Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables para el Grado de Ingeniería Informática

Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba

Consuelo Ramírez Torreblanca

Curso 2017-2018

Índice general

Capítulo 1

Funciones de varias variables

1.1. Introducción a las funciones de varias variables. Gráficas y curvas de nivel

En muchas situaciones prácticas, el valor de una cantidad puede depender de los valores de otras dos (o de más). Por ejemplo,

- El agua de un pantano depende al menos de tres variables: la lluvia, el consumo humano y la evaporación (temperatura).
- El volumen de un cilindro circular recto depende del radio de la base y de la altura.
- La temperatura en cada punto de una placa metálica dependerá de las dos coordenadas del punto y de la temperatura.
- El flujo de sangre desde una arteria a un capilar dependerá del diámetro del capilar y de la presión sanguínea en la arteria y en el capilar.

En definitiva, muchos problemas de la vida real se pueden modelar matemáticamente en términos de funciones de varias variables. Será preciso entonces extender el análisis conocido para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Para una mejor comprensión y visualización trabajaremos en gran parte de este tema con funciones de dos variables, pero los mismos conceptos y técnicas se adaptan al caso de tres o más variables, para lo cuál a veces desarrollaremos ejemplos y ejercicios donde aparezcan funciones que poseen más de dos variables. Sólamente en algunas secciones muy especiales distinguiremos claramente el caso de dos variables de los otros.

Comenzamos dando algo de notación. Definimos el *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de pares ordenados (x, y), donde cada elemento que aparece en el par es un número real:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

(Es importante tener en cuenta que los pares (x, y) están ordenados, es decir, no es lo mismo $(1, 2)$ que $(2, 1)$). De igual forma se define el *espacio cartesiano* (espacio euclídeo):

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \colon x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\ \}.$$

De modo general, se puede considerar el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Sea D un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Una *función de dos variables* $f \colon D \to \mathbb{R}$ es una aplicación (regla) que asigna a cada punto $(x, y) \in D$ un único número real $f(x, y)$.

A veces escribiremos $z = f(x, y)$ y llamaremos a x e y *variables independientes* y a z *variable dependiente*.

Al conjunto D se le llama *dominio* de la función f.

Al igual que ocurria con funciones de una variable, el dominio puede venir dado de dos formas distintas:

- De forma explícita: $f \colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x + y + 1)$.
- De forma implícita: $f(x, y) = \ln(x + y)$.

  En este caso, el dominio será el mayor posible, es decir el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para el que la expresión $f(x, y)$ tiene sentido. Así en el ejemplo anterior el dominio es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y > 0\}$.

La *imagen* de una función $f \colon D \to \mathbb{R}$ está formada por los valores reales que toma la función f, es decir,

$$\text{Imag}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y),\ \text{para algún } (x, y) \in D\}.$$

Ejemplo: $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + x^2y - 1$. En este caso el dominio de f es todo el plano $\mathbb{R}^2$ pues se observa que no hay ningún tipo de restricción sobre las variables x, y.

Ejemplo: El dominio de la función $f(x, y) = e^{(x^2+y^2)}$ es $\mathbb{R}^2$ pues observamos que no hay ningún tipo de restricción sobre las variables x e y. La imagen sería el intervalo $[1, \infty)$, ya que al ser $x^2 + y^2 \geq 0$ se verifica que $e^{(x^2+y^2)} \geq 1$.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

Como la raiz cuadrada sólo está definida para números positivos, el dominio de la función f será el conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, es decir

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geq 9\}.$$

Como la raiz cuadrada de cualquier número positivo es una cantidad positiva, la imagen de la función es el intervalo $[0, \infty)$.

La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representa la circunferencia de centro el origen y radio 3. Esta divide al plano en dos partes: una interior a la circunferencia y otra exterior. Para ver qué parte representa D, basta tomar un punto exterior o interior y ver si está o no en D. Si tomamos el punto $(x,y)=(0,0)$, que es interior a la circunferencia, entonces $0^2+0^2=0<9$, por tanto, $(0,0)\notin D$. Luego geométricamente D representa el exterior de la circunferencia, junto con dicha circunferencia.

Ejercicio

Ver a continuación los siguientes ejemplos dibujando sus dominios.

$f(x,y)=x+y^2-xy+e^x$	$D=\mathbb{R}^2$
$f(x,y)=\ln(xy)$	$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy>0\}$
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-9}$	$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\geq 9\}$
$f(x,y)=\sqrt{1-x+y}$	$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y\geq x-1\}$
$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$	$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\geq 9, x\neq 0\}$
$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$	$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2<9\}$.

Operaciones elementales con funciones de dos variables

Al igual que ocurría con las funciones de una variable, podemos realizar operaciones con funciones de más variables. De hecho, casi todas las funciones se pueden obtener en términos de funciones muy simples utilizando ciertas operaciones, análogas a las vistas con funciones de una sola variable, que a continuación describimos.

Sean f y g dos funciones de las variables x,y definidas ambas en el mismo dominio (si los dominios no coiniciden consideramos su intersección). Podemos definir las siguientes operaciones:

- *Suma*: $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$.
- *Diferencia*: $(f-g)(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$.
- *Producto*: $(f\,g)(x,y)=f(x,y)\,g(x,y)$.
- *Producto por un número a*: $(a\,f)(x,y)=a\,f(x,y)$.
- *Cociente*: $\dfrac{f}{g}(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, si $g(x,y)\neq 0$.

Realmente el producto de una función por un número a se puede considerar como un caso particular del producto de dos funciones considerando una de ellas como la función contante $g(x,y)=a$.

Véase que con las funciones $f(x,y)=x$ y $g(x,y)=y$ y las funciones constantes se pueden construir muchas funciones usando las operaciones anteriores. Por ejemplo, usando únicamente la suma, la diferencia y el producto podemos obtener las siguientes funciones:

- $h(x,y)=x+y^2-xy$
- $h(x,y)=3x^3-xy^2+7y-5$.

En el primer caso, $h=f+gg-fg$ y en el segundo $h=3fff-fgg+7g-5$. Los dos ejemplos anteriores son casos particulares de funciones polinómicas.

Una *función polinómica* es una función que se obtiene como sumas y/o diferencias de funciones del tipo Cx^my^n, donde $C \in \mathbb{R}$ y m y n son números enteros no negativos.

Una *función racional* es la que se obtiene como cociente de dos funciones polinómicas. Así, por ejemplo, la función definida por $f(x,y) = \frac{xy-3y+7}{x^2+y^2+1}$ sería racional.

Existe otra importante operación, llamada *composición*, que no siempre se puede llevar a cabo. Observemos que la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$ no se puede obtener a partir de las funciones $f(x,y) = x$ y $g(x,y) = y$ mediante las operaciones anteriores. La expresión donde se aplica la función seno $g(x,y) = x^2+y^2$ es polinómica y véase que podemos escribir $f(x,y) = h(g(x,y))$, donde $h(t) = \operatorname{sen}(t)$. Es decir, la función dada se puede obtener mediante dos funciones, una de dos variables y una de una sola variable. Otros ejemplos análogos al anterior son: [3] $f(x,y) = (x+y-1)^2$ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ $f(x,y) = \ln(xy)$.

En el primer caso, $h(t) = t^2$, en el segundo $h(t) = \sqrt{t}$ y, en el tercero, $h(t) = \ln(t)$.

Gráficas de funciones de dos variables

A menudo representamos la función $f : D \to \mathbb{R}$ en la forma $z = f(x,y)$, donde x e y son las variables independientes y z es la variable dependiente. Por analogía con el caso de una función de una variable definimos la *gráfica* de la función $z = f(x,y)$ como el conjunto de puntos $(x,y.z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $(x,y) \in D$ y $z = f(x,y)$; es decir:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}.$$

Este conjunto de puntos representa una superficie en el espacio cuya proyección sobre el plano xy es el dominio D. Para cada punto $(x,y) \in D$, $z = f(x,y)$ representa la "altura"que le asignamos a dicho punto.

Al igual que en funciones de una variable, el tener una idea de la gráfica de una función puede resultar de gran ayuda a la hora de estudiar su comportamiento. Sin embargo, en general no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables, ya que no hay un procedimiento a seguir. Daremos algunas ideas sobre representación gráfica que puede sernos de utilidad.

Ejemplo: Vamos a hacernos una idea de la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$.

Lo primero que debemos hacer es determinar su dominio y representarlo geométricamente. Al igual que en ejemplos anteriores, es fácil ver que el dominio es:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 \leq 16\}.$$

Podemos escribir la ecuación $4x^2+y^2 = 16$ en la forma $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16} = 1$, que representa una elipse centrada en el origen. Por tanto, D es el conjunto de puntos interiores a la elipse, incluyéndola a esta.

Por otro lado, los puntos de la superficie que queremos representar verifican $z = f(x,y)$, es decir:

$$z = \sqrt{16-4x^2-y^2}\mathbb{R} \Rightarrow z^2 = 16-4x^2-y^2\mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16} = 1,$$

teniendo en cuenta además que $0 \leq z \leq \sqrt{16} = 4$. Por tanto, la gráfica $z = f(x, y)$ es la mitad de un elipsoide

Curvas de nivel

Dada una constante $k \in \mathbb{R}$, definimos la *curva de nivel de orden* k como la curva $f(x, y) = k$. Dicho de otro modo, la curva de nivel de orden k está constituida por aquellos puntos en los que la función vale k. Geométricamente, la curva de nivel de orden k es el corte de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $z = k$

En el ejemplo anterior: $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$; como $0 \leq z \leq 4$, sólo podemos elegir $k \in [0, 4]$. Para calcular la curva de nivel $k = 0$, resolvemos:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Por tanto, la curva de nivel $k = 0$ es: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. (Se trata del "contorno"del dominio).

Calculemos ahora la curva de orden $k = 1$:

$$f(x, y) = 1 \Rightarrow \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} = 1 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 15 \Rightarrow \frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{15} = 1,$$

que es de nuevo una elipse.

Observaciones

1. Si la función $f(x, y)$ mide la presión atmosférica en el punto (x, y) de un mapa, entonces las curvas de nivel son las *isobaras*. Si, en cambio, $f(x, y)$ mide la temperatura, entoces las curvas de nivel son las *isotermas*. Las curvas de nivel también aparecen en los mapas topográficos, donde ahora $f(x, y)$ mide la elevación del terreno en el punto (x, y).

2. Se puede generalizar el concepto de curva de nivel a funciones de más de dos variables. En particular, si f es una función de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y C es un número de la imagen de f, las soluciones de la ecuación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ forman una región del espacio de dimensión n, que se llama una *superficie de nivel* de f en C.

1.2. Límites de funciones de dos variables. Propiedades y métodos

Límites de funciones de dos variables

Ya conocemos el concepto de límite para funciones de una sola variable. Recordemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que los valores de la función $f(x)$ tienden (se acercan) al valor L cuando los puntos x se aproximan al punto x_0. Matemáticamente esto se formaliza de la siguiente manera:

Para cada número real $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un $\delta > 0$ tal que

$$\underbrace{x - x_0}_{\text{distancia entre } x \text{ y } x_0} \quad < \delta \quad \text{y} \quad x \neq x_0 \quad \mathbb{R} \Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - L}_{\text{distancia entre } f(x) \text{ y } L} \quad < \epsilon.$$

Recuérdese que en la recta real $\mathbb{R}$ la distancia entre dos puntos a y b viene dada por el valor absoluto de la diferencia $a - b$. Por otra parte, la definición de límite dada nos dice que cuando se estudia el límite de f en el punto x_0 no importa el valor de f en ese punto; de hecho, ni siquiera es necesario que f esté definida en x_0. Por ejemplo, decimos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, pero la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x_0 = 0$.

El concepto intuitivo de límite para funciones de dos variables es análogo al de funciones de una sola variable pero es mucho más complicado de tratar, como veremos más adelante. Si f es una función de las variables x, y y $L \in \mathbb{R}$ diremos que f posee límite L en el punto (x_0, y_0) y escribiremos $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L,}$ cuando los valores de la función $f(x, y)$ tienden (se acercan) al valor L cuando los puntos (x, y) se aproximan al punto (x_0, y_0).

Formalmente lo anterior se puede escribir como en el caso de una variable sin mas que sustituir la distancia en $\mathbb{R}$ por la distancia en $\mathbb{R}^2$ para poder escribir matemáticamente el hecho de que los puntos (x, y) se aproximan al punto (x_0, y_0). Recordemos que la distancia en el plano entre los puntos (x, y) y (x_0, y_0) viene dada por $\mathrm{d}((\mathrm{x,y}),\ (\mathrm{x}_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.Por tanto,

Diremos que una función de dos variables f posee límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto (x_0, y_0) y escribirmos $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ cuando para cada número real $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un $\delta > 0$ tal que

$$d((x, y),\ (x_0, y_0)) < \delta \quad \text{y} \quad (x, y) \neq (x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad f(x, y) - L < \epsilon.$$

Al igual que ocurre con las funciones de una sola variable, en la definición anterior se supone (queda implícito) que los puntos (x, y) que se toman próximos a (x_0, y_0) deben estar en el *dominio de la función* f. Sin embargo *no es necesario que* (x_0, y_0) *esté en el dominio* y, si lo está, el valor de f en (x_0, y_0) no interviene en la definición de límite. (Siendo rigurosos, para plantear el límite en el punto (x_0, y_0) hay que verificar que tal punto es de *acumulación* del dominio, concepto que no se explica a este nivel, y que viene a dar una condición que asegura que podemos acercarnos a (x_0, y_0) través de puntos del dominio distintos de (x_0, y_0)).

Aquí vamos a intentar prescindir de la definición de límite, la cuál es poco práctica aunque imprescindible para probar ciertas propiedades básicas de los límites, pero aquí vamos a pasar de demostraciones. En general, el concepto de límite para funciones de dos variables es mucho más complicado de manejar que el de funciones de una sola variable.

Ahora, queremos hacer ver que en muchos casos se puede saber fácilmente que la función tiene límite y calcular este límite. Para ésto veremos algunas propiedades de los límites que nos van a facilitar el estudio de ellos. La idea fundamental es, como hemos visto en una sección anterior, que muchas funciones se pueden expresar en términos de las funciones elementales

$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y, \quad h(x,y) = C$$

y de las *funciones de una sola variable*, usando las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones. Haciendo uso de la definición de límite se puede probar fácilmente

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C = C.} \tag{1.2.1}$$

A la vista de lo anterior, resulta de gran importancia el siguiente resultado:

Comportamiento de los límites respecto de las operaciones básicas:

Sean f y g dos funciones de las variables x, y tales que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

Si a es un número, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} a\, f(x,y) = a\, L$.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f+g)(x,y) = L+M$ y, análogamente, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f-g)(x,y) = L-M$.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f\, g)(x,y) = L\, M$.

Si $M \neq 0$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x,y) = \frac{L}{M}$.

Si h es una función de una sola variable que es *continua* en el punto L, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = h(L)$. En particular, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Haciendo uso del resultado anterior y de (1.2.1) podemos deducir de una forma muy simple que muchos límites existen y, además, podemos calcular estos límites. A continuación exponemos algunos ejemplos donde aparecen funciones polinómicas, racionales y otras de otros tipos.

Ejemplos:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x^2 - 3xy + y^3 + 6)}$$

Se explica con todo detalle cómo, haciendo uso de (1.2.1) y de las tres primeras propiedades, se llega a la existencia de tal límite siendo además su valor $0^2 - 3\times 0\times 1 + 1^3 + 6 = 7$.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + xy + 3y^2 - 1)}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior deducimos la existencia de tal límite siendo además su valor $1^2 + 1\times 2 + 3\times 2^2 - 1 = 14$.

$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{1+x^2+y^2}}$

En este caso, procediendo de manera análoga a los casos anteriores, deducimos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+x^2+y^2 = 1.$$

Como el último límite es distinto de cero, usando ahora la propiedad 1.2, podemos deducir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{1+x^2+y^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{sen}\Big(\dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{\pi}{2}\Big)}$

Procediendo como en el caso anterior, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,1)}(\frac{x}{x^2-y^2}+\pi/2) = \frac{0}{-1}+\frac{\pi}{2} = \pi/2$. Como la función de una sola variable $h(t) = \operatorname{sen} t$ es continua en el punto $\pi/2$, entonces, aplicando la propiedad 1.2, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{sen}\Big(\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1.$$

Podemos observar en los casos anteriores que finalmente el límite ha sido calculado sin mas que sustituir en la expresión $f(x,y)$ el punto (x,y) por el punto donde se plantea el límite; es decir, la variable x por la primera coordenada de ese punto y la variable y por la segunda coordenada del punto (podíamos llamar a ésto algo así como *cálculo de límites por sustitución*). Claro está, en todos estos casos el punto donde se plantea el límite está en el dominio de la función, lo cuál no siempre sucede, como veremos en los próximos ejemplos.

La forma de proceder anteriormente para el cálculo de límites no siempre funciona, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\Big(\frac{x}{x^3+y^3}\Big).$$

Los ejemplos anteriores tienen en común que el punto donde se plantea el límite, el $(0,0)$, *no pertenece al dominio de la función* y en los tres primeros casos nos encontarmos con una *indeterminación* del tipo $\dfrac{0}{0}$ a la hora de ver si las correspondientes fracciones poseen límites. Es decir, en estos casos no podemos hacer uso de la propiedad 1.2 ya que el denominador tiene límite igual a 0. Ya veremos que al estudiar la diferenciabilidad de funciones de dos variables en el punto $(0,0)$ aparecen límites parecidos a los anteriores, donde en el denominador aparece la expresión $\sqrt{x^2+y^2}$. Por ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

En el siguiente ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$ el punto donde se considera el límite si está en el dominio de la función pero, al ser una

función definida a trozos, no podemos hacer uso de las propiedades conocidas para saber si existe tal límite.

A continuación explicaremos dos métodos que puedan sacarnos de dudas en los ejemplos anteriores.

<u>**Primer método**</u>: **Límites a través de caminos y límites direccionales**

Este método es uno de los más usados para probar que una función no posee límite en un punto o bien, en casos dudosos, para encontrar el candidato a límite, cuando éste existe.

En general, el concepto de límite para funciones de dos variables es mucho más complicado de manejar que el de funciones de una sola variable. El motivo es claro: En la recta real $\mathbb{R}$, cuando nos acercamos a un punto x_0, básicamente lo hacemos acercándonos por la izquierda o bien por la derecha; de hecho, esto motiva que se definan en este caso los límites por la izquierda $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y por la derecha $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y sucede que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.Sin embargo, en el plano $\mathbb{R}^2$ hay muchas formas de aproximarse a un punto dado (x_0, y_0); por ejemplo, por rectas o curvas que pasen por ese punto. Solamente con ésto ya tenemos infinitas formas de aproximarnos. Pero a veces, acercándonos al punto a través de un adecuado camino, podemos obtener información valiosa sobre la existencia del límite.

Supongamos que estudiamos el límite en el punto (x_0, y_0) para una función de dos variables $f\colon D \to \mathbb{R}$ y A es un subconjunto del dominio D a través del cuál podemos acercarnos a (x_0, y_0) (matemáticamente esto se plantea diciendo que (x_0, y_0) es un punto de acumulación de A). Podríamos decir que A es un *camino* para acercarnos al punto. éste podría ser una *recta* que pase por el punto, una determinada *curva* o conjuntos más generales. Podríamos entonces estudiar el límite de f en (x_0, y_0) según este camino, como si ahora el dominio de la función fuese A. Esto se suele notar así

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$$

para distinguirlo del límite inicial, que podríamos escribir así

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y).$$

Ahora sólo interesa el comportamiento de la función en los puntos del camino A y en la definición bastaría cambiar D por A. Por tanto, es evidente que $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \implies \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0\\(x,y)\in A}}}$

consecuencia podemos afirmar lo siguiente:

Si para un camino A no existe $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$, tampoco existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Si a través de dos caminos distintos A y B existen los límites pero son distintos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in B}} f(x,y),$$

entonces podemos asegurar que no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Si después de probar muchos caminos resulta que existe el límite a través de ellos y siempre se obtiene el mismo valor L, entonces (cuidado!) no podemos asegurar que exista $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, pero de existir su valor sería L.

Los dos primeros puntos vienen a reflejar lo que sucede en el caso de una sola variable con los límites laterales, pero el punto tercero supone una gran diferencia con respecto al caso de una variable, ya que si los dos límites laterales existían y coincidían sí podíamos asegurar la existencia del límite, mientras que en dos variables lo único que obtenemos en claro es el candidato a límite, caso de que el límite exista. Algunos ejemplos que veremos a continuación confirmarán lo que se expone en el tercer punto, pues veremos ejemplos para los que existe el límite a través de muchos caminos, obteniéndose siempre el mismo valor, y, sin embargo, no existe el límite.

Los caminos más utilizados son rectas y ciertas curvas simples que pasan por el punto (x_0, y_0). Los límites a través de rectas se denominan *límites direccionales*. El motivo fundamental por el que se consideran estos caminos A es porque en estos casos el límite a través de ese camino se reduce a un *límite de una función de una sola variable* y, a veces, es un límite trivial, pues sucede en ocasiones que a través de un camino la función toma valores constantes.

En efecto, supongamos que nuestro punto es el origen $(x_0, y_0) = (0,0)$. Las rectas que pasan por el origen son las de ecuación $y = mx$ y $x = 0$. De forma más general, podemos considerar curvas que pasan por el origen del tipo $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$. Cuando evaluamos la función sobre estas rectas o curvas en la expresión $f(x,y)$ vamos a sustituir la variable x por $\psi(y)$ o bien la variable y por $\varphi(x)$ y, en cualquier caso, nos va a quedar una expresión que sólo depende de una variable y así el límite a través del camino A va a ser equivalente al límite de una función de una sola variable. Ilustraremos todas estas ideas con una serie de ejemplos; algunos de ellos, han sido expuestos anteriormente como casos de indeterminación.

Ejemplos:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

Aquí tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Las dos rectas más simples que pasan por $(0,0)$ son los dos ejes de coordenadas. Al tomar como camino la recta $A = \{(x,y)\colon y = 0\}$ (eje de abcisas) observamos que si $(x,y) \in A$, entonces $f(x,y) = f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1$, por lo que, al ser la función constantemente igual a 1 a través de A, se verifica obviamente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Si ahora tomamos como camino la recta de ecuación $x = 0$ resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} 0 = 0.$$

De esta forma hemos encontrado dos caminos (a través de los cuales la función es constante) por los que existe el límite pero salen valores distintos. En consecuencia, podemos afirmar que no existe el límite planteado.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}}$$

Al igual que en el caso anterior tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En este caso, a través de las rectas $x = 0$ e $y = 0$ la función es constantemente igual a 0 por lo que se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Al coincidir el límite a través de las dos rectas no tenemos una situación análoga al caso anterior y no podemos afirmar que no exista el límite. Ahora bien, podemos considerar las demás rectas que pasan por $(0,0)$, es decir, las rectas de ecuación $y = mx$ (aquí están todas las que pasan por $(0,0)$ salvo la $x = 0$); m es la pendiente de la recta. En este caso, estos límites direccionales salen así:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Obsérvese que el límite depende de la recta tomada (pues depende de la pendiente m) y ésto nos dice que no existe el límite propuesto.

En el primer ejemplo también podíamos haber tomado directamente estas rectas y hubiéramos concluído lo mismo.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}}$$

Volvemos a tener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Al tomar el límite a través de las rectas $x = 0$ e $y = 0$ sale en ambos casos el valor 1. Veamos los demás límites direccionales.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(m^2x^2-x)^2}{m^4x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(m^2x-1)^2}{m^4x^2+1} = 1.$$

Así pues, todos los límites direccionales existen y valen 1. Esto nos podría hacer sospechar que el límite existe, pero, en principio, lo único que podríamos afirmar es que de existir valdría 1. Hay que andar con cuidado pues podemos caer en un error. En este caso, dada la expresión que tiene la función, se ve a simple vista que a través de la parábola de ecuación $x = y^2$ el límite sale 0

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{2y^4} = 0.$$

Por tanto, a través de la parábola se obtiene un límite distinto a los límites direccionales y ésto nos confirma que no existe el límite planteado.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}}$$

En este caso es fácil advertir que no existe tal límite pues los valores de la función crecen sin tope cuando (x, y) se acerca a $(0, 0)$. Es como el caso del límite de una sola variable $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$. Para confirmar ésto lo más cómodo podría ser tomar, por ejemplo, la recta de ecuación $y = 0$ y a través de esta recta se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Al no existir tal límite, como límite real, podemos asegurar que el límite planteado no existe.

En los cuatro casos anteriores el punto donde se estudia el límite, el $(0, 0)$, no pertenece al dominio de la función. El siguiente ejemplo es distinto; se trata de una función definida a trozos y el punto donde se estudia el límite sí pertenece a su dominio.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \text{donde } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}}$$

Teniendo en cuenta la idea intuitiva de límite (o mejor la definición) se aprecia que esta función no debe tener límite en $(0, 0)$, pues tan cerca como queramos a $(0, 0)$ hay puntos donde f toma el valor 1 y otros puntos donde toma el valor 0. Es análogo al caso de una variable:

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Para confirmar esta idea podemos usar el método de los caminos y encontrar dos de ellos a través de los cuales los límites existan pero sean distintos. Obsérvese que a través de la recta vertical $x = 0$ la función siempre toma el valor 0 y, por tanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0.$$

mientras que a través de la parábola de ecuación $y = x^2/2$ la función siempre toma el valor 1 y así resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2/2}} f(x,y) = 1.$$

Esto confirma que no existe el límite en el $(0,0)$.

Por último abordamos el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}}$$

Tenemos ahora un caso de aspecto muy parecido a los tres primeros ejemplos tratados. Es un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en el que no vamos a poder concluir de la misma forma que en esos casos.

Los límites direccionales salen así:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\, mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0. \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Veamos lo que sucede a través de diversas familias de parábolas:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\, mx^2}{x^2+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{1+m^2x^2} = 0.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(my^2)^2\, y}{(my^2)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{m^2y^3}{m^2y^2+1} = 0.$$

Al ser todos los límites direccionales y todos los límites a través de parábolas iguales a 0 *no podemos deducir que exista el límite* aunque sospechamos que sí. Lo único que podemos asegurar es que de existir su valor sería necesariamente $L = 0$. Podríamos estar probando otros caminos (tipos de curvas) para aproximarnos al origen, pero ésto podría ser una labor inacabable. Necesitamos pues un método que nos aclare esta situación. Aunque podríamos hacer uso de la definición de límite, posiblemente sea mejor usar el método que a continuación exponemos.

El método visto anteriormente solo sirve para afirmar que un límite no existe, cuando éste es el caso, o para conocer el valor del límite en el caso de que exista, pero no se puede usar para afirmar que existe, tal como hemos comprobado con el ejemplo 1.2. El método que exponemos a continuación tienen la gran ventaja de que, cuando puede ponerse en práctica, sí sirve para afirmar que un determinado límite existe.

Segundo método: Método de las acotaciones

Este método es una generalización de uno conocido para funciones de una sola variable, que algunos llaman regla o *criterio del sandwich* (o bocadillo). Recordar el caso de una variable.

Sean f, φ y h tres funciones de dos variables definidas sobre el mismo dominio D que verifican:

$$\boxed{h(x,y) \leq f(x,y) \leq \varphi(x,y), \qquad \text{para cada } (x,y) \in D.}$$

(Siendo rigurosos deberíamos decir que tales desigualdades deben verificarse en un disco agujereado centrado en el punto (x_0, y_0)). Si sucede que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = L,}$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Existe un caso especial del resultado anterior que es el que más se utiliza en la práctica. Este es el siguiente:

Supongamos que estamos estudiando el límite de f en el punto (x_0, y_0) y tenemos un caso dudoso, pero sospechamos que el límite existe y su valor es L. Esta sería, por ejemplo, la situación que hemos visto en el ejemplo 1.2 del método anterior. Pues bien, supongamos que g es otra función de dos variables definida sobre el mismo dominio D tal que se verifica:

$$\boxed{f(x,y) - L \leq g(x,y), \qquad \text{para cada } (x,y) \in D \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0.}$$

En tal caso, se puede asegurar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Se trata de un caso particular del anterior pues la desigualdad $f(x,y) - L \leq g(x,y)$ es equivalente a la doble desigualdad $L - g(x,y) \leq f(x,y) \leq L + g(x,y)$ y se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (L - g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (L + g(x,y)) = L,$$

al ser $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$. En este caso, $h(x,y) = L - g(x,y)$ y $\varphi(x,y) = L + g(x,y)$.

Hemos visto que con el método anterior podíamos llegar a una situación dudosa, por no poder asegurar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, pero al menos sabíamos que de existir el límite sería un cierto valor L. Conociendo la expresión $f(x,y)$ y el candidato a límite L podemos intentar obtener (no siempre funciona) una acotación del tipo $f(x,y) - L \leq g(x,y)$, siendo g una función que tiene límite 0 en el punto (x_0, y_0). En este caso podemos asegurar que f posee límite L en ese punto. Pongamos dos ejemplos donde llevamos a cabo esta idea. El primero es justamente el ejemplo 1.2 que vimos con el método anterior.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}$$

Habíamos visto que todos los límites direccionales y todos los límites a través de parábolas existen y dan el mismo valor: $L = 0$. Por tanto, de existir el límite sería necesariamente $L = 0$. Considerando $L = 0$ y $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, tenemos

$$f(x,y) - L = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = y\,\frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Observemos que en cualquier caso $x^2 \leq x^2+y^2$, por lo que $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ y así resulta $f(x,y)-L \leq y$. Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Véase que el método de las acotaciones no hubiese funcionado, por ejemplo, con la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Ya vimos, usando el primer método, que esta función no posee límite en el $(0,0)$, pero resulta ilustrativo (y un aviso al alumno para que no cometa ciertos errores) el comprobar directamente que aquí no se puede hacer lo mismo. En efecto, en este caso

$$f(x,y)-L = f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = y\,\frac{x}{x^2+y^2},$$

pero aquí no podemos llevar a cabo la acotación $\frac{x}{x^2+y^2} \leq 1$, pues no es válida. Obsérvese que cuando x está cerca del valor 0 (y, por tanto $x<1$) sucede que $x > x^2$. Póngase el caso de $x = 0,5$ e $y = 0$ para comprobarlo. Por tanto, en este caso no se ve que se pueda acotar la expresión $f(x,y)-L$ por una función simple que tenga límite 0. De todas formas, el que ésto no se pueda hacer, no es una prueba de que la función dada no tenga límite. La negación de la existencia de límite se llevaría a cabo con el primer método.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right)}$$

Véase que nuestra función $f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right)$ es el producto de una función $g(x,y) = x$ que tiene límite 0, por otra función $h(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right)$ que no sabemos si tiene límite en el punto $(0,0)$ (caso dudoso) pero que está *acotada* pues $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right) \leq 1$ cualquiera que sea (x,y), lo que equivale a decir que $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right) \leq 1$. Para funciones de una sola variable sabemos que el producto de una función con límite nulo por una función acotada es una función que tiene límite 0. Esto nos hace sospechar que lo mismo va a suceder aquí.

En efecto, considerando $L = 0$, tenemos

$$f(x,y)-L = f(x,y) = x\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right) \underset{x\geq 0}{\leq} x.$$

Aquí, $g(x,y) = x$. Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ y, por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. En consecuencia, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right) = 0$.

Observemos que si nos hubieran propuesto el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(3 + x \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^3+y^3}\right)\right)$, haciendo uso de la propiedad de los límites respecto de la operación suma, podríamos afirmar que el límite anterior también existe y su valor es 3.

A la vista de los ejemplos tratados en los métodos anteriores advertimos que cuando f es una función racional $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y queda una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ al considerar el límite en el origen, el que f tenga límite y además de valor $L = 0$ parece que depende de que el grado del polinomio del numerador $P(x,y)$ sea mayor que el del denominador $Q(x,y)$, pues en tal caso, $P(x,y)$ converge a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$ más rápidamente que $Q(x,y)$. Obsérvese que cuando $(x,y) \to (0,0)$ los valores de x e y tienden a ser muy pequeños y cuando un número a es menor que 1 se tiene que $a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots$ (compruébese con $a = 0,5$).

Según el cálculo de límites dobles no es fácil de .ªlgoritmizar". Los actuales sistemas de *Cálculo Simbólico* (*Derive, Maple*, *Mathematica*?,) tienen implementadas algunas funciones en esta dirección, pero aún no están suficientemente depuradas. Por ejemplo, *Derive* (en su versión 3.12) tiene en el fichero de utilidad MISC.MTH la función $LIM2(u,x,y,x_0,y_0))$, que calcula el límite de la expresión u cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Pero solo estudia la existencia de este límite a través de rectas, por lo que falla, por ejemplo, al calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$.

1.3. Concepto de continuidad y propiedades

Continuidad de funciones de dos variables El concepto de continuidad para funciones de dos variables es análogo al caso de una variable.

Sea D un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0,y_0) un punto del dominio D. Se dice que f es continua en el punto (x_0,y_0) cuando se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

es decir, cuando existe el límite de f en el punto (x_0,y_0) y, además, el límite coincide con el valor de la función en tal punto.

Así pues, para que una función f se a continua en un punto (x_0,y_0) debe suceder:

Que (x_0,y_0) esté en el dominio de f.

Que exista el límite: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Que $f(x_0,y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Lo que nos dice la definición es que f es continua en (x_0,y_0) cuando los valores $f(x,y)$ de la función se acercan al valor $f(x_0,y_0)$ cuando los puntos (x,y) se acercan al punto (x_0,y_0).

Cuando la función f es continua en cada punto del dominio D se dice que f *es continua en* D.

Geométricamente, el que f sea continua en todo su dominio significa que la superficie $z = f(x,y)$ (gráfica de f) no presenta saltos ni agujeros.

Usando algunos de los ejemplos vistos en la sección anterior, en los que aparecía un límite indeterminado en el origen, damos algunos ejemplos donde se plantea la continuidad en el origen.

La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continua en el punto $(0,0)$ porque no existe el límite en ese punto.

La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continua en el punto $(0,0)$ porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 1.$$

Sin embargo, esta discontinuidad en $(0,0)$ es .evitable"porque si tomamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

esta sería continua en $(0,0)$.

(redEste ejemplo no se ve) La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en el punto $(0,0)$ porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$.

Al igual que sucedía con los límites, en muchos casos se puede ver fácilmente que una función es continua en un punto o en todo su dominio. La idea fundamental es, como hemos visto en una sección anterior, que muchas funciones se pueden expresar en términos de las funciones elementales

$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y, \quad h(x,y) = C,$$

y de las funciones de una sola variable, usando las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones. Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C = C$ por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0 = f(x_0,y_0), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = y_0 = g(x_0,y_0)$$

y también $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = C = h(x_0,y_0)$. Es decir, que tales funciones son continuas en todo el dominio $\mathbb{R}^2$.

A la vista de lo anterior, resulta de gran importancia el siguiente resultado, que se obtiene inmediatamente de los resultados vistos sobre límtes.

Sean f y g dos funciones de las variables x, y que son continuas en el punto (x_0, y_0) y a un número real. Se verifica:

Las funciones $f+g$, $f-g$, fg y af son continuas en (x_0,y_0).

Si $g(x_0,y_0) \neq 0$ la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en (x_0,y_0).

Si h es una función de una variable continua en el punto $t = f(x_0, y_0)$, la composición hf, definida por $(hf)(x, y) = h(f(x, y))$, es continua en (x_0, y_0).

Como consecuencia de todo lo anterior se puede asegurar:

0,73

Todas las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Todas las funciones racionales son continuas en sus dominios.

Aparte de lo anterior, usando la composición con funciones continuas de una sola variable, podemos afirmar que muchas funciones son continuas; por ejemplo, las funciones definidas por

$$f(x,y) =^{(x-y^2)}, \quad g(x,y) = \pi + \mathrm{sen}(x-y+1), \quad h(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2+1} -^{(x-y^2)} + \pi + \mathrm{sen}(x-y+1)$$

serían continuas en $\mathbb{R}^2$.

La función del ejemplo 1, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en cada punto (x_0, y_0) del plano distinto del $(0,0)$; es decir, es continua en el dominio
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) \neq (0,0)\}$ ya que sobre este dominio la función es racional (en estos puntos la continuidad se sigue de las propiedades 1 y 2).

1.4. Derivadas parciales y derivadas direccionales. Derivadas parciales de orden superior

Derivadas parciales y derivadas direccionales

En primer lugar, se recuerda el concepto de derivada para funciones de una sola variable y la importancia, por sus muchas aplicaciones, de este concepto. Si I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ es una función, dado un punto x_0, que sea un punto interior del intervalo I, se define la *derivada* de f en x_0 y se nota por $f'(x_0)$ o bien por $\frac{df}{dx}(x_0)$ al límite siguiente (cuando existe):

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cuando tal límite existe se dice que f es *derivable* en el punto x_0. En el caso en que el punto x_0 no sea interior al intervalo, es decir, sea el extremo inferior o el extremo superior del intervalo I, como sucede con $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ cuando $I = [a, b]$, sólo podríamos hablar de derivada por la derecha o por la izquierda respectivamente.

El buscar un buen sustituto a la derivada en el caso de funciones de dos o mas variables no es una cuestión simple y es algo que iremos analizando a lo largo de varias secciones.

Pero, en principio, en muchas aplicaciones resulta de interés cómo se ve afectada la función cuando sólo se cambia una de las variables, dejando fijas las otras variables. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico puede realizar varias veces el experimento con distintas cantidades de ese catalizador mientras mantiene constantes todas las demás variables, tales como temperatura y presión. Cuando ésto se expresa en términos de funciones, el proceso de ver cómo se comporta una función cuando sólo se varía una de sus variables independientes se denomina *derivación parcial* y a sus resultados se les llama *derivadas parciales* de la función respecto de las variables elegidas.

Aunque mas adelante definiremos otras derivadas más generales y un concepto, el de diferenciabilidad, que será el sustituto adecuado de la derivación en una variable, las derivadas parciales, de muy fácil manejo, constituyen unas derivadas de gran importancia pues ya veremos que, en muchos casos, las demás derivadas se van a conocer a partir del conocimiento de las derivadas parciales.

Sea D un dominio del plano y $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Sea (x_0, y_0) un punto de D, al que habrá que exigirle una condición que más adelante concretaremos.

