \quad \Rightarrow \quad 0.8 = 1 - e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad e^{-2k} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{L(0.2)}{2}$$

$$\boxed{N(t) = 100\left[1 - e^{\frac{L(0.2)}{2}t}\right]}$$

que es la ley de propagación.

Se pide el valor de t para que $N(t) = 96$:

$$96 = 100\left[1 - e^{\frac{L(0.2)}{2}t}\right] \rightarrow 0.96 = 1 - (e^{L(0.2)})^{t/2} \rightarrow 0.96 = 1 - (0.2)^{t/2} \rightarrow 0.04 = (0.2)^{t/2}$$

$$\boxed{Solución:\ t = 4\ días}$$

• En la gráfica siguiente están representados la función solución y los puntos con el dato del enunciado y el resultado obtenido: