TEMA 6 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Resolver los problemas de valores iniciales siguientes:

1. $xyy' = Lx \quad y(1) = 0$

Solución: $y = \pm Lx$

2. $xe^y y' = 2(e^y + 1) \quad y(1) = 0$

Solución: $2x^2 = e^y + 1$

3. $\sqrt{x} + y'\sqrt{y} = 0 \quad y(1) = 4$

Solución: $x^{3/2} + y^{3/2} = 9$

4. $y(x+1) + x(y+1)y' = 0 \quad y(-1) = 1$

Solución: $xye^{x+y} + 1 = 0$

5. $xy' = 2x + 3y \quad y(1) = 0$

Solución: $y = x^3 - x$

6. $y' + 2xy = 4x \quad y(0) = 4$

Solución: $y = 2e^{-2x^2} + 2$

7. $y' - y = 2xe^{x+x^2} \quad y(0) = 1$

Solución: $y = e^{x+x^2}$

8. $y' cos^2(x) + y = 1 \quad y(0) = 5$

Solución: $y = 4e^{-tgx} + 1$

9. $x^3 y' + 2x^2 y = Lx \quad y(1) = 0$

Solución: $y = (Lx)^2 /(2x^2)$

10. Construir una tabla de valores para aproximar la solución del problema de valor inicial $y' = e^{xy}$, $y(0) = 1$ usando $n = 10$ pasos de tamaño $h = 0.1$.

Solución: $y(1) \cong 5.958$

11. Resolver el problema de valor inicial $y' = y,\ \ y(0) = 3$ y evaluar la función solución en $x = 1$. Utilizar la regla de Euler para calcular ese valor usando dos aproximaciones, con pasos de tamaño $h = 0.1$ y $h = 0.2$.

Solución: a) $y(1) = 3e \cong 8.1548$ b) $h = 0.1,\ y(1) \cong 7.7812$ c) $h = 0.2,\ y(1) \cong 7.4650$

12. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $(x^2 + 1)\, y = C$.

Solución: $x^2\, C = e^{2y^2 - x^2}$

13. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $x + y = C_1 e^{-y}$.

Solución: $y = Ce^x - x - 2$

14. Hallar la trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y = C\, x^n$, $n \in N$. Representar gráficamente algunas curvas de ambas familias en los casos particulares $n = 1$ y $n = 2$.

Solución: $\dfrac{x^2}{n} + y^2 = C$

15. Hallar el valor de $n \in N$ para que la familia de curvas $x^n + y^n = C_1$ sea ortogonal a la familia $x = y(1 - C_2 x)$.

Solución: $n = 3$

16. Un virus informático se propaga con una rapidez proporcional al número de ordenadores ya infectados. Si pasado un día, el número de ordenadores con el virus es $3/2$ de los inicialmente infectados, determinar el tiempo necesario para que el número de ordenadores infectados se triplique.

Solución: 2.7 días

17. La semivida de la nicotina en la sangre del cuerpo humano es de 2 horas. Si una persona tiene inicialmente 2 mg de nicotina en la sangre y esa cantidad decrece proporcionalmente a la cantidad presente en cada instante, hallar una ecuación para la cantidad de nicotina en función del tiempo. ¿Qué cantidad le quedará pasada 1 hora?

Solución: $\sqrt{2}\ mg$

18. Se supone que una gota de lluvia esférica se evapora con una rapidez proporcional a su superficie. Si el radio original es de 3 mm, y después de una hora se redujo a 2 mm, encontrar una expresión para el radio de la gota en cualquier instante. ¿Después de cuántas horas más desaparecerá por completo?

Solución: 2 horas