Se define la derivada parcial de f respecto de la variable x en el punto (x_0, y_0), y se suele notar por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o por $f_x(x_0, y_0)$ al siguiente límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y la derivada parcial de f respecto de la variable y en el punto (x_0, y_0), y se suele notar por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ o por $f_y(x_0, y_0)$, al siguiente límite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que estos límites existan.

Podemos observar que estas definiciones son análogas a la definición de derivada usual para funciones de una sola variable, donde sólo se incrementa una de las dos variables. Para ser más exactos deberíamos decir que estas son la derivadas parciales de *primer orden* pues más adelante veremos que se pueden definir derivadas parciales de orden superior.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x, y) = x^2 y$ y el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h,\, 2) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\,(1 + h)^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} 2(h + 2) = 4. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1,\, 2 + h) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2 + h) - 2}{h} = 1. \end{aligned}$$

Como suele ser usual la definición no es práctica, pero ésto no es problema porque podemos apreciar que *una derivación parcial es equivalente a una derivación ordinaria de una función de una sola variable*, con lo que podemos aplicar todas las reglas de derivación conocidas para este tipo de funciones.

En efecto, si consideramos la función de una sola variable $g(x) = f(x, y_0)$, que se obtiene al fijar $y = y_0$ en la expresión $f(x, y)$, se tiene

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0), \text{ donde } g(x) = f(x, y_0).}$

Análogamente, si consideramos la función de una sola variable $\varphi(y) = f(x_0, y)$, que se obtiene al fijar $x = x_0$ en la expresión $f(x, y)$, se tiene

$$\varphi'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(y_0 + h) - \varphi(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \varphi'(y_0), \text{ donde } \varphi(x) = f(x_0, y).}$

Poniendo en práctica lo anterior en el ejemplo visto, podríamos obtener las derivadas parciales así:

Como $f(x, y) = x^2 y$ y el punto es $(x_0, y_0) = (1, 2)$, entonces $g(x) = f(x, 2) = 2x^2$. Sabemos que $g'(x) = 4x$ y, por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = g'(1) = 4$. Análogamente, $\varphi(y) = f(1, y) = y$ y, así, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \varphi'(2) = 1$.

En la práctica, en la mayoría de los casos, suele ser más cómodo (no siempre) calcular, siguiendo la idea anterior, las derivadas parciales en un punto genérico (x, y) y despues sustituir (x, y) por (x_0, y_0), con la ventaja adicional de que así se tienen calculadas las derivadas parciales en todos los puntos del dominio (o parte de él).

Si nos piden $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ siendo $f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y + 1$, posiblemente lo más cómodo sea calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x^2y + 2x^3$$

y después sustituir (x, y) por $(0, 1)$ para obtener $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0$. En el cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ lo que hemos hecho es fijar una de las variables (la que no se deriva), como si fuese constante, y derivar respecto de la otra variable la función de una sola variable resultante.

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/3, 0)$, donde $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(3x + y^3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \operatorname{sen}(3x + y^3) + x^2 \cos(3x + y^3)\, 3 = 2x \operatorname{sen}(3x + y^3) + 3x^2 \cos(3x + y^3),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos(3x + y^3)\, 3y^2 = 3x^2y^2 \cos(3x + y^3).$$

En particular $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3,0)=-\frac{\pi^2}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/3,0)=0$.

No siempre es conveniente el cálculo de las derivadas parciales en un punto genérico para después sustituir por el punto. Veamos tres casos con problemáticas distintas.

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de una función definida a trozos como $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. En este caso, lo mejor es calcular esas derivadas parciales usando las definiciones ya que la función actúa de una forma distinta en el punto $(0,0)$ a como lo hace en el resto de los puntos y el valor de f en $(0,0)$ interviene en la definición de cada derivada parcial. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0},\frac{0}{h}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=\infty.$$

En consecuencia $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ no existe.

Cuando se estudia una derivada parcial en un punto (x_0,y_0) es suficiente con ver cómo se comporta la función en un pequeño disco centrado en ese punto (çerca de ese punto"). En la definición de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ sólo intervienen puntos de la forma (x_0+h,y_0) con h muy pequeño; estos son los puntos de un pequeño trozo de recta paralela al eje de abcisas que pasa por el punto (x_0+h,y_0), de forma que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ mide en cierto sentido el comportamiento de f en este trozo de recta; análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ mide el comportamiento de f en un pequeño trozo de recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto (x_0,y_0) .

Así por ejemplo, si queremos estudiar las derivadas parciales de f en un punto genérico $(x,y)\neq(0,0)$ podemos olvidarnos del valor de f en $(0,0)$ pues este valor no influye en las definiciones de las derivadas parciales en puntos distintos del $(0,0)$. Por tanto, para ésto podemos considerar que f es de la forma $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ y, por tanto, para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ seguimos el método usual de fijar una de las variables y derivar la función que resulta en la otra variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{0-y\,(2\,x)}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)-y\,(2\,y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Aquí podríamos cometer la ligereza de seguir el método expuesto de fijar una variable para calcular en un punto genérico las derivadas parciales, por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

y, a la hora de evaluar en el punto $(x,y)=(0,0)$ nos daríamos cuenta que aparece $\frac{0}{0}$, lo que no tiene sentido. Esto indica que puede haber problemas con las derivadas en el $(0,0)$ tal como sucede, en el caso de una sola variable, con las funciones $f(x)=x$, $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto $x=0$. De hecho, obsérvese la analogía existente entre la gráfica de $f(x)=x$ y de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (las dos hacen un pico en el origen de coordenadas). Esto nos dice que, para salir de dudas, debemos usar las definiciones. Dada la simetría de la función en sus dos variables, es suficiente con estudiar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}\overset{\text{ojo !}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

y sabemos que tal límite no existe (el límite por la derecha es 1 y por la izquierda es -1).

En resumen, podemos concluir que sólo nos vemos obligados a utilizar las definiciones en ciertos casos y puntos conflictivos, como cuando la función viene definida a trozos o aparecen raíces cuadradas o valores absolutos, pero, en general, se suelen usar las reglas de derivación para funciones de una sola variable.

<u>Derivadas parciales de funciones de tres variables.</u>

Lo visto sobre derivadas parciales para funciones de dos variables se generaliza a *tres o mas variables.* Las definiciones y la forma de llevar el cálculo a la práctica serían análogas. Por ejemplo, si f es función de tres variables : x,y,z

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\,y_0,\,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}.$$

Las definiciones de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0$ son análogas (escribirlas). En la práctica, si nos dan una función de tres variables como $f(x,y,z)=xy+z^2-xz+1$ las derivadas parciales en cualquier punto (x,y,z) se calcularían así:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=y-z,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z-x.$$

<u>Derivadas direccionales</u>:

Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ dan información sobre cómo varía la función f cerca del punto (x_0,y_0) en las direcciones de los ejes de coordenadas; dicho de otra forma, en las direcciones dadas por los vectores unitarios $\vec{v}=(1,0)=\vec{i}$ y $\vec{v}=(0,1)=\vec{j}$ respectivamente. Pero resulta de gran interés estudiar la variación de f cerca del punto (x_0,y_0) en cualquier otra dirección dada por un vector unitario $\vec{v}=(v_1,v_2)=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$ (que $\vec{v}$ sea unitario significa que su módulo $\vec{v}=\vec{v}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1$) (hacer un dibujo).

Observemos que la recta que pasa por el punto (x_0,y_0) y tiene la dirección del vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es la dada en forma vectorial por $(x,y)=(x_0,y_0)+h\,(v_1,v_2)$, siendo h un parámetro real; es decir, los puntos de esa recta son de la forma $(x_0+h\,v_1,y_0+h\,v_2)$. Por otra parte, al ser $\vec{v}$ un vector unitario, la distancia entre el punto $(x,y)=(x_0+h\,v_1,y_0+$

$h\,v_2)$ y el punto (x_0, y_0) es exactamente h. Esto nos lleva a estudiar el límite cuando $h \to 0$ de los cocientes incrementales

$$\frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

que es justamente el concepto de derivada direccional.

Sean $f\colon D \to \mathbb{R}$, un punto (x_0, y_0) interior al dominio $D \subset \mathbb{R}2$ y un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Se define la derivada direccional de la función f en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector $\vec{v}$, y se suele representar por $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ o por $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$, como

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que este límite exista.

La derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ da información sobre la variación de la función f cerca del punto (x_0, y_0) en la dirección y sentido de $\vec{v}$. Realmente los cocientes que aparecen en la definición de la derivada direccional se pueden interpretar como una *tasa*; una tasa es una relación entre dos magnitudes (tasa de natalidad, de mortalidad, de transferencia, ...) y en este caso tales cocientes suponen una relación entre la variación de la función y la distancia entre los puntos donde se evalúa la función. El límite siempre se interpreta como algo instantáneo. Así pues, podemos considerar $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ como la *tasa (instantánea) de crecimiento o decrecimiento de la función.*

Comparando las definiciones dadas podemos apreciar que las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales; concretamente: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(1,0)}} f(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0}$

Ejemplo: Veamos que existe y calculemos la derivada de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ en la dirección dada por el vector unitario $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Según la definición,

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(1,1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + \frac{1}{2}h, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}h)^2 - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h)^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (-\frac{1}{2}h + (1 - \sqrt{3})) = 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

En el caso anterior hemos podido llevar a cabo la definición gracias a la simplicidad de la expresión de f, pero, como suele suceder, la definición es, en general, poco útil en la práctica. Más adelante, en la próxima sección, veremos un método muy práctico para calcular cualquier derivada direccional en términos de las derivadas parciales. Este método sólo se podrá llevar a cabo cuando la función f verifica una importantísima condición en el punto (x_0, y_0) llamada *diferenciabilidad.*

Si el vector $\vec{v}$ no es unitario se puede hablar de derivada en la dirección de $\vec{v}$ refiriéndose a $D_{\frac{\vec{v}}{\vec{v}}} f(x_0, y_0)$.

Una forma muy cómoda e ilustrativa de dar un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es mediante un ángulo $\in [0, 2\pi)$. Obsérvese que $\boxed{\vec{v} = (\cos, \mathrm{sen})}$, donde es el ángulo comprendido entre el eje positivo de abcisas y el vector $\vec{v}$ (en ese sentido) ya que, al ser $\vec{v}$ unitario, la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma mide 1. Cuando el vector se expresa como $\vec{v} = (\cos, \mathrm{sen})$ se dice que $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ es la derivada de f en el punto (x_0, y_0) *en la dirección dada por el ángulo* . Así la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspondería al ángulo $= 0$ y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ correspondería al ángulo $= \pi/2$.

Sabemos que para una función de una sola variable f sucede que si la derivada $f'(x_0) > 0$ la función es creciente en un entorno del punto x_0 (cerca de x_0) mientras que si $f'(x_0) < 0$, f decrece cerca de x_0. Pues bien, con las derivadas direccionales, y en particular con las derivadas parciales, sucede algo parecido. Concretamente:

Si $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) > 0$ la función f *crece alrededor (cerca) del punto* (x_0, y_0) *en la dirección y sentido del vector* $\vec{v}$.

Si $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) < 0$ la función f *decrece alrededor del punto* (x_0, y_0) *en la dirección y sentido del vector* $\vec{v}$.

El término .alrededor”se refiere a lo que sucede en un cierto disco centrado en ese punto.

Observemos que $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) > 0$ implica que para valores de h pequeños se tiene $\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{h} > 0$, siendo $(x, y) = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2)$ los puntos de la recta que pasa por (x_0, y_0) en la dirección de $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Entonces, si $h > 0$ es $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, mientras que si $h < 0$ es $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (hacer un dibujo). Análogamente se razonaría en el caso $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) < 0$.

Así, si $z = f(x, y)$ representa la superficie de una montaña y un montañero está situado en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, el que la derivada $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ sea negativa indicaría que en la dirección (y sentido) de brújula dada por el vector $\vec{v}$ el montañero descendería (se trata de algo local, por lo que después podría ascender).

<u>Interpretación geométrica de las derivadas parciales y direcccionales.</u>

Sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ se pueden considerar como derivadas de funciones de una sola variable. Para una función de una sola variable g la derivada en un punto $g'(x_0)$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = g(x)$ en el punto $(x_0, g(x_0))$.

Hemos visto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$ donde $g(x) = f(x, y_0)$. Si la gráfica de f, que es la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ la cortamos con el plano vertical (paralelo al plano xz) de ecuación $y = y_0$, obtenemos una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ contenida en la superficie y que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Esta curva proyectada en el plano xz nos da la gráfica de la función de una sola variable g.

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la tangente a la curva en el espacio, de ecuación $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0, \end{cases}$ en el punto P. Se suele decir simplemente que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la *pendiente de la superficie* $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *en la* *dirección del eje x.*

De forma análoga, teniendo en cuenta que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0)$ donde $h(y) = f(x_0, y)$, cortamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical (paralelo al plano yz) de ecuación $x = x_0$, obtenemos una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ que proyectada en el plano yz nos da la gráfica de la función h de una sola variable y así $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la tangente a esa curva en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Diremos entonces que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es la *pendiente de la superficie* $z = f(x, y)$ en el punto P *en la dirección del eje y.*

Por último, se puede *interpretar geométricamente* una derivada direccional de la misma forma que con las derivadas parciales. Concretamente, $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y es paralelo al vector $\vec{v}$ (es decir, el que contiene a la recta de ecuación $(x, y) = (x_0, y_0) + h(v_1, v_2)$). Diremos simplemente que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ es *la pendiente de la superficie en el punto P en la dirección de $\vec{v}$.* Esto es coherente con lo expuesto anteriormente. Si por ejemplo $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) < 0$ la pendiente es negativa.

Derivadas parciales de orden superior: Derivadas parciales de orden superior

Con las funciones de una sola variable f se suelen utilizar derivadas de orden superior como son las derivadas de segundo orden f'', tercer orden f''', y, en general, orden n, $f^{n)}$. Concretamente, $f^{n)} = (f^{n-1)})'$. Lo mismo sucede con las funciones de dos o mas variables.

Cuando las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existen en cada punto (x, y) de un dominio D, entonces podemos definir las *funciones derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x} \colon D \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \colon D \to \mathbb{R}$. Así, por ejemplo, si $f \colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x, y) = x^2 y$, existen las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} \colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

En este caso, podríamos plantearnos si estas funciones también poseen derivadas parciales en un punto $(x_0, y_0) \in D$ o, mejor aún, en cada punto $(x, y) \in D$. Para cada una de ellas tendríamos dos derivadas parciales con lo que finalmente aparecerían cuatro. Las derivadas parciales de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ reciben el nombre de *derivadas parciales de segundo orden.* Cada una de éstas nos la podemos encontrar con dos notaciones, según la notación que usemos para las primeras derivadas. En cada caso de los que describimos abajo aparecen cuatro igualdades; las dos del centro indican las operaciones que se realizan, con notaciones distintas, y las dos de los extremos indican las notaciones abreviadas que se usan (aunque la notación no es totalmente estándar). Las ordenamos así:

Derivar dos veces respecto de x: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big) = (f_x)_x = f_{xx}}$

Derivar dos veces respecto de y: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) = (f_y)_y = f_{yy}}$

Derivar primero respecto de x y luego respecto de y: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big) = (f_x)_y = f_{xy}}$

Derivar primero respecto de y y luego respecto de x: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) = (f_y)_x = f_{yx}}$

Las dos últimas derivadas de segundo orden se llaman *derivadas parciales cruzadas* (o *mixtas*.) En algunos sitios se les nota al revés de lo que hemos expuesto aquí pero eso no será problema en la mayoría de los casos pues veremos que suelen coincidir las dos derivadas cruzadas.

Se podrían ahora derivar las cuatro derivadas de segundo orden para obtener así ocho derivadas de tercer orden y así sucesivamente. De todas formas las derivadas de segundo orden son las que más se usan en las aplicaciones entre las derivadas de orden superior.

Se exponen a continuación tres ejemplos para ilustrar el cálculo de estas derivadas y para comprobar un hecho, muy general, que posteriormente se comenta.

$f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$

$f(x, y) = x^2y^2 - 3xy + 2x^2 + 1$

$f(x, y) = x^2ye^y$ Después de estos dos ejemplos se aprecia que las derivadas cruzadas han coincidido en todos los ejemplos. Esto no los asegura el siguiente teorema, del que se conocen distintas versiones.

[Teorema de Schwartz] Si f es una función de dos variables x, y tal que las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existen en el dominio D (basta con que existan en un disco abierto centrado en el punto (x_0, y_0)) y son continuas en (x_0, y_0) entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

En los ejemplos anteriores las derivadas cruzadas son continuas en todo el plano $\mathbb{R}2$; de ahí que hayan coincido en todo punto del plano.

Hay muy pocos casos donde no sea aplicable el resultado anterior. Uno típico es el siguiente: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$. En este caso $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. (No se comprueba; sólo se da como información).

Acabamos esta sección comentando muchas ecuaciones de la Física vienen dadas en términos de derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo, *la ecuación del calor*:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = C^2 \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.}$$

Aquí $T(x, t)$ representa la temperatura en el punto x de una barra aislada en el tiempo t. La constante C es una constante que depende del material del que está hecho la barra. Puede comprobarse que la función $T(x, t) =^{-t} \cos(\frac{x}{C})$ satisface la ecuación.

Otra ecuación muy importante es *la ecuación de Laplace*:

$$\boxed{\triangle f = 0, \quad \text{donde} \quad \triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

es el llamado *laplaciano* de la función f. Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace, es decir, aquellas cuyo laplaciano se anula, son llamadas *funciones armónicas.* En las relaciones de ejercicios aparecerán algunas de éstas ecuaciones y se darán ejemplos de funciones que satisfacen tales ecuaciones, para que así el alumno practique y se familiarice con las derivadas de segundo orden.

1.5. Diferenciabilidad y planos tangentes

Diferenciabilidad y planos tangentes

Sabemos de la importancia que tienen las derivadas para funciones de una variable; sirven para comprobar si en un intervalo una función es creciente o decreciente, convexa o cóncava, son importantísimas en el estudio y cálculo de máximos y mínimos, sirven para dar aproximaciones de la función, ... Uno de los objetivos principales del Cálculo es obtener información de una función a partir de su función derivada.

Para funciones de dos o más variables se necesita un concepto que realice el mismo trabajo que la derivada usual para funciones de una variable. Podríamos pensar que los sustitutos van a ser *las derivadas parciales* o, más generalmente, *las derivadas direccionales.* Pero, desgraciadamente, no es así. Para hacernos una idea, podríamos recordar una importante propiedad que tienen las derivadas: Sabemos que *si f es derivable en un punto x_0 entonces es continua en ese punto.* Pues bien, esta propiedad no se verifica con las funciones de varias variables.

A continuación exponemos un ejemplo dee una función que posee derivadas parciales, es más, derivadas derivadas según todas las direcciones, en el punto $(0,0)$ y, sin embargo, no es continua en ese punto.

Ejemplo: Consideramos la función $\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}}$

Existen todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$. Concretamente, si $\vec{v} = (a,b)$, se tiene, por definición, que $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 b}{h^2 a^4 + b^2}$,por lo que si $b \neq 0$ se tiene $D_{\vec{v}} f(0,0) = \frac{a^2}{b}$ y si $b = 0$, es decir, $\vec{v} = (1,0)$, se tiene $D_{\vec{v}} f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$ pues el límite en $(0,0)$ a través de la parábola $y = x^2$ es $\frac{1}{2}$, con lo que de existir el límite sería $\frac{1}{2}$, pero el valor de f en ese punto es 0 (se puede ver que no existe el límite en $(0,0)$ tomando parábolas del tipo $y = mx^2$ y viendo que depende de m o bien tomando la recta $y = 0$, a través de la cuál el límite es 0).

Por tanto, *la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no garantiza la continuidad en ese punto.*

La existencia de $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$ implica que la restricción de f a la recta que pasa por (x_0,y_0) en la dirección de $\vec{v}$ es continua en (x_0,y_0).

El ejemplo anterior nos indica que se necesita un concepto más fuerte, que venga a sustituir en el caso de funciones de varias variables al concepto de derivada usual, y que implique la continuidad y la existencia de todas las derivadas direccionales. Este es el concepto de *diferenciabilidad*.

El concepto de diferenciabilidad en un punto (x_0,y_0) para una función de dos variables f está estrechamente relacionado con la existencia de un *plano tangente* a la gráfica de f en el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, de la misma forma que sucede con una función de una sola variable f, para la que la existencia de la derivada $f'(x_0)$ viene a ser equivalente a la existencia de una recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0,f(x_0))$, siendo además $f'(x_0)$ el valor de la pendiente de dicha recta tangente. Tal recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de la función cerca del (en un entorno del) punto $(x_0,f(x_0))$.

Para llegar a la definición de diferenciabilidad se necesita volver a revisar la derivabilidad de una función de una sola varuiable. Si I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon I\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)$ es una función de una variable y x_0 es un punto interior del intervalo I, se dice que f es *derivable* en el punto x_0 cuando existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

límite que se denota por $f'(x_0)$ y que se llama *derivada* de f en x_0.

Una definición como la anterior no tendría sentido generalizarla al caso de funciones de dos o mas variables ya que no tendría sentido dividir por elementos de $\mathbb{R}2(\mathbb{R}n)$. Lo que vamos a hacer es reescribir la definición anterior de una forma equivalente en la que va a aparecer la recta tangente en el punto $(x_0,f(x_0))$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\iff \lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\Big)=0\\ &\iff \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)}{x-x_0}=0}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P=(x_0,f(x_0))$ es:

$$\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}. \tag{1.5.3}$$

Por tanto, lo que aparece en el numerador de la última expresión de (1.5.2) es la diferencia entre el valor de la función $f(x)$ y el valor de la ordenada del punto de la recta tangente cuya abcisa es x. La condición anterior no es generalizable aún, tal como está escrita, al caso de dos variables, pero observemos que para una función cualquiera g se tiene $\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \iff \lim_{x\to x_0} g(x)=0$(lo mismo sucede con funciones de dos variables) por lo que la condición (1.5.2) se puede escribir de manera equivalente así

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{\left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)}^{\text{recta tangente}}}{\underbrace{x - x_0}_{\text{distancia entre } x \text{ y } x_0}} = 0.} \tag{1.5.4}$$

Observemos que el numerador de (1.5.4) sería la distancia entre un punto de la gráfica de f y el correspondinte punto de la recta tangente. Hay casos en que la gráfica de f está por .$^{\text{en}}$cima"de la recta tangente y otros en que está por debajo.

Sea $h = x - x_0$, es decir, $x = x_0 + h$, y sea $R(h) = f(x_0 + h) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,h\big)$. El valor $R(h)$ se puede considerar como un residuo, pues es la diferencia entre el valor $f(x)$ y el dado por la recta tangente. Lo que tenemos es

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0,$$

lo cuál implica que el residuo $R(h)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0 (pues $R(h) = \frac{R(h)}{h}\,h$); pero dice más, $R(h)$ tiende a 0 más rápidamente que h. Intuitivamente podemos pensar que la única forma de que se de esta situación es cuando la recta tangente se "*embarra*çon la curva en los alrededores de $P = (x_0, f(x_0))$. Así, la curva es "*suave*.$^{\text{en}}$ P, de forma que alrededor de P la curva se puede aproximar por la recta tangente y de esta manera obtenemos una *aproximación lineal* de la función alrededor del punto x_0. (La condición $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$ y no $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$ es la que da realmente da el carácter de tangencia a la recta). Tal recta tangente es *la recta que mejor aproxima a la curva* $y = f(x)$ (gráfica de f) *en un entorno del punto* (x_0, y_0).

Tenemos ahora una función de dos variables $f(x, y)$. Su gráfica no es una curva sino una superficie en el espacio IR3, de ecuación $z = f(x, y)$. Si (x_0, y_0) es un punto del dominio de la función, el correspondiente punto de la gráfica es $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Cómo podemos imaginarnos un plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P? Por el punto P pasan infinitas curvas contenidas en la superficie. Suponiendo que cada una de estas curvas posee una recta tangente en P, parece lógico que el plano tangente en P sea un plano que pase por P y que contenga a todas estas rectas tangentes. No podemos asegurar que exista pero, de existir, se puede comprobar (véanse los apuntes del Curso 2002-03) que tal plano tangente sería el dado por la ecuación:

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}. \tag{1.5.5}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.5.3) de la recta tangente, parece lógico que ésta sea la ecuación del plano tangente.

La condición (1.5.4) tiene entonces una clarísima adaptación al caso de dos variables cambiando la recta tangente por el plano tangente y la distancia entre x y x_0 por la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0). Es decir, la forma de generalizar (1.5.4) a funciones de dos variables sería

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - \overbrace{\left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}^{\text{plano tangente}} \right|}{\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{distancia entre } (x,y) \text{ y } (x_0,y_0)}} = 0.} \tag{1.5.6}$$

la condición anterior nos da justamente la condición de diferenciabilidad.

[Diferenciabilidad en un punto] Sean $D \subset \mathbb{R}2$, (x_0, y_0) un punto de (interior a) D y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de las variables x, y, tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Se dice que f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) cuando se verifica la condición (1.5.6).

Obsérvese que para que una función de dos variables f sea diferenciable en (x_0, y_0), lo primero que debe suceder es que existan las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Después, debe verificarse la condición (1.5.6). Por tanto, si desde un principio sabemos que no existe alguna de las derivadas parciales, podemos afirmar que f no es diferenciable.

En un principio habíamos comentado que el plano tangente en el punto de la gráfica $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no tenía porqué existir, entendiendo por éste el plano que contiene todas las rectas tangentes (existen estas tangentes?) a las curvas de la superficie en ese punto P. Lo anterior es simplemente una idea intuitiva pero no es una definición formal. Por otra parte, se puede probar que cuando f es diferenciable en (x_0, y_0) el plano dado por (1.5.5) responde a la idea geométrica anterior. Acontece que el concepto de tangencia que funciona en las matemáticas es el mismo que el concepto de diferenciabilidad. Todo ésto se presta a que demos la siguiente definición:

[Planos tangentes] Cuando f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), y sólamente en este caso, diremos que el plano de ecuación $\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$ es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Tal plano tangente es *el plano que mejor aproxima a la superficie* $z = f(x, y)$ (gráfica de f) *cerca del (en un entorno del) punto* P.

Vamos a examinar ahora cuidadosamente la definición de diferenciabilidad con idea de poder manejarla mejor a la hora de aplicarla a un caso concreto a bien en una prueba. La definición de diferenciabilidad nos dice que cerca del punto (x_0, y_0) podemos aproximar la función por el plano tangente (la función cuya gráfica es el plano tangente) de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \underbrace{\Big(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \Big)}_{\text{plano tangente}} + \underbrace{R(x,y)}_{\textit{residuo}}, \tag{1.5.7}$$

donde el residuo (o resto) $R(x,y)$ verifica la condición dada en la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

condición que es equivalente a la siguiente:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0} \tag{1.5.8}$$

(pues en el denominador da igual poner valor absoluto). Esta condición de diferenciabilidad implica

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y) = 0} \tag{1.5.9}$$

pero es una condición más fuerte que la anterior, pues nos dice que el residuo tiende a 0 más rápidamente que la distancia $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Para la diferenciabilidad no basta con que el residuo tienda a 0. Es la condición (1.5.8) la que da el carácter de tangencia al plano.

Pongamos en práctica lo anterior, con un simple ejemplo. Supongamos que queremos estudiar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función polinómica $\boxed{f(x,y) = xy^2.}$

Lo primero que hay que hacer es comprobar la existencia (y de paso el cálculo) de las derivadas parciales en ese punto. Obtenemos de manera casi inmediata que existen y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Por tanto, el resto es en este caso:

$$R(x,y) = f(x,y) - \big(f(0,0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\big) = xy^2$$

Por tanto, f será diferenciable en $(0,0)$ si sucede que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Para comprobar que ésto se verifica y dado que se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ comprobamos ésto haciendo uso del *método de las acotaciones* (inicialmente podríamos comprobar que los límites direccionales existen y son nulos). Se tiene: $\Big|$ xy$^2 \frac{}{\sqrt{x^2+y^2}-0\Big| = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\; y^2 \le y^2}$y, como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Obsérvese que en el estudio de la diferenciabilidad de una simple función polinómica nos ha surgido un límite indeterminado.

Podemos aprovechar el ejemplo anterior para ilustar la determinación de un plano tangente. Al ser f diferenciable en el punto $(0,0)$ existe el *plano tangente a la superficie* $z = xy^2$ en el punto $(0,0,0)$. Al ser $f(0,0)$ y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nulas, la ecuación de ese plano tangente sería $z = 0$; es decir, en este caso el plano tangente es horizontal.

En la próxima sección veremos que, en muchas ocasiones, especialmente cuando se quiere llevar a la práctica la definición de diferenciabilidad en un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, resulta mas manejable escribir las condiciones anteriores en términos de incrementos, al estilo de la definiciones que conocemos de derivadas de funciones de una sola variable y de derivadas parciales.

Como se ha podido comprobar, y ésto es habitual, el uso de la definición es muy molesto por lo que sería deseable tener una forma más comoda y rápida de reconocer cuándo una función es diferenciable en un punto. Por suerte, existe un importante resultado que nos permite obtener la diferenciabilidad en muchos casos, aunque no en todos (se trata de una condición suficiente pero no necesaria) de una forma muy simple. Este resultado es el siguiente:

Si las funciones derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas en el dominio de f, o bien en un disco abierto centrado en el punto (x_0, y_0), y, además, son continuas en ese punto, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

La definición de diferenciabilidad en el punto (x_0, y_0) lleva implícita la existencia de las derivadas parciales en ese punto. En el resultado anterior se exige que las derivadas parciales existan también en todos los puntos de un disco centrado en (x_0, y_0) y, además, las correspondientes funciones derivadas parciales sean continuas en el punto (x_0, y_0).

Se puede apreciar que el resultado anterior es muy manejable. Veamos el ejemplo de una función polinómica como $\boxed{f(x, y) = 3 + x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4.}$ En este caso, las funciones derivadas parciales están definidas en todo el plano pues

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 3y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y + 9xy^2 - 8y^3.$$

Estas funciones derivadas parciales son también polinómicas y, por tanto, son continuas en todo el plano. En particular, en el punto (x_0, y_0). Por tanto, el resultado anterior nos dice que f es diferenciable en (x_0, y_0).

El razonamiento anterior se puede llevar a cabo con cualquier función polinómica y, de esta forma, se obtiene el siguiente resultado:

Todas las funciones polinómicas son diferenciables en cada punto del plano $\mathbb{R}2$.

El resultado del teorema 1.5 se aplica a muchísimos funciones que no son polinómicas. Por ejemplo, el mismo razonamiento seguido para las funciones polinómicas nos dice

Si una función tiene funciones derivadas parciales definidas y continuas en todo su dominio, entonces esta función es diferenciable en cada punto de su dominio.

Ejemplo: Comprobamos que la función, no polinómica, $\boxed{f(x, y = x \text{ sen}(x - y^2)}$ es diferenciable en cada punto del plano calculando sus derivadas parciales y viendo que son continuas en todo el plano.

Ejemplo: Obtenemos la ecuación del *plano tangente* al paraboloide $\boxed{z = x^2 + y^2}$ en el punto $P = (1, 2, 5)$. (hacer un dibujo)

Lo primero es comprobar que el punto P está en la superficie. El paraboloide es la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Aquí $(x_0, y_0) = (1, 2)$ y $f(x_0, y_0) = 5$. Lo segundo es comprobar que el plano tangente pedido existe. Al ser f polinómica, es diferenciable en el punto $(1, 2)$ y, por tanto, existe tal plano tangente.

Las derivadas parciales en el punto $(1, 2)$ son $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$. Llevando todos estos valores a la expresión (1.5.5), que da la ecuación del plano tangente, obtenemos que $z = 2x + 4y - 5$ es la ecuación del plano pedido.

Se puede poner un ejemplo algo más complicado sobre planos tangentes, como el siguiente:

Ejemplo: Obtener *el plano tangente* al cono de ecuación $\boxed{z = \sqrt{x^2 + y^2}}$ en el punto $P = (1, 2, \sqrt{5})$. (hacer un dibujo)

El cono dado es la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aunque el dominio de f es todo el plano, resulta que las funciones derivadas parciales: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sólo están definidas y son continuas en los puntos del plano distintos de $(0, 0)$, pero es claro que existen discos centrados en el punto $(1, 2)$ donde tales derivadas parciales existen (y son continuas en $(1, 2)$), por lo que f es diferenciable en $(1, 2)$. Por tanto, existe el plano tangente pedido y su ecuación es: $z = \frac{1}{\sqrt{5}}\, x + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y$.

Más adelante veremos otros ejemplos. Pero hay que advertir que no siempre se puede aplicar el resultado del teorema 1.5. Un caso típico donde, en general, no se puede aplicar (y en caso de poder aplicarse no resultaría cómodo) es aquél donde nos piden la diferenciabilidad en el origen de una función definida a trozos como $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ En este caso, lo mejor es usar la definición de diferenciabilidad u otro método que más adelante veremos.

Hasta ahora, sólo nos hemos preocupado de introducir la definición de diferenciabilidad y de dar un resultado práctico para obtenerla, pero aún no hemos visto las ventajas que tiene una función que sea diferenciable en un punto. Muchas de estas ventajas se irán viendo en las próximas secciones, donde la diferenciabilidad será una condición imprescindible, pero ahora podemos ver lo que anunciamos al comienzo de esta sección cuando buscábamos un concepto que garantizase la continuidad y la existencia de todas las derivadas direccionales.

Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), se verifica lo siguiente:

1) f es continua en (x_0, y_0)

2) Existen todas las derivadas direccionales de f en el punto (x_0, y_0) y, además, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la derivada en la dirección de $\vec{v}$ se puede calcular así:

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_2.$$

Así pues, la diferenciabilidad es un concepto más fuerte que la existencia de derivadas direccionales y garantiza la continuidad.

La prueba del teorema anterior no es complicada y es muy ilustrativa pues en ella se puede apreciar claramente dónde se aplica la diferenciabilidad para obtener los dos resultados descritos. Como siempre, podemos optar por no explicarla en un curso de este nivel pero, en mi opinión, se podría dar una idea que sirviera de reafirmamiento del concepto de diferenciabilidad. Al menos, no hay ningún problema en probar la primera parte del teorema.

La obtención de la continuidad es casi trivial pues al escribir la función en términos del plano tangente y del residuo

$$f(x, y) = \underbrace{\Big(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \Big)}_{\text{plano tangente}} + \underbrace{R(x, y)}_{\textit{residuo}},$$

observamos que el segundo y tercer sumando, donde aparecen las derivadas parciales, tienen límites igual a 0 cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ y, al ser f diferenciable en (x_0, y_0) el residuo también tiende a 0 ($\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x, y) = 0$) por lo que se concluye que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ y eso significa que f es continua en (x_0, y_0).

Los resultados del teorema anterior se pueden leer así: Si una función f no es continua en un punto (x_0, y_0), entonces no es diferenciable en ese punto. Si no existe alguna de las derivadas direccionales $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$, entonces f no es diferenciable en (x_0, y_0).

La fórmula

$$\boxed{D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_2} \tag{1.5.10}$$

obtenida para las derivadas direccionales cuando f es diferenciable en (x_0, y_0), es muy práctica, pues basta con conocer las derivadas parciales en ese punto para conocer todas las derivadas direccionales. Hay que insistir en que tal fórmula sólo es válida cuando f es diferenciable. En la sección dedicada a los *gradientes*, usaremos esta fórmula para obtener unos importantes resultados prácticos que se usan con mucha frecuencia. A continuación exponemos varios ejemplos de aplicación de esa fórmula.

Con la definición de derivada direccional calculamos la derivada de $\boxed{f(x, y) = x^2 - y^2}$ en el punto $(1, 1)$ según el vector $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ dando el valor: $1 - \sqrt{3}$. Comprobemos ahora este resultado usando el nuevo método.

En primer lugar hay que comprobar que f es diferenciable en $(1,1)$, pero ésto sucede por ser f polinómica. El valor de las derivadas parciales en ese punto son: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$ Por tanto,

$$D_{\vec{v}}f(1,1) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{1}{2} + (-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}.$$

Calculemos la derivada de la función $\boxed{f(x,y) = y\,\ln(x) + xy^2}$ en el punto $(1,2)$ según la dirección dada por el ángulo $= \frac{\pi}{3}$ (60^o).

Lo primero es comprobar que f es diferenciable en el punto $(1,2)$, para poder aplicar la fórmula (1.5.10). El dominio de la función es $D = \{(x, y \in \mathbb{R}2\colon x > 0\}$. Las funciones derivadas parciales : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) + 2xy$, están definidas y son continuas en todo punto de D, por lo que f es diferenciable en cada punto de su dominio.

Por tanto, la función es diferenciable en el punto $(1,2)$. La derivada que se pide es la derivada según el vector $\vec{v} = (\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Por tanto, la derivada pedida es

$$D_{\vec{v}}f(1,2) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3+2\sqrt{3}.$$

La ecuación que describe la altura z de los puntos de una montaña es $z = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$, donde x representa la dirección Este e y la dirección Norte. Un montañero está situado en el punto P de la montaña de coordenadas $(200, 100, 100)$. Vamos a analizar si el montañero asciende o desciende cuando camina en la dirección Noreste.

La dirección Noreste se corresponde con la dirección dada por el ángulo de 45^o ($\frac{\pi}{4}$ radianes). Esta dirección dirección viene dada por el vector unitario $\vec{v} = (\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Obsérvese que es la misma dirección que la dada por el vector no unitario $\vec{v} = (1,1)$.

La superficie de la montaña es la gráfica de la función $f(x,y) = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$. El punto P de la montaña se obtiene a partir del punto $(200, 100)$ del plano. Para saber si el montañero asciende o desciende cuando camina en la dirección Noreste, lo que tenemos que ver es si la derivada de esta función en el punto $(200, 100)$ en la dirección dada por $\vec{v}$ es positiva o negativa. Si es positiva, asciende y, si es negativa, desciende (si es nula no tendríamos información).

Como la función es polinómica, entonces es diferenciable en el punto $(200, 100)$ y, por tanto,

$$D_{\vec{v}}f(200,100) \;=\; f_x(200,100)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(200,100)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(-4+(-10)) = -\frac{14}{\sqrt{2}} \;<\; 0.$$

Por tanto, el montañero *desciende* (momentáneamente) cuando camina en la dirección Noreste.

La fórmula (1.5.10), que hemos venido aplicando en los ejemplos anteriores, no siempre es válida. Hay que insistir en que sólo se cumple cuando la función es diferenciable en el punto indicado. A continuacíon exponemos un ejemplo, donde existen todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$, pero no se verifica (1.5.10). Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función es continua en $(0,0)$ y al calcular la *derivada direccional* en el punto $(0,0)$ en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$ resulta $D_{\vec{v}} f(0,0) = v_1 3$. En este caso las derivadas parciales serían: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ (caso $\vec{v} = (1,0)$) y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (caso $\vec{v} = (0,1)$). Por tanto, en general $\partial f \frac{}{\partial x (0,0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, v_2 = v_1 \neq v_1 3 = D_{\vec{v}} f(0,0).}$

De manera indirecta, lo anterior tiene otra importante aplicación teórica. Concretamente, podemos afirmar que la función anterior no es diferenciable en el punto $(0,0)$. Observemos que, en general, cuando la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), la derivada direccional debe darnos una *expresión lineal de las componentes del vector* $\vec{v}$

$$D_{(v_1,v_2)} f(x_0, y_0) \;=\; C_1\, v_1 + C_2\, v_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

por ejemplo, una expresión como $2v_1 - 3v_2$. Por la tanto, si a la hora de calcular una derivada direccional usando la definición nos sale algo como $v_1^2 v_2$ o v_2^3, podemos afirmar con seguridad que la función no es diferenciable en el punto donde se ha calculado esta derivada, sin necesidad de usar la definición de diferenciabilidad. Esto resulta más cómodo pues en un caso así, sabiendo que tanto la continuidad como la existencia de derivadas son condiciones necesarias para la diferenciabilidad, lo usual es que intentemos ver si existen tales derivadas usando la definición. Si falla una de ellas podemos asegurar que f no es diferenciable, pero si existen todas y nos dan una expresión que no es lineal también podremos deducir que f no es diferenciable.

<u>Observación</u>: En el ejemplo anterior no se puede usar el resultado del teorema 1.5 para estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$..

Para acabar esta sección se comenta que lo visto para funciones de dos variables se generaliza a funciones de *tres o mas variables*. En estos casos la definición de diferenciabilidad no se puede exponer de una manera tan gráfica y una buena definición matemática (mediante aplicaciones lineales) se saldría del nivel de este curso, pero se puede comentar que los resultados de los dos teoremas fundamentales vistos aquí (teoremas 1.5 y 1.5) se generalizan de una manera natural a estos casos sin mas que añadir más funciones derivadas parciales.

1.6. Diferenciales y aproximaciones

Diferenciales y aproximaciones El concepto de diferenciabilidad, visto en la sección anterior, es útil para obtener ciertas aproximaciones. En muchas cuestiones prácticas físicos e ingenieros suelen dar aproximaciones del *incremento de una función* (diferencia entre los valores de una función en dos puntos distintos pero próximos):

$$\triangle f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x,y)$$

usando las derivadas parciales de f en el punto (x,y). En otras ocasiones se necesita aproximar el valor de $f(x+h, y+k)$ en términos del valor $f(x,y)$ y de las derivadas parciales de f en el punto (x,y). Todo ésto sólo se puede llevar a cabo cuando la función f es *diferenciable* en el punto (x,y), como veremos a continuación. En la expresión anterior se puede considerar a h como un incremento (positivo o negativo) de la variable x y a k como un incremento de la variable y; ambos incrementos deben ser "pequeños"(aunque lo de "pequeño.es un concepto indefinido y muy relativo).

Supongamos que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0). En este caso, según (1.5.7) se tiene:

$$f(x,y) = \underbrace{\left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}_{\text{plano tangente}} + \underbrace{R(x,y)}_{residuo},$$

donde el residuo $R(x,y)$ verifica la condición de diferenciabilidad (1.5.8) y, por tanto, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y) = 0$.Lo anterior se puede escribir en términos de incrementos, al estilo de la definiciones que conocemos de derivadas de funciones de una sola variable y de derivadas parciales. Llamando

$$h = x - x_0 \text{ (incremento en la variable } x\text{)}, \qquad k = y - y_0 \text{ (incremento en la variable } y\text{)},$$

con lo cuál, $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, y teniendo en cuenta que $(x,y) \to (x_0,y_0) \iff (h,k) \to (0,0)$, obtenemos que f es diferenciable en el punto (x_0,y_0) cuando se verifica

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + r(h,k)} \tag{1.6.11}$$

donde el residuo (o resto) $r(h,k)$ verifica

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0} \tag{1.6.12}$$

y, por tanto, $\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = 0.}$ Ahora la condición de diferenciabilidad viene dada por la expresión (1.6.12), que tiene sus ventajas al tratarse de un límite en el origen $(0,0)$.

Aplicándole lo anterior a un punto genérico (x,y) (en lugar de (x_0,y_0)), donde suponemos que f es diferenciable, tenemos la siguiente expresión para el incremento de la función:

$$\triangle f(x,y) \;=\; f(x+h, y+k) - f(x,y) \;=\; (x,y)\,h + (x,y)\,k + r(h,k),$$

donde el resto (residuo) $r(h,k)$ verifica $\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = 0$. Por tanto, cuando los incrementos h, k son muy pequeños podemos suponer $r(h,k) \approx 0$ (el resto es prácticamente igual a 0) y así $(x,y)\, h + (x,y)\, k$ sería *una aproximación lineal* (expresión lineal en las variables h y k)) del incremento. Es usual notar a los incrementos h y k por $\triangle x$ y $\triangle y$ respectivamente. Así tendríamos:

$$\boxed{\triangle f(x,y) \;\approx\; (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.13}$$

De otra forma, podemos aproximar el valor de $f(x + \triangle x, y + \triangle y)$ usando el valor de $f(x,y)$ y las derivadas parciales de f en el punto (x,y) así:

$$\boxed{f(x + \triangle x, y + \triangle y) \;\approx\; f(x,y) + (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.14}$$

Las dos fórmulas anteriores son las que se suelen usar en la práctica cuando los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$ son muy pequeños . Desde mi punto de vista, tienen el defecto de que no dan una estimación de los errores cometidos en las aproximaciones.

En textos dirigidos a físicos o ingenieros aparecen notaciones y terminologías, que a veces entran en conflicto con el rigor matemático, y que exponemos a continuación, por la única razón de que son muy usuales. Al final explicaremos porqué éstas no son matemáticamente coherentes.

A la *aproximación lineal del incremento* le suelen llamar *diferencial total* de la función f en (x,y) (algunos le llaman simplemente *diferencial* de f en el punto (x,y)) y se suele notar por $df(x,y)$. Así pues, como definición (o notación) tenemos:

$$\boxed{df(x,y) = (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.15}$$

y de esta forma cuando los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$ son muy pequeños se tiene

$$\boxed{\triangle f(x,y) \;\approx\; df(x,y), \qquad f(x + \triangle x, y + \triangle y) \;\approx\; f(x,y) + df(x,y)} \tag{1.6.16}$$

La ventaja o utilidad de la diferencial total es que ésta suele ser fácil de calcular, mientras que un incremento de la función o un valor como $f(x + \triangle x, y + \triangle y)$ es muchas veces de cálculo complicado si no se tiene a mano una calculadora.

Incidiendo de nuevo en ciertas notaciones que son comunes en textos orientados a ingenieros, comentamos que a veces la diferencial total (concepto que matemáticamente no es coherente) nos la encontramos escrita así: $\boxed{df = dx + dy}$ que es una manera abreviada de escribir $df(x,y) = (x,y)\, dx + (x,y)\, dy$. La justificación que doy de ésto es la siguiente: Si consideramos la función $f(x,y) = x$, según la definición (1.6.15), tendríamos que $df(x,y) = dx = 1 \cdot \triangle x + 0 \cdot \triangle y = \triangle x$, es decir, la diferencial total de la función $f(x,y) = x$ coincide con el incremento $\triangle x$. Análogamente, si consideramos $f(x,y) = y$ se tiene $dy = \triangle y$. De esta forma la expresión de arriba es otra forma de escribir (1.6.15).

Veamos a continuación un ejemplo de aplicación de la fórmula (1.6.14) (o (1.6.16) en términos de diferenciales) para aproximar un valor.

Ejemplo: Supongamos que queremos calcular el valor de $\boxed{1{,}08^{3{,}94}}$ y no tenemos a mano una calculadora. Apreciamos que el valor 1,08 está próximo a 1 y el valor 3,94 muy próximo a 4 y el cálculo de 1^4 es trivial: $1^4 = 1$. Esto nos lleva a considerar la función $f(x,y) = x^y =^{y\ln(x)}$ y el punto $(x,y) = (1,4)$. Nos están pidiendo el valor de $f(1{,}08, 3{,}94)$ y lo que sabemos es que $f(1,4) = 1$. Si comprobamos que f es diferenciable en el punto $(1,4)$, podríamos entonces usar la diferencial total en el punto $(1,4)$ para obtener una aproximación de $f(1{,}08, 3{,}94)$ y esperamos no cometer errores grandes pues los incrementos en las variables x e y son pequeños. Concretamente

$$\begin{aligned} 1{,}08 &= 1 + 0{,}08 = 1 + \triangle x, \qquad & \triangle x &= 0{,}08 \\ 3{,}94 &= 4 - 0{,}06 = 4 + \triangle y, \qquad & \triangle y &= -0{,}06. \end{aligned}$$

Comprobamos que f es diferenciable en $(1,4)$ viendo que existen las funciones derivadas parciales en el dominio de f, que es $D = \{(x,y) \colon x > 0\}$, y son continuas en $(1,4)$. Además ésto nos sirve de paso para calcular estas derivadas parciales en el punto $(1,4)$, datos que a continuación necesitaremos. De esta forma, tenemos

$$f(1{,}08, 3{,}94) = f(1 + \triangle x, 4 + \triangle y) \;\approx\; f(1,4) + df(1,4) = 1 + df(1,4).$$

En nuestro caso,

$$df(1,4) = (1,4)\,\triangle x + (1,4)\,\triangle y = 4 \cdot 0{,}08 + 0 \cdot (-0{,}06) = 0{,}32$$

y, por tanto, $f(1{,}08, 3{,}98) \approx 1 + 0{,}32 = \boxed{1.32}$ (El valor obtenido en una calculadora con seis cifras decimales exactas es 1,354221.

Como siempre, todo lo visto para funciones de dos variables es generalizable a funciones de tres o más variables. Así si f es una función de las variables x, y, z, que es diferenciable en el punto (x,y,z), la diferencial total $df(x,y,z)$ sería

$$\boxed{df(x,y,z) = (x, y.z)\,\triangle x + (x,y,z)\,\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\triangle z}$$

(también la podemos escribir abreviadamente así $df = dx + dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$) y cuando los incrementos $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ son muy pequeños tendríamos las aproximaciones

$$\boxed{\triangle f(x,y,z) \;\approx\; df(x,y,z), \qquad f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) \;\approx\; f(x,y,z) + df(x,y,z).}$$

Un ejemplo análogo al visto anteriormente al que se le puede aplicar lo anterior sería el cálculo aproximado del valor $A = \dfrac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$. Es trivial el cálculo de $\dfrac{1}{\sqrt{15 + \sqrt[3]{1}}} = \dfrac{1}{4}$ y esto nos lleva a considerar la función de tres variables $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$ y proceder como en el caso anterior.

Veamos a continuación un ejemplo donde se necesita aproximar un incremento relacionado con una función de tres variables.
Ejemplo: Un recipiente sin tapadera (en forma de caja) tiene longitud 3 m, anchura 1 m y altura 2 m. El lateral está construído de un material que cuesta 20 euros por m^2 y el fondo de un material que cuesta 30 euros por m^2. Vamos a calcular el coste de la caja y, usando la diferencial total, vamos a estimar la variación del coste cuando la longitud y la anchura aumentan 3 cm y la altura decrece 4 cm. (Hacer un dibujo).

Para unas dimensiones genéricas x, y, z de la caja el coste de ella vendría dado por

$$C(x, y, z) = 30xy + 40(yz + xz).$$

El coste de nuestra caja sería $C(3, 1, 2) = 410$ euros. Nos piden dar una aproximación de

$$\triangle C(3, 1, 2) = C(3 + 0{,}03, 1 + 0{,}03, 2 - 0{,}04) - C(3, 1, 2)$$

usando la diferencial. La función C es polinómica y, por tanto, diferenciable en el punto $(3, 1, 2)$. Como los incrementos $\triangle x = 0,03, \triangle y = 0,03, \triangle z = -0,04$ son pequeños, comparados con las dimensiones de la caja, podemos decir

$$\begin{aligned} \triangle C(3,1,2) \approx dC(3,1,2) &= \tfrac{\partial C}{\partial x}(3,1,2)\,\triangle x + \tfrac{\partial C}{\partial y}(3,1,2)\,\triangle y + \tfrac{\partial C}{\partial z}(3,1,2)\,\triangle z \\ &= 110 \cdot 0,03 + 170 \cdot 0,03 - 160 \cdot 0,04 = 2. \end{aligned}$$

Luego aproximadamente la variación del coste es de 2 euros.
Observo que esta aproximación no es buena pues calculando directamente el incremento obtengo el valor: $423,1 - 410 = 13,1$.

Hemos venido diciendo que matemáticamente no es riguroso lo que hemos escrito sobre la diferencial total. Al llamar diferencial total de la función f en (x, y) al valor $df(x, y) = (x, y)\,\triangle x + (x, y)\,\triangle y$ la incoherencia matemática estriba en que tal valor depende de los valores de los incrementos $\triangle x, \triangle y$. Para cada para de incrementos $(h, k) = (\triangle x, \triangle y)$ se obtiene un valor generalmente distinto al calcular $(x, y)\,h + (x, y)\,k$. Por tanto, sería mas razonable considerar lo anterior como una aplicación

$$\boxed{\mathbb{R}2 \to \mathbb{R}, \quad (h, k) \mapsto (x, y)\,h + (x, y)\,k}$$

La aplición anterior es *lineal* (en las variables h y k) y justamente esta aplicación lineal es para los matemáticos la llamada *diferencial de la función f en el punto* (x, y), que se suele representar por $Df(x, y)$ (y también por $df(x, y)$).

TANGENTES Y RECTAS NORMALES.

1.7. Gradientes

Gradientes El concepto de gradiente de una función en un punto es un concepto simple pero muy útil por sus muchas aplicaciones. En esta sección veremos una importantísima aplicación relacionada con las derivadas direccionales y en próximas secciones veremos otras utilidades del gradiente (véanse planos tangentes y vectores normales a superficies, máximos y mínimos, ...). El término gradiente, según un diccionario, posee diversas acepciones, como "declive", "pendiente", relación entre la variación del valor de una magnitud entre dos puntos y la distancia que los separa", ... y en Física es usual encontrarse con términos como "gradiente de temperatura", "gradiente de presión", ... En matemáticas el gradiente es un concepto que tiene mucho que ver con todo lo anterior.

[Gradientes] Sean $D \subset \mathbb{R}2$, (x_0, y_0) un punto interior a D y $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función de las variables x, y que posee derivadas parciales en el punto (x_0, y_0). El gradiente de f en el punto (x_0, y_0), que se suele notar por $\nabla f(x_0, y_0)$, es el vector del plano

$$\nabla f(x_0, y_0) = \Big((x_0, y_0), (x_0, y_0)\Big) = f_x(x_0, y_0)\,\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\,\vec{j}.$$

El símbolo ∇ se lee como "*nabla*". También nos podemos encontrar el gradiente con la notación grad $f(x_0, y_0)$. Así, Si $f(x, y) = x^2y + y^3$ el gradiente de f en un punto cualquiera (x, y) sería $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$.

Para funciones de tres o mas variables la definición es análoga. Así si f es una función en las variables x, y, z que posee derivadas parciales en el punto (x_0, y_0, z_0) el gradiente de f en ese punto sería el vector del espacio

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\,\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\vec{k}.$$

Las propiedades mas importantes de los gradientes se obtienen cuando la función es *diferenciable* en los puntos correspondientes. A continuación vamos a a obtener algunas que están relacionadas con las derivadas direccionales.

Relaciones entre el gradiente y las derivadas direccionales

En una sección anterior, en el teorema 1.5, vimos una importante propiedad sobre las derivadas direccionales que dice que cuando una función f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) existen todas las derivadas direccionales y además si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la derivada en la dirección de $\vec{v}$ se puede calcular así:

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,v_1 + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,v_2.$$

Recordemos que el *producto escalar* de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$, que se suele notar por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. En consecuencia, podemos escribir la derivada direccional en la dirección de $\vec{v}$ como el producto escalar entre el vector gradiente y el vector $\vec{v}$.

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;=\; \nabla f(x_0, y_0) \,\cdot\, \vec{v}} \tag{1.7.17}$$

Lo anterior es conocido como *fórmula del gradiente para las derivadas direccionales.*

La fórmula del gradiente se generaliza a funciones de más variables. Por ejemplo, para una función de tres variables: x, y, z, que sea diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0) y para cualquier vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se tiene:

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0, z_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, v_3 \;=\; \nabla f(x_0, y_0, z_0) \,\cdot\, \vec{v}}$$

pues el producto escalar de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del espacio se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Ejemplo: Sea $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$. Se quiere calcular la derivada de f en el punto $(1, 1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. El vector gradiente de f en el punto dado es $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 3, 4)$. Al ser f una función polinómica, es diferenciable en el punto $(1, 1, 1)$ y, por tanto, podemos calcular esa derivada usando la fórmula del gradiente y, por tanto,

$$D_{\vec{v}} f(1, 1, 1) \;=\; \nabla f(1, 1, 1) \,\cdot\, \vec{v} \;=\; (2, 3, 4) \,\cdot\, (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 3\sqrt{3}.$$

Una de las cualidades de la fórmula del gradiente, además de su simplicidad, es que permite descubrir algunas importantes propiedades de las derivadas direccionales. Veamos estas propiedades en el caso de funciones de dos variables. Para tres o mas variables se tienen las mismas propiedades. A partir de ahora suponemos que f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) para que así la fórmula del gradiente (1.7.17) sea válida.

Hay dos propiedades que se siguen de manera inmediata de (1.7.17). Estas son:

Si el gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es el vector nulo; es decir, $(x_0, y_0) = (x_0, y_0) = 0$, entonces cualquier derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ es nula.

Si $\vec{v}$ es un vector ortogonal (perpendicular) al vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, entonces $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = 0$.

El segundo punto se sigue del hecho de que *el producto escalar de dos vectores ortogonales es nulo.*

Direcciones óptimas

La propiedad más importante es la que se obtiene al responder a las siguientes cuestiones: Habrá alguna dirección $\vec{v}$ para la cuál la derivada $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ tenga un valor máximo?. Análogamente, habrá alguna dirección $\vec{v}$ para la cuál la derivada $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ tenga un valor mínimo? En el caso de que existan estas direcciones quisiéramos conocerlas. La cuestión que hemos planteado tiene interés cuando el vector gradiente no es el vector nulo, pues en caso contrario todas las derivadas son nulas. Vamos a ver que estas direcciones existen, vamos a calcular los valores máximo y mínimo de las derivadas y vamos a encontrar los vectores unitarios a través de los cuales las derivadas alcanzan estos valores extremos.

Para responder a lo planteado lo único que hay que tener en cuenta es la conocida fórmula para el producto escalar de dos vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en términos del ángulo formado por esos dos vectores. Concretamente, sabemos que el producto escalar se puede calcular así:

$$\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{u}\, \vec{v} \cos}$$

siendo el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Esto explica el que el producto escalar de dos vectores ortogonales sea nulo pues en este caso $= \frac{\pi}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$). El ángulo varía entre los valores 0 y π $(0 \leq \leq \pi)$.

Se sigue entonces de la fórmula del gradiente (1.7.17), al ser $\vec{v}$ un vector unitario, lo siguiente:

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;=\; \nabla f(x_0, y_0) \cos} \qquad (1.7.18)$$

siendo el ángulo formado por los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$.

En la expresión (1.7.18) lo único que varía es el ángulo; para cada vector $\vec{v}$ tenemos un ángulo distinto que varía entre 0 y π. La función coseno en el intervalo $[0, \pi]$ verifica $-1 \leq \cos \leq 1$ y toma un valor máximo igual a 1 cuando $= 0$ y toma un valor mínimo igual a -1 cuando $= \pi$ (dibujar gráfica). Que $= 0$ significa que el vector $\vec{v}$ tiene la misma dirección (y sentido) que el vector gradiente y que $= \pi$ significa que $\vec{v}$ tiene la dirección opuesta al gradiente, es decir, la dirección de $-\nabla f(x_0, y_0)$.

Por tanto, se sigue de (1.7.18) que para cualquier vector unitario $\vec{v}$ se verifica:

$$-\nabla f(x_0, y_0) \;\leq\; D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;\leq\; \nabla f(x_0, y_0).$$

El máximo valor que puede tomar la derivada es $\nabla f(x_0, y_0)$, lo cuál sucede cuando $= 0$ y el mínimo valor que puede tomar es direccional es $-\nabla f(x_0, y_0)$, lo cuál sucede cuando $= \pi$. En definitiva, el resultado que hemos obtenido es el siguiente:

Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ no es el vector nulo, entonces:

El máximo valor que puede tomar una derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ es $\nabla f(x_0, y_0)$ y este valor se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}$ tiene la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

El mínimo valor que puede tomar una derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ es $-\nabla f(x_0, y_0)$ y este valor se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}$ tiene la dirección del vector $-\nabla f(x_0, y_0)$ (dirección opuesta al gradiente).

En la sección dedicada a derivadas direccionales vimos que podemos considerar una derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ como una *tasa de crecimiento o decrecimiento* de la función respecto de la distancia, es decir, como una *velocidad (o ritmo) de crecimiento o decrecimiento* en la dirección dada por el vector $\vec{v}$. De hecho, vimos que cuando tal derivada es positiva la función crece cerca del punto (x_0, y_0) en la dirección (y sentido) dada por el vector y cuando es negativa decrece. Pero, por ejemplo, en el caso en que sea positiva, no es lo mismo que el valor de la derivada sea 1 que 15; en el segundo caso la función crece más rápidamente (en la dirección dada) que en el primer caso (la pendiente es mucho mayor). En estos términos, el resultado del teorema anterior nos dice lo siguiente:

Desde un punto (x_0, y_0) la función f crece más rápidamente en la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ mientras que decrece más rápidamente en la dirección opuesta al gradiente. La tasa (velocidad, ritmo) máxima de crecimiento es $\nabla f(x_0, y_0)$ y la *tasa mínima es* $-\nabla f(x_0, y_0)$ *(al ser negativa se puede considerar como una tasa máxima de decrecimiento).*

Al ser la derivada direccional un límite, todo lo dicho anteriormente se entiende que se verifica de una manera local. Partiendo del punto (x_0, y_0) la función f crece más rápidamente en la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ durante un cierto recorrido pero más adelante la dirección de máximo crecimiento puede cambiar (dependerá del punto donde nos encontremos).

Supongamos que la superficie $z = f(x, y)$ representa la superficie de una montaña nevada (en este caso $f(x, y)$ da la altura correspondiente al punto del plano (x, y)). Un esquiador está situado en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y quiere conocer la dirección (rumbo) de brújula que corresponda al descenso más acusado (rápido). Pues bien, si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) podemos asegurar que la dirección es la dada por el vector $\vec{v} = -\nabla f(x_0, y_0)$. Hacemos énfasis en la expresión "dirección o rumbo de brújula"porque el gradiente opera con direciones del plano y nada tiene que ver con puntos más arriba o más abajo de la montaña.

Podríamos retomar el ejemplo visto en la sección de diferenciabilidad en el que teníamos que la ecuación que describe la altura z de los puntos de una montaña es $z = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$, donde x representa la dirección Este e y la dirección Norte. Un montañero está situado en el punto P de la montaña de coordenadas $(200, 100, 100)$. Ya vimos que el montañero desciende en la dirección noreste pues la correspondiente derivada direccional nos dió un valor negativo; concretamente $-\frac{14}{\sqrt{2}} \approx -9,899$. Vamos a calcular ahora la dirección de descenso más rápida.

Según lo visto anteriormente, tal dirección (y sentido) es la opuesta al vector gradiente en el punto $(200, 100)$. Como $\nabla f(x, y) = (-,02\,x, -0,1\,y)$, la dirección buscada es $-\nabla f(200, 100) = -(-4, -10) = (4, 10)$; es decir, un vector unitario $\vec{v}$ en la dirección del vector $(4, 10)$ (hacer un dibujo). Además la velocidad máxima de decrecimiento sería $-\nabla f(200, 100) = -\sqrt{4^2 + 10^2} = -\sqrt{116} \approx -10,770$. Obsérvese que se obtiene un valor más pequeño que el valor de la derivada direccional en la dirección noreste (lo cuál tenía que suceder).

Supongamos que la temperatura, en grados Celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por la función $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se miden en centímetros. Se plantea la siguiente cuestión: Desde el punto $(2, -3)$ en que dirección crece la temperatura más rápidamente ? A que ritmo se produce este crecimiento ? (es decir, cuál es la tasa máxima de crecimiento?)

Al ser la función temperatura polinómica, es diferenciable en el punto $(2, -3)$ y, por tanto, la dirección de máximo crecimiento de la temperatura vendrá dada por el gradiente de temperatura en ese punto : $\vec{v} = \nabla T(2, -3)$. Como

$$\nabla T(x, y) = \tfrac{\partial T}{\partial x}(x, y)\,\vec{i} + \tfrac{\partial T}{\partial x}(x, y)\,\vec{j} = -8x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j},$$

la dirección de máximo crecimiento es $\vec{v} = \nabla T(2, -3) = -16\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$. La tasa máxima de crecimiento sería $\nabla T(2, -3) = \sqrt{(-16)^2 + 6^2} = \sqrt{292} \approx 17'09$ grados por centímetro.

Insistimos sobre algo que ya hemos advertido antes de los ejemplos. En este y demás ejemplos la resolución puede ser engañosa. El gradiente apunta a la dirección de máximo aumento de la temperatura desde el punto $(2,-3)$ pero esta dirección no tiene porqué llevar al lugar más caliente de la placa. Desde este punto de vista, el gradiente nos proporciona una *información local*, relativa a lo que sucede en las proximidades del punto $(2,-3)$; al variar el punto, la dirección de máximo aumento puede cambiar. En este caso se ve a ojo que el punto donde se alcanza la máxima temperatura es el $(0,0)$ y el vector $\nabla T(2,-3) = -16\vec{i} + 6\vec{j}$ no apunta hacia el origen.

Propiedad de ortogonalidad del gradiente

Otra interesante propiedad que tiene el gradiente de una función f está relacionada con la curvas de nivel de f y es la siguiente:

Sea C una curva de nivel de una función de dos variables f y sea (x_0,y_0) un punto de esa curva donde f es diferenciable y $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$. Entonces el vector gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular (normal) a la curva C en el punto (x_0,y_0).

El resultado anterior nos indica que el vector gradiente es perpendicular a un vector tangente a la curva en ese punto, es decir, un vector dirección de la recta tangente a C en el punto indicado. Habría que comprobar que tal recta tangente existe.

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que *si $\vec{v}$ es un vector tangente a la curva de nivel que pasa por (x_0,y_0), entonces la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$ es nula*, pues según (1.7.17) se tiene $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$ y al ser $\vec{v}$ y el vector gradiente perpendiculares, su producto es calar es igual a 0.

Observaciones sobre las pruebas del resultado anterior: En varios textos la prueba que se da para probar el teorema anterior se basa en que al ser f constante sobre la curva de nivel , la razón de cambio en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v}$ tangente a la curva es nula (esto es lo que no veo). En consecuencia, aplicando la fórmula del gradiente se tiene $0 = D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$ y así $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ y, por tanto, perpendicular a la curva de nivel. Es decir, hacen el razonamiento en orden inverso a lo expuesto arriba. No veo directamente que $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = 0$ si $\vec{v}$ es un vector tangente a la curva de nivel. Más adelante, cuando se vea la regla de la cadena se podrá dar una sencilla prueba del teorema usando unas ecuaciones paramétricas de la curva de nivel y suponiendo que esta es suave cerca del punto (x_0,y_0), lo cual es lógico suponer pues f es diferenciable en ese punto.

Examinando el resultado del teorema anterior y viendo que el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel en el punto dado me planteo En qué sentido apunta el vector gradiente?. Si la curva de nivel es cerrada, el vector gradiente apuntará hacia fuera de la curva o hacia dentro? Pienso que la respuesta está en el resultado del teorema 1.7. En la dirección del gradiente se obtiene la mayor tasa de crecimiento de la función. Entonces, la respuesta depende de cómo sean las curvas de nivel. Así si la curva de nivel que está dibujada por fuera de la inicial corresponde a un valor de f mayor que la inicial, entonces el vector gradiente apuntará hacia fuera.

Una aplicación física: El flujo de calor

El resultado del teorema 1.7 posee una aplicación muy interesante en Física, concretamente, la llamado *Flujo de Calor*. El flujo de calor en una región D del plano es una función vectorial sobre esta región, que a cada punto $(x, y) \in D$ le asigna un vector $\vec{C}(x, y)$ que da la dirección en que fluye el calor a partir de ese punto (matemáticamente es una función $C\colon D \to \mathbb{R}2$). La Física nos dice que *el flujo de calor en el punto* (x, y)*,* $\vec{C}(x, y)$*, es un vector ortogonal a la isoterma que pasa por el punto* (x, y), es decir, a la curva de nivel correspondiente a la función temperatura $T(x, y)$ que pasa por (x, y). La Física también nos dice que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.

Teniendo en cuenta que el gradiente de temperatura $\nabla T(x, y)$ es perpendicular en ese punto a la correspondiente isoterma y que, según el resultado del teorema 1.7, en la dirección opuesta al gradiente: $-\nabla T(x, y)$ la temperatura decrece (además, es la dirección en que decrece más rápidamente), se concluye que el flujo de calor debe tener la misma dirección que $-\nabla T(x, y)$ y, en consecuencia, debe existir una constante positiva K tal que

$$\boxed{\vec{C}(x, y) \,=\, -K\,\nabla T(x, y)}$$

La constante K es la llamada *conductividad térmica*. En la práctica conocemos la expresión $T(x, y)$ de la temperatura y podemos calcular fácilmente el vector gradiente de temperatura y así obtener, de una manera simple, la dirección del flujo de calor en cada punto de la región.

1.8. Reglas de la cadena

Reglas de la cadena

Para funciones de una sola variable la llamada *regla de la cadena* es una fórmula que nos dice cómo tenemos que derivar una función que es composición de otras dos. Concretamente, dice que si $\boxed{h(x) = f(g(x))}$, g es derivable en el punto x y f es derivable en el punto $g(x)$, entonces h es derivable en x y su derivada se calcula así:

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)} \tag{1.8.19}$$

Así por ejemplo, si $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (aquí $g(x) = x^2$ y $h(t) = \operatorname{sen} t$) la derivada se calcula así:

$$h'(x) = \underbrace{\cos(x^2)}_{f'(g(x))}\,\underbrace{2x}_{g'(x)}.$$

Para funciones de dos o mas variables existe una gran variedad de composiciones y, por tanto, una gran variedad de reglas de la cadena (matemáticamente todas son casos particulares de una regla de la cadena que se establece en términos de productos de matrices pero ésto ésto se escapa de un curso como éste). *Se entiende por reglas de la cadena fórmulas que nos permiten calcular derivadas de funciones compuestas.*

Vamos a exponer algunos de los casos más utilizados. En un principio, para una mejor comprensión, la exposición la hacemos usando únicamente funciones de una y dos variables. Posteriormente, una vez entendido estos casos, se generalizarán a funciones de tres o mas variables.

Primer caso: Exponemos como primer caso uno que no suele venir en los textos porque realmente se obtiene de la regla de la cadena (1.8.19) para funciones de una sola variable sin mas que tener en cuenta cómo se calculan las derivadas parciales. Este sería el caso de $\boxed{h(x,y) = f(g(x,y))}$, donde f es una función de una sola variable, derivable en el punto $g(x,y)$ y g posee derivadas parciales en el punto (x,y).

Como ejemlos de esta situación tenemos $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^3-y^2+1)$, $h(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $h(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

En este caso las derivadas parciales de la función h se calculan así:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}. \tag{1.8.20}$$

Esto es realmente lo que hemos hecho, en el fondo aplicamos (1.8.19) , cuando nos hemos encontardo con este tipo de funciones.

Para $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^3-y^2+1)$ calculamos las derivadas parciales así:

$$hx(x,y) = \cos(x^3-y^2+1)\,3x^2, \qquad hy(x,y) = \cos(x^3-y^2+1)\,\cdot(-2y).$$

En los casos que vamos a exponer a continuación (que son los que suelen venir en libros dirigidos a estudiantes que no son de matemáticas) la correspondiente regla de la cadena sólo funciona cuando las funciones de dos o mas variables que aparecen son *diferenciables* en los puntos indicados y las funciones de una sola variable son derivables (en este caso la derivabilidad equivale a la diferenciabilidad). Las fórmulas que vamos a exponer suelen usarse en la teoría para probar ciertos resultados (véase una aplicación en la próxima sección) y son muy útiles. En la práctica ya no son tan útiles porque usualmente nos encontramos con expresiones directas de las funciones y el cálculo de derivadas suele reducirse a aplicar las reglas (1.8.19) o (1.8.20).

Segundo caso: Regla de la cadena para una variable independiente

Supongamos que f es una función de las variables x,y y a su vez las variables x,y dependen de otra variable t así: $x = g(t),\ y = h(t)$. De esta forma podemos considerar la función z, que depende únicamente de la variable t, definida por

$$\boxed{z(t) = f(g(t),\, h(t)).}$$

Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2+y^2$ y $x = g(t) = \frac{1}{t}$, $y = h(t) = t^2$ tenemos $z(t) = f(\frac{1}{t}, t^2) = (\frac{1}{t})^2 + (t^2)^2 = \frac{1}{t^2} + t^4$. Pues bien, si g y h son derivables en t y f es diferenciable en el punto $(x, y) = (g(t), h(t))$, entonces la función z es derivable en t y su derivada se calcula así:

$$\boxed{z'(t) = (g(t), h(t))\, g'(t) \;+\; (g(t), h(t))\, h'(t).} \tag{1.8.21}$$

Se comprueba la fórmula anterior con el ejemplo dado arriba derivando directamente la expresión $z(t) = \frac{1}{t^2} + t^4$ y viendo que sale el mismo resultado que al aplicar (1.8.21).

Otras notaciones: La proliferación de notaciones existentes para notar lo mismo, nos lleva a escribir (1.8.21) de otra forma, más usada por físicos, ingenieros, ... Sabemos que una derivada, como por ejemplo $z'(t)$, se suele notar también por el símbolo $\frac{dz}{dt}(t)$ y, muchas veces, por comodidad nos la encontramos escrita así $\frac{dz}{dt}$ sin indicar el punto donde se calcula esa derivada (lo mismo sucede con las derivadas parciales). Por otra parte, es usual notar a las funciones $g(t)$ y $h(t)$ por $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente; es decir, $x = x(t)$, $y = y(t)$, con lo que nuestra función z se expresaría así:

$$\boxed{z(t) = f(x(t), y(t)).}$$

Con todas estas notaciones y escribiendo, por comodidad, de una forma abreviada sin indicar los puntos donde se calculan las derivadas, la expresión (1.8.21) nos la podemos encontrar así:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} \;=\; \frac{dx}{dt} \;+\; \frac{dy}{dt}.} \tag{1.8.22}$$

Al alumno se le comprueba de nuevo el ejemplo anterior usando esta nueva notación. Se lleva a cabo así (de la forma que lo hacen los libros para ingenieros):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x\,(-\frac{1}{t^2}) + 2y\,(2t) \underset{x=\frac{1}{t},\, y=t^2}{=} 2\,\frac{1}{t}\,(-\frac{1}{t^2}) + 2t^2\,(2t) = -\frac{2}{t^3} + 4t^3.$$

Otro ejemplo interesante que podríamos poner es el de $z = f(x, y) = \int_x^y {}^{-s^2}\, ds$ siendo $x = t^3$, $y = \operatorname{sen}(t)$ (Obsérvese que la integral dada no se sabe calcular pero ésto no es impedimento para calcular las derivadas parciales de f haciendo uso del *teorema fundamental del Cálculo*).

Una aplicación interesante de la regla de la cadena (1.8.21) consiste en dar otra prueba de la famosa fórmula que establece una derivada direccional en términos de las derivadas parciales, cuando la función es diferenciable.

La fórmula obtenida se generaliza de una forma natural al caso en que la función f sea una función de tres o mas variables. Por ejemplo, si tenemos que f es una función de las variables x, y, z y tenemos

$$\boxed{w(t) = f(x(t), y(t), z(t)),}$$

usando la última notación, la derivada de w se calcularía así:

$$\boxed{\frac{dw}{dt} \;=\; \frac{dx}{dt} \;+\; \frac{dy}{dt} \;+\; fz\,\frac{dz}{dt}.}$$

A la vista de lo anterior ya nos podemos imaginar el caso de funciones f de cuatro o mas variables: En la fórmula aparece un sumando por cada variable que tiene f.

Tercer caso: Regla de la cadena para dos variables independientes

Supongamos que f es una función de las variables x, y y a su vez las variables x, y dependen de otras dos variable s, t así: $x = g(s,t),\ y = h(s,t)$. De esta forma podemos considerar la función z, que depende de las variable s, t, definida por

$$\boxed{z(s,t) = f(g(s,t),\ h(s,t)).}$$

Por ejemplo, podemos tener $f(x,y) = 2xy$ y $x = g(s,t) = s^2 + t^2$, $y = h(s,t) = \frac{s}{t}$. Entonces, $z(s,t) = f(s^2+t^2, \frac{s}{t}) = 2(\frac{s^3}{t} + st)$.

Suponiendo que g y h son diferenciables en el punto (s,t) y f es diferenciable en el punto $(x,y) = (g(s,t), h(s,t))$, la regla de la cadena para este caso nos dice que las derivadas parciales de z se pueden calcular así:

$$\begin{aligned} zs(s,t) &= (g(s,t), h(s,t))\, gs(s,t)\ +\ (g(s,t), h(s,t))\, hs(s,t) \\ zt(s,t) &= (g(s,t), h(s,t))\, gt(s,t)\ +\ (g(s,t), h(s,t))\, ht(s,t). \end{aligned} \tag{1.8.23}$$

De la misma forma que sucedía en el caso anterior, aquí lo más usual y cómodo es notar las funciones g y h por x e y respectivamente, es decir,

$$x = x(s,t), \qquad y = y(s,t), \qquad \boxed{z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))}$$

y usar una notación abreviada (en la que no se especifican los puntos donde se calculan las derivadas). Entonces las fórmulas (1.8.23) pueden ser escritas así:

$$\boxed{\begin{aligned} zs &= fx\, xs + fy\, ys \\ zt &= fx\, xt + fy\, yt \end{aligned}}$$

Lo anterior se pone en práctica con el ejemplo de arriba calculando directamente las derivadas parciales zs, zt en la expresión $z(s,t) = 2(\frac{s^3}{t} + st)$ y después calculandolas con las reglas anteriores. Ilustremos el cálculo de la derivada zs (la otra es análoga).

$$zs = fx\, xs\ +\ fy\, ys\ =\ 2y\,(2s) + 2x\,(\frac{1}{t}) \underset{y=\frac{s}{t},\, x=s^2+t^2}{=} 2\,(\frac{s}{t})\,(2s) + 2(s^2+t^2)\,(\frac{1}{t}) = 6\frac{s^2}{t} + 2t.$$

Si f es una función de tres o mas variables el procedimiento sería análogo. En el cálculo de derivadas parciales aparecerían tantos sumandos como variables tiene la función f y en cada sumando aparece la correspondiente derivada parcial de f. Veamos el caso en que f tiene tres variables. Supongamos

$$w = f(x, y, z), \qquad \text{donde} \qquad x = x(s, t),\ y = y(s, t),\ z = z(s, t).$$

En este caso, las derivadas parciales de la función

$$\boxed{w(s, t) \ = \ f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))}$$

se calculan así:

$$\begin{aligned} ws &= fx\,xs + fy\,ys + fz\,zs \\ wt &= fx\,xt + fy\,yt + fz\,zt \end{aligned}$$

Se pone como ejemplo el caso $w = xy + yz + xz$ donde $x = s\cos t, y = s \operatorname{sen} t, z = t$.

Por último se advierte que podíamos tener casos análogos a los anteriores con tres o más variables independientes. Por ejemplo, $w = 4x + y^2 + z^3$ donde $x =^{rs^2} t, y = \ln(\frac{r+s}{t}), z = rst^2$. En este caso tendríamos una función dependiente de tres variables independientes: r, s, t del tipo

$$\boxed{w(r, s, t) \ = \ f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))}$$

y el cálculo de sus derivadas parciales se llevaría a cabo de la misma forma que en el caso de dos variables independientes. Se dejan algunos casos como éstos para verlos en clases prácticas.

1.9. Superficies, curvas, planos tangentes y rectas normales

Superficies, curvas, planos tangentes y rectas normales

En la sección 1.5 vimos que el plano tangente a una superficie del tipo $z = f(x, y)$ (gráfica de f) en un punto dado de la superficie $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existe únicamente cuando la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0). En este caso, una ecuación de tal plano tangente es:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

lo cuál se puede escribir obviamente así:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Es decir, de la forma:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ B & = & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ C & = & 1. \end{array} \right. \tag{1.9.24}$$

y donde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Es lógico que obtengamos lo anterior pues sabemos que la ecuación de un plano que pasa por un punto del espacio (x_0, y_0, z_0) es de la forma $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ con A, B, C constantes (esta es la llamada *ecuación en forma punto-normal*). Podemos también escribir la ecuación del plano como $Ax+BY+Cz=D$ (*ecuación en forma estándar*). Escrito el plano en la forma punto-normal, el vector $\vec{n}=(A,B,C)$ es perpendicular al plano ya que, si $\vec{v}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ el producto escalar $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$, por lo que $\vec{n}$ sería perpendicular a los vectores $\vec{v}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, pero estos últimos son vectores del plano. De esta forma, obteniendo un vector normal al plano en ese punto, es muy fácil obtener la ecuación del plano tangente sin mas que recordar la ecuación en la forma punto-normal.

Por tanto, según (1.9.24), un vector normal a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ viene dado por $\vec{n} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1)$, lo que vamos a escribir, por comodidad así:

$$\boxed{\vec{n} \; = \; (-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1).} \tag{1.9.25}$$

Ya habíamos advertido en varias ocasiones que hay muchas superficies en el espacio $\mathbb{R}3$ que no representan la gráfica de una función f en las variables x, y. Para nosotros, *una superficie* va a ser un subconjunto del espacio de la forma $\boxed{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}3\colon F(x,y,z)=0\}}$ donde F es una función de tres variables. Diremos entonces que $F(x,y,z)=0$ es una ecuación de la superficie. Recuérdense las ecuaciones de las esferas, elipsoides, conos, paraboloides, ... Estas son casos especiales de superficies. Por ejemplo, la ecuación de un elipsoide centrado en el origen y de semiejes a, b y c es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. (<u>Observación</u>: Siendo rigurosos, a F habría que exigirle ciertas condiciones. La definición formal de superficie no se expone aquí; de hecho, hay superficies que no son de la forma anterior).

La superficie de ecuación $z=f(x,y)$ (gráfica dse f) sería un caso particular pues podríamos escribir la ecuación como $F(x,y,z)=0$ siendo $\boxed{F(x,y,z)=z-f(x,y)}$ Observemos que, en este caso, las derivadas parciales de F son

$$F_x(x,y,z)=-f_x(x,y), \quad F_y(x,y,z)=-f_y(x,y), \quad F_z(x,y,z)=1$$

y, por tanto, el vector normal, dado en (1.9.25), a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto $P=(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ se puede escribir así:

$$\boxed{\vec{n}=\nabla F(x_0,y_0,z_0).}$$

Por tanto, escribiendo nuestra superficie de la forma $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ basta con obtener *el gradiente* de F en el punto dado de la superficie para tener así un vector normal y, consecuentemente, el plano tangente a la superficie en ese punto.

Obsérvese que en el caso de un plano (caso especial de superficie) escrito en forma punto-normal: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (donde A, B, C son constantes) tendríamos la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$. En este caso, el vector gradiente en cualquier punto (x, y, z) es $\nabla F(x, y, z) = (A, B, C)$ y sabemos que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es justamente un vector normal al plano en cada punto. Por tanto, en este caso también sucede lo mismo que en el caso de una gráfica $z = f(x, y)$ (hay planos que no son gráficas de este tipo).

Pues bien, ésto que sucede con las superficies del tipo $z = f(x, y)$ y con los planos se puede generalizar a todas las superficies $F(x, y, z) = 0$ sin mas que suponer que F es diferenciable en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Nuestra idea geométrica de plano tangente es la misma que expusimos en la sección 1.5. Por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la superficie $F(x, y, z) = 0$ pasan infinitas curvas contenidas en la superficie. Suponiendo que cada una de estas curvas posee una recta tangente en P, parece lógico que un vector normal a la superficie en P sea un vector perpendicular a cada una de estas tangentes y, entonces, el plano tangente en P será entonces un plano que pasa por P y contiene a todas las rectas tangentes. Con esta idea geométrica de vector normal y plano tangente se puede probar lo siguiente:

Sea la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie donde F es diferenciable y donde el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ no es nulo.

1) El vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a la superficie en el punto P.

2) Una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P es $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0,$

3) La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama recta normal a la superficie en el punto P. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serían: $\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\, t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\, t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\, t \end{cases}$ y cuando las derivadas parciales no se anulan podemos escribir la ecuación de esta recta así: $\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0,}$

En algunos textos como en el de Larson (página 1169) los resultados que aparecen en el teorema anterior aparecen como definiciones (pues no deja de ser un problema matemático el definir adecuadamente los conceptos de plano tangente y vector normal). O sea, que cabe la opción de simplemente llevar a a cabo las siguientes defininiciones:

Sea la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie donde F es diferenciable y donde el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ no es nulo.

1) El plano que pasa por P y tiene a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como vector normal se llama plano tangente a la superficie en el punto P. Una ecuación de este plano sería $\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$

2) La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama recta normal a la superficie en el punto P. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serían: $\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\, t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\, t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\, t \end{cases}$ y cuando las derivadas parciales no se anulan podemos escribir la ecuación de esta recta así: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}}$

Veamos a continuación algunos ejemplos. El primero es rutinario y en los otros dos hay que reflexionar algo más.

Ejemplo 1: Determinemos un vector normal, una ecuación del plano tangente y una ecuación de la recta normal al *hiperboloide* de ecuación $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1, -1, 4)$.

En este caso $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$. Al ser una función polinómica es diferenciable en cualquier punto; en particular en $(1, -1, 4)$. En este caso el gradiente es

$$\nabla F(1, -1, 4) = (F_x(1, -1, 4), F_y(1, -1, 4), F_z(1, -1, 4)) = (-4, 4, 8),$$

que como vemos no es nulo.

Por tanto, un vector normal a la superficie en el punto dado es $\boxed{\vec{n} = (-4, 4, 8)}$. Obsérvese que el vector $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{n}$ y, por tanto, también sería un vector normal a la superficie en el punto indicado.

Una ecuación del plano tangente en forma punto-normal sería:

$$-4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0.$$

Realizando operaciones se obtiene la ecuación: $\boxed{x - y - 2z + 6 = 0}$.

Una ecuación de la recta normal sería: $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{8}$, o sea, $\boxed{\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}}$.

Unas ecuaciones paramétricas de esta recta normal serían:

$$\boxed{x = 1 - 4\,t, \quad y = -1 + 4\,t, \quad z = 4 + 8\,t.}$$

El punto $(1, -1, 4)$ se obtendría para el valor del parámetro dado por $t = 0$.

Ejemplo 2: Determinemos, si existen, los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ en los que el plano tangente es *horizontal*, es decir, paralelo al plano xy (plano $z = 0$) y obtengamos una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 1)$.

Para que el plano tangente sea horizontal en un punto P, cualquier vector normal a la superficie en el punto P debe tener la dirección (o dirección opuesta) del eje z, es decir, debe ser de la forma $\vec{n} = (0, 0,)$. En nuestro caso la ecuación de la superficie es $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$. Esta función es polinómica y, por tanto, diferenciable en cada punto del espacio, siendo el gradiente en un punto cualquiera (x, y, z) el dado por

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 4z).$$

En un punto (x, y, z) de la superficie, el vector $\vec{n} = (2x, 2y, 4z)$ es perpendicular a la superficie. Para que este vector tenga la dirección del eje z debe suceder que $x = 0$ e $y = 0$. Vamos a ver qué puntos de la superficie (si es que existen) verifican estas dos condiciones.

Llevando las condiciones $x = 0$ e $y = 0$ a la ecuación de la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, concluímos que la única posibilidad es que se verifique $2z^2 = 4$, es decir $z = \sqrt{2}$ o $z = -\sqrt{2}$. En consecuencia, los únicos puntos de la superficie donde el palno tangente es horizontal son

$$(0, 0, \sqrt{2}) \qquad \text{y} \qquad (0, 0, -\sqrt{2}).$$

Estos resultados son coherentes con la idea geométrica de la superficie dada, ya que se trata de un *paraboloide* de centro $(0, 0, 0)$ y semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$. El plano tangente que pasas por el primer punto es el de ecuación $z = \sqrt{2}$ y el que pasa por el sgundo punto es $z = -\sqrt{2}$.

El punto $(1, 1, 1)$ es otro punto del parabolide, asi que, en este caso el plano no es horizontal. Vamos a calcularlo. El gradiente en este punto es $\nabla F(1, 1, 1) = (2, 2, 4)$. Por tanto, una ecuación del plano tangente pedido es:

$$2\,(x - 1) + 2\,(y - 1) + 4\,(z - 1) \;=\; 0,$$

es decir, $\boxed{x + y + 2\,z = 4.}$. Obsérvese que no es un plano horizontal, es decir no es de la forma $z = a$.

Ejemplo 3: Vamos a comprobar que la esfera de ecuación: $\mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$es tangente al elipsoide de ecuación: $\mathrm{x}^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$en el punto $P = (2, 1, 1)$.

Lo primero es comprobar que tal punto P pertenece a ambas superficies. Que ambas superficies sean tangentes en ese punto significa que los planos tangentes a las dos superficies en P coinciden (lo análogo a dos curvas tangentes en un punto, donde la recta tangente en el punto es la misma en ambos casos). Esto equivale a que los vectores normales a ambas superficies en ese punto tengan la misma dirección o direcciones opuestas, ya que el plano tangente queda perfectamente determinado por ese vector normal y el punto de tangencia (que en este caso es el mismo para ambas superficies).

Escribimos la primera superficie de la forma $F(x, y, z) = 0$ y la segunda como $G(x, y, z) = 0$. Entonces, lo único que tenemos que comprobar es que los vectores gradientes $\nabla F(2, 1, 1)$ y $\nabla G(2, 1, 1)$ poseen la misma dirección o direcciones opuestas. Resulta que

$$\nabla F(x, y, z) = (2x - 8, 2y - 8, 2z - 6), \qquad \nabla G(x, y, z) = (2x, 6y, 4z),$$

y, por tanto, $\nabla F(2,1,1) = (-4,-6,-4)$ y $\nabla G(2,1,1) = (4,6,4)$. Observamos entonces que $\nabla G(2,1,1) = -\nabla F(2,1,1)$, lo cuál confirma lo que buscábamos.

Par confirmar lo que decíamos en un principio, obsérvese que tanto en un caso como en otro, una ecuación del plano tangente a la superficie en P es 4(x-2)+6(y-1) +4(z-1) = 0,es decir $\boxed{2x+3y+2z=9.}$

Recta tangente a una curva en el espacio

1.- Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies

Una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ puede venir dada de distintas formas. Una de ellas es como intersección de dos superficies, de la misma forma que una recta puede venir dada como la intersección de dos planos (a fin de cuenta un plano es un caso particular de superficie). Así por ejemplo, la recta normal obtenida en el primer ejemplo vendría dada por la intersección de los planos de ecuaciones $x+y=0$ y $2x+z-6=0$.

Sea entonces C una curva en el espacio que viene dada mediante la intersección de las superficies $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ y sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto de la curva donde F y G son diferenciables.

Nos planteamos el determinar una ecuación de la *recta tangente* a la curva C en el punto P, para lo cuál sería suficiente con determinar un vector $\vec{v}$ en la dirección de la recta tangente. Sabemos que el vector gradiente $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ es perpendicular a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto P y la curva C está contenida en esa superficie; por tanto, el vector $\vec{v}$ debe ser perpendicular a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$. Razonando de manera análoga con la otra superficie, tendremos que $\vec{v}$ también debe ser perpendicular a $\nabla G(x_0,y_0,z_0)$. Sabemos que una forma simple de encontrar un vector perpendicular a dos vectores $\vec{u},\vec{w}$ dados es considerando el *producto vectorial* de estos vectores $\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$. En consecuencia, deducimos el siguiente resultado:

Sea C una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ que viene dada mediante la intersección de las superficies de ecuaciones:

$$F(x,y,z)=0, \qquad G(x,y,z)=0,$$

y sea $P=(x_0,y_0,z_0)$ un punto de la curva donde F y G son diferenciables y sus gradientes no se anulan. En tal situación, el producto vectorial

$$\boxed{\nabla F(x_0,y_0,z_0)\times\nabla G(x_0,y_0,z_0)}$$

es un vector en la dirección de la recta tangente a la curva C en el punto P.

Vamos a desarrollar la idea anterior en dos ejemplos.

Ejemplo 1: Determinemos una ecuación de la recta tangente a la curva C obtenida como intersección del paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=5$ en el punto $P=(2,1,5)$.

En este caso podemos hacer un simple dibujo para ver cómo es la curva pedida.

Aquí $F(x,y,z) = z - (x^2+y^2)$ y $G(x,y,z) = z-5$, que son funciones polinómicas y, por tanto, diferenciables en el punto dado. En este caso: $\nabla F(x,y,z) = (-2x,-2y,1)$ y $\nabla G(x,y,z) = (0,0,1)$ y, consecuentemente:

$$\nabla F(2,1,5) = (-4,-2,1), \qquad \nabla G(2,1,5) = (0,0,1).$$

Por tanto, un vector dirección $\vec{v}$ de la de la recta tangente es

$$\vec{v} \;=\; \nabla F(2,1,5) \;\times\; \nabla G(2,1,5) \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \;=\; \boxed{(-2,4,0)}.$$

A tener la última componente nula se trata de un vector paralelo al plano $z=0$ (plano xy).

Unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C en el punto P serían:

$$\begin{cases} x = 2 - 2\,t \\ y = 1 + 4\,t \qquad (t \text{ parámetro}) \\ z = 5 + 0\,t = 5 \end{cases}$$

Obsérvese que para $t=0$ se obtiene el punto P. En este caso la recta no se puede escribir en la forma punto-normal, pues la tercera componente del vector dirección se anula.

Ejemplo 2: Vamos a determinar una ecuación de la recta tangente a la curva C dada como intersección de las dos superficies

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20 & \text{Elipsoide} \\ z = 4 - (x^2+y^2) & \text{Paraboloide} \end{cases}$$

en el punto $P = (0,1,3)$.

En este caso $F(x,y,z) = x^2+2y^2+2z^2-20$ y $G(x,y,z) = x^2+y^2+z-4$, que son funciones polinómicas y, por tanto, diferenciables en el punto dado. En este caso:

$$\nabla F(0,1,3) = (0,4,12), \qquad \nabla G(0,1,3) = (0,2,1)$$

y, por tanto,

$$\nabla F(0,1,3) \;\times\; \nabla G(0,1,3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\,\vec{i}.$$

Por tanto un vector en la dirección de la recta tangente es $\vec{v} = (-20,0,0)$; es decir, en este caso, *la recta tangente es paralela al eje de las x*. Dado que dos de las componentes del vector dirección son nulas la ecuación de la recta tangente habría que darla en paramétricas así:

$$x = -20\,t, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

(Hacer un dibujo).

2.- Recta tangente a una curva dada en paramétricas o en forma vectorial

Sabemos que una recta en el espacio (al igual que una recta en el plano) se puede dar de distintas formas. Concretamente los puntos (x, y, z) de la recta que pasa por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son de la forma

$$\begin{cases} x = x(t) = x_0 + v_1\, t \\ y = y(t) = y_0 + v_2\, t \qquad (t \text{ parámetro}) \\ z = z(t) = z_0 + v_3\, t, \end{cases}$$

donde el parámetro t varía en $\mathbb{R}$. Estas son las *ecuaciones parámetricas* de la recta. Así en el primer ejemplo de la sección anterior obtuvimos una recta (tangente) cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 2 - 2\,t \\ y = 1 + 4\,t \\ z = 5 \end{cases}$$

En *forma vectorial* la recta se puede dar así $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Obsérvese que en este caso las funciones en la variable t dadas por $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son derivables y se verifica $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (v_1, v_2, v_3) = \vec{v}$. En el ejemplo anterior $\vec{r}\,'(t) = (-2, 4, 0)$. El vector director $\vec{v}$ se puede considerar como un *vector tangente* a cada punto de la recta.

Una recta es un caso particular de curva. En general una curva C en el espacio de puede dar en forma paramétrica así:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad (t \text{ parámetro}) \\ z = z(t) \end{cases}$$

o en forma vectorial así: $\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.}$ Muchas e importantes curvas vienen dadas de esta forma. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x = r\, \cos t \\ y = r\, \operatorname{sen} t \\ z = t, \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas de una *hélice*. Obsérvese cómo las dos primeras coordenadas x, y satisfacen $x^2 + y^2 = r^2$, para cada $t \in \mathbb{R}$, de modo que la curva correspondiente debe estar dibujada en el cilindro circular recto de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Por otra parte, a medida que t avanza, la tercera coordenada $z = t$, que marca la altura del punto, va siendo cada vez más grande.

Cuando las funciones en la variable t dadas por $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son derivables, la curva es suave (no hace picos) y posee en cada punto una recta tangente. Si t_0 es el valor del parámetro para el cuál se obtiene el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la curva, resulta que el vector

$$\boxed{\vec{v} = \vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}$$

es *un vector tangente* a la curva en el punto P (es decir es un vector dirección de la recta tangente en ese punto).

Ejemplo 1: Determinar una ecuación de la recta tangente en el punto $P = (0, 4, \frac{\pi}{2})$ a la hélice dada por la ecuaciones paramétricas: x=4 $\cos t$, $\quad y = 4\,\mathrm{sen}\, t, \quad z = t.$

Observemos que el punto P de la hélice se obtiene al darle el valor $t = \frac{\pi}{2}$ al parámetro. En este caso, $x(t) = 4\,\cos t$, $y(t) = 4\,\mathrm{sen}\, t$, $z(t) = t$, por lo que un vector director de la recta tangente en ese punto viene dado por $\;=\;$ (x'(π $2),y'(\frac{\pi}{2}),z'(\frac{\pi}{2})) = \boxed{(-4, 0, 1).}$ Por tanto,

unas ecuaciones paramétricas de la recta son $\boxed{x = -4\,t, \quad y = 4, \quad z = \dfrac{\pi}{2} + t.}$

Ejemplo 2: Demostrar que la curva dada en forma vectorial por $\vec{r}(t) = \frac{3}{2}(t^2+1)\,\vec{i} + (t^4+1)\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$ es perpendicular al elipsoide $x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 = 20$ en el punto $(3, 2, 1)$; es decir, en ese punto la recta tangente a la curva y la recta normal a la superficie coinciden.

Observemos que el punto pertenece a la curva dada pues se obtiene al darle el valor de $t = 1$ al parámetro.

En este caso $x(t) = \frac{3}{2}(t^2+1),\ y(t) = t^4 + 1,\ z(t) = t^3$, por lo que

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \equiv x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \;=\; 3\,t\,\vec{i} + 4\,t^3\,\vec{j} + 3\,t^2\,\vec{k}.$$

Por tanto, un vector en la dirección de la recta tangente en el punto P es

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(1) = \; 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}.$$

La recta normal a la superficie en el punto tiene como dirección la dada por el vector normal $\vec{n} = \nabla f(3, 2, 1) = (6, 8, 6)$, que como vemos tiene la misma dirección que el vector $\vec{v}$; concretamente, $\nabla f(3, 2, 1) = 2\vec{v}$. Por tanto, la recta tangente a la curva en el punto P y la recta normal a la superficie en P coinciden.

Angulo de inclinación de un plano

Otra interesante aplicación del gradiente está en la determinación del ángulo de inclinación de un plano tangente a una superficie. Se llama *ángulo de inclinación* de un plano el ángulo , $0 \leq \leq \pi/2$, formado por el plano dado y el plano $xy\,(z = 0)$. (hacer un dibujo)

En el caso de un plano tangente a una superficie $F(x, y, z) = 0$ en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ resulta que el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular al plano tangente en el punto P mientras que el vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$ es perpendicular al plano $z = 0$ por lo que tal ángulo coincide con el ángulo formado por los vectores $\vec{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y $\vec{k}$. (Hacer un dibujo)

Sabemos que el ángulo formado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede calcular mediante el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ así: $\vec{u} \,.\, \vec{v} = u\, v \cos$. Como debe ser $\cos \geq 0$ se tiene $\cos = \frac{\vec{u} \,.\, \vec{v}}{\vec{u}\, \vec{v}}$.En nuestro caso, $\cos = \frac{\vec{n} \,.\, \vec{k}}{\vec{n}}$ y, por tanto, obtenemos:

El ángulo de inclinación del plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ viene dado por

$$\boxed{\cos = \frac{|F_z(x_0, y_0, z_0)|}{\sqrt{F_x^2(x_0, y_0, z_0) + F_y^2(x_0, y_0, z_0) + F_z^2(x_0, y_0, z_0)}}.}$$

En particular, cuando la superficie tiene por ecuación $z = f(x, y)$ (gráfica de f), el ángulo viene dado por

$$\boxed{\cos = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0) + 1}}.}$$

Ejemplo: Apliquemos lo anterior para calcular el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$ en el punto $(2, 2, 1)$.

1.10. EJERCICIOS TEMA 1

1. Determínese el *dominio* de cada una de las siguientes funciones de dos variables:
   [3]$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ $f(x,y) = \frac{y^2}{x+y^2}$ $f(x,y) = \ln(x+y)$ $f(x,y) = x^2 - y^2\sqrt{4+y}$ $f(x,y) =^{2x} \sqrt{y^2-1}$ $f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{y-5}$ $f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(y^2-4)}$ $f(x,y) = \sqrt{\ln(y-x-1)}$ $f(x,y) =^{\sqrt{xy+1}}$.
   En cada caso, hacer un dibujo del dominio.

2. Dibujar las *gráficas* de las siguientes funciones:
   [3] $f(x,y) = 3$ $f(x,y) = x + 2y - 2$ $f(x,y) = y^2$ $f(x,y) = -\sqrt{16-x^2-y^2}$. $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-3y^2}$ $f(x,y) = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$ $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)$

3. Dibujar algunas *curvas de nivel* de las siguientes funciones:
   [3] $f(x,y) = x + 2y$ $f(x,y) = y^2 - x$ $f(x,y) = xy$ $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$ $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(y-x)$ $f(x,y) =^{y-x^2}$.

4. Probar que los siguientes *límites* no existen.
   [3] $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{9x^2-y^2}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

5. Probar que los siguientes *límites* existen y, en cada caso, calcular el valor del límite.
   [3] $\lim^{(x+3y^2)}_{(x,y)\to(2,1)} -1$ $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x+y}{x-y}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y+\pi)}{x+y^2-1}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big(1 + y\cos(\frac{2x}{x^2+y^4})\big)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^4+y^4}$. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6. Determinar en que puntos son *continuas* cada una de las siguientes funciones:
   [2] $f(x,y) = 5x^3 - 7xy + 6xy^2 + x + 13$ $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}$ $f(x,y) = \ln(1+x^4+y^4) - \operatorname{sen}(x-y^2+\pi)$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Calcular las *derivadas parciales* (de primer orden) de las siguientes funciones en los puntos de su dominio.
   [3] $f(x,y) = x^2y - 3xy + y^2$ $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ $f(x,y) = x^{\frac{x}{y}}$ $f(x,y) =^{y} \operatorname{sen} xy$ $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}(\frac{y}{x})$ $f(x,y) = x^y$ $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ $f(x,y,z) = \cos(x+3z) + (z-y^2)^{-1}$

8. Estudiar la existencia de las *derivadas parciales* de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados (es aconsejable usar las definiciones).

[2] $f(x,y)=|x|$ Puntos: $(0,b)$, $b\in\mathbb{R}$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Punto: (0,

$f(x,y)=|x|y$ Puntos: $(0,b)$, $b\in\mathbb{R}$

9. Para un gas encerrado en un recipiente elástico, el volumen V, la presión P y la temperatura T vienen dados por la ecuación $PV=KT$ (*ley de los gases ideales*), donde K es una constante que depende del gas. Determinar la variación del volumen respecto de la temperatura, a presiń constante, y la variación del volumen respecto de la presión, a temperatura constante.

10. Calcular las *pendientes* de la superficie $z=4x^3y^4$ en el punto $(1,-1,4)$ en la direcciones de los ejes x e y. (Soluciones: 12 y -16.)

11. Calcular, usando la definición de *derivada direccional*, la *pendiente* de la superficie $z=x^2-y+13$ en el punto $(0,0,13)$ en la dirección del plano (*dirección de brújula*) dada por el vector unitario $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. (Solución:$-\frac{1}{\sqrt{2}}$).

12. Para las siguientes funciones, calcúlese la *derivada parcial* de segundo o tercer orden que se indica:

    [2] $f(x,y)={}^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $f(x,y)=x^4y^{-2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ $f(x,y)=5x^2y^2-2x^3y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $f(x,y)=\ln(\frac{x+y}{y^2})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

13. Probar que la función $T(x,t)={}^{-t}\cos(\frac{x}{C})$, que indica la temperatura de un punto x de una barra aislada en el tiempo t, satisface *la ecuación del calor* $\frac{\partial T}{\partial t}=C^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (C es una constante que depende del material de la barra).

14. Sea $f\colon D\to\mathbb{R}$ una función de las variables x,y que posee *derivadas parciales de segundo orden* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en todo punto de D. Se define *el laplaciano* (u *operador de Laplace*) de f como: $\boxed{\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$ Las funciones que verifican *la ecuación de Laplace* $\triangle f=0$ se llaman *funciones armónicas*. Comprobar que las siguientes funciones son armónicas en los dominios indicados:

    [2] $f(x,y)=3x^2y-y^3$, $D=\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=e^x\operatorname{sen}y$, $D=\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $D=\mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x})$, $D=\mathbb{R}^2\{x=0\}$.

15. En los siguientes apartados, hallar una ecuación del *plano tangente* a la superficie definida por $z=f(x,y)$ en el punto P que se indica (en cada caso justificar que el plano tangente existe):

    [2] $f(x,y)=x^2+y^2$, $P=(1,2,5)$ $f(x,y)=x^2+y^2$, $P=(0,0,0)$ $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $P=(1/2,1/2,\sqrt{2}/2)$ $f(x,y)=x^2y+{}^{(x^2+y^2)}$, $P=(1,1,1+e^2)$.

16. Pruébese que la función definida por $f(x,y) =^{-(x^2+y^2)}$ es *diferenciable* en el punto $(1,0)$ y calcúlese la *derivada direccional* de f en el punto $(1,0)$ según la dirección dada por el ángulo $= \frac{\pi}{3}\,(60^o)$. (Solución: $-\frac{1}{}$).

17. Pruébese que la función definida por $f(x,y) = xy + \operatorname{sen}(x+y^2) - \pi$ es *diferenciable* en cada punto del plano y calcúlese la *derivada direccional* de f en el punto $(\pi/2, 0)$ en la dirección del ángulo dado por $\alpha = \frac{\pi}{4}\,(45°)$. (Solución: $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$).

18. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, comprobar que existe la *derivada direccional* en el punto $(0,0)$ en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = (v1, v2)$ y, además, $D_{\vec{v}}f(0,0) = v12v2$. Compruébese que no se verifica la fórmula: $D_{\vec{v}}f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,v1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,v2$ y dedúzcase de lo anterior que f no es diferenciable en $(0,0)$.

19. Se sabe que una función f de dos variables es *diferenciable* en un punto $(x0, y0)$ y que las *derivadas direccionales* de f en ese punto en las direcciones dadas por los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{4}\,(45°)$ y $\beta = \frac{\pi}{6}\,(30°)$ son $\sqrt{2}/2$ y $1/2$ respectivamente. Calcúlense las derivadas direccionales en el punto $(x0, y0)$ en la direcciones de los *ejes de coordenadas* y en la dirección dada por el ángulo $\gamma = \frac{\pi}{3}\,(60°)$. (Soluciones: $0, 1$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

20. Para cada una de las siguientes funciones hállese la *diferencial total* en cualquier punto de su dominio:

    [3] $f(x,y) = x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4$ $f(x,y) = \cos(x + \ln(y))$ $f(x,y,z) = x^2 - 2xz + y^3$.

21. Usar la *diferencial total* para aproximar la variación que sufre $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x,y) se desplaza desde el punto $(1,1)$ al punto $(1{,}01, 0{,}97)$. Comparar esta aproximación con el cambio exacto de z. (Solución: $0,0141$).

22. Dar una aproximación del valor de $A = \dfrac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$ utilizando *la diferencial.* Comparar con el valor exacto. (Solución: $A \approx 0,242161$).

23. En una cierta fábrica la producción diaria es de $Q = 60\,C^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde C es el capital invertido (en millares de euros) y L es la fuerza laboral (en horas de trabajo). En la actualidad, el capital es 900,000 euros y se emplean cada día 1,000 horas de trabajo. Estímese, usando la diferencial, la variación de la produccción que resultará de aumentar la inversión en 1,000 euros y disminuir en 2 el número de horas de trabajo. (Solución: -2).

24. En una práctica de física se quiere medir la aceleración de la gravedad terrrestre con la ayuda de una bola en caída libre. Se realiza la caída desde una altura de 45

cms y el tiempo transcurrido es $0,308$ segundos. Sabiendo que en las mediciones de la distancia y del tiempo se pueden cometer errores de $\pm 0,06$ cms y $\pm 0,02$ segundos respectivamente, estimar el error que se puede cometer en la medición de la aceleración de la gravedad. (Solución: $\pm 1,245\, m/s^2$)

25. Se mide el radio y la altura de un *cono circular* recto con errores que no sobrepasan el 3 % y el 2 % respectivamente (estos son errores relativos). Utilizar la *diferencial* para estimar el porcentaje máximo de error que se puede cometer al calcular el volumen del cono si se utilizan esas medidas. (Solución: 8 %).

26. En los siguientes apartados se pide calcular, en el punto P, *el gradiente* y la *derivada* en la dirección especificada.

    [2] $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$; $P = (1,2)$; $= \pi/3$ $F(x,y,z) = x^2y^3z^4$; $P = (1,1,1)$; $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

27. Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x^{2y-x}$ en el punto $P = (2,1)$, así como la tasa máxima de crecimiento. (Soluciones: $\vec{v} = (-1,4)$ y $\sqrt{17}$).

28. Un cultivo de bacterias ha sido infectado por un contaminante, cuya concentración, medida con un sistema coordenado xy, está dado por $C = 2 + 4\,\mathrm{sen}^2(x + 3y + 8xy)$, donde x e y se miden en centímetros y C en centigramos por litro. Una bacteria b se encuentra en el punto de cooordenadas $(0,2)$. Determinar la dirección de movimiento de la bacteria en la cual ésta encontraría la mayor variación de concentración de contaminante. (Solución: $\vec{v} = (68\,\mathrm{sen}\,12, 12\,\mathrm{sen}\,12)$).

29. Supongamos que la distribución de la temperatura dentro de una habitación está dada por $T(x,y,z) = 25 + 0{,}02^{(0{,}1x+0{,}4y+0{,}01z^2)}$, donde x,y,z se miden a partir de uno de los rincones (dado). A partir de este rincón (el punto (0,0,0)), determinar en qué dirección aumenta la temperatura con más rapidez. (Sol: $\vec{v} = (0{,}002, 0{,}008, 0)$).

30. Supongamos que la temperatura sobre la superficie de una placa metálica viene dada por la función $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$. Que dirección tendrá *el flujo de calor* en el punto de la placa de coordenadas $(1,-2)$?

31. Una llama situada en el origen de coordenada da calor a una placa rectangular de vértices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(3,1)$ y $(3,-1)$. Suponiendo que la temperatura en un punto de la placa es inversamente proporcional a la distancia a la llama, se pide:

    a) Dibujar algunas *isotermas* de la placa.

    b) En qué punto de la placa debería encontrarse una partícula para que la dirección de enfriamiento más rápida fuese la del eje de abcisas (eje OX)?.

32. Dar una ecuación del *plano tangente* y una de *la recta normal* a la *superficie* dada en el punto P indicado.

    [2] $xyz = 12\,;\quad P = (2,-2,-3)$ $x^2y + y^2z + z^2x = 5\,;\quad P = (1,-1,2)$

33. En que puntos de la superficie $z = 3xy - x^3 - y^3$ es horizontal el plano tangente?. (Sol.: En $(0,0,0$ y $(1,1,1))$.

34. Comprobar que las esferas de ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2-4x = -3$, respectivamente, son *tangentes* en el punto $(1,0,0)$.

35. Probar que el plano $2\,x - 6\,y + 3\,z = 49$ es tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 49$. En que punto? (Solución: en el punto $(2,-6,3)$).

36. Dar una ecuación de la *recta tangente* en el punto $P = (0,1,3)$ a la curva dada como intersección de las dos superficies $\begin{cases} x^2+2y^2+2z^2 = 20 & \text{Elipsoide} \\ z = 4-(x^2+y^2) & \text{Paraboloide} \end{cases}$. (Solución: $x = -20\,t,\quad y = 1,\quad z = 3.$)

37. Dar una ecuación de la *recta tangente* a la curva intersección del paraboloide $z = x^2+y^2$ con el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $(1,0,1)$. (Solución: En paramétricas: $x = 1,\quad y = t,\quad z = 1$; es decir, la recta que se obtiene como intersección de los planos: $x = 1$ y $z = 1$.)

38. Determinar una ecuación de la *recta tangente* en el punto $P = (0,4,\frac{\pi}{2})$ a la *hélice* dada por la ecuaciones paramétricas: $x = 4\,\cos t,\quad y = 4\,\operatorname{sen} t,\quad z = t$. (Solución: $x = -4\,t,\quad y = 4,\quad z = \frac{\pi}{2} + t.$)

39. Demostrar que la curva dada en forma paramétrica por

    $$x = \tfrac{3}{2}(t^2+1),\quad y = (t^4+1)\quad z = t^3$$

    es *perpendicular* al elipsoide $x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 = 20$ en el punto $(3,2,1)$; es decir, en ese punto la recta tangente a la curva y la recta normal a la superficie coinciden.

Capítulo 2

Extremos de funciones de varias variables

2.1. Máximos y mínimos

Máximos y mínimos

2.1.1. Preliminares

Existe una gran variedad de problemas relacionados con el conocimiento de los valores máximo y mínimos (valores extremos) de funciones de varias variables. En el mundo real surgen muchísimos *problemas de optimización*, que son los que estudian estos valores extremos. Por ejemplo, si $T(x, y)$ representa la temperatura en cada punto (x, y) de una placa ¿cuáles son los puntos más calientes y los más fríos de la placa y cuáles son esas temperaturas extremas ?. Esto nos lleva a un problema de optimización relacionado con una función de dos variables.

El estudio de máximos y mínimos para funciones de una sola variable se vió en la primera parte de la asignatura. Aquí vamos a extender las técnicas vistas a funciones de dos variables y posteriormente daremos información sobre el caso de tres variables. Como es de esperar la teoría es aquí mucho más complicada que en el caso de una variable. Vamos a definir los conceptos en el caso de una función de dos variables; para funciones de tres o mas variables los conceptos son análogos.

[Extremos absolutos] Sea f una función de las variables x, y definida en una región D del plano y $(x0, y0)$ un punto de D. Se dice que:

I) f tiene (o alcanza) un máximo absoluto en el punto $(x0, y0)$ cuando verifica: f(x,y)≤ $f(x0, y0), \quad$ para cada $(x, y) \in D$. En este caso el valor $f(x0, y0)$ sería el valor máximo absoluto de f.

II) f tiene (o alcanza) un mínimo absoluto en $(x0, y0)$ cuando verifica: f(x0, y0) $\leq f(x, y), \quad$ para cada $(x, y) \in D$. En este caso el valor $f(x0, y0)$ sería el valor mínimo absoluto de f.

A los valores máximo y mínimo absolutos de f se les llaman extremos absolutos de f.

Al igual que sucede con el caso de funciones de una sola variable, pueden darse valores máximos y mínimos que no son absolutos pero que sí lo son de una forma local, es decir en las proximidades de un punto $(x0, y0)$ y, así, podría suceder que $f(x0, y0)$ que sea mayor que los valores $f(x, y)$ donde (x, y) son puntos próximos a $(x0, y0)$, pero puede que ésto no suceda en puntos alejados de ese punto.

En este caso esa proximidad, ese carácter local, viene dado en términos de discos.

[Extremos locales o relativos] Sea f una función de las variables x, y definida en una región D del plano y $(x0, y0)$ un punto de D. Se dice que:

I) f tiene (o alcanza) un máximo local o relativo en el punto $(x0, y0)$ cuando existe un disco abierto C que contiene a $(x0, y0)$ (o con centro en $(x0, y0)$) tal que se verifica: f(x,y)$\leq f(x0, y0), \quad$ para cada $(x, y) \in D \cap C$.

II) f tiene (o alcanza) un mínimo local o relativo en $(x0, y0)$ cuando existe un disco abierto C que contiene a $(x0, y0)$ (o con centro en $(x0, y0)$) tal que se verifica: f(x0, y0) $\leq f(x, y), \quad$ para cada $(x, y) \in D \cap C$.

A los valores máximo y mínimo relativos de f se les llaman extremos relativos de f.

La expresión "para cada $(x, y) \in D \cap C$"se lee diciendo "para cada (x, y) del dominio D que se encuentra en el disco C".

Afirmar que f tiene un máximo (mínimo) relativo en $(x0, y0)$ significa que ningún punto cercano de la gráfica $z = f(x, y)$ está más alto (bajo) que el punto $(x0, y0, f(x0, y0))$.

Un extremo absoluto es siempre un extremo relativo pero un extremo relativo puede que no sea absoluto.

A la hora de tratar un problema de optimización (problema de extremos) nos enfrentamos con dos cuestiones:

La existencia de los valores extremos (locales o absolutos).

En el caso de que existan, cómo determinar esos valores extremos, o mejor aún, cómo determinar los puntos del dominio donde se alcanzan los extremos (métodos a seguir). En general, la existencia de extremos locales y/o absolutos no está garantizada y es algo que hay que estudiar en cada caso concreto. No obstante, veremos al final de esta sección un importante resultado, muy útil en ciertos casos, que asegura la existencia de extremos absolutos. La determinación de los puntos donde se alcanzan los valores extremos es, en este caso, mucho más complicado que en el caso de funciones de una sola variable y conviene tener presente lo que sucede para este tipo de funciones como punto de referencia.

Recordemos que para una función de una sola variable, pongamos por caso el de una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sucede que si f alcanza un extremo relativo en un punto $x0$, que es un *punto interior* del intervalo, es decir, $x0 \in (a,b)$, y f es derivable en ese punto, entonces debe suceder que la derivada $f'(x0) = 0$ (condición necesaria pero no suficiente para que $f(x0)$ sea un extremo). Pero a veces un valor extremo se alcanza en un punto interior donde f *no es derivable* o *en un punto de la frontera*, es decir, en $x0 = a$ o en $x0 = b$. En este último caso, la derivada por la derecha en a o la derivada por la izquierda en b suele ser no nula.

Es decir, en este caso, los puntos donde f alcanza un extremo, local o absoluto, hay que buscarlos entre:

- Puntos del interior del intervalo (es decir, los puntos de (a,b)) donde la derivada se anula.
- Puntos del interior del intervalo donde la función no es derivable.
- Los dos puntos de la frontera del intervalo; es decir, $x0 = a$ y $x0 = b$.

A veces sucede que el intervalo I donde está definida la función no tiene puntos que estén en la frontera, por ejemplo, $I = (a,b)$, $I = (a,\infty)$, $I = \mathbb{R}$ y, si además la función f es derivable en todos los puntos, entonces los puntos de extremos locales o absolutos sólo hay que buscarlos entre los puntos donde la derivada se anula.

La situación referida para funciones de una sola variable se generaliza a funciones de dos o mas variables, pero en este caso todo es más complicado. En nuestro estudio para funciones de dos variables, para determinar los puntos donde se pueden alcanzar los extremos vamos a tener que distinguir entre *puntos interiores* y *puntos de la frontera*. Precisamente, una de las cosas que más se complica en dos variables es el estudio de los puntos de la frontera (si existen) donde la función alcanza un extremo.

A continuación vamos a definir formalmente los conceptos de puntos interiores y puntos fronteras y, de paso, aprovecharemos para definir dos conceptos referentes a regiones del plano, que vienen a generalizar el caso de un intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma $[a,b]$, y que se van a usar en el *teorema de optimización de Weierstrass.*

[Puntos interiores y puntos fronteras] Sea D una región del plano.

I) Un punto $(x0, y0)$ de D se dice que es un punto interior de D cuando existe algún disco centrado en $(x0, y0)$ contenido en D. Al conjunto de los puntos interiores de D se le suele representar por D.

II) Un punto $(x0, y0)$ del plano se dice que es un punto frontera de D cuando en cada disco centrado en $(x0, y0)$ hay puntos de D y también puntos que no pertenecen a D. Al conjunto de los puntos frontera de D se le llama frontera de D y se le suele notar por $\partial(D)$ o $\mathrm{Fr}\,(D)$.

El plano IR2 no posee frontera. Es obvio que para una región del plano su frontera no es tan extremedamente simple como la frontera del intervalo $I = [a, b]$, que solo consta de dos puntos o la de $I = [a, \infty)$ que sólo tiene un punto. La frontera de una región del plano puede estar formada por una curva, distintos trozos de curvas y rectas, etc.

[Conjuntos cerrados] Una región del plano se dice cerrada cuando contiene a todos los puntos que están en su frontera.

Poner ejemplos gráficos.

[Conjuntos acotados] Una región del plano se dice acotada cuando está contenida en un disco.

Así por ejemplo, un disco, una circunferencia, una elipse, una región triangular, una región rectangular, . . . son ejemplos de regiones acotadas. Una parábola, el primer cuadrante del plano, todo el plano, sería conjuntos no acotados

Un resultado sobre extremos absolutos

Ya hemos advertido de que, en general, saber si una función alcanza un extremo absoluto (global) es complicado y en muchas situaciones hay que hacer un estudio particular del caso que se trata. No obstante, existe un resultado debido a Weierstrass, que nos permite de una forma simple poder asegurar en muchos casos la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para funciones de una sola variable sabemos que si tenemos un intervalo de longitud finita (acotado) de la forma $[a, b]$ (intervalo cerrado), entonces cualquier función *continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza en puntos del intervalo valores extremos. Este resultado no es válido para otro tipo de intervalos, los que no son de longitud finita, como $\mathbb{R}$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b), \ldots$, o los que teniendo longitud finita no contienen a uno de sus puntos extremos (puntos frontera), como (a, b), $(a, b], \ldots$. El resultado anterior tiene una generalización a funciones de varias variables que vamos a exponer aquí en el caso de dos variables.

[Teorema de optimización de Weierstrass] Si f es una función de dos variables: x, y, definida y continua en una región D del plano que es cerrada y acotada, entonces existen puntos en D donde f alcanza extremos absolutos; es decir,

1. Existe al menos un punto $(x0, y0)$ tal que $f(x, y) \leq f(x0, y0)$ para cada $(x, y) \in D$, (máximo absoluto).

2. Existe al menos un punto $(x1, y1)$ en D tal que $f(x1, y1) \leq f(x, y)$ para cada $(x, y) \in D$, (mínimo absoluto).

El resultado anterior será aplicable a regiones del plano como son como una región circular, triangular o rectangular siempre que incluyamos en ellas los puntos de la frontera (trazo continuo) y a curvas como circunferencias o elipses, etc.

El estudio de los extremos que se alcanzan en puntos frontera vamos a dejarlo para la parte final de este tema y vamos a empezar por la parte más manejable y conocida, que es el estudio de extremos en puntos interiores donde la función es diferenciable o má s que diferenciable. Por otra parte, en principio sólo vamos a tratar extremos locales. Los extremos absolutos, de existir, se encontarían entre los extremos locales.

2.1.2. Método para la determinación de extremos locales en puntos interiores

Extremos locales en puntos interioresMáximos y mínimos

Decíamos anteriormente que para una función de una sola variable f sucede que si f alcanza un extremo relativo en un punto interior $x0$, donde f es derivable, entonces debe verificarse $f'(x0) = 0$. Geométricamente la condición $f'(x0) = 0$ significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x0, y0)$ es horizontal, es decir, paralela al eje de abcisas (hacer un dibujo).

De la misma forma, en el caso de una función de dos variables $f\colon D \to \mathbb{R}$, si $(x0, y0)$ es un punto interior del dominio D y f es diferenciable en ese punto, podemos considerar el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x0, y0, f(x0, y0))$. Parece lógico que si f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un extremos local (sea máximo o mínimo) tal plano tangente debe ser horizontal, es decir, paralelo al plano xy (plano $z = 0$), para lo cuál un vector normal $\vec{n}$ al plano debe tener la dirección del eje z, es decir la del vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$, o dirección opuesta; o sea, debe ser de la forma $\vec{n} = (0, 0,)$.

Sabemos que un vector normal al plano tangente en el punto P viene dado por =(-(x0, y0), -(x0, y0), 1) $\equiv (-f_x(x0, y0), -f_y(x0, y0), 1)$. Necesitamos que $\vec{n}$ tenga la misma dirección o dirección opuesta al vector $\vec{k}$ pero ésto solo sucede si las dos primeras componentes del vector $\vec{n}$ se anulan. Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

[Criterio de las primeras derivadas] Supongamos que una función $f\colon D \to \mathbb{R}$, en las variables x, y, alcanza un extremo local (máximo o mínimo) en un punto $(x0, y0)$ interior al dominio D donde f es diferenciable. Entonces debe suceder lo siguiente:

$$\boxed{(x0, y0) = 0, \quad (x0, y0) = 0.} \tag{2.1.1}$$

Observemos que la condición necesaria para los extremos (2.1.1) nos dice que *el vector gradiente* $\nabla f(x0, y0)$ es el vector nulo. Siendo f diferenciable esta condición nos dice también que *todas las derivadas direccionales en el punto* $(x0, y0)$ *son nulas*. Como se puede ver se trata de una natural generalización de la condición $f'(x0) = 0$ para funciones de una sola variable.

Se puede dar una simple prueba analítica del resultado anterior sin suponer que f sea diferenciable en el punto $(x0, y0)$ considerando las funciones de una sola variable $g(x) = f(x, y0)$ y $h(y) = f(x0, y)$. La condición de extremo local sobre f lleva a condiciones de extremos para las funciones anteriores en los punto $x0$ e $y0$ respectivamente, por lo que aplicando lo conocido para funciones de una sola variable se obtiene $(x0, y0) = g'(x0) = 0$ y $(x0, y0) = h'(y0) = 0$.

A los puntos $(x0, y0)$, interiores al dominio D, donde se verifica la condición (2.1.1) los llamaremos *puntos críticos* de la función f. En los textos dirigidos a físicos e ingenieros suelen incluir entre los puntos críticos aquellos $(x0, y0)$ donde no existe alguna de las derivadas parciales: $f_x(x0, y0), f_y(x0, y0)$. Así pues, bajo las condiciones establecidas en el teorema anterior, los candidatos a puntos donde f alcanza un extremo (local o absoluto) son los puntos críticos. La determinación de los puntos críticos exige la resolución del sistema de ecuaciones en las incógnitas x e y dado por:

$$\boxed{f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.}$$

No siempre será fácil resolver este sistema de ecuaciones. Las soluciones del sistema, si existen, son los puntos críticos y entre ellos se encuentran, si existen, los puntos de extremo que sean interiores al dominio D.

Para una función de una sola variable f sucede que *la condición* $f'(x0) = 0$ *no garantiza que* f *alcance un extremo local en el punto* $x0$, se trata únicamente de una condición necesaria (un requisito) que a veces no es suficiente. Por ejemplo, la función definida por $f(x) = x^3$ verifica $f'(0) = 0$ pero f no alcanza un extremo local en ese punto como puede observarse con su gráfica.

Lo mismo puede suceder con funciones de dos variables, es decir, el que $(x0, y0)$ sea un punto crítico no garantiza que f alcance en tal punto un extremo local. Un sencillo ejemplo donde ésto sucede está dado por la función $\boxed{f(x, y) = y^2 - x^2}$. Se trata de una función definida en todo el plano que es diferenciable en todos los puntos (por ser polinómica) y aquí todos los puntos son interiores. Las dos derivadas parciales de f sólo se anulan en el punto $(0, 0)$. Luego el único punto crítico de f es el origen y, por tanto, $(0, 0)$ es el único candidato a punto de extremo. Sin embargo f no alcanza en ese punto un valor extremo (ni absoluto ni local). En efecto, observemos que para los puntos de los ejes de coordenadas se verifica:

$$f(x, 0) = -x^2 < 0 = f(0, 0), \quad f(0, y) = y^2 > 0 = f(0, 0).$$

En cualquier disco centrado en el origen hay puntos de los ejes. Por tanto, en cualquier disco centrado en el origen hay puntos (x, y) tales que $f(x, y) < f(0, 0)$ y puntos (x, y) tales que $f(x, y) > f(0, 0)$. En consecuencia, en el punto $(0, 0)$ no se puede alcanzar un máximo local ni un mínimo local (más adelante veremos que en $(0, 0)$ la función f tiene un punto de silla). La gráfica de f cerca del punto $(0, 0, 0)$ es como una silla de montar. Lo anterior nos dice que la función f no posee extremos locales.

Si bien para algunos objetivos es suficiente con el resultado del teorema 2.1.2, a la vista del ejemplo anterior se hace necesario tener una condición que nos garantice en determinados casos que una función alcanza en un punto crítico un extremo local. Para ver ésto, como siempre, es conveniente tener la referencia de lo que conocemos para funciones de una sola variable.

Para funciones f de una sola variable tenemos un criterio muy útil en el que se usa *la segunda derivada* f'' (es decir, se supone que f es dos veces derivable). Concretamente, suponiendo que $x0$ sea un punto crítico de f, se tiene:

- Si $f''(x0) > 0$ la función f alcanza en $x0$ un *mínimo local*.
- Si $f''(x0) < 0$ la función f alcanza en $x0$ un *máximo local*.
- Si $f''(x0) = 0$ no tenemos información (caso dudoso).

La tercera situación la tenemos en el caso de la función $f(x) = x^3$ y el punto $x0 = 0$.

Para funciones de dos variables existe un criterio análogo al anterior donde se trabaja con las derivadas parciales de segundo orden, pero la gran diferencia reside ahora en que tenemos cuatro derivadas de segundo orden en lugar de una, con lo que resulta más complicado.

Supongamos que existe un disco abierto centrado en el punto $(x0, y0)$ *donde las cuatro derivadas de segundo orden:* $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ *están definidas y son continuas.* El lugar de $f''(x0)$ lo va a ocupar aquí una matriz que se forma con estas cuatro derivadas de segundo orden evaluadas en el punto $(x0, y0)$. Esta matriz recibe el nombre de *matriz hessiana* de f en el punto $(x0, y0)$ y se define así:

$$\boxed{Hf(x0, y0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x0, y0) & f_{xy}(x0, y0) \\ f_{yx}(x0, y0) & f_{yx}(x0, y0) \end{pmatrix}.} \tag{2.1.2}$$

Obsérvese que estamos en condiciones de poder aplicar el *teorema de Schwartz* sobre derivadas cruzadas y así podemos asegurar que en nuestro caso se verifica: $f_{xy}(x0, y0) = f_{yx}(x0, y0)$, es decir, la matriz hessiana $Hf(x0, y0)$ es *simétrica* (coincide con su matriz traspuesta).

El determinante de esta matriz va ser esencial en nuestro criterio. Lo notaremos por d.

$$\boxed{d = \det Hf(x0, y0) = f_{xx}(x0, y0)f_{yy}(x0, y0) - (f_{xy}(x0, y0))^2.}$$

Tenemos entonces el siguiente resultado, de cuya prueba prescindimos por ser muy laboriosa y estar fuera del nivel de este curso.

[Criterio de las segundas derivadas] Supongamos que $(x0, y0)$ es un punto interior del dominio de la función f y es un punto crítico de f; es decir, $f_x(x0, y0) = f_x(x0, y0) = 0$. Supongamos además que f posee derivadas parciales segundas y son continuas en un disco centrado en el punto $(x0, y0)$ y sea d el determinante de la matriz hessiana $Hf(x0, y0)$. En tal situación se verifica:

Si $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) > 0$, f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un mínimo local.

Si $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) < 0$, f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un máximo local.

Si $d < 0$, f no alcanza en $(x0, y0)$ un extremo local (ni máximo ni mínimo) pero tiene en $(x0, y0)$ un punto de silla.

Si $d = 0$ el criterio no da información (caso dudoso).

El caso $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) = 0$ no puede darse pues en tal situación tendríamos una contradicción ya que $d = f_{xx}(x0, y0)f_{yy}(x0, y0) - (f_{xy}(x0, y0))^2 = -(f_{xy}(x0, y0))^2 \leq 0$.

Cuando $d > 0$ (en cuyo caso tenemos un mínimo o un máximo local) sucede que f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo pues $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$, dicho de otra forma, en la diagonal principal de la matriz hesssiana no hay cambio de signo, o los dos son positivos (caso de mínimo) o los dos son negativos (caso de máximo). Esto nos dice también que en el criterio, en los dos primeros puntos, se puede sustituir f_{xx} por f_{yy}.

El criterio sólo asegura en sus dos primeros puntos que los extremos son locales (relativos), pero no asegura que sean extremos absolutos.

Que $(x0, y0)$ sea *un punto de silla* o de ensilladura para la función f significa que hay dos direcciones tales que a través de una de ellas f alcanza un máximo en ese punto y a través de la otra f alcanza un mínimo. Se le llama así porque la gráfica de f cerca del punto se parece a una silla de montar.

A continuación exponemos algunos sencillos ejemplos donde aplicaremos los resultados de los teoremas 2.1.2 y 2.1.2. En cada uno de ellos se da la expresión de la función de dos variables y se trata de determinar los posibles puntos de su dominio donde la función alcanza un extremo local. Si es posible, trataremos después de ver si se trata de un extremo absoluto. En todos los casos van a aparecer *funciones polinómicas* y, por tanto, definidas en $D = \mathbb{R}2$. Todos los puntos del dominio son *puntos interiores*. Por otra parte, al ser polinómicas van a ser *diferenciables* en cada punto. Por tanto, los únicos puntos donde se pueden alcanzar extremos son los *puntos críticos*. Pero es más, las cuatro derivadas de segundo orden están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}2$, por lo que podemos aplicar el resultado del teorema 2.1.2.

En ningun caso podremos aplicar el teorema de optimización de Weierstrass 2.1.1, para asegurar la existencia de extremos absolutos, ya que el dominio $D = \mathbb{R}2$ no es acotado.

$\boxed{f(x, y) = 1 - x^2 - y^2}$.

Para determinar los posibles puntos críticos planteamos el sistema de ecuaciones $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$, que en nuestro caso es: $-2x = 0$, $-2y = 0$. La única solución de este sistema es $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto crítico de la función f es el origen $(0, 0)$. Este es el único punto donde f puede alcanzar un extremo.

Consideramos la matriz hessiana de f en el punto $(0, 0)$. Como $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -2$ y $f_{xy} = f_{yx} = 0$, se tiene

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad d = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,0) = -2 < 0.$$

Por tanto, haciendo uso del resultado del teorema 2.1.2, podemos afirmar que f alcanza en el punto $(0, 0)$ un *máximo local*. En este caso es muy fácil ver (a ojo!) que este máximo es también un *máximo absoluto*, pues observemos que $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2) \leq 1 = f(0, 0)$, cualquiera que sea $(x, y) \in \mathbb{R}2$. Esto se puede ver gráficamente dibujando la gráfica de f, que es un paraboloide con vértice el punto $(0, 0, 1)$ que va "hacia abajo". Así pues, el valor máximo absoluto de f es 1.

Los cálculos anteriores nos dicen que, aparte del punto $(0, 0)$, en ningún otro punto alcanza f un extremo; es decir, f no tiene otros máximos locales, no tiene ningún mínimo local y, por tanto, no alcanza un mínimo absoluto. Todo ésto se puede confirmar con la visión de la gráfica.

$\boxed{f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20}$.

Razonando de la misma forma que en el ejemplo anterior planteamos el sistema de ecuaciones:

$$f_x(x, y) = 4x + 8 = 0, \quad f_y(x, y) = 2y - 6 = 0,$$

cuya única solución es $(x, y) = (-2, 3)$. Igual que antes sólo obtenemos un punto crítico. Las derivadas de segundo orden son $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 2$ y $f_{xy} = f_{yx} = 0$, y, por tanto:

$$Hf(-2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d = 8 > 0, \quad f_{xx}(-2, 3) = 4 > 0.$$

Por tanto, podemos afirmar que f alcanza en el punto $(-2, 3)$ un *mínimo local* de valor $f(-2, 3) = 3$. En este caso no es trivial, como en el caso anterior, deducir si se trata de un mínimo absoluto o simplemente es un mínimo local. Ahora bien, manipulando la expresión de f conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (2x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) + 20 = 2(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 20 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + 20 - 8 - 9 \\ &= 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 \geq 3 = f(-2, 3). \end{aligned}$$

Esto nos dice que f alcanza en el punto $(-2, 3)$ un *mínimo absoluto* de valor 3. De hecho, la gráfica de f es otro paraboloide, esta vez con vértice en el punto $(-2, 3, 3)$, que "mira hacia arriba". Aparte del punto $(-2, 3)$, en ningún otro punto alcanza f un extremo.

En general, el comprobar si un extremo local es o no es un extremo absoluto resulta muy complicado salvo en ciertos casos como los anteriores o en situaciones que aquí no podemos exponer. Observemos que en los dos casos anteriores sólo se ha obtenido un punto crítico, que finalmente es un extremo absoluto, y, además, la matriz hessiana no depende de (x, y). Todo ésto no es casualidad y tiene su justificación en la teoría de funciones *convexas* y *cóncavas*, que aquí no podemos exponer. Para este tipo de funciones un punto crítico es finalmente un punto de extremo absoluto. La función del primer ejemplo es cóncava y la del segundo ejemplo es convexa.

$\boxed{f(x,y) = y^2 - x^2}$.

Es evidente que el único punto crítico de f es el punto $(0,0)$. Este ejemplo lo vimos antes de dar el criterio de las segundas derivadas y comprobamos que en el punto $(0,0)$ la función no alcanza un extremo (ni máximo ni mínimo). Esto lo podemos confirmar con el resultado del teorema 2.1.2. En efecto, en este caso la matriz hessiana y su determinante son:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d = -4 < 0.$$

Al ser el determinante negativo no tenemos en este punto un extremo sino *un punto de silla* (obsérvese el cambio de signo en la diagonal principal). Así pues, esta función no posee extremos locales y por, tanto, no posee extremos absolutos.

$\boxed{f(x,y) = x^2\, y^2}$.

En este caso el sistema de ecuaciones que satisfacen los puntos críticos es: $xy^2 = 0$, $x^2y = 0$, y ésto sólo lo verifican los puntos (x,y) del plano que verifican $x = 0$ o $y = 0$, es decir, todos los puntos del eje de ordenadas y todos los puntos del eje de abcisas. En este caso nos encontramos con *infinitos puntos críticos*. En este caso resulta conveniente determinar la matriz hessiana de f en cualquier punto (x,y) y resulta:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}, \qquad d = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2.$$

Observemos que en los puntos críticos el determinante es nulo ($d = 0$) y el criterio de las segundas derivadas no da información. Se trataría de casos dudosos, pues pueden ser puntos de extremo o no serlos. En este caso, dado que el ejemplo es muy simple, podemos deducir fácilmente(a ojo !) que en todos los puntos críticos f *alcanza un mínimo absoluto* de valor 0, ya que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}2$ se tiene $f(x,y) = x^2\, y^2 \geq 0 = f(x0, y0)$ si $(x0, y0)$ es crítico. Esta función posee una gráfica muy espectacular (véase Larson página 1182).

$\boxed{f(x,y) = 8\, x^3 - 24\, xy + y^3}$.

En este caso el sistema de ecuaciones que satisfacen los puntos críticos no es tan trivial.

$$f_x(x,y) = 24x^2 - 24y = 0, \quad f_y(x,y) = -24x + 3y^2 = 0.$$

La primera ecuación es $y = x^2$; sustituyendo en la segunda, se obtiene $-24x + 3x^4 = x(-24 + 3x^3) = 0 \iff x = 0$ o $x = 2$ y, por tanto, los únicos puntos críticos son $(0,0)$ y $(2,4)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 48x & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix}; \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = -(-24)^2 < 0;$$

$$Hf(2,4) = \begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}; \quad d = 1728 > 0,$$

$$f_{xx}(2,4) = 96 > 0.$$

Por tanto, en el punto $(0,0)$ la función no alcanza un valor extremo; tiene un *punto de silla* y en el punto $(2,4)$ la función tiene un *mínimo local* de valor $f(2,4) = -64$. Se puede comprobar que *este mínimo local no es absoluto* sin mas que observar que $f(0,y) = y^3$ y así $f(0,-10) = -1000 < f(2,4)$. Todo lo anterior nos dice que esta función no posee ni mínimo absoluto ni máximo absoluto ni máximos locales.

Es necesario volver a resaltar que *el método usado en los ejemplos anteriores sólo es válido cuando el punto donde se alcanza el extremo es interior al dominio y cuando la función f es diferenciable en tal punto.* Sobre este segundo aspecto, podemos recordar lo que sucede con la función de una sola variable $f(x) = x$, que no posee puntos críticos y que sólo alcanza un extremo, concretamente un mínimo absoluto, en el único punto donde no es derivable, el punto $x0 = 0$. Una situación análoga para una función de dos variables la tenemos con la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. La gráfica de esta función es un cono con vértice en el origen (superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de $g(x) = x$ alrededor del eje z). A la vista de la gráfica es evidente que f alcanza un mínimo absoluto de valor 0 en el punto $(0,0)$ y no alcanza otro extremo local en un punto distinto. Resulta que f no posee puntos críticos y el único punto del plano donde f no posee derivadas parciales es el punto $(0,0)$. Otro ejemplo análogo al anterior se tiene con la función $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)^{1/3}$; en este caso, en el $(0,0)$ alcanza un máximo absoluto.

Extremos de funciones de tres variables

El estudio de extremos locales para funciones de tres variables en puntos interiores al dominio es análogo al visto para funciones de dos variables salvo en el criterio de las segundas derivadas, donde hay que precisar cuidadosamente el método. Supongamos $D \subset \mathbb{R}3$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función en las variables x, y, z y sea $(x0, y0, z0)$ un punto interior del dominio D donde f es diferenciable. Se tiene lo siguiente:

<u>Condición necesaria</u>: Si f alcanza un extremo local en $(x0, y0, z0)$ debe suceder lo siguiente:

$$\boxed{f_x(x0,y0,z0) = f_y(x0,y0,z0) = f_z(x0,y0,z0) = 0,}$$

es decir, el gradiente $\nabla f(x0,y0,z0)$ debe ser el vector nulo (*puntos críticos*).

<u>Condición suficiente</u>: Suponiendo que las derivadas de segundo orden de la función f existen y son continuas en una bola centrada en el punto $(x0, y0, z0)$, consideramos la *matriz hessiana*:

$$Hf(x0,y0,z0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

donde las derivadas de segundo orden se evaluan en el punto $(x0, y0, z0)$ y se calculan los determinantes de los tres menores principales de la matriz hessiana:

$$d1 = f_{xx}, \quad d2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad d3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

Entonces:

1. Si $\boxed{d1 > 0,\ d2 > 0 \text{ y } d3 > 0}$ la función f alcanza en el punto $(x0, y0, z0)$ un *mínimo local.*

2. Si $\boxed{d1 < 0,\ d2 > 0 \text{ y } d3 < 0}$ la función f alcanza en el punto $(x0, y0, z0)$ un *máximo local.*

Obsérvese que en el caso de dos variables los determinantes de los dos menores principales de la correspondiente matriz hessiana $Hf(x0, y0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ serían $d1$ y $d2$ y según el teorema 2.1.2 si $d1 > 0$ y $d2 > 0$ tenemos un mínimo local y si $d1 < 0$ y $d2 > 0$ tenemos una máximo local. De esta forma lo que hay de común en ambos casos es que para obtener mínimo local se necesita que todos los determinantes sean positivos, mientras que para obtener un máximo local se necesita que los signos de los determinantes se vayan alternando empezando por el signo $-$. En el caso de tres variables no mencionamos lo que puede darse en otras situaciones distintas a las reflejadas en los puntos (a) y (b).

$\boxed{f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1}$.

La función f es polinómica y por consiguiente su dominio es todo el espacio $D = \mathbb{R}3$ y es diferenciable en cada punto del dominio. Aquí todos los puntos del dominio son interiores. Por tanto, los puntos donde f pudiera alcanzar un extremo local deben ser puntos críticos, es decir, puntos (x, y, z) para los que se verifica $\mathrm{f}_x(x, y, z) = 0, \quad f_y(x, y, z) = 0, \quad f_z(x, y, z) = 0$. En este caso tal sistema de ecuaciones (tres ecuaciones con tres incógnitas x, y, z) sería: -4x+2y=0, -2y+2x+2z=0, -6z+2y=0, o, equivalentemente, -2x+y=0, x-y+z=0, y-3z=0. Se trata de un sistema homogéneo. Puesto en forma matricial, la matriz asociada es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es $-6 - (-3 - 2) = -1$. Al ser el determinante distinto de 0 el sistema anterior sólo posee la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Es decir, el único punto crítico, y por tanto el único punto donde f puede alcanzar un extremo, es el punto $(0, 0, 0)$.

Para determinar si en este punto se alcanza un extremo debemos recurrir a la matriz hessiana. Observemos que en este caso las nueve derivadas de segundo orden son constantes, y por tanto están definidas y son continuas en todo el espacio. Concretamente:

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Observemos que sale una matriz simétrica al igual que en el caso de dos variables (esto sucede en todos los casos considerados) y que en la diagonal principal son todos negativos (al igual que en el caso de dos variables no debe haber cambios de signos en esta diagonal si se alcanza un extremo y, en este caso, se tendría un máximo). Calculamos los determinantes de los menores principales

$$d1 = -4 < 0, \quad d2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0 \quad d3 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

En consecuencia, estamos en la situación descrita en el punto (b) (alternancia de signos empezando por $-$) y concluimos que f alcanza en el punto $(0,0,0)$ un *máximo local* de valor 1 y no alcanza más maximos ni mínimos locales. (Se puede probar que f alcanza un máximo absoluto en el origen pues al no depender la matriz hessiana de x, y, z y dado que $d1 < 0$, $d2 > 0$, $d3 < 0$, la función resulta ser *cóncava* en $\mathbb{R}3$).

2.1.3. Métodos para la determinación de extremos locales en puntos de la frontera (Optimización restringida)

Optimización restringidaMáximos y mínimos

Son muchas las situaciones que dan lugar a un problema de optimización (cálculo de máximos o/y mínimos) de una función de dos variables sobre una curva del plano o de una función de tres variables sobre una superficie o curva en el espacio. Estos subconjuntos tienen la particularidad de que no poseen puntos interiores, es decir, todos son puntos de la frontera.

Por ejemplo, supongamos que $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ representa la temperatura en el punto (x, y) de una placa y estamos interesados en conocer las temperaturas extremas sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. La existencia de los puntos donde se alcanzan temperaturas extremas está asegurada por el teorema de optimización de Weierstrass, ya que la circunferencia es un región acotada y cerrada y la función es continua en los puntos de la circunferencia, por ser polinómica. Aunque la función f está definida en todo el plano sólo estamos interesados en los puntos de la circunferencia, es decir, en la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon x^2 + y^2 = 1\}$. Podemos decir que tratamos de optimizar $f(x, y)$ sujeto a la restricción o ligadura $x^2 + y^2 = 1$.

El método visto en la sección anterior, según el cuál encontrábamos los candidatos entre los puntos críticos de f no sirve aquí. Observemos que el único punto del plano donde las dos derivadas parciales de f se anulan (punto crítico) es el $(0, 0)$ pero este punto no pertenece a la circunferencia. De considerar la función sobre todo el plano, éste sí podría ser un punto de extremo pero en nuestro caso obviamente no es así. El motivo de que el método no sirva aquí es que éste se usa para determinar puntos interiores al conjunto D donde f puede alcanzar un extremo, pero ningún punto de la circuferencia es interior a ella. Es el mismo problema que se tiene cuando una función de una sola variable $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza un extremo en un punto $x0$ de la frontera de $[a, b]$, es decir en $x0 = a$ o $x0 = b$; este punto no se obtendría entre los puntos donde la derivada se anula.

El mismo problema tendríamos si quisiéramos determinar las temperaturas extremas sobre el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon (x-2)2+y2 \leq 1\}$, que es un conjunto cerrado y acotado. En este caso D tiene puntos interiores y puntos fronteras, pero el único punto encontrado mediante el método visto en la sección anterior es el origen $(0, 0)$, el cuál no pertenece al disco D. De paso ésto nos confirma que los puntos del disco donde se alcanzan las temperaturas extremas deben estar en la frontera de D, pero está claro que estos puntos de la frontera no se pueden hallar entre los puntos críticos.

Siguiendo con la misma función temperatura, otra situación en la que detectamos un problema como los anteriores, es si tenemos una región cerrada y acotada con puntos interiores (un disco, una superficie rectangular, una superficie triangular, ...) que contenga al $(0, 0)$ como punto interior (hacer un dibujo). En este caso, en el $(0, 0)$ podría alcanzarse un mínimo o un máximo, de hecho se alcanza un mínimo absoluto; pero, ¿en que punto o puntos se alcancarían un máximo absoluto?. Está claro que en puntos de la frontera. En puntos del interior no puede ser pues éstos deberían ser puntos críticos y el único crítico es el origen.

Los ejemplos anteriores nos muestran claramente que, en ciertos casos, un extremo se puede alcanzar en un punto de la frontera donde las derivadas parciales no se anulan, por lo que necesitamos otros métodos distintos en estos casos.

Volvamos al problema planteado inicialmente sobre la circunferencia. La ecuación de la circunferencia se puede escribir como $g(x, y) = 0$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. En general, $g(x, y) = 0$ representa la ecuación de *una curva* en el plano (podría ser una recta) y las curvas del plano tienen la particularidad de que no poseen puntos interiores; todos sus puntos son de la frontera. Por tanto, el caso anterior es un caso particular del problema general de determinar los valores máximos y mínimos (si existen) de una función de dos variables $f(x, y)$ sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon g(x, y) = 0\}$. Esto se suele expresar así:

Optimizar la función de dos variables $f(x, y)$ *sujeta a la restricción (o ligadura)* $g(x, y) = 0$

Para una función de tres variables se nos podrían plantear problemas análogos como

Optimizar $f(x, y, z)$ *sujeta a la restricción* $g(x, y, z) = 0$ (ecuación de una superficie)

Optimizar $f(x, y, z)$ *sujeta a las restricciones* $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (ecuación de una curva en $\mathbb{R}3$)

Es usual llamar *función objetivo* a la función f que se quiere optimizar.

A continuación vamos a ver cómo resolver este tipo de problemas de optimización, llamados *problemas de optimización restringida*, una vez que tenemos claro que no se pueden usar las técnicas vistas en la sección anterior.

Vamos a ver dos métodos para la resolución de estos problemas. El primero, que exponemos a continuación, es el más deseable, pero no siempre es posible llevarlo a cabo.

En muchos casos es posible "*despejar*" en la restricción (o restricciones) una de las variables (o bien una expresión) en función de la otra (otras), que sustituida en la función objetivo haga que ésta dependa de una variable menos y, en estos casos, el problema se reduce a uno de los problemas estudiados en la primera sección o simplemente a un problema de optimización de una función de una sola variable. Veamos dos ejemplos que responden a los dos primeros problemas planteados.

Nos planteamos el problema de *determinar los puntos de la parábola* $y = x^2$ *que están más próximos al punto* $(0, 1)$.

Se puede demostrar que, en condiciones muy generales, siempre existe al menos un punto en una curva que es el más próximo a un punto dado.

En el problema propuesto se trata de determinar los puntos de la parábola donde la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ alcanza un valor mínimo absoluto (en este caso, la parábola no es una región acotada y no se puede hacer uso del teorema de Weiertrass para asegurar la existencia del mínimo absoluto). Para simplificar los cálculos conviene minimizar el cuadrado de la distancia (son problemas equivalentes). Por tanto se trata de:

$$\text{Minimizar } f(x,y) = x^2 + (y-1)^2\,, \quad \text{sujeto a la restricción} \quad y = x^2.$$

(Aquí también se puede comprobar que el método de igualar a cero las derivadas parciales de f no nos proporciona ningún punto en la parábola.)

En este caso $g(x,y) = y - x^2$. En nuestra restricción la variable y viene ya despejada en función de x por lo que susitituyendo en la expresión de $f(x,y)$ queda únicamente una expresión en la variable x que es

$$h(x) = x^2 + (x^2-1)^2 = x^4 - x^2 + 1.$$

En los puntos (x,y) de la parábola la variable x no tiene restricción pues puede tomar cualquier valor real. Por tanto, el problema planteado se reduce a determinar los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un mínimo absoluto. Estos deben encontrarse entre los puntos críticos de h.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 - 2x = 0 \iff 2x(2x^2-1) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \\ h''(x) &= 12x^2 - 2; \quad h''(0) = -2 < 0; \quad h''(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = 4 > 0. \end{aligned}$$

En el punto $x = 0$ no puede alcanzar un mínimo absoluto pues alcanza un máximo local, mientras que en los puntos $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ alcanza mínimos locales y éstos serían los puntos donde h alcanza el mínimo absoluto pues en ambos toma el mismo valor $\frac{3}{4}$. Por tanto, hay dos puntos en la parábola que son los más próximos al punto $(0,1)$, que son $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$ y $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$.

Planteamos a coninuación un problema análogo al anterior pero con tres variables.

Hallar tres números reales positivos cuya suma sea 30 *y su producto sea máximo.*
Se trata pues de

$$\text{Maximizar } F(x,y,z) = xyz \quad \text{sujeto a la restricción} \quad x + y + z = 30.$$

Aquí $g(x,y,z) = x+y+z-30$ y $g(x,y,z) = 0$ es en este caso la ecuación de un plano en el espacio. Sólo estamos interesados en los puntos del plano donde las tres coordenadas son positivas y el problema planteado es deteminar en que puntos de esta porción del plano la función F alcanza un máximo absoluto (Obsérvese que aquí los puntos críticos de F en $\mathbb{R}3$ son los que tienen dos coordenadas nulas; es decir los puntos de los ejes de coordenadas, pero ninguno de éstos se encuentran en la porción de plano referida. Una vez más, ésto nos indica que el método de de los puntos críticos no funciona en este caso).

De la misma forma que en el caso anterior, en la ecuación del plano se puede despejar cualquiera de las variables en función de las otras dos; por ejemplo, $z = 30 - x - y$. Sustituyendo en la expresión $F(x,y,z)$ queda una expresión que sólo depende de las variables x e y, que sería:

$$f(x,y) = xy\,(30 - x - y) = 30\,xy - x^2y - xy^2.$$

Ahora las restricciones para las variables x e y son $0 < x < 30$ y $0 < y < 30$. De esta forma el problema se reduce a estudiar los puntos del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon 0 < x < 30,\ 0 < y < 30\}$$

donde f alcanza un máximo absoluto. (El teorema de Weiertrass no es aplicable a D, pues no es una región cerrada, pero sí sería aplicable a la región $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon 0 \leq x \leq 30,\ 0 \leq y \leq 30\}$ y con ésto podríamos asegurar la existencia de tal máximo absoluto ya que es obvio que no se puede alcanzar en un punto de la frontera).

Observemos que todos los puntos del dominio D son puntos interiores y f es diferenciable en cada uno de esos puntos por ser polinómica. Por tanto, para resolver este problema podemos utilizar las técnicas vistas en la primera sección; es decir, los puntos buscados deben estar entre los puntos críticos de f. La determinación de estos puntos críticos nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$f_x(x, y) = y\,(30 - 2x - y) = 0, \quad f_y(x, y) = x\,(30 - x - 2y) = 0.$$

Dado que x e y no pueden anularse el sistema anterior es equivalente al siguiente:

$$30 - 2x - y = 0, \quad 30 - x - 2y = 0$$

el cuál tiene como solución única $x = 10$ e $y = 10$. Luego este es el único punto donde f puede alcanzar un máximo absoluto. Obsérvese que el punto obtenido está en el dominio D. Comprobemos mediante la matriz hessiana que se trata con seguridad de un máximo local.

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} -2y & 30 - 2x - 2y \\ 30 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}; \\ Hf(10, 10) &= \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}, \quad d = 300 > 0,\ f_{xx}(10, 10) = -20 < 0. \end{aligned}$$

Así pues la única solución al problema propuesto sería $x = y = z = 10$. El producto máximo sería 1000. (Compruébese con algunos ejemplos que el producto sale inferior a 1000).

Por desgracia, no siempre se puede despejar adecuadamente en la expresión de la restricción para conseguir reducir el problema a otro equivalente con menos variables. Por ejemplo, no habría forma de llevar a cabo el método usado en el primer ejemplo si lo que nos piden ahora es determinar los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 80$ más próximos y más lejanos al punto $(1, 2)$ (hacer un dibujo) o, peor aún, si nos piden los puntos de la curva $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 11 = 0$ que están más próximos al origen, ya que en esta última el problema de despejar una variable en función de la otra es mucho más complicado que en el caso de la circunferencia. En estos casos es necesario o mejor recurrir a un segundo método, conocido como método de los multiplicadores de Lagrange.

Método de los multiplicadores de Lagrange

El matemático Joseph Luis Lagrange (1736-1813) ideó un ingenioso método, a la edad de 19 años, sobre la forma de resolver los problemas de optimización restringida que dió a conocer en un famoso trabajo sobre Mecánica. Exponemos únicamente su resultado en el caso más simple donde se necesita optimizar una función de dos variables $f(x, y)$ sujeta a una restricción del tipo $g(x, y) = 0$.

Existe una muy interesante e ilustrativa interpretación geométrica del método de Lagrange que se podría exponer con un simple ejemplo, donde se hace uso de las curvas de nivel de la función objetivo f y de la famosa propiedad de ortogonalidad del vector gradiente, que nos llevaría de una manera natural al resultado de Lagrange. No obstante, por problemas de tiempo pasamos directamente a exponer el resultado.

[Lagrange] Sean f y g dos funciones de dos variables que poseen derivadas parciales de primer orden continuas. Sea $(x0, y0)$ un punto de la curva de ecuación $g(x, y) = 0$ donde el vector gradiente $\nabla g(x0, y0)$ no es nulo y donde la función f (restringida a la curva) alcanza un extremo local (máximo o mínimo). Entonces existe un número real λ (llamado multiplicador de Lagrange) tal que

$$\nabla f(x0, y0) \;=\; \lambda\, \nabla g(x0, y0).$$

Asi pues, los que nos dice el resultado anterior es que en un punto de extremo $(x0, y0)$ debe suceder que los vectores gradientes $\nabla f(x0, y0)$ y $\nabla g(x0, y0)$ tengan la misma dirección (caso $\lambda > 0$) o direcciones opuestas (caso $\lambda < 0$).

Veamos la forma de llevar a la práctica el resultado de Lagrange. Observemos que la condición $\nabla f(x0, y0) \;=\; \lambda\, \nabla g(x0, y0)$ es equivalente a las condiciones

$$f_x(x0, y0) = \lambda\, g_x(x0, y0), \quad f_y(x0, y0) = \lambda\, g_y(x0, y0).$$

Por tanto, según el teorema, los puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde la función f puede alcanzar un extremo local son aquellos puntos (x, y) para los que existe un número λ tal que x, y, λ son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x, y) &= \lambda\, g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda\, g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0. \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones como el anterior puede ser complicado en ciertos casos. De hecho, no necesitamos conocer el valor del multiplicador λ (salvo en ciertas problemas en que el multiplicador tiene una interpretación especial); solo nos interesan los valores de x e y. Por suerte,en este caso, hay una forma rápida de eliminar el parámetro entre las dos primeras ecuaciones. Concretamente, si un punto (x, y) verifica las dos primeras ecuaciones para un cierto valor de λ entonces debe suceder que el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} f_x(x,y) & g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix}$ sea igual a 0 o, lo que es lo mismo, el determinante de la matriz traspuesta $\begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix}$ sea 0. El motivo de ésto es que, en tal situación, el par $(1, -\lambda)$ sería una solución no trivial de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas y, ésto sólo puede suceder si el determinante de la matriz asociada al sistema es nulo.

Pienso que otra forma más directa y simple de explicar ésto a los alumnos (sobre todo si no se van a ver casos de optimización de funciones de tres o mas variables) es observando que la condición que da Lagrange nos dice que el vector gradiente $\nabla f(x0, y0)$ depende linealmente del vector $\nabla g(x0, y0)$; lo que equivale, en este caso, a que el determinante formado por las componentes de estos vectores sea nulo; es decir,

$$\begin{vmatrix} f_x(x0, y0) & f_y(x0, y0) \\ g_x(x0, y0) & g_y(x0, y0) \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, para encontrar los puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde la función f puede alcanzar un extremo local lo que hay que hacer es resolver el sistema de dos ecuaciones en las incógnitas: x, y dado por

0,3

$$\begin{vmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{vmatrix} = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

y entre los puntos (x, y) obtenidos al resolver el sistema se tienen los posibles puntos de extremo. Hay que advertir que *el método no asegura que todos vayan a ser puntos de extremo*. El teorema de Lagrange sólo da una condición necesaria pero no suficiente. A veces se tiene la certeza de que existen puntos de extremos absolutos (por ejemplo, si estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weierstrass) y en estos casos basta con evaluar la función f en los puntos obtenidos y comparar los valores.

Exponemos acontinuación dos ejemplos de aplicación del método anterior. En función del tiempo disponible se pueden ver los dos o únicamente el primero de ellos, que ya fué propuesto antes de explicar el método de Lagrange.

Ejemplo 1: Nos planteamos el problema de determinar los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 80$ más próximos y más lejanos al punto $(1, 2)$.

Hágase en primer un dibujo que refleje lo que se pide. En este caso se trata de

$$\text{Optimizar } f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \quad \text{sujeto a la restricción} \quad x^2 + y^2 = 80.$$

Al ser la circunferencia un conjunto cerrado y acotado, el teorema de Weiertrass nos asegura que los problemas planteados tienen soluciones. Al menos habrá un punto en la circunferencia de distancia máxima a $(1, 2)$ y al menos habrá un punto de distancia mínima.

Aquí $g(x,y) = x^2+y^2-80$. Tenemos $f_x = 2(x-1)$, $f_y = 2(y-2)$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$. Observemos que el gradiente $\nabla g(x,y)$ no es el vector nulo en ningún punto (x,y) de la circunferncia. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x-1) & 2(y-2) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8x - 4y.$$

Por tanto, los puntos de extremo se obtienen de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 80, \quad y = 2x.$$

Obsérvese la interpretación geométrica de ésto. Los puntos candidatos son los puntos de la circunferencia que están en la la recta $y = 2x$ y ésta recta es la que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ (hacer un dibujo), lo cuál da una idea geométrica muy interesante de cómo encontrar los puntos más alejados y más cercanos. Las soluciones de éste sistema son los puntos $(4,8)$ y $(-4,-8)$.

Al salir únicamente dos puntos está claro que en uno de ellos se alcanza el máximo absoluto y en el otro el mínimo absoluto. Basta ahora con evaluar la función en etos puntos y comparar. Resulta que $f(4,8) = 45$ y $f(-4,-8) = 125$, por loq ue el punto más próximo es $(4,8)$ y el más alejado es $(-4,-8)$; la distancia mínima del punto dado a la circunferencia es $\sqrt{45}$ y la distancia máxima es $\sqrt{125}$.

De haber salido tres o más puntos de la resolución del sistema hubiéramos operado de la misma forma; es decir, habríamos evaluado la función en cada uno de los puntos y después compararíamos esos valores para decidir en que puntos se alcanzan el máximo absoluto y el mínimo absoluto.

Ejemplo 2: Nos planteamos el problema de *hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse de ecuación* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

La elipse está centrada en el origen y tiene semiejes de longitudes 3 y 4. Cada rectángulo inscrito en la elipse vendría dado por un punto (x,y) de la elipse en el primer cuadrante, de manera que este rectángulo tendría un lado de longitud $2x$ y otro de longitud $2y$, resultando ser su área igual a $4xy$. Por tanto el problema queda planteado como el de determinar en que puntos de la elipse la función $f(x,y) = 4xy$ alcanza un máximo absoluto; es decir:

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 4xy \quad \text{sujeto a la restricción} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

El teorema de Weiertrass nos asegura que este problema tiene solución pues la elipse es cerrada y acotada y la función f es continua sobre los puntos de la elipse.

Ciertamente, en este caso se podría aplicar con un poco de cuidado el método de despejar una de las variables, por ejemplo despejando en la ecuación de la elipse la variable y tomando el signo positivo en la raíz cuadrada, y sustituir en la expresión de f, pero vamos a resolver el problema usando el método de Lagrange.

Aquí $g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$. Tenemos $f_x = 4y$, $f_y = 4x$, $g_x = \frac{2x}{9}$, $g_y = \frac{y}{8}$. Observemos que el gradiente $\nabla g(x,y)$ no es nulo en ningún punto (x,y) de la elipse. Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4y & 4x \\ \frac{2x}{9} & \frac{y}{8} \end{vmatrix} = \frac{y^2}{2} - \frac{8x^2}{9}.$$

Por tanto, los puntos de extremo se obtienen de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{8x^2}{9} = 0, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Despejando x^2 de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene $y^2 = 8$, es decir $y = \pm 2\sqrt{2}$, y así $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. De esta forma obtendríamos cuatro puntos en la elipse, pero el único que tiene las dos coordenadas positivas es $(x,y) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$ y por la naturaleza del problema éste debe ser el punto donde f alcanza el máximo absoluto. Así pues el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse sería aquel que tiene de base $2x = \frac{6}{\sqrt{2}}$ y de altura $2y = 4\sqrt{2}$. El área máxima sería $4xy = f(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}) = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = \boxed{24}$.

Observación: Si el problema plantedo hubiera sido determinar los puntos de extremo de la función $f(x,y) = 4xy$ sobre la elipse dada, el método nos hubiera proporcionado los siguientes cuatro puntos de la elipse:

$$(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}), \quad (-\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}), \quad (\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}), \quad (-\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2})$$

y tendríamos ahora que evaluar la función en cada uno de estos cuatro puntos para poder discernir en que puntos se puede alcanzar un máximo y en cuáles un mínimo. Obsérvese que en el primero y cuarto la función toma el valor 24 y en los otros dos el valor -24. Esto nos diría que en el primero y cuarto alcanzaría un máximo de valor 24 y en los otros dos un mínimo de valor -24.

2.1.4. Extremos sobre regiones cerradas y acotadas con puntos interiores

Extremos sobre regiones cerradas y acotadas con puntos interioresMáximos y mínimos

Para acabar con el tema de los máximos y mínimos, habría que explicar cómo abordar un problema de extremos cuando la región sobre la que se quiere optimizar posee puntos interiores y también puntos de la frontera, como es el caso de una región cerrada circular, semicircular, rectangular o triangular (hacer varios dibujos). Esta situación es análoga a la que se tiene con la optimización de funciones de una sola variable sobre un intervalo del tipo $[a,b]$. Recordemos que en este caso, suponiendo que la función sea derivable en todo el intervalo, para determinar los puntos de extremo (locales o absolutos) había que distinguir el interior del intervalo: (a, b) de los puntos frontera, que en este caso son dos: $x = a$, $x = b$. De alcanzarse un extremo en un punto $x \in (a, b)$ debe suceder que $f'(x) = 0$.

En el caso de una función de dos variables la idea es la misma pero los cálculos son, generalmente, más complicados. Supongamos que estamos en una región cerrada y acotada con puntos interiores y frontera como en los ejemplos citados y nuestra función f es continua sobre esa región. El teorema de Weiertrass nos asegura que hay puntos de la región donde se alcanzan valores extremos absolutos. ¿Cómo determinar esos puntos?. El procedimiento a seguir sería:

Estudiar los posibles *puntos interiores* donde se puede alcanzar un extremo local usando las técnicas vistas en la primera sección. De hecho, en este caso, basta con determinar los *puntos críticos* y no es necesario usar las matrices hessianas (aunque éstas darían mayor información sobre extremos locales que no son absolutos)

Estudiar los posibles *puntos de la frontera* donde se puede alcanzar un extremo local usando el *método de Lagrange* o preferiblemente, si es posible, el *método de despejar* una variable o una expresión en la restricción. A veces hay que considerar en la frontera más de un "trozoτ es necesario hacer el estudio en cada trozo; por ejemplo, esto sucede con un triángulo o rectángulo donde habría que estudiar por separado cada lado.

Una vez recopilados los *puntos candidatos a extremos absolutos* entre los puntos obtenidos en los dos pasos anteriores, se *evalúa* la función en cada uno de ellos y se *comparan esos valores*. A la vista de los resultados anteriores decidimos en que puntos se alcanza el máximo absoluto o el mínimo absoluto.

Empezamos ilustrando el método anterior con un ejemplo donde la frontera solo tiene un "trozo".

Ejemplo 1: Supongamos que la distribución de la temperatura sobre la placa circular D={ (x,y)∈ ℝ2: $x^2+y^2 \leq 1\}$viene dada por la función $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$ y queremos determinar las temperaturas extremas sobre la placa y, más concretamente, los puntos de la placa donde se alcanzan esas temperaturas extremas.

El teorema de Weiertrass nos asegura que existen estos puntos de temperatura extrema ya que nuestra región, que es un disco cerrado, es cerrada y acotada y la función f es continua sobre D.

Los puntos del interior son aquellos puntos que están en el disco abierto D={ (x,y)∈ ℝ2: $x^2 + y^2 < 1\}$.Se dice que D es el interior de D. La frontera de D es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Como la función f es diferenciable en todo punto, si un punto del interior es un punto de extremo éste ha de ser un punto crítico y es obvio que el único punto crítico es el origen $(0, 0)$. Al salir un único punto ésto nos adelante que al menos uno de los extremos absolutos se va a alcanzar en puntos de la frontera.

Si usamos el método de Lagrange, podemos decir que si en un punto (x, y) de la frontera se alcanza un extremo entonces tal punto verifica las ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = 0; \quad g(x,y) = 0,$$

donde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$; es decir,

$$\begin{vmatrix} 2x^{x^2-y^2} & -2y^{x^2-y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0; \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Por tanto, (x,y) debe verificar las ecuaciones: $xy = 0$; $x^2 + y^2 = 1$, y sólo hay cuatro puntos que verifiquen ésto que son $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$.

Evaluamos la función f en los cinco puntos obtenidos (uno en el interior y cuatro en la frontera) y comparamos los valores obtenidos para así poder decidir en que puntos se alcanza el mínimo absoluto y en cuáles el máximo absoluto.

$$f(0,0) = 1, \quad f(0,1) =^{-1}= 1/, \quad f(0,-1) =^{-1}, \quad f(1,0) =, \quad f(-1,0) = .$$

El máximo valor obtenido es y se alcanza en los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. El mínimo valor obtenido es $^{-1}$ y se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$. Así pues la máxima temperatura en el disco es y la mínima temperatura es $^{-1}$. Obsérvese que ambas temperaturas extremas se han alcanzado en puntos de la frontera.

En el único punto del interior candidato a punto de extremo, el $(0,0)$, no se ha alcanzado ninguno de los extremos absolutos. En principio, este punto podría ser un punto de extremo local. Para salir de dudas determinaríamos la correspondiente matriz hesssiana.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = -4 < 0.$$

Al ser el determinante negativo podemos asegurar que en $(0,0)$ no se alcanza un extremo local; se trata de un punto de silla.

Aunque hemos usado el método de Lagrange para la determinación de los puntos de la frontera, se podría haber prescindido de este método si nos damos cuenta de que en la restricción $x^2 + y^2 = 1$, al despejar $y^2 = 1 - x^2$ y sustituir en la expresión $f(x,y)$ de la función objetivo se obtiene una expresión que sólo depende de la variable x, concretamente: $^{x^2-(1-x^2)} =^{2x^2-1}$. Por tanto, hubiera bastado con determinar los extremos de la función de una sola variable $h(x) =^{2x^2-1}$ en el intervalo $[-1,1]$, que es el intervalo donde varía la x cuando el punto (x,y) está en la circunferencia. Utilícese este método para confirmar los resultados obtenidos por el método de Lagrange. En este caso los posibles puntos de extremo de h son: el punto del interior $x = 0$ y los puntos de la frontera $x = -1$, $x = 1$. Para finalizar advertimos que en ciertos casos hay que distinguir mas de un trozo en la

frontera, lo cuál complica los cálculos. Por ejemplo, si la región sobre la que hay que optimizar es un región rectangular como

$$D = \{(x,y) \in R^2 \colon 0 \le x \le 5, \, -3 \le y \le 3\},$$

en la frontera habría que distinguir cuatro trozos, cada uno de los lados del rectángulo, que son segmentos de las rectas de ecuaciones $x = 0, x = 5, y = -3, y = 3$. En estos lo mejor es usar el método de reducir a un problema de una sola variable. Si la región es triangular como sucede con

$$D = \{(x, y) \in R^2 \colon x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3\},$$

habría que distinguir tres trozos, los tres lados del triángulo. Aquí tampoco es necesario el método de Lagrange y es más aconsejable el método de despejar para reducir a una sola variable.

Otros ejemplos como los anteriores son las dos regiones siguientes, que son trozos de discos,

$$D = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D = \{(x, y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leq 2;\ y \leq x\}.$$

Desarrollamos a continuación un ejemplo donde aparece una de las regiones citadas. En este ejemplo hay que distinguir en la frontera dos trozos. En uno aplicaremos el método de Lagrange y, en el otro, el método de despejar una variable.

Ejemplo 2: Calculemos los valores máximo y mínimo absolutos de la función polinómica $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2x + 1$ sobre la región circular $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x\}$, obteniendo los puntos donde se alcanzan estos extremos absolutos.

La región D es la parte del disco de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$ que queda por debajo de la recta de ecuación $y = x$. Es un conjunto que posee puntos interiores y puntos de la frontera.

Se trata de una región *cerrada* y *acotada*, donde f es *continua*. Por tanto, *el teorema de optimización de Weierstrass* asegura la existencia de puntos en D donde f alcanza *extremos absolutos*. Puesto que un extremo absoluto es un extremo local, vamos a determinar los puntos de D donde f alcanza *extremos locales* y entre ellos se encontrarán los puntos donde alcanza los extremos absolutos. Para ésto tenemos que distinguir entre *el interior* de D y *la frontera* de D.

1.- Determinación de puntos interiores donde f alcanza extremos locales

Como la función es diferenciable en todo punto (al ser polinómica), si alcanza un extremo local en un punto interior de D, éste debe ser un *punto crítico*, es decir, un punto donde se anulan las dos derivadas parciales de primer orden.

Como $f_x(x,y) = 4x-2$ y $f_y(x,y) = 2y$, está claro que el único punto crítico es $\boxed{(\frac{1}{2}, 0)}$ y, por tanto éste es el único punto interior donde f puede tener un extremo. Aunque para la resolución de este problema no es estrictamente necesaria la determinación de la matriz hessiana, no obstante, podemos adelantar cierta información con ella. En este caso los cálculos son inmediatos y se obtiene:

$$Hf(\tfrac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\frac{1}{2}, 0) & f_{xy}(\frac{1}{2}, 0) \\ f_{yx}(\frac{1}{2}, 0) & f_{yy}(\frac{1}{2}, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es positivo y $f_{xx}(\frac{1}{2}, 0)$ es positivo, podemos asegurar que f alcanza en $(\frac{1}{2}, 0)$ *un mínimo local*. En principio, no podemos asegurar que este mínimo local sea absoluto; ésto sólo se podrá confirmar en la fase final. Lo que sí podemos asegurar ya es que el máximo absoluto de f se alcanza en al menos un punto de la frontera de D.

2.- Determinación de los puntos de la frontera donde f alcanza extremos locales

En este caso es necesario distinguir dos trozos en la frontera. Uno, el segmento correspondiente a la recta de ecuación $y = x$, y el otro, el trozo de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$. La descripción rigurosa de estos conjuntos es la siguiente:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon y = x,\ -1 \leq x \leq 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon x^2 + y^2 - 2 = 0,\ y < x\}.$$

Para el primer trozo vamos a usar el *método de despejar* una de las variables y para el otro el *método de Lagrange*.

I) Para la determinación de los posibles puntos de A donde f puede alcanzar un extremo local, es suficiente con sustituir $y = x$ (la variable y ya viene despejada) en la expresión $f(x,y)$ de la función objetivo, con lo cuál se obtiene una expresión que sólo depende de la variable x, dando lugar así a una función de una sola variable. De esta forma, el problema se reduce a determinar los puntos de extremo de la función:

$$h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Obsérvese que consideramos la función h definida sobre el intervalo cerrado $[-1,1]$ ya que es ahí donde toma valores la variable x cuando el punto (x,y) se encuentra en el trozo de frontera A.

Si $x \in (-1,1)$ y h alcanza en x un extremo local, debe suceder que $h'(x) = 0$. El único punto que verifica ésto es obviamente $x = \frac{1}{3}$. Por tanto, los únicos puntos donde la función h puede tener un extremo son $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$. No es necesario determinar si efectivamente son puntos de extremos de h. Es suficiente con tener en cuenta que con ellos obtenemos 3 candidatos a extremos de f, que se encuentran en la región A, que son:

$$\boxed{(-1,-1), \quad (\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \quad \text{y} \quad (1,1).}$$

II) Para la determinación de los posibles puntos de B donde f puede alcanzar un extremo local, usamos *el método de Lagrange*, considerando la función $g(x,y) = x^2+y^2-2$, ya que en la ecuación $x^2+y^2 = 2$ no se puede despejar una de las variables en función de la otra. Tenemos que $g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$, por lo que el vector gradiente $\vec{\nabla} g(x,y)$ no es el vector nulo en ningún punto (x,y) de B y, así, podemos aplicar dicho método.

En este caso tenemos:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x-2 & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy - 4y = 4\,y\,(x-1).$$

El método de Lagrange nos dice que si (x,y) es un punto de B donde f alcanza un extremo local, entonces (x,y) debe ser solución del sistema de ecuaciones siguiente: $\left\{ \begin{array}{rcl} y\,(x-1) & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 2 \end{array} \right.$ Es muy fácil comprobar que los únicos puntos del conjunto B que satisfacen este sistema son:

$$\boxed{(\sqrt{2},0) \qquad y \qquad (1,-1).}$$

3.- Recopilamos ahora los *puntos candidatos a extremos absolutos*, que son los obtenidos en los dos pasos anteriores, y *evaluamos* la función f en cada uno de ellos:

Puntos candidatos	**Valores de f**
$(\frac{1}{2},0)$	$f(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}$
$(-1,-1)$	$f(-1,-1) = 6$
$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$
$(1,1)$	$f(1,1) = 2$
$(\sqrt{2},0)$	$f(\sqrt{2},0) = 5-2\sqrt{2} \approx 2,2$
$(1,-1)$	$f(1,-1) = 2$

Comparando los valores obtenidos podemos afirmar que f alcanza un mínimo absoluto de valor $\boxed{\frac{1}{2}}$ en el punto interior $\boxed{(\frac{1}{2}, 0)}$ (ya sabíamos que se trataba de un mínimo local) y alcanza un máximo absoluto de valor $\boxed{6}$ en el punto de la frontera $\boxed{(-1, -1).}$

En el resto de los puntos de la lista se pueden alcanzar o no alcanzar extremos locales. Véase que los puntos vértices de la frontera: $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ han sido considerados como candidatos. Siempre hay que tener en cuenta los puntos vértices de la frontera, es decir, los puntos donde se unen dos trozos de curva (o recta), ya que si no se lleva a cabo con cuidado los métodos explicados, éstos podrían ser excluídos y en muchas ocasiones algún extremo se alcanza en uno de estos vértices, como sucede con el caso anterior. Quizás lo más práctico sea incluir siempre estos vértices en la lista de puntos candidatos.

2.2. EJERCICIOS TEMA 2

1. En cada uno de los siguientes casos, encontrar, si existen, los puntos del dominio donde f alcanza un *extremo local*, indicando si se trata de un máximo o de un mínimo.

   [2] $f(x,y) = 4x^2 + 8y^2$ $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $f(x,y) = \ln x \, \ln y$ $f(x,y,z) = z^2 - ({}^{-x^2} + {}^{-y^2})$ $f(x,y,z) = \ln(xy) - z(x-y+1)$.
   (Soluciones: (a): $(0,0)$; (b): $(4/3, 4/3)$; (c): $(0,0)$; (d): ninguno; (e): $(0,0,0)$; (f): ninguno.)

2. Pruébese que la función $f\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$, alcanza un *máximo local* pero no posee mínimos locales y, por tanto, no tiene un *valor mínimo absoluto.*

3. Estudiar si la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ puede tener extremos locales en los puntos $(0,0,0)$ y $(1,2,3)$.

4. Una empresa fabrica un producto en dos factorías. El coste de producción de x unidades del producto en la primera es $C1(x) = 0,02x^2 + 4x + 500$ (euros) y el de producción de y unidades en la segunda es $C2(y) = 0,05y^2 + 4y + 275$ (euros). Si el producto se vende a 15 euros la unidad, calcular la cantidad que debe producirse en cada uno de los dos lugares con el fin de hacer máximo el beneficio. (Solución: $x = 275$, $y = 110$).

5. Entre todos los rectángulos de perímetro p hallar el de área máxima. (Solución: el cuadrado de lado $\frac{p}{4}$).

6. Se quiere construir un recipiente rectangular sin tapadera de 500 dm^3 de volumen para recoger un cierto líquido. Cuáles deben ser las dimensiones del recipiente para que su superficie sea mínima ? (De esta forma el coste del material para construirlo será el menor posible). (Solución: largo $x = 1$ m, ancho $y = 1$ m, altura $z = 0,5$ m).

7. Determinar, haciendo uso del cálculo diferencial, el punto del plano $x + y + z = 3$ *más próximo* al punto $P = (2,3,1)$ y calcúlese la distancia del punto P al plano. (Indicación: Para simplificar los cálculos, conviene minimizar el cuadrado de la distancia. Solución: el punto $(1,2,0)$, $d = \sqrt{3}$).

8. Determinar los puntos de la superficie $x^2 - yz + y = 5$ *más próximos* al origen y calcular la distancia mínima al origen. (Indicación: Despejar la expresión x^2 de la ecuación de la superficie y sustituir en la expresión de la función a minimizar. Solución: los puntos $(\pm\sqrt{\frac{37}{9}}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $d = \sqrt{\frac{14}{3}}$).

9. Determinar los puntos de la curva $5x^2+6xy+5y^2-8=0$ más próximos al origen. (Indicación: Usar el *método de Lagrange*. Solución: los puntos $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$).

10. Una herencia H debe distribuirse entre dos hermanos de edades m y n. La ley de sucesiones del país impone que los impuestos a pagar por cada individuo sean proporcionales a su edad y al cuadrado de la cantidad recibida. Calcular la parte de herencia que debe recibir cada hermano, en función de las edades de éstos, para que la cantidad a pagar al fisco sea mínima. (Indicación: Si x e y son las cantidades a recibir se trata de minimizar $f(x,y) = k\,m\,x^2 + k\,n\,y^2$ sujeta a la restricción $x+y=H$. Solución: $x=\frac{nH}{m+n}$, $y=\frac{mH}{m+n}$).

11. La temperatura en cada punto (x,y) de una placa viene dada por $T(x,y)=12+x^2-xy+y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=32$, se dispara a temperaturas superiores a 70 grados o inferiores a 20 grados. Se disparará la alarma? (Respuesta: No, pues las temperaturas en los puntos de la circunferencia están comprendidas entre los valores 28 y 60).

12. La distribución de la temperatura en la placa circular $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq 8\}$ viene dada por la función $f(x,y)=x^2+y^2+xy+20$. Justificar que en la placa se alcanzan valores máximo y mínimo absolutos de temperatura y calcular estas *temperaturas extremas*, indicando los puntos donde se alcanzan. (Solución: Temperatura mínima $=20$ alcanzada en el punto interior $(0,0)$. Temperatura máxima $=32$ obtenida en los puntos frontera $(2,2)$ y $(-2,-2)$).

13. En cada uno de los siguientes ejercicios determínense los valores máximo y mínimo absolutos de las funciones dadas en las regiones indicadas (en cada caso justificar porqué existen estos valores extremos), obteniendo los puntos donde se alcanzan estos extremos absolutos. .

    a) $f(x,y)=xy^2$,
    $$D=\{(x,y)\in R^2\colon x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$$

    b) $f(x,y)=-x^2+xy+y^2-6x$,
    $$D:\{\text{ región rectangular de vértices } (0,3),(5,3),(0,-3) \text{ y } (5,-3)\}.$$

    c) $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$,
    $$D=\{(x,y)\in R^2\colon x\leq 0,\ y\leq 0,\ x+y\geq -3\}$$

    (región triangular)

(Soluciones: (a): Máximo $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$ obtenido en el punto frontera $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ y mínimo $= 0$ obtenido en los puntos de los ejes de coordenadas. (b): Máximo $= 9$ alcanzado en $(0,3)$ y $(0,-3)$ y mínimo $= -61,25$ alcanzado en $(5,-\frac{5}{2})$. (c): Máximo $= 6$ obtenido en los puntos frontera $(-3,0)$ y $(0,-3)$ y mínimo $= -1$ obtenido en el punto interior $(-1,-1)$).

Capítulo 3

Integral doble

3.1. Introducción

IntroducciónIntegrales múltiples   En la primera parte de la asignatura se vieron las integrales de funciones de una sola variable sobre un intervalo $[a, b]$. Aquí vamos a introducir el concepto de *integral múltiple*, que funciona de manera análoga a las que ya conocemos, pero con la diferencia de que el integrando será una función de varias variables. En particular, una *integral doble* será aquella cuyo integrando es una función de dos variables y una *integral triple* tendrá como integrando una función de tres variables. Las integrales de funciomes de una sola variable serán llamadas *simples*.

Así como usábamos las integrales simples para calcular áreas de regiones en el plano, usaremos las dobles (y en cierto sentido las triples) para calcular volúmenes de sólidos en el espacio, definir y calcular áreas de superficies en el espacio, centros de masas y momentos de inercia junto con algunas magnitudes especiales de la teoría de la probabilidad.

Recordemos que dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y positiva ($f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$), la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ coincidía con el área R comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de abcisas.

Para definir tal integral (o área) se usaba un método de aproximación basada en rectángulos, cuyas áreas son fáciles de calcular. Se consideraba una partición del intervalo $[a, b]$, esto es, una serie de puntos ordenados (pero no necesariamente equiespaciados)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

se notaba $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ a la longitud del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se tomaba un punto $s_k \in [x_{k-1}, x_k)$ y considerábamos el rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(s_k)$, cuya área es $f(s_k)\Delta x_k$. Sumando las áreas de todos los rectángulos

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta x_k$$

se obtenía una aproximación del área de R, denominada *suma de Riemann*

A medida que tomamos más puntos en la partición (partición más fina) la aproximación es mejor. Esto lleva a definir la integral definida como

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta x_k.$$

No siempre existe este límite (es un número real). Cuando existe, se dice que f es integrable en $[a, b]$.

En la definición anterior, no se necesita que f tome valores positivos. En particular, tal integral existe (su valor es un número real) cuando f es continua en $[a, b]$ o más generalmente, cuando f es continua en $[a, b]$ salvo quizás un número finito de puntos donde hay discontinuidades evitables o de salto finito.

3.2. Integrales dobles y cálculo de volúmenes

3.2.1. Integrales dobles sobre rectángulos

Integrales doblesIntegrales dobles sobre rectángulos

En esta primera sección vamos a considerar una región rectangular de lados paralelos a los ejes de coordenadas:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

sobre el plano y una función $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ de dos variables, que en principio supondremos continua (aunque no es necesario) y positiva, es decir, $f(x, y) \geq 0$ para cada $(x, y) \in R$. Estamos interesados en calcular el volumen de la región sólida comprendida bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre el dominio rectangular $[a, b] \times [c, d]$. Esta región se puede definir como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Para ello se utiliza un proceso de aproximación análogo al visto para funciones de una sola variable.

<u>Paso 1</u>. Se toma una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y otra del intervalo $[c, d]$ en m subintervalos. Trazando paralelas a los ejes, estas subdivisiones dan lugar a una partición P del rectángulo R en $N = n \cdot m$ celdas (o subrectángulos) como se muestra en la figura que denotaremos por R_k.

<u>Paso 2</u>. En cada celda o rectángulo R_k se toma un punto arbitrario (x_k, y_k) y evaluamos la función f en ese punto: $f(x_k, y_k)$. Notamos por ΔA_k el área del rectángulo R_k. Entonces, el producto

$$f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

nos da el volumen del paralelepípedo (o prisma rectangular) que tiene por base el rectángulo R_k y por altura el valor $f(x_k, y_k)$.

De esta forma, la suma

$$\sum_{k=1}^{N=n\cdot m} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

aproxima el volumen de la región sólida mediante la suma de N volúmenes de prismas, tal y como sucedía en el caso de una variable. A la suma anterior se le llama *suma de Riemann de f con respecto de la partición P*.

<u>Paso 3</u>. La aproximación anterior del volumen parece que se puede mejorar si tomamos más rectángulos, pues esto haría que los rectángulos de la cuadrícula o partición sean cada vez más peque nos y así se mejora la precisión.

Cuando aplicamos un proceso donde cada vez obtengamos más celdas (el número de celdas es N) se puede plantear el límite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k.$$

Lo ideal sería que este límite existiese pues este parece que nos daría el volumen de la región.

(<u>Nota</u>. Se puede definir la norma de una partición P, $\|P\|$, como la longitud de la diagonal más larga de los rectángulos. Refinar una partición sería añadir más celdas, de tal manera que la norma disminuya. $\|P\| \to 0\mathrm{I\!R}Rightarrow N \to \infty$.)

Esto nos lleva a dar la siguiente definición de integral doble sobre un rectángulo de lados paralelos a los ejes, en la que no es necesario suponer que f es positiva.

Si f es una función en las variables x e y definida sobre el rectángulo del plano $R=[a,b]\times[c,d]$, entonces *la integral doble de f sobre R*, que denotaremos $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$, se define como

$$\int\int_R f(x,y)dA := \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(x_k,y_k)\cdot\Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} f(x_k,y_k)\cdot\Delta x_k\cdot\Delta y_k$$

siempre y cuando este límite exista. Si existe, diremos que f es *integrable sobre R*.

En el caso en que f sea positiva $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$ coincide con el volumen de la región sólida comprendida entre la gráfica de f (superficie $z=f(x,y)$) y el dominio rectangular R. De hecho, todos tenemos una idea intuitiva y geométrica del concepto de volumen pero en general no sabemos dar una definición de este concepto. Las integrales nos permiten definir matemáticamente el concepto de volumen, así como nos permiten definir conceptos como el de área. Es decir, podríamos, a la vista de la construcción dada anteriormente, definir el volumen de tal región como la integral doble $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$ (supuesto f positiva).

Se puede demostrar (la prueba está fuera del alcance de este curso) el siguiente resultado:

Si f es continua en el rectángulo R entonces f es integrable sobre R.

Al igual que sucede con el caso de una variable, hay funciones que no son continuas y son integrables. Se puede demostrar que si f es acotada y continua, salvo quizás en un conjunto de área nula, también es integrable. Este es más o menos el contenido de un importante teorema (que queda fuera del alcance de este curso, no sólo en la prueba, sino además en enunciado), que es conocido como **Teorema de Lebesgue**.

3.2.2. Integrales iteradas y cálculo de integrales dobles

Integrales doblesIntegrales dobles sobre rectángulos Nos planteamos calcular una integral doble. De la misma forma que no usamos la definición para calcular las derivadas e integrales simples o derivadas direccionales, tampoco es práctico calcular una integral doble usando su definición en términos de límite.

El matemático italiano Guido Fubini (1879-1943) probó un método para calcular integrales dobles, basado en el cálculo de integrales simples, que se conoce como *procedimiento de integración sucesiva (integrales inmediatas)*. Para explicar el método necesitamos conocer antes algunas nociones sobre las llamadas *integrales iteradas*.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. En la práctivca, para calcular las derivadas parciales de la función lo que hacemos es considerar constante una de las variables y derivar respecto de la otra. Pues bien, podemos realizar operaciones inversas a las anteriores que consisten en integrar parcialmente f respecto de una variable considerando constante a la otra. Más concretamente, si consideramos constante a la variable y, podemos calcular la integral indefinida

$$\int f(x, y)dx$$

a la que llamamos *integral parcial de f con respecto a x*. (El símbolo dx nos dice que integramos respecto de la x manteniendo la y constante). De la misma forma, si consoderamos a x como constante, podemos calcular

$$\int f(x, y)dy$$

a la que llamamos *integral parcial de f con respecto a y*. Así, si $f(x, y) = 3x^2y$ entonces

$$\int f(x, y)dx = \int 3x^2ydx = y\int 3x^2dx = yx^3 + C(y).$$

$$\int f(x, y)dy = \int 3x^2ydy = 3x^2\int ydy = 3x^2\frac{y^2}{2} + C(x).$$

Observemos que las constantes de integración son constantes respecto de la variable respecto a la cual estamos integrando, así que pueden depender de la variable que consideramos constante.

Si consideramos las funciones $F(x, y) = yx^3 + C(y)$ y $G(x, y) = 3x^2\frac{y^2}{2} + C(x)$, se tiene

$$\frac{\partial F}{dx}(x, y) = 3x^2y = f(x, y), \quad \frac{\partial G}{dy}(x, y) = 3x^2y = f(x, y).$$

Hemos llevado a cabo una operación inversa a la derivación parcial.

De manera análoga podemos considerar *integrales definidas*

$$\int_a^b f(x, y)dx \quad \text{ó} \quad \int_c^d f(x, y)dy.$$

Así:

$$\int_{-1}^{1}(x^2y)dx = \left.\frac{x^3}{3}y\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}y.$$

Como se puede observar en el ejemplo, después de realizar el cálculo $\int_a^b f(x, y)dx$, lo que se obtiene es una función en la variable y. Esta función podría ser ahora integrada en otro intervalo. Es decir, podemos realizar la siguiente operación

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

siguiendo con el ejemplo anterior podemos hacer:

$$\int_2^3 \left(\int_{-1}^1 (x^2 y)dx \right) dy = \int_2^3 \frac{2}{3} y dy = \left. \frac{y^2}{3} \right]_2^3 = \frac{5}{3}.$$

Vemos que el cálculo sucesivo de las dos integrales nos da un número.

De forma análoga, podemos realizar el cálculo sucesivo de integrales

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

En nuestro ejemplo sería

$$\int_{-1}^1 \left(\int_2^3 (x^2 y)dy \right) dx.$$

Por un lado,

$$\int_2^3 x^2 y dy = \left. \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_2^3 = \frac{5}{2} x^2.$$

Entonces

$$\int_{-1}^1 \left(\int_2^3 (x^2 y)dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{2} x^2 dx = \left. \frac{5}{2} \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{5}{3}.$$

De nuevo nos sale un número, que además coincide con el que hemos obtenido antes, pero que en general no tiene porqué coincidir. El orden de integración es importante.

Como hemos podido observar, en el cálculo sucesivo de las integrales

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy, \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

se opera de dentro hacia fuera. En la primera se integra primero respecto a x y luego respecto a y, y en la segunda se integra primero respecto a y y luego respecto a x.

Las integrales de este tipo, donde se calculan dos integrales simples de forma sucesiva, se llaman *integrales iteradas* y se suelen notar simplemente (quitando los paréntesis) como

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy, \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

El magnífico resultado que probó Fubini en 1907 y al que hacíamos referencia antes (el lo probó para situaciones más generales) es que una integral doble se puede calcular mediante integrales iteradas.

[Teorema de Fubini para rectángulos]

Si f es una función continua sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, la integral doble $\int\int_R f(x, y)dA$ se puede calcular por integración iterada en cualquier orden, es decir,

$$\int\int_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy, \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx.$$

Una prueba de este resultado cae dentro de un curso de Cálculo avanzado, por lo que no se lleva a cabo aquí. No obstante, posteriormente daremos bajo un ejemplo una interpretación geométrica de lo que dice el teorema.

Teniendo en cuenta el ejemplo visto antes del Teorema podemos decir que la integral doble

$$\int\int_{[-1,1]\times[2,3]} x^2 y dA = \frac{5}{3}.$$

Recordemos que en tal ejemplo hicimos el cálculo de las dos integrales iteradas y resultó el mismo valor ($\frac{5}{3}$).

<u>**Ejemplo 1**</u>. Calcular $\int\int_R (2-y)dA$, donde R es el rectángulo del plano cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ y $(0, 2)$.

El recinto de integración es el interior del rectángulo $R = [0, 3] \times [0, 2]$.

La función $f(x, y) = 2 - y$ es continua. Podemos calcular la integral doble así:

$$\int\int_R (2-y)dA = \int_0^2 \int_0^3 (2-y)dxdy$$

o también así

$$\int\int_R (2-y)dA = \int_0^3 \int_0^2 (2-y)dydx.$$

De la primera forma obtenemos

$$\int_0^2 \int_0^3 (2-y)dxdy = \int_0^2 \left.(2-y)x\right]_0^3 dy = \int_0^2 3(2-y)dy = 3\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 6.$$

De la segunda forma obtenemos

$$\int_0^3 \int_0^2 (2-y)dydx = \int_0^3 \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^3 2dx = \left.2x\right]_0^3 = 6.$$

Como podemos ver el resultado de las integrales iteradas es el mismo.

Ejemplo 2. Determinar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Nos estan pidiendo la integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$, donde $f(x,y) = x^2y^5$ y $R = [1,2]\times[0,1]$.

La función f es continua, luego podemos calcular la integral doble por integración iterada en cualquier orden: Por tanto,

$$\int\int_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2y^5 dy\right) dx = \int_1^2 \left[x^2\frac{y^6}{6}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_1^2 = \frac{8}{18} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18}.$$

En los ejemplos anteriores, la cantidad de trabajo para realizar la integración iterada en cualquiera de los dos órdenes es practicamente el mismo. Esto no ocurre en todos los casos, como prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. Calcular las siguientes integrales:

- $\displaystyle\int\int_R x\cos(xy)dA$, siendo $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$.
- $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{y^3} e^{\frac{2x}{y}} dA$, siendo $R = [0,2] \times [1,2]$.

Las funciones $f(x,y) = x\cos(xy)$ y $g(x,y) = \frac{1}{y^3}e^{\frac{2x}{y}}$ son continuas, luego las integrales dobles se pueden calcular mediante integración iterada en cualquier orden.

Consideremos la primera integral. Integrando primero respecto a y:

$$\int\int_R x\cos(xy)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 x\cos(xy)dy\right) dx.$$

Integrando primero respecto de x:

$$\int\int_R x\cos(xy)dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(xy)dx\right) dy.$$

Observemos que en el segundo caso, para integrar respecto de x necesitariamos una integración por partes. Sin embargo, si integramos primero respecto de y es más sencillo, pues

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 x\cos(xy)dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([\text{sen}(xy)]_{y=0}^{y=1}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Calcular la segunda integral usando los dos órdenes de integración y comprobar la diferencia.

Interpretación geométrica del Teorema de Fubini

Supongamos que f es una función en las variables x e y que es positiva en el rectángulo de lados paralelos a los ejes R. Si existe la integral $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dA$, sabemos que representa el volumen del sólido limitado por arriba por la superficie $z = f(x,y)$ y por debajo por el rectángulo R.

Fijemos $y \in [c,d]$ y consideremos la sección transversal perpendicular al eje y en ese punto elegido. Sea $A(y)$ el área de esta sección transversal. Este área sería

$$\int_a^b f(x,y)dx.$$

De esta forma

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

De manera análoga, fijando un $x \in [a,b]$ y haciendo un razonamiento similar al anterior se llega a

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

El proceso se entiende mejor si se imagina un *doble barrido*. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal y en la integración exterior, la sección transversal barre el volumen.

3.2.3. Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

Integrales doblesIntegrales dobles sobre regiones no rectangulares

Supongamos que D es una región *acotada* del plano que no es un rectángulo de lados paralelos a los ejes (trabajando con rigor hay que exigirle a la región D que tenga una frontera razonable, lo que se entiende pior frontera de área nula, pero esto se sale del nivel de este curso).

Si f es una función en las variables x e y que es posaitiva en cada punto de D, podemos estar interesados en definir y calcular el volumen V de la región sólida limitada por la superficie $z = f(x, y)$ y la región D.

Al ser D acotado, podemos considerar un rectángulo R de lados paralelos a los ejes que contenga a D. Definamos sobre R la función F que coincida con f en todos los puntos de D y valga cero en el resto

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Parece lógico, por la interpretación de una integral doble como volumen (cuando $f(x, y) \geq 0$), que el volumen pedido coincida con

$$\int\int_R F(x,y)dA$$

porque fuera del dominio D la función F no aporta nada.

Por tanto, es lógico que se de la siguiente definición para una función f cualquiera (no necesariamente positiva).

Si F es una función integrable sobre el rectángulo R se dirá que f es integrable sobre D, y se define la *integral doble de f sobre D*, que se denota $\int\int_D f(x,y)dA$, por la igualdad

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA,$$

siendo F la función que coincide con f en los puntos de D y se anula fuera.

Observemos que la definición no depende del rectángula R elegido.

Si f es continua sobre D entonces f es integrable sobre D.

Si f es integrable sobre la región acotada D y $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, el *volumen* de la región sólida acotada inferiormente por D y superiormente por la gráfica de f se define como

$$V = \int\int_D f(x,y)dA.$$

Parece lógico que cuando $f(x,y) = 1$ para cada $(x,y) \in D$, tal volumen coincide con el área de la región D en el plano. Esto es claro, teniendo en cuenta que el volumen es el área de la base por la altura. Por tanto, podemos dar la siguiente definición

Si D es una región acotada del plano definimos el *área de* D como

$$\text{área de } D = \int\int_D 1dA = \int\int_D dA.$$

De la misma forma que nos hemos planteado calcular los valores máximos y mínimos de una función sobre una región, nos podemos plantear también calcular el valor medio de la función en la región.

Se llama *media* o *promedia* de f sobre D al valor

$$\frac{1}{\text{área de } D}\int\int_D f(x,y)dA.$$

Vamos a ver algunas de las propiedades que tienen las integrales dobles, muchas de las cuales las tienen también las integrales simples.

Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g dos funciones de dos variables integrables en la región acotada D del plano y sea c una constante. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int\int_D cf(x,y)dA = c\int\int_D f(x,y)dA.$

2. $\displaystyle\int\int_D (f(x,y) \pm g(x,y))dA = \int\int_D f(x,y)dA \pm \int\int_D g(x,y)dA.$

3. Regla de dominación: si $g(x,y) \leq f(x,y)$ en D entonces

$$\int\int_D g(x,y)dA \leq \int\int_D f(x,y)dA.$$

4. Regla de subdivisión: si la región de integración D se divide en dos subconjuntos D_1 y D_2 ($D = D_1 \cup D_2$) que no se solapen, es decir, que las puntos comunes esten en la frontera de división de ambos conjuntos (no pueden tener puntos interiores comunes) entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA.$$

Cálculos de integrales dobles sobre regiones acotadas y el Teorema de Fubini

En general, el Teorema de Fubini visto anteriormente para el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos de lados paralelos a los ejes, sirve para el cálculo de cualquier integral doble sobre una región acotada, teniendo en cuento que, según nuestra definición,

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$$

siendo R un rectángulo que contiene a D de lados paralelos a los ejes y F la función de dos variables que coincide con f en D y se anula fuera.

Por tanto, si $R = [a,b]\times[c,d]$, tenemos

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx\right)dy.$$

Fijemos $x\in[a,b]$. Para calcular $\int_c^d F(x,y)dy$ debemos fijarnos en la sección (conjunto de puntos (x,y) que se encuentran en D) que no se salen de D (fuera de D la función se anula) e integrar en el intervalo correspondiente la función $y\to f(x,y)$.

Es evidente, como se puede ver en el dibujo, que para cada x esta sección es distinta y, por tanto, el intervalo de integración también. Luego vemos que los límites de integración dependerán de x, serán funciones de x.

Lo mismo sucede si fijamos $y\in[c,d]$ e intentamos calcular $\int_a^b F(x,y)dx$. Los límites de integración no son a y b sino que van a depender del y fijado y por tanto serán funciones de y.

Existen regiones donde es fácil visualizar ésto, más concretamente visualizar los límites de integración, y obtener una fórmula para el cálculo de la integral doble, usando Fubini. Estudiamos a continuación varios casos especiales de regiones.

CASO I: banda horizontal

Supongamos que nuestro dominio es de la forma

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

donde a y b son constantes y g_1 y g_2 son dos funciones continuas tales que $g_1(x)\le g_2(x)$ para cada $x\in[a,b]$.

Para cada x fijo entre las constantes a y b, la coordenada y varia entre $g_1(x)$ y $g_2(x)$. En este caso, parece lógico que utilicemos las integrales iteradas

$$\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy\right)dx$$

para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$, pues fijado $x \in [a,b]$

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

y así se sigue del Teorema de Fubini para regiones rectangulares paralelas a los ejes el siguiente resultado:

Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, donde a y b son constantes y g_1 y g_2 son dos funciones continuas tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

siempre y cuando las integrales existan.

La novedad es que, como ya hemos dicho (y esto va a suceder en todas las regiones no rectangulares), una de las integrales en la integral iterada anterior no tiene límites de integración constantes sino que dependen de una de las variables, en este caso de la x, pero la integral se calcula respecto de la variable y.

Lo que no tiene sentido es que la variable de integración (en este caso la y) aparezca en los límites de la integral.

En los demás dominios nos vamos a encontrar con situaciones análogas; es decir, los límites interiores de integración pueden ser variable respecto de la variable de integración exterior. Por el contrario, los límites exteriores de integración han de ser constantes respecto de las dos variables de integración.

Este tipo de regiones incluyen a los rectángulos de lados paralelos a los ejes (caso de que g_1 y g_2 sean funciones constantes). También incluyen otros recintos como círculos o elipses.

Así, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, podemos escribir $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$. En este caso, $g_1(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$ y $g_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$.

CASO II: banda vertical

Este es el caso en el que el dominio es de la forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde c y d son constantes y h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c,d]$ con $h_1(y) \leq h_2(y)$ para cada $y \in [c,d]$.

Para un y fijo entre c y d, la coordenada x varia entre $h_1(y)$ y $h_2(y)$.

En este caso, es lógico que usemos las integrales iteradas

$$\int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx \right) dy$$

para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$. En este caso, fijado $y \in [c,d]$

$$\int_a^b F(x,y)dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$$

y así se sigue del Teorema de Fubini para regiones rectangulares paralelas a los ejes el siguiente resultado:

Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, donde c y d son constantes y h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c,d]$ con $h_1(y) \leq h_2(y)$ para cada $y \in [c,d]$, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

siempre y cuando las integrales existan.

Antes de ver algunos ejemplos de aplicación de estos casos, vamos a detenernos en observar algunas cuestiones sobre el área de regiones planas.

Hemos definido el área de una región acotada D en el plano como la integral doble de la función constante 1 sobre D:

$$\text{área}(D) = \int\int_D dA.$$

En el caso de una banda horizontal:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Podíamos calcular este área con integrales simples en la forma

$$A = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx.$$

Ahora bien, podemos escribir $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. En concreto, si consideramos que x está fija y hacemos variar y desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, tenemos

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy = g_2(x) - g_1(x).$$

Por tanto,

$$A = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy \right) dx$$

y según lo que hemos visto en el Teorema de Fubini

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy \right) dx = \int \int_D 1dA.$$

Lo mismo se puede hacer con las regiones del tipo II.

Observaciones

1. Cuando se aplica el Teorema de Fubini en regiones no rectangulares resulta de gran ayuda dibujar el recinto D y hallar las ecuaciones de las curvas frontera de D. Un dibujo de este tipo posee la información necesaria para determinar si D es del tipo I o del tipo II o de ninguno de los dos y para conocer los límites de integración de una integral iterada.

2. La dificultad de una integral doble radica tanto en la función a integrar como en la forma del recinto.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 1 Calcular $\int\int_D \sqrt{x}ydA$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x}\}$.

Antes de calcular la integral tengamos en cuenta que al ser $f(x, y) \geq 0$ sobre D, debe ser $\int\int_D \sqrt{x}ydA \geq 0$.

Tenemos una región del tipo anterior donde $g_1(x) = x^2$ y $g_2(x) = \int\int_D \sqrt{x}ydA$. Por tanto,

$$\int\int_D \sqrt{x}ydA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} \sqrt{x}ydy \right) dx.$$

Ejemplo 2 Calcular $\int\int_D xydA$, donde D es la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcular asímismo el área del recinto.

Calculemos los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0, x = 1$.

Podemos considerar la región como una del tipo I, donde $g_1(x) = x^3$ y $g_2(x) = \sqrt{x}$. Por tanto,

$$\int\int_D xydA = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 - x^7}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{5}{48}.$$

El área de D sería:

$$\int\int_D 1dA = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} 1dy\right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

También podríamos haber considerado la región como de tipo II, donde $h_1(y) = y^2$ y $h_2(y) = \sqrt[3]{y}$. La integral a calcular presenta la misma dificultad.

<u>**Ejemplo 3**</u> (En clase) Calcular $\int\int_D (x+y)dA$ donde el recinto D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$; es decir,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

Realmente D se puede considerar de tipo I o de tipo II. Ante la duda, lo mejor es siempre fijar una de las variables y trazar la sección para ver cómo varía la otra variable.

Observemos que la recta que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ es $y = 1 - x$. Así, fijado $x \in [0,1]$ para que $(x,y) \in D$ debe suceder que $0 \leq y \leq 1 - x$. Por tanto, podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = 1 - x$. Si fijamos $y \in [0,1]$, para que $(x,y) \in D$ debe suceder que $0 \leq x \leq 1 - y$. Por tanto, podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde $h_1(y) = 0$ y $h_2(y) = 1 - y$.

Entonces

$$\int\int_D x + ydA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x + ydy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} x + ydx\right) dy.$$

La dificultad para realizar la integral iterada según un orden de integración u otro, es la misma debido a la simetria de f respecto de x e y.

<u>Nota</u>: Aparte del cálculo de la integral doble resulta de interés la igualdad que se obtiene entre las dos integrales iteradas. Para cualquier función continua f se tendría

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx\right) dy.$$

Este hecho lo comentaremos más adelante, pues a veces será de mucha utilidad.

Un ejemplo parecido al anterior es:

Ejemplo 4 Hallar el volumen del sólido limitado por arriba por el plano $z = y$ y por abajo por la región D del plano dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Como $f(x, y) = y \geq 0$ sobre D, nos estan pidiendo calcular $\displaystyle\int\int_D ydA$.
Podemos considerar a D de tipo I o de tipo II. Así podemos escribir:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

donde $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$, o también:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

donde $h_1(y) = 0$ y $h_2(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

En todos los ejemplos anteriores el orden de integración era opcional, ya que las regiones eran a la vez del tipo I y II. Además la función a integrar no presentaba mayor dificultad en un caso o en otro. Pero esto no siempre sucede. Como ya se vió para recintos rectangulares paralelos a los ejes de coordenadas, el orden de integración si es en general importante. Vamos a ver un ejemplo significativo.

Ejemplo 5 (En clase) Calcular $\int\int_D e^{y^2} dA$, donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Podríamos calcular $\displaystyle\int\int_D e^{y^2} dA$ fijando x entre 0 y 1. En tal caso:

$$\int\int_D e^{y^2} dA = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx.$$

Nos encontramos con un gran problema. No podemos calcular $\int_x^1 e^{y^2} dy$. No existe primitiva en términos elementales de la función e^{y^2}. Luego tenemos que invertir el orden de integración para intentar solucionar el problema. Si fijamos y entre 0 y 1, la x varía desde 0 a y. Así

$$\int\int_D e^{y^2} dA = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx\right) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{e-1}{2}.$$

Observación: Es posible que en un determinado cálculo nos encontremos directamente con la necesidad de calcular $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx$, lo cual no es posible. Observemos que usando la integral doble y el Teorema de Fubini, hemos podido invertir el orden de integración y afirmar que

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx\right) dy = \frac{e-1}{2}.$$

De hecho, para cualquier función continua f se tiene:

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y) dx\right) dy.$$

El único problema que hay es que para pasar de un orden de integración a otro, nos tenemos que hacer una idea de cómo es el dominio de integración D a partir de la integral iterada dada. Este problema se trata más adelante.

Hasta ahora el cálculo de las integrales de una variable que hemos tenido que hacer han sido simples (salvo quizás el caso $\int e^{y^2} dy$). Obviamente esto no siempre sucede y por tanto, habrá que tener en cuenta todas las técnicas estudiadas en la primera parte del curso para el cálculo de primitivas (integración por partes, cambio de variables, integrales trigonométricas....).

Ejemplo 6 (Ejercicio)

Hallar el volumen de la región sólida que está limitada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy $(z = 0)$.

Queremos ahora hacer hincapié en que a veces por la forma que tiene el dominio y/o la estrategia a seguir en el orden de integración (por dificultades de $f(x,y)$) es conveniente descomponer el dominio D en dos o más dominios que no se solapen y que sean de los tipos I o II; por ejemplo $D = D_1 \cup D_2$ y aplicar la propiedad de subdivisión

$$\int\int_D f(x,y) dA = \int\int_{D_1} f(x,y) dA + \int\int_{D_2} f(x,y) dA.$$

Vamos a ver algunos dominios donde se puede seguir esta estrategia:

D_1 es un rectángulo y D_2 es del tipo I o II. Así:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 f(x,y)dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^2 f(x,y)dy \right) dx.$$

También es cierto que D es del tipo II, luego podemos hacer

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Consideremos ahora el siguiente dominio:

En este caso D_1 y D_2 son dos triángulos luego

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy \right) dx.$$

Desarrollamos un ejemplo: Calcular $\int\int_D e^{x+y}dA$, donde D es la región romboidal de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(0,-1)$.

Podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Parece lógico considerar $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son los triángulos representados en las figuras siguientes:

Son dos regiones que no se solapan, así:

$$\int\int_D e^{x+1}dA = \int\int_{D_1} e^{x+1}dA + \int\int_{D_2} e^{x+1}dA.$$

Podemos considerar a D_1 y D_2 de tipo I, luego

$$\int\int_{D_1} e^{x+1}dA = \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}dy \right) dx$$

y

$$\int\int_{D_2} e^{x+1}dA = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy \right) dx.$$

3.3. Inversión del orden de integración en integrales iteradas

Inversión del orden de integración en integrales iteradasInversión del orden de integración en integrales iteradas A veces, es útil invertir el orden de integración en una integral iterada. Esto se puede llevar a cabo reconociendo el dominio D en el plano que, según Fubini, daría lugar a esta integral iterada para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA$ y posteriormente, si la región es de un tipo adecuado, como las vistas anteriormente, se cambia el orden de integración. Muestras de esto ya se han obtenido en los ejemplos 3 y 5 en los que las regiones son triángulos.

En el ejemplo 3 obtuvimos

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx \right)$$

al integrar sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

En el ejemplo 5 (muy significativo porque nos permite hacer un cálculo que en principio no es posible) obtuvimos

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx \right)$$

al integrar sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

Supongamos ahora que nos dan una integral iterada, por ejemplo

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx.$$

Lo primero que vamos a hacer es dibujar la región D a partir de los límites de integración dados. En este ejemplo vemos que primero integramos respecto de la y luego se trata de una región de tipo I.

Los límites interiores son: $y = e^x$; que es la curva superior, y $y = 1$; que es la curva inferior.

Por tanto se dibujan los límites de x que deben ser constantes ($x = 0$ límite izquierdo y $x = 2$ límite derecho) y las curvas anteriores.

Por una parte

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_0^2 \left(\int_1^{e^x} f(x,y)dy \right) dx.$$

Aplicando Fubini de la otra forma, fijaríamos y entre 1 y e^2 y en la región D x se extiende desde $\ln y$ (porque $y = e^x$) hasta $x = 2$. Por tanto

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_1^{e^2} \left(\int_{\ln y}^2 f(x,y)dx \right) dy.$$

Luego hemos obtenido, invirtiendo el orden de integración

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 f(x,y)dxdy.$$

3.4. Cambio de variables en integrales dobles

Cambio de variables en integrales doblesCambio de variables en integrales dobles Cuando vimos las integrales simples $\int_a^b f(x)dx$ pudimos comprobar que un cambio de variable adecuado, $x = g(u)$, siendo g una función derivable y con g' continua, podía facilitar el cálculo de la integral. Así, si $a = g(c)$ y $b = g(d)$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

Nota: Lo anterior es válido para cualquier disposición de a y b, pero aun siendo $a < b$ puede suceder que sea $c > d$. Por otra parte, el intervalo que une $g(c)$ con $g(d)$ no tiene porque coincidir con el intervalo $g([c,d])$, cuando $c < d$.

Sin embargo, cuando $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ es monótona y derivable con derivada continua se tiene

$$\int_{g([c,d])} f(x)dx = \int_{[c,d]} f(g(u))|g'(u)|du.$$

Esta última fórmula es la que se generaliza, en cierto modo, a varias variables.

Resulta que en las integrales dobles, triples, $\cdots$, los cambios de variable son también de gran utilidad y, quizás, de mayor utilidad que en las integrales simples puesto que, a diferencia de las integrales simples, la dificultad en las integrales múltiples puede estar en la función que se integra o en el dominio (recinto de integración) o en ambos casos a la vez. Así, cuando se realiza un cambio de variable en una integral doble o triple, puede que se haga o bien por la dificultad de la función a integrar (en este caso se intenta hacer un cambio que simplifique el integrando y no complique el recinto de integración) o bien por simplificar el recinto de integración. Hay veces en que un cambio de variable simplifica ambas cosas a la vez. El cambio más utilizado en integrales dobles es el cambio a coordenadas polares, pero antes de analizar este damos una idea general (poco formal) de un cambio de variables en integrales dobles.

En las integrales simples al hacer el cambio $x = g(u)$, los límites de integración a y b se transforman en otros; c y d, tales que $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Al hacer un cambio de variable en una integral doble se transforma el recinto de integración D en otra región D^* con el propósito de que D^* sea más simple que D o al menos del tipo de D si el objeto es simplificar la expresión de f.

Por otra parte, recuérdese que el cambio de variable en una integral simple introduce un nuevo factor en el integrando: $g'(u)$. Es razonable pensar que lo mismo sucede con el caso de dos variables. En este caso, y en el caso de integrales múltiples, va a aparecer el llamado *jacobiano* del cambio de variables, llamado así en honor al matemático alemán Carl Coustav JACOBI, que fué el primero en trabajar con cambios de variables.

En general, un cambio de variables viene dado por una Transformación biyectiva T de una región B del plano uv en una región D del plano xy de forma que

$$(x, y) = T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde g y h tienen derivadas parciales de primer orden continuas en la región B. (ver Larson, 1278).

En una integral doble, al tener dos variables x, y, al realizar un cambio aparecen dos nuevas variables u y v. Por tanto, un cambio de variables en una integral doble sería del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right. \tag{3.4.1}$$

donde se supone que g y h son funciones con derivadas parciales de primer orden continuas.

A las funciones g y h hay que pedirle más condiciones para que funcione el cambio de variable, pero son propiedades que quedan fuera del alcance del curso.

Dado el cambio de variables (3.4.1) consideremos la función

$$J(u, v) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{array} \right|.$$

A $J(u, v)$ se le llama el jacobiano del cambio de las variable $\{x, y\}$ a las variables $\{u, v\}$.

También se designa por $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ al jacobiano.

Sólo se supondran admisibles aquellos cambios de variables para los que el jacobiano en cada punto sea distinto de cero.

Supongamos que queremos calcular la integral doble $\displaystyle\int\int_D f(x, y)dA$, es decir, que D es el recinto de integración de f y mediante el cambio de variables transformamos un recinto D^* del plano uv en la región D del plano xy.

Entonces el resultado es el siguiente (teorema del cambio de variable en una integral doble):

$$\int\int_D f(x, y)dA = \int\int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv.$$

La demostración y el enunciado correcto del teorema se salen del alcance de este curso.

Así pues, se cambia el recinto de D a D^*, tal y como se cambian los límites de integración en una integral simple y el cambio introduce un nuevo factor; el valor absoluto del jacobiano $|J(u,v)|$, que viene a ser el sustituto de $g'(u)$ (o más exactamente de $|g'(u)|$ en el caso de g monótona).

Cambio de variables a coordenadas polares

Las coordenadas polares, muy útiles para distintas cuestiones, fueron utilizados para el estudio de ciertos *límites indeterminados* cuando la función $f(x,y)$ tenía una descripción simple en polares. En la integración ocupan un papel estelar. Estas se usan con frecuencia en las integrales dobles principalmente cuando el integrando o la región de integración, o ambas, tienen una descripción simple en polares, pues facilitan mucho los cálculos. Esto es especialmente cierto para regiones circulares y para integrandos donde aparezcan x^2+y^2.

Las fórmulas de cambio de coordenadas polares, que notaremos (r,θ), a coordenadas cartesianas o rectangulares (x,y) son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right. , \quad r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

En este caso, el jacobiano de la transformación a polares sería

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r.$$

Luego $J(r,\theta) = r$. Obtenemos que el jacobiano es distinto de cero para todo punto $(r,\theta) \neq (0,0)$ y además $|J(r,\theta)| = r$ pues siempre $r \geq 0$.

De esta forma, al hacer el cambio a polares, si B es la región del plano $r\theta$ que se transforma en el recinto de integración D del plano xy mediante tal cambio, se sigue del resultado del cambio de variables visto que

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_B f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta.$$

Vamos a ver un primer ejemplo donde se ve claramente la utilidad de la fórmula anterior y después veremos algunos tipos de recintos especiales donde suele ser útil el cambio a polares.

Ejemplo 1

Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dA$ donde D es el disco de centro $(0,0)$ y radio 4.

Integrando D como una región del tipo I (banda horizontal) vemos que para cada x fijo entre -4 y 4, y varía desde la semicircunferencia inferior (de ecuación $y = -\sqrt{16-x^2}$) hasta la superior (de ecuación $y = \sqrt{16-x^2}$) y así

$$\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dA = \int_{-4}^{4} \left(\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{x^2+y^2+1} dy \right) dx.$$

La integral iterada anterior es fácil de calcular. Sin embargo, tanto el integrando como el dominio de integración D se pueden expresar en polares de manera simple.

Observemos que el integrando se puede expresar, haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ como $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{1}{r^2+1}$, que al multiplicar por el jacobiano $|J(r,\theta)| = r$, queda

$$\frac{r}{r^2+1}$$

expresión que es muy fácil de integrar respecto de la variable r.

Por otra parte, el dominio también se simplifica mucho. En coordenadas polares D se puede describir como el conjunto de puntos (r,θ) tales que, para cada ángulo θ entre 0 y 2π, la r varía desde 0 (el origen) hasta $r = 4$ (circunferencia exterior). De esta forma, D se puede describir en coordenadas polares como

$$B = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Este conjunto se transforma en D mediante el cambio a polares. Por tanto,

$$\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dA = \int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta.$$

Podemos observar otra ventaja, y es que B es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas

Sabemos que el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos de este tipo es muy fácil aplicando Fubini, pues en tal caso

$$\int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \frac{r}{r^2+4} dr \right) d\theta.$$

O bien

$$\int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta = \int_0^{4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+4} d\theta \right) dr.$$

<u>Algunos recintos de integración para los que suele ser útil el cambio a polares</u>

Vamos a dar una serie de recintos expresados en coordenadas cartesianas y su correspondiente descripción en polares:

1. Disco centrado en el origen:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

2. Un trozo de un disco:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

3. Un anillo (región circular o corona circular):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

4. Sector circular

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

5. Trozo de anillo

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Como vemos en todos los casos anteriores, la ventaja que tiene la descripción a polares es el que el conjunto que obtenemos es un rectángulo de lados paralelos a los ejes. De hecho, la última expresión

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

incluye todos los demás casos.

En estos casos, al ser D un rectángulo, la integral doble

$$\int\int_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta$$

es muy fácil de calcular aplicando Fubini como hemos visto en el ejemplo 1. Así

$$\int\int_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) dr \right) d\theta$$

o bien se puede utilizar la otra integral iterada.

En resumen, hemos obtenido el siguiente resultado:

Si el recinto de integración D viene descrito es coordenadas polares por $a \leq r \leq b$ $(a, b \geq 0)$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$ $(0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi)$, es decir,

$$D = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr \right) d\theta = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r d\theta \right) dr.$$

Ejemplo 2 Calcular $\int\int_D (x^2 + y^2)^2 dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

D se describe mediante coordenadas polares como

$$\{(r,\theta).(0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Por tanto,

$$\int\int_D (x^2+y^2)^2 dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 r d\theta \right) dr = \frac{\pi}{12}.$$

En este ejemplo, tanto la función como el recinto de integración se prestaban claramente a que se hiciese el cambio a polares. En el siguiente ejemplo se realiza el cambio a polares únicamente por la forma que tiene el recinto.

Ejemplo 3 Calcular $\int\int_D (x^2 + y) dA$, donde D es la región anular entre las dos circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Calcular asímismo el área de D.

La descripción de D en coordenadas polares es

$$\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Por tanto

$$\int\int_D (x^2+y) dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\operatorname{sen}\theta) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}\theta) dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta \right]_{r=1}^{r=\sqrt{5}} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta \right) d\theta.$$

Usando la identidad $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, podemos seguir con la integral anterior y decir que es igual a:

$$\int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos(2\theta) + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta \right) d\theta = \left[3\theta + 3\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta \right]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

El cálculo del área es más simple y lo dejamos como ejercicio.

Ejemplo 4 (Ejercicio) Probar que el volumen de la región encerrada por la esfera de centro el origen y radio a es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Ejemplo 5 (Área de una región encerrada entre dos curvas)

Sea D la región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ que se encuentran en el primer cuadrante. Hallar el área de D.

Tenemos

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

Está claro que en esta región $1 \leq r \leq 2$. Veamos ahora cuál es el intervalo de variación del ángulo θ.

Como $y = x$ es la bisectriz debe ser $\alpha = \frac{\pi}{4}$. De todas formas, de manera analítica procedemos así:

Un punto (x, y) de la recta escrito en forma polar $(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, debe verificar que $y = x$, es decir, $r\,\mathrm{sen}\,\alpha = r\cos\alpha$ o equivalentemente $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\alpha$, es decir, $\tan\alpha = 1$. Por tanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Para determinar el ángulo β que caracteriza los puntos de la recta $y = \sqrt{3}x$, observemos que la pendiente es $\sqrt{3}$, luego β debe ser tal que $\tan\beta = \sqrt{3}$ y por tanto $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Por tanto, la descripción del sector anular D en polares es:

$$\{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

De esta forma, el área de D se calcula:

$$\int\int_D 1dA = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r d\theta \right) dr.$$

Ejemplo 6 (Volumen de una región encerrada entre dos superficies)

Calcular el volumen del sólido limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Tenemos que determinar el dominio D del plano en el que se proyecta tal sólido. Una vez que tengamos ese dominio D el volumen se puede poner como diferencia de dos volúmennes $V = V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen del sólido que está por debajo de la superficie $z = 2 - (x^2 + y^2)$ y por encima de D y V_2 es el volumen del sólido que está por debajo de la superficie $z = x^2 + y^2$ y por encima de D.

Por tanto:

$$V = \int\int_D [2 - (x^2 + y^2)]dA - \int\int_D (x^2 + y^2)dA = 2\int\int_D [1 - (x^2 + y^2)]dA.$$

Para determinar el recinto D, determinamos la curva intersección de las dos superficies y la proyectamos en el plano xy.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2 - (x^2 + y^2) \\ z = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \mathbb{R} \Rightarrow 2 - (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)\mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

La ecuación no contiene a z. Ello significa que esta ecuación es la de un cilindro proyectante de la curva de intersección sobre el plano xy, si se le interpreta en el espacio o bien la ecuación de la proyección de esa curva sobre el plano xy (para que $z = 0$). Tal curva es una circunferencia centrada en $(0, 0)$ y radio 1. Así:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

o en polares

$$\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Por tanto:

$$V = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - r^2) r d\theta\right) dr = \pi.$$

3.5. Áreas de superficies

Área de superficies

En la primera parte de la asignatura se vió cómo calcular la longitud del trozo de gráfica $y = f(x)$ (arco de curva) entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Así, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable, con derivada f' continua la longitud se calcula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

La idea era tomar una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$, considerar la poligonal, formada por los segmentos que unen los puntos $(x_k, f(x_k))$ cuya longitud $L_n^\sim$ se toma como aproximación de L. Obtenemos

$$L_n^\sim = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$$

con $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, lo cual es una suma de Riemann correspondiente a la función $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ y haciendo el paso al límite se deduce la fórmula. ($L = \lim_{n \to \infty} L_n^\sim$)

El objetivo de esta sección es estudiar una fórmula análoga para el área de una superficie que constituye la gráfica de una función de dos variables.

Tengamos en cuenta que a estas alturas conocemos algunas cosas de la región sólida comprendida entre una superficie y una región acotada D del plano xy. Por ejemplo, sabemos hallar los extremos de f en D, el área de la base del sólido y el volumen del sólido. Aquí vamos a ver cómo calcular el área de la superficie.

Supongamos que D es una región acotada (y cerrada) del plano y que $f : D \to \mathbb{R}$ tiene primera derivadas parciales continuas. De manera análoga a como se calcula la longitud del arco de curva con aproximaciones poligonales cuyas longitudes son sumas de Riemann de una función de una variable, la idea es aproximar esta superficie mediante unas sumas de Riemann de una función de dos variables, de manera que finalmente el área coincide con una integral doble sobre la región D de una función de dos variables que se fabrica a partir de las dos derivadas parciales de f (tal como se hacia con la longitud de un arco, en el que la función a integrar es $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$).

En este caso el proceso es mucho más complicado. En síntesis consiste en encerrar la región D dentro de un rectángulo del que se hace una partición mediante una malla con lineas paralelas a los ejes coordenados. Esto crea un cierto número de celdas, de las cuales consideramos las que caen dentro de D, $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

En cada una de ellas (R_k) se elige una esquina (x_k, y_k) (por ejemplo la más próxima al origen) y en el punto $(x_k, y_k, z_k) = (x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ de la superficie S se considera el plano tangente T_k, el cual existe por ser f diferenciable en (x_k, y_k). El área de la porción de plano tangente que está justo encima de R_k es aproximadamente igual al área de la superficie encima de R_k (cuanto más pequeño sea R_k, es decir k grande, mejor será la aproximación). Entonces la suma de las áreas de todas estas porciones de planos tangentes dan una aproximación del área de la superficie $z = f(x, y)$.

Por problemas de tiempo no vamos a profundizar más en el tema. Puede verse con detalle en “Larson”).

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región D cerrada y acotada del plano xy, entonces el área de la porción de superficie $z = f(x, y)$ que se proyecta sobre la región D es

$$\int\int_D \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}dA.$$

Observemos que al ser el integrando una función no negativa, la integral también lo es.

Lo que quiere decir esto: Se puede considerar la región D como la proyección del trozo de superficie $z = f(x, y)$ sobre el plano xy. Si hubiera una fuente de luz con rayos perpendiculares al plano xy. La región D sería la sombra sobre el plano del trozo de superficie.

Al igual que las integrales para la longitud de arco, las que dan el área de una superficie suelen ser muy difíciles de calcular. No obstante, hay excepciones como los de los próximos ejemplos.

Ejemplo 1 (Área de una superficie plana)

Calcular el área de la porción del plano $x + y + z = 2$ que se proyecta sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante.

Aquí el plano $x+y+z = 2$ es la gráfica de la función $f(x, y) = 2-x-y$ y el dominio de integración es

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$ el área de la superficie viene dada por

$$S = \int\int_D \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}dA = \int\int_D \sqrt{3}dA$$

$$= \sqrt{3}\int\int_D dA = \sqrt{3} \times \text{área de } D.$$

Por tanto la integral es simplemente $\sqrt{3}$ veces el área de la región D. Como el área de D es $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi$ el área pedida es $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

Ejemplo 2

Hallar el área de la porción de superficie $x^2 - y + z = 1$ situada encima de la región triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

La superficie es la gráfica de la función $f(x, y) = 1 - x^2 + y$ y

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x - 1 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Como $f_x(x,y) = -2x$ y $f_y(x,y) = 1$ el área de la superficie es

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2} dA = \int\int_D \sqrt{2 + 4x^2} dA = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ejemplo 3

Hallar el área de la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 5$ que está por encima del plano $z = 1$. Aproximar hasta la centésima.

El paraboloide corta al plano $z = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, ya que

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z = 5 \\ z = 1 \end{array}\right\} \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Así que la parte del paraboloide cuyo área buscamos se proyecta en el disco (círculo)

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Tenemos $f(x,y) = 5 - (x^2 + y^2)$ luego $f_x(x,y) = -2x$ y $f_y(x,y) = -2y$. Por tanto el área pedida se calcula como sigue:

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y)^2} dA = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA,$$

donde D es el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Dado el dominio de integración y la expresión de la función a integrar, parece conveniente realizar un cambio a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y así, como la descripción de D en polares es

$$\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

tenemos

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\operatorname{sen}^2\theta} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) d\theta$$

o bien

$$S = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} r d\theta \right) dr.$$

Utilizando la última forma de calcular el área, llegamos a obtener

$$S = 2\pi \int_0^2 r(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).$$

Ejemplo 4 (Ejercicio)

Calcular el área de la esfera de centro el origen y radio r.

3.6. Masa, centro de masas y momentos de inercia de una lámina

Masa, centro de masas y momentos de inercia de una lámina Un cuerpo lo suficientemente "plano" como para poder ser considerado bidimensional se llama una *lámina*. Supongamos que una lámina ocupa una región acotada D del plano xy. Una *lámina homogénea* es la que tiene densidad constante; en este caso, la densidad ρ es la masa por unidad de área; es decir

$$\rho = \frac{m}{A}$$

donde m es la masa de la lámina y A es el área de la lámina.

Recordemos que elárea de D viene dada por la integral doble

$$\int\int_D 1dA$$

luego la masa de la lámina verifica

$$m = \int\int_D \rho dA$$

ya que ρ es constante.

Una *lámina no homogénea* es la que tiene densidad variable, es decir, en cada punto (x, y) de la lámina hay una densidad $\rho(x, y)$ que puede variar de un punto a otro.

En este caso parece lógico que la masa de la lámina venga definida como exponemos a continuación.

Masa de una lámina plana de densidad variable

Sea ρ la función de densidad sobre la lámina que está extendida sobre una región D del plano xy. Suponiendo que la función ρ es integrable sobre D (es suficiente con que sea continua sobre D), entonces la masa m de la lámina viene dada por

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA.$$

Definimos a continuación unos conceptos, los *momentos*, que tienen interés por sí mismos, pero cuyos cálculos suelen ser un paso intermedio hacia un objetivo más relevante: el *centro de masas*.

El *momento* (momento de masa) de un objeto respecto a un eje es el producto de su masa por la distancia "orientada" desde el eje.

Si tenemos ahora una lámina en la región D de densidad variable $\rho(x,y)$ realizando una partición o malla de D y realizando aproximaciones de los momentos de las celdas y sumas de Riemann se justifica que se den las siguientes definiciones de momentos

$$M_x = \int\int_D y\rho(x,y)dA, \quad M_y = \int\int_D x\rho(x,y)dA.$$

Si la masa de la lámina es m, el *centro de masas* es

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si la densidad ρ es constante, al punto $(\overline{x},\overline{y})$ se le llama *centro de gravedad* de la región D. En general, para una región plana D el punto $(\overline{x},\overline{y})$ se llama *centroide* de la región.

El conocer el centro de masas es muy útil en muy diversas aplicaciones, pues permite tratar la lámina como si toda su masa estuviera concentrada en ese punto.
Intuitivamente, el centro de masas es el punto equilibrio de la lámina.

En el caso de densidad constante, el centro de gravedad sale así

$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{\int\int_D xdA}{\text{area}(D)}, \frac{\int\int_D ydA}{\text{area}(D)}\right).$$

Ejemplo

Determinar la masa y el centro de masas de la lámina correspondiente a la región parabólica

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

si la densidad en el punto (x,y) es proporcional a la distancia de (x,y) al eje x.

Si la densidad en el punto (x,y) es proporcional a la distancia de (x,y) al eje x

$$\rho(x,y) = Ky.$$

Masa

$$m = \int\int_D \rho(x,y)dA = K\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} ydydx = \frac{256}{15}K.$$

Centro de masas

$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{M_y}{m},\frac{M_x}{m}\right).$$

$$M_x=\int\int_D y\rho(x,y)dA=\int\int_D Ky^2dA=\frac{4096}{105}K.$$

$$M_y=\int\int_D x\rho(x,y)dA=\int\int_D KxydA=0.$$

Por tanto,

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=0,\quad \overline{y}\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{4096}{105}K}{\frac{236}{15}K}=\frac{16}{7}\approx 2,29.$$

El centro de masas es $(0,2,29)$.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y usados para determinar el centro de masas se suelen llamar *primeros momentos* respecto de los ejes x e y.

Ahora introducimos otro tipo de momentos, el segundo momento o momento de inercia de una lámina respecto de una recta. Así como la masa es una medida de la resistencia de la materia a cambios en un movimiento rectilineo, el momento de inercia mide la resistencia de la materia a cambios en un movimiento de rotación.

Por ejemplo, si unapartícula de masa m dista d de una recta fija, su momento de inercia respecto de ella se define como

$$I=md^2=(masa)(distancia)^2.$$

Al igual que con los momentos de masa M_x, M_y, podemos generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable que ocupa una región D, respecto de los ejes x, y. Estos segundos momentos, que se denotan por I_x, I_y, son productos de una masa por el cuadrado de una distancia.

Momentos de inercia

Los momentos de inercia de una lámina de densidad variable ρ alrededor de los ejes x e y son, respectivamente:

$$I_x=\int\int_D y^2\rho(x,y)dA,\quad I_y=\int\int_D x^2\rho(x,y)dA.$$

Ejemplo

Calcular el momento de inercia respecto del eje x de la lámina tratada anteriormente.

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dA = K\int\int_D y^3 dA = K\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} y^3 dy\right)dx = \frac{32768}{315}K.$$

$$I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dA = K\int\int_D x^2 y dA = K\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} x^2 y dy\right)dx = \frac{1024}{105}K.$$

3.7. Integrales triples

Integrales triples El procedimiento utilizado para definir una integral triple imita el de las integrales dobles. Una integral doble se calcula sobre una región acotada del plano. Una integral triple

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV$$

se calcula sobre una región sólida acotada (y cerrada) del espacio $\mathbb{R}^3$ y donde la función f es de tres variables.

No vamos a entrar en detalles, por problemas de tiempo, pero esbozaremos una ligera idea de la definición.

Supongamos que f es una función de tres variables definida sobre una región sólida S que está acotada.

Introducimos S en un paralelepípedo (caja) Q del espacio. Formamos una partición o retículo de cajas del paralelepípedo consistete en un número finito de cajas más pequeñas, con lados paralelos a los planos coordenados, como muestra la figura.

Excluimos las cajas que tienen puntos fuera de S. Sean ΔV_1, $\Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ los volúmenes de las cajas que quedan. Se toma un punto (x_k, y_k, z_k) en cada caja y se forma la suma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Si repetimos el proceso cada vez más veces llegamos a la siguiente definición:

[Integral triple y volumen]

Si f es una función de tres variables definida sobre la región sólida y acotada S del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces la integral triple de f sobre S se define como el siguiente límite

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k.$$

En caso se que el límite existe se dice que la función f es integrable sobre S.

El volumen de la región sólida S viene dado por

$$\int\int\int_S 1dV = \int\int\int_S dV.$$

(Es fácil razonar que el volumen se calcula de esta forma).

Los resultados que aseguran que existe una integral triple son generalizaciones de los obtenidos para integrales dobles.

Todas las propiedades vistas para integrales dobles también se verifican de forma análoga para integrales triples.

Las integrales triples son muy útiles en Física para calcular la masa de un sólido S (integrando su función de densidad), el centro de masas (o centro de gravedad), momentos y momento de inercia.

Cálculo de integrales triples

Al igual que en el caso de las integrales dobles, se calculan las triples por integración iterada, gracias al Teorema de Fubini, que se generaliza a este tipo de integrales (y a otras más generales). Lo que ocurre es que ahora todo se complica más, por dos razones principales:

1. A la hora de usar integrales iteradas simples para calcular las integrales triples, se tienen, en principio, seis posibles órdenes de integración, mientras que en las dobles sólo había dos posibilidades.

   Puede haber integrales iteradas formada por una integral simple y una doble.

2. En general, es más difícil establecer los límites de integración en una integral triple porque la región de integración S es tridimensional.

El caso más simple es integrar sobre un paralelepípedo (caja) de caras paralelas a los planos de coordenadas, que viene a ser como integrar sobre rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas en las integrales dobles.

[Teorema de Fubini para un paralelepípedo]

Si f está definida sobre un paralelepípedo $Q = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Se puede calcular la integral triple de f sobre Q considerando las integrales iteradas. Esta integración iterada se puede hacer en cualquier orden (en total 6 casos) con el necesario ajuste de los límites de integración. Así

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz.$$

El cálculo de la integral iterada exige el cálculo de tres integrales simples y se procede calculando desde dentro hacia fuera.

Ejemplo 1

Calcular $\int\int\int_Q z^2ye^x dV$, donde $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [-1, 1]$.

$$\int\int\int_Q z^2ye^x dV = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_{-1}^1 z^2ye^x dz\right) dy\right) dx = e - 1.$$

En general, se nos planteará el problema de calcular una integral triple sobre una región no paralelepípeda y lo más normal será tener una región sólida S limitada por una superficie "superior" $z = g_2(x, y)$ y una "inferior" $z = g_1(x, y)$, definidas sobre un dominio común D del plano xy. En este caso se puede describir S del siguiente modo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

S sería la región sólida limitada por dos gráficos de funciones de dos variables.

El barrido del dominio D se hace entonces mediante una integral doble. Se suponen g_1 y g_2 continuas sobre D. En este caso el Teorema de Fubini dice lo siguiente

Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, donde g_1 y g_2 son dos funciones continuas sobre D, entonces

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \int\int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dA.$$

Observemos que una vez realizado el cálculo de la integral interior, que es una integral simple respecto de la variable z, nos queda una expresión en las variables x e y, que posteriormente se integra sobre el recinto D.

Así, para este tipo de regiones sólidas, el cálculo de la integral triple se reduce a una integral doble, la cuál posteriormente se calculará mediante integrales simples en las variable x e y.

Lo más usual es que nuestro dominio D del plano xy donde estan definidas las funciones g_1 y g_2 sean de alguno de los tipos estándar (tipo I o tipo II) estudiadas en las integrales dobles.

Así por ejemplo, si $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x)\}$ donde l_1 y l_2 son funciones continuas sobre $[a, b]$, entonces sabemos calcular la integral doble

$$\int\int_D h(x, y)dA$$

mediante la integral iterada

$$\int\int_D h(x, y)dA = \int_a^b \left(\int_{l_1(x)}^{l_2(x)} h(x, y)dy \right) dx.$$

Por tanto, en este caso, la región sólida S vendría descrita así

$$S = \{(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

y la integral triple de f sobre S se podrá calcular utilizando una integral iterada en la que aparecen tres integrales simples en el orden $dzdydx$, de manera análoga a como se hace en el caso del paralelepípedo.

El resultado, en resumen, sería el siguiente

Si S es la región sólida definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

donde l_1, l_2, g_1 y g_2 son funciones continuas, entonces

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \int_a^b \left(\int_{l_1(x)}^{l_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx$$

Se pueden dar otras regiones estándar; por ejemplo, si el dominio D donde g_1 y g_2 están definidas es del tipo II

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, l_1(y) \leq x \leq l_2(y)\}$$

entonces S viene definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathrm{I\!R}^3 : c \leq y \leq d, l_1(y) \leq x \leq l_2(y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

y entonces el cálculo de la integral triple sería

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \int_c^d \left(\int_{l_1(y)}^{l_2(y)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dx \right) dy.$$

Otras regiones estándar

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq z \leq l_2(x), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b, l_1(x) \leq z \leq l_2(x), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, l_1(z) \leq y \leq l_2(z), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, l_1(z) \leq y \leq l_2(z), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$$

La integración sobre estos recintos es análoga.

Observación sobre el cálculo de volúmenes

Hemos definido inicialmente el volumen de una región sólida acotada en $\mathbb{R}^3$ como

$$V = \int\int\int_S dV.$$

Al dar el concepto de integral doble, definimos, cuando $g(x, y) \geq 0$ el volumen de la región sólida S que está por debajo de la superficie $z = g(x, y)$ y por encima del dominio D como

$$V = \int\int_D g(x, y)dA.$$

De esta forma, el volumen de la región sólida S comprendida entre dos gráficas $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$, siendo $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, sobre la región D del plano, sería

$$V = \int\int_D (g_2(x, y) - g_1(x, y))dA.$$

Ahora se aprovecha la definición de integral triple para dar una definición general de volumen, pero está claro que esta definición debe ser compatible con lo ya conocido.

Observemos que la región sólida descrita anteriormente es

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Según el Teorema de Fubini que hemos visto,

$$V = \int\int\int_S 1dV = \int\int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} 1dz\right) dA = \int\int_D (g_2(x, y) - g_1(x, y))dA$$

y como vemos coincide con la fórmula conocida.

Consideraciones prácticas

1. Obviamente, cuando un recinto (región sólida) estándar se puede describir de dos formas diferentes, se utilizará, para calcular la integral sobre él, aquella que simplifiquen los cálculos. Se pone de manifiesto la necesidad de una buena utilización del Teorema de Fubini.

2. Por lo general, para hallar los límites de integración que permiten descubrir una región sólida S como estándar, lo que se hace es determinar los límites más interiores, los cuales pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, se proyecta la figura en el plano coordenado determinado por estas dos variables y así, usando lo visto en integración doble, se calculan los límites de integración de este recinto plano.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2

Sea S la región sólida del espacio que está por debajo del plano de ecuación $z = x + y$ y por encima del triángulo del plano de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$.

Calcular

$$\int\int\int_S (xy + 2z)dV.$$

Sea D la región triangular del plano. La región sólida S viene dada por

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

El dominio D es una región de tipo I o de tipo II. Considerada de tipo I, fijada x entre $=$ y 2, la variable y varía entre $=$ y x. Así que D se puede describir como

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}.$$

De esta forma

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

Por tanto,

$$\int\int\int_S (xy + 2z)dV = \int_0^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} (xy + 2z)dz\right) dy\right) dx = \frac{44}{3}.$$

Ejemplo 3

Calcular $\int\int\int_S xdV$, donde S es el sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2y + z = 4$.

La figura muestra el sólido. La superficie superior del sólido es el plano $z = 4 - 2y$ y la inferior es el plano xy (o sea $z = 0$), así que

$$0 \leq z \leq 4 - 2y.$$

La proyección D del sólido sobre el plano xy es el cuarto de disco (círculo) $x^2 + y^2 \leq 4$ (la base del cilindro) con $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (porque S está en el primer octante). Esta proyección se puede considerar como una región del tipo I

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}.$$

Por tanto,

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq 4 - 2y\}.$$

De esta forma se tiene:

$$\int\int\int_S x dV = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_0^{4-2y} x dz \right) dy \right) dx = \frac{20}{3}.$$

También se puede calcular así

$$\int\int\int_S x dV = \int\int_D \left(\int_0^{4-2y} x dz \right) dA = \int\int_D (4x - 2xy) dA,$$

y ahora calcular esta integral doble por polares. (Es parecido al ejemplo 2).

<u>**Ejemplo 4**</u> (Volumen de un tetraedro)

Hallar el volumen de un tetraedro T limitado por la parte del plano $2x + y + 3z = 6$ en el primer octante. Utiliza una integral triple.
<u>Cortes del plano con los ejes</u>

$$x = 0, y = 0, \mathbb{R} \Rightarrow z = 2, \quad y = 0, z = 0\mathbb{R} \Rightarrow x = 3, \quad x = 0, z = 0\mathbb{R} \Rightarrow y = 6.$$

Los puntos de corte con los ejes son: $(0, 0, 2), (3, 0, 0), (0, 6, 0)$.
El tetraedro es la región

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ y } 0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - 2x - y)\}.$$

La proyección del tetraedro sobre el plano xy ($z = 0$) es el triángulo de vértices $(0, 0)$ $(3, 0)$ y $(0, 6)$, luego

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x\}.$$

Por tanto podemos describir T así:

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x, 0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - 2x - y)\}.$$

Luego el volumen sería:

$$V = \int\int\int_T dV = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x-y)} dzdydx = 6.$$

Ejemplo 5

Escribir (sin calcular) la integral triple que determina el volumen del sólido S limitado por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y por abajo por el plano $y + z = 2$.

Obervemos primero que la intersección del plano y la esfera está toda por encima del plano xy. Luego a efectos de resolver el problema, la esfera tiene como ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (hemisferio superior).

Los límites de integración de la variable z estarán dados por

$$2 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Para hallar los límites de integración de las variables x e y consideramos la proyección de S sobre el plano xy. Para ello determinaríamos la intersección del hemisferio y el plano $z = 2 - y$:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 - y \Leftrightarrow x^2 + 2(y - 1)^2 = 2.$$

Aunque hemos calculado la intersección en $\mathbb{R}^3$, la ecuación no contiene a z. Esto significa que esta ecuación es, bien la del cilindro proyectante de la curva de intersección sobre el plano xy si se le interpreta en $\mathbb{R}^3$, o bien la ecuación de la proyección de una curva sobre el ‘plano xy, para el que $z = 0$. Esta curva es una elipse centrada en $(0, 1)$ y de semiejes $\sqrt{2}$ y 1.

$$\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1.$$

Dada la ecuación de la elipse, aunque la región D sea del tipo I y II, vamos a considerarla del tipo II, lo que significa que integramos primero respecto a x y luego respecto a y.

Observemos que la y varía entre 0 y 2. Fijada esta y entre 0 y 2, la x varía desde $-\sqrt{2(1 - (y - 1)^2)} = -\sqrt{2 - 2(y - 1)^2} = -\sqrt{4y - 2y^2}$ hasta $\sqrt{4y - 2y^2}$.

Por tanto, el sólido queda definido por:

$$\{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, -\sqrt{4y - 2y^2} \leq x \leq \sqrt{4y - 2y^2}, 2 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Por tanto,

$$V = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-2y^2}}^{\sqrt{4y-2y^2}} \int_{2-y}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdxdy.$$

Cambio en el orden de integración

Aquí podemos plantear la cuestión análoga a la vista para integrales dobles y la idea es la misma. Así, si nos encontramos con el cálculo de la integral iterada

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 dzdydx$$

tras una integración en el orden dado nos encontramos con el cálculo de

$$\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2 \operatorname{sen} y^2 dy$$

que no es una función elemental. Para eludir esa dificultad cambiamos el orden de integración a $dzdxdy$ de manera que y quede como variable exterior. La región sólida S, correspondiente a la integral triple $\int\int\int_S$ que da lugar a esa integral iterada viene dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1 \leq z \leq 3\}$$

y la proyección sobre el plano xy da las cotas, fijando $0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, x varia desde 0 hasta y.

Por tanto, tenemos

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 dzdxdy.$$

El cambio en el orden de integración es esencial para que el cálculo salga muy fácil.

Centro de masas y momentos de inercia de una región sólida

Vamos a ver dos aplicaciones de las integrales triples que son importantes en Ingeniería. Consideremos una región sólida S cuya densidad en (x, y, z) viene dada por la función de densidad ρ. La masa de esta región sólida se calcula

$$m = \int\int\int_S \rho(x, y, z) dV.$$

Los *primeros momentos* de la región S respecto de los planos yz, xz, xy, son respectivamente

$$M_{yz} = \int\int\int_S x\rho(x, y, z)dV, \quad M_{xz} = \int\int\int_S y\rho(x, y, z)dV, \quad M_{xy} = \int\int\int_S z\rho(x, y, z)dV.$$

El *centro de masas* es $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_{y,z}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Los primeros momentos de una región sólida se toman respecto de un plano, mientras que los segundos momentos se toman respecto de una recta. Los *segundos momentos* (o *momentos de inercia*) respecto de los ejes x, y, z son respectivamente

$$I_x = \int\int\int_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_y = \int\int\int_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_z = \int\int\int_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV.$$

En problemas que requieran calcular los tres momentos, se puede ahorrar mucho esfuerzo aplicando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde

$$I_{xy} = \int\int\int_S z^2\rho(x, y, z)dV, \quad I_{xz} = \int\int\int_S y^2\rho(x, y, z)dV, \quad I_{yz} = \int\int\int_S x^2\rho(x, y, z)dV.$$

3.8. EJERCICIOS TEMA 3

1. Calcular las siguientes *integrales dobles* en los recintos indicados:

   a) $R(x^2 + 4y)$,, R: {*rectángulo* de vértices $(0, 0), (0, 3), (2, 3)$ y $(2, 0)$.}
   (Solución: 44).

   b) Rx^y , R: {*rectángulo* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.}
   (Solución: $\ln 2$).

   c) Dxy , D: {región limitada por las *parábolas* $x = y^2$ e $y = x^2$}
   (Solución: $\frac{1}{12}$).

   d) Tx^2 , T: {región *triangular* de vértices $(0, 0), (1, 1)$ y $(1, -1)$.}
   (Solución: $\frac{1}{2}$).

   e) $D(x^2 - y)$,, D: {región comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.}
   (Solución: 4/5).

   f) Dx ,, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$
   (Solución: π).

   g) $D(x^{-\frac{x^2}{y}})$,, D: {región comprendida entre las rectas $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ y la parábola $y = x^2$.}
   (Solución: $\frac{3}{4}(1 - \frac{1}{})$).

   h) Dy^2 ,, D: {región en el primer cuadrante limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y la hipérbola $xy = 3$.}
   (Solución: $\frac{9}{4}$).

2. Utilícese el resultado del apartado (b) del ejercicio 1 para probar fácilmente que $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} = \ln 2$.

3. Sea D la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 2 - x$, $y = 0$. Expresar la *integral doble* Dxy mediante integrales iteradas, de dos formas distintas, usando los dos posibles órdenes de integracin, y calcular el valor de la integral. (Solución: $\frac{5}{8}$).

4. Calcular el volumen del tetraedro limitado por el plano $x + 2y + z = 2$ y los tres planos de coordenadas (primer octante). (Solución: $V = \frac{2}{3}$).

5. Sean $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g \colon [c, d] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y R el rectángulo $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Pruébese que la integral doble de la función $F(x, y) = f(x)g(y)$ se puede calcular como el *producto de dos integrales simples*; concretamente: $Rf(x)g(y) = \big(\int_a^b f(x)\,dx\big)\big(\int_c^d g(y)\,dy\big)$.

6. Sean D una región *cerrada* y *acotada* en el plano y f una función *continua* sobre D. Compruébese que la *media* de f sobre D, definida como $\boxed{\frac{1}{\text{área}(D)} D f(x,y)}$, es un valor comprendido entre los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre la región D.

7. Cambiar el *orden de integración* en las siguientes *integrales iteradas*:
[2] $\int_{-1}^{2} \left(\int_{2}^{3} f(x,y)\, dy \right) dx$. $\int_{1}^{e} \left(\int_{0}^{\ln x} f(x,y)\, dy \right) dx$.

8. Calcular las dos siguientes *integrales iteradas*
[2] $\int_{0}^{1} \left(\int_{y}^{1} {}^{-x^2}\, dx \right) dy$,

(Solución: $\frac{-1}{2}$). $\int_{0}^{4} \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+y^2)}}\, dy \right) dx$,

(Solución: $4(\sqrt{2}-1)$). (Sugerencia: Un cambio en el orden de integración puede facilitar mucho los cálculos)

9. *a*) Una lámina ocupa la región del plano limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$ y tiene por densidad $\rho(x,y) = x^2$. Calcular la *masa* y el *centro de masa* de la lámina. (Soluciones: masa $m = 3,15$, centro de masas $(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{8}{7}, -\frac{20}{49}) \approx (-1,14, -0,41)$).

   b) Una lámina ocupa la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $x = 2$ e $y = 1$. La densidad de la lámina en cada punto (x,y) es $\rho(x,y) = x^2 y$. Hallar los *momentos de inercia* de la lámina respecto de los ejes x e y. (Soluciones: $I_x \approx 45,94$, $I_y \approx 25,29$).

10. Sea D la sección de corona circular (sección anular) limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$. Calcular el área de D y la integral doble $D(x^2 + y^2)$. (Soluciones: $\frac{3}{8}\pi$ y $\frac{15}{16}\pi$. Se recomienda un cambio de variables a *coordenadas polares*).

11. *a*) La distribución de la temperatura en una placa situada sobre la región circular $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 8\}$ viene dada por $T(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 20$. Calcular la *temperatura media* de la placa. (Solución: 24.).

    b) La temperatura en cada punto de una placa es proporcional a su distancia al origen. Dicha placa se encuentra situada en la región circular $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 25\}$. Sabiendo que en el punto $(1,0)$ su temperatura es $100°C$, hallar la *temperatura media* de dicha placa. (Solución: $T_M = \frac{1000}{3}$).

    Indicación: Se sugiere utilizar coordenadas polares.

12. Usando *coordenadas polares*, calcúlense los *volúmenes* de los siguientes sólidos:

a) Sólido limitado por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y por abajo por la región circular del plano xy dada por $x^2+y^2 \leq 4$. (Solución: $V = \frac{16\pi}{3}(8-3\sqrt{3}) \approx 46,98$).

b) Región limitada por el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$. (Solución. $V = \frac{64\pi}{3}$).

13. La superficie que bordea la cavidad de una copa de vino es el paraboloide $z = x^2+y^2$ teniendo una altura de 10 cm. Sabiendo que una persona adulta comienza a estar ”piripi.ªl haber ingerido un litro de vino, hallar el número de copas de vino, supuesto que se llenan totalmente, que debería ingerir para alcanzar este estado. (Sugerencia: utilizar coordenadas polares. Solución: $\frac{1000}{50\pi} \approx 6,37$ copas).

14. Juanito ”tragahelados”tiene permiso de sus padres para comerse ”superhelados”que no superen los 1000 cm^3. En su heladería preferida observa que hay una promoción en el precio de un helado (un cucurucho) limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2 = 100$, estando expresadas las distancias en centímetros. Supuesto que dicho cucurucho está lleno totalmente de helado, tendrá Juanito permiso de sus padres para tomárselo? (Solución: $V = \frac{1000}{3}(2-\sqrt{2})\pi \approx 613,4341$ cm^3).

15. Sea E la región encerrada por la elipse $x^2+4y^2 = 4$. Realizar un *cambio de variables* adecuado para calcular fácilmente la integral Ex^2. (Solución: 2π).

16. En cada una de siguientes integrales la expresión del integrando sugiere la *sustitución* $x + y = u$, $x - y = v$. Calcular las integrales indicadas utilizando el *cambio de variables* correspondiente.

    a) $D(x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)$, D: paralelogramo de vértices $(0,1), (1,0), (1,2)$ y $(2,1)$. (Solución: $\frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen} 2)$).

    b) $D^{\frac{x-y}{x+y}}$, D: triángulo de vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,0)$. (Solución: $\frac{1}{4}(-\frac{1}{\ })$).

17. Sea D el paralelogramo limitado por las rectas $x+y = 0$, $x+y = 1$, $2x-y = 0$ y $2x-y = 3$ (los vértices son $(0,0), (1,-1), (1/3, 2/3)$ y $(4/3, -1/3)$). Se quiere calcular $D(x+y)^2$. Las ecuaciones que limitan el recinto D sugieren la *sustitución* $x + y = u$, $2x - y = v$, es decir, el *cambio de variables* $x = \frac{u+v}{3}$, $y = \frac{2u-v}{3}$. Compruébese que con este cambio el nuevo recinto de integración es un rectángulo con lados paralelos a los ejes y, con la ayuda de ésto, calcúlese fácilmente la integral dada. (Solución: $\frac{1}{3}$). Para valorar la ventaja de este método, indicar cómo se calculará la integral directamente sin hacer el cambio.

18. (*Áreas de superficies*) Calculése el *área* de cada una de las siguientes porciones de *superficie*:

    a) Plano $2x + 2y - z = 0$ por encima de la región triangular del plano xy de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$ (Sol: 6).

b) Paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2$. (Solución: $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi \approx 5,33$).

c) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está por encima del plano $z = 4$ (*casquete esférico*). (Solución: 10π).

19. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $x = 0$, $y = 0$. (Solución: 8/3).

b) $2x - 3y = 0$, $x + y = 5$, $y = 0$. (Solución: 5).

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (Solución: πab).

20. En cada caso, calcular la integral y dibujar la región R correspondiente:

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$. (Solución: 8).

b) $\displaystyle\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y)\, dx\, dy$. (Solución: 36).

c) $\displaystyle\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\, dy\, dx$. (Solución: 0).

21. Calcúlese la integral sobre R de la función $f(x, y)$:

a) $f(x, y) = xy$, R: {rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(3, 5)$ y $(3, 0)$}. (Solución: 225/4).

b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, R: triángulo limitado por $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$. Solución: $\ln(5/2)$.

c) $f(x, y) = x$, R: sector de círculo en el primer cuadrante limitado por $y = \sqrt{25 - x^2}$,
$3x - 4y = 0$ e $y = 0$. Solución: 25.

22. (*Integrales triples*) Calcular las siguientes *integrales triples* en los recintos indicados:

a) $Qxyz$, Q: {el paralelepípedo $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$}
(Solución: 3/2):

b) $S(x + y + 2z)$, S: {el sólido que queda por debajo del plano $z = x + y$ y por encima de la región triangular (en el plano xy) de vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$.
(Solución: 56/3).

c) $Sz(x^2+y^2)$, S: {el sólido en el primer octante limitado por abajo por el paraboloide $z = 2(x^2+y^2)$ y por arriba por el plano $z = 4$}.
(<u>Solución</u>:$\frac{28\sqrt{2}}{15}\pi$).
Identificar esta integral como un momento de inercia del sólido.

23. Comprobar que el *centro de gravedad* del paralelepípedo: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$, con densidad constante, es el punto $(2, 1, 0{,}5)$. Cuál sería el centro de gravedad de un paralelepípedo cualquiera con densidad constante?.

24. Calcular *la masa* del sólido S limitado por arriba por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 25$ y por abajo por el plano $z = 4$, suponiendo que la densidad en cada punto de S viene dada por $\rho(x,y,z) = z$. (<u>Solución</u>: $m(S) = \frac{81}{4}\pi$).

25. Calcular el *momento de inercia* respecto del eje z del sólido S limitado por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z = 1$, suponiendo que la densidad en cada punto de S viene dada por $\rho(x,y,z) = x^2 z$. (<u>Solución</u>: $I_z = \frac{\pi}{48}$).

26. Sea S el sólido limitado por arriba por el cono $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ y por abajo por el plano $z = 0$ (plano xy). Suponiendo que la densidad en cada punto de S es proporcional a la distancia al eje z $\left(p(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}\right)$, calcular la *masa* y el *momento de inercia* respecto del eje z del sólido S. (<u>Solución</u>: $m = \frac{1}{6}k\pi$, $I_z = \frac{1}{15}k\pi$).

27. * (<u>*Integrales impropias*</u>) Sea D un recinto *no acotado* del plano, por ejemplo, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0\}$ o $D = \mathbb{R}^2$, y sea el recinto acotado $D_n = \{(x,y) \in D \colon x^2+y^2 \leq n^2\}$. Se define la integral impropia $Df(x,y)$ como

$$Df(x,y) = \lim_{n\to\infty} D_n f(x,y)$$

y la integral se dice *convergente* o *divergente* según que exista el límite y sea finito o no. Utilizando coordenadas polares, pruébese fácilmente que $\boxed{\mathbb{R}^{2-(x^2+y^2)} = \pi}$ y, como consecuencia de lo anterior, dedúzcase que $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}}$ (Recuérdese el resultado del ejercicio 5 de la primera relación) Estas integrales aparecen con frecuencia en *Estadística*.

28. Hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:

a) $z = xy$, $z = 0$, $y = x$ y $x = 1$ (primer octante). Solución: 1/8.

b) $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$. Solución: 32/3.

c) $x^2+z^2 = 1$ e $y^2+z^2 = 1$ (primer octante). Solución: 2/3.

d) $z = x+y$ y $x^2+y^2 = 4$ (primer octante). Solución: 16/3.

29. Calcúlese la integral que se indica y dibújese la región R correspondiente:

    a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^6 3r^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,dr\,d\theta$. Solución: 0.

    b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$. Solución: $5\sqrt{5}\pi/6$.

    c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\sin(\theta)} \theta\,dr\,d\theta$. Solución: $1+\pi^2/8$.

30. Usar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por la gráfica de las ecuaciones:

    a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ y $x^2+y^2=25$. Solución: $250\pi/3$.

    b) $z=xy$ y $x^2+y^2=1$ (primer octante). Solución: $1/8$.

31. Hállese a de forma que el volumen dentro del hemisferio $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ y fuera del cilindro $x^2+y^2=a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio. Solución: $a=2\sqrt{4-2^{4/3}}$.

32. Hacer el cambio de variables indicado para calcular la integral doble:

    a) $\displaystyle\iint_R 48xy\,dx\,dy$, $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$, R: rectángulo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ y $(1,1)$. Solución: 0.

    b) $\displaystyle\iint_R 4(x+y)e^{x-y}\,dy\,dx$, $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$, R: triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Solución: $2(1-e^{-2})$.

    c) $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$, $x=u$, $y=uv$, R: triángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(4,4)$. Solución: $\frac{32}{3}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

33. Hacer un cambio de variables para hallar el volumen de la región sólida situada por debajo de la superficie $z=f(x,y)$ y por encima de la región plana R:

    a) $f(x,y)=(x+y)e^{x-y}$, R: cuadrado de vértices $(4,0)$, $(6,2)$, $(4,4)$ y $(2,2)$. Solución: $12(e^4-1)$.

    b) $f(x,y)=\sqrt{(x-y)(x+4y)}$, R: paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(5,0)$ y $(4,-1)$. Solución: $100/9$.

    c) $f(x,y)=\sqrt{x+y}$, R: triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,a)$, donde $a\geq 0$. Solución: $\frac{2}{5}a^{5/2}$.

34. Calcular la masa y el centro de masas de la lámina limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas y con la densidad especificada:

    a) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$; $\rho = k(a - y)y$. Solución: $m = \frac{ka^4}{24}(16 - 3\pi)$, $\left(0, \frac{a}{5}\frac{15\pi - 32}{16 - 3\pi}\right)$.

    b) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; $\rho = kxy$. Solución: $m = 32k/3$, $(3, 8/7)$.

    c) $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; $\rho = ky$. Solución: $m = \frac{k}{4}(1 - e^{-4})$, $\left(\frac{e^4 - 5}{2(e^4 - 1)}, \frac{4}{9}\frac{e^6 - 1}{e^6 - e^2}\right)$.

35. Calcúlese el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R:

    a) $f(x, y) = 8 + 2x + 2y$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Solución: 12π.

    b) $f(x, y) = 9 - x^2$, R: cuadrado de vértices $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(3, 3, 0)$. Solución: $\frac{3}{4}[6\sqrt{37} + \ln(\sqrt{37} + 6)]$.

    c) $f(x, y) = 2y + x^2$, R: triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$. Solución: $(27 - 5\sqrt{5})/12$.

    d) $f(x, y) = 2 + x^{3/2}$, R: cuadrángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(3, 4, 0)$ y $(3, 0, 0)$. Solución: $\frac{4}{27}(31\sqrt{31} - 8)$.

    e) $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq b^2, b < a\}$. Solución: $2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$.

36. Usar una integral triple para hallar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones dadas:

    a) $x = 4 - y^2$, $z = 0$, $z = x$. Solución: $256/15$.

    b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Solución: $4\pi r^3/3$.

    c) $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$ (primer octante). Solución: $256/15$.

37. Hallar el volumen de la región sólida cortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, usando coordenadas cilíndricas. Solución: $\frac{16}{9}(3\pi - 4)$.

38. Hallar el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el interior de la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, usando coordenadas esféricas. Solución: $9\pi(2 - \sqrt{2})$.