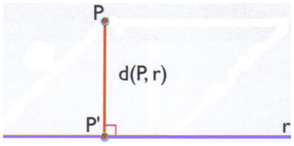
1.-DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO.

La distancia entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

2.-DISTANCIA A UNA RECTA EN EL ESPACIO.

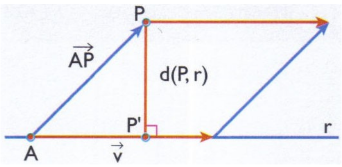
2.1.-Distancia de un punto a una recta.



La distancia de un punto P a una recta r es la longitud del segmento perpendicular PP' a la recta r tal que $P'\in r$.

Cálculo de su expresión

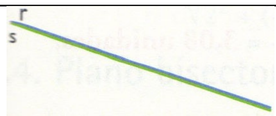
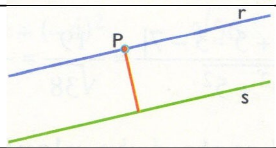
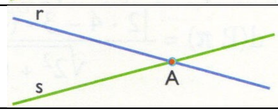
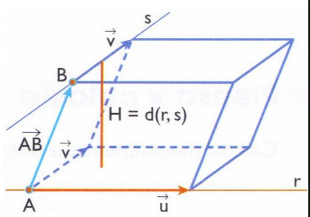
Sea $P(p_1,p_2,p_3)$ y $r\equiv\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$ y calculemos $d(P,r)$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Área del paralelogramo} = \text{base}\cdot\text{altura}\\ \text{Área del paralelogramo} = \left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|\\ \text{Base} = |\vec{v}|\\ \text{Altura} = d(P,r)\end{array}\right\}.$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|=|\vec{v}|\cdot d(P,r)$$
$$\Downarrow$$
$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

2.2.-Distancia entre dos rectas.

Si las dos rectas son coincidentes		$d(r,s)=0$
Si las dos rectas son paralelas		Se halla un punto P en la 1ª recta y se calcula: $d(r,s)=d(P,s)$
Si las dos rectas se cortan		$d(r,s)=0$
Si las dos rectas se cruzan La distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es la menor de las distancias que hay entre dos puntos, uno de cada recta. La recta que pasa por estos puntos es perpendicular a ambas rectas r y s.		$\left.\begin{array}{l}\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área base}\cdot\text{altura}\\ \text{Volumen paralelepípedo} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|\\ \text{Área de la base} = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\\ \text{Altura} = d(r,s)\end{array}\right\}.$ $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$

1 Halla $d(P,r)$ siendo $P(2,-3,5)$ y $r\equiv\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z}{3}$

2 Halla la distancia del punto $P(1,-3,2)$ a la recta $r:\begin{cases}3x-2y=1\\x+2z=3\end{cases}$

3 Halla el punto de la recta $r\equiv x-1=1-y=z-\dfrac{1}{2}$ tal que equidista de los puntos $A(1,0,1)$ y $B(1,2,0)$.

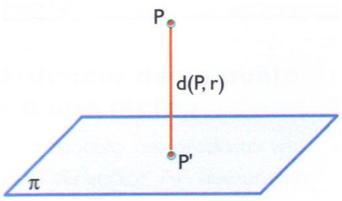
4 Halla la distancia entre las rectas $r:\begin{cases}3x-2y=1\\x+2z=3\end{cases}$ y $s:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z-4$

5 Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases};\ \lambda \in \mathbb{R}$ cuya distancia al punto $P(1,0,2)$ es igual a $\sqrt{5}$.

6 Dada la recta $r \equiv \begin{cases} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ y la recta $s \equiv \frac{x}{2} = y-1 = -z+3$ calcula la distancia entre las dos rectas.

3.-DISTANCIA A UN PLANO EN EL ESPACIO.

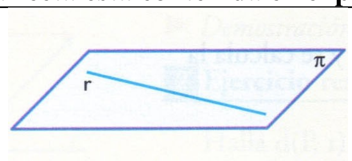
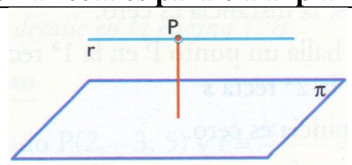
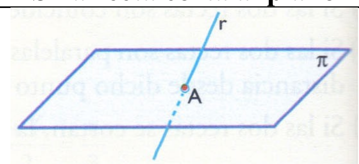
3.1.-Distancia de un punto a un plano.



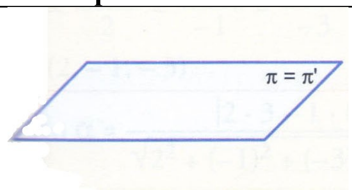
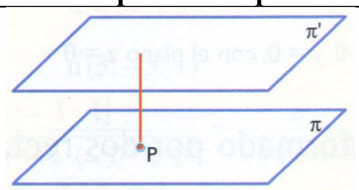
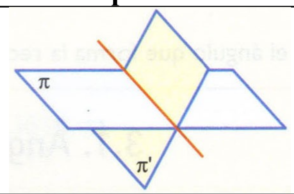
La distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ es la longitud del segmento perpendicular PP' al plano π, tal que $P' \in \pi$. Viene dada por:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3.2.-Distancia de una recta a un plano.

Si la recta está contenida en el plano	Si la recta es paralela al plano	Si la recta corta al plano
		
$d(r,\pi)=0$	$d(r,\pi)=d(P,\pi)$	$d(r,\pi)=0$

3.3.-Distancia entre dos planos.

Si los dos planos son coincidentes	Si los dos planos son paralelos	Si los dos planos se cortan
		
$d(\pi,\pi')=0$	$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$	$d(\pi,\pi')=0$

7 Halla la distancia que hay desde el punto $P(4,-1,3)$ al plano $\pi \equiv 2x-3y+5z-7=0$

8 Calcula la distancia que hay entre la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = -z$ y el plano $\pi \equiv 6x+7y-10z+9=0$

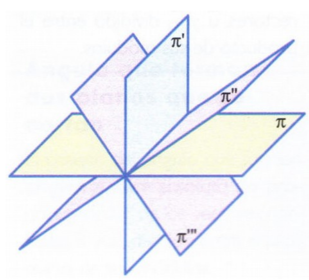
9 Calcula la altura trazada desde el vértice D del tetraedro determinado por los puntos $A(2,0,0)$; $B(-1,3,2)$; $C(1,-4,-1)$ y $D(0,0,0)$.

3.4.-Plano bisector.

El plano bisector de dos planos es el plano que divide el ángulo diedro formado por los dos planos en dos diedros iguales.

Tiene la propiedad de que sus puntos equidistan de los dos planos dados.

Existen dos planos bisectores y ambos son perpendiculares.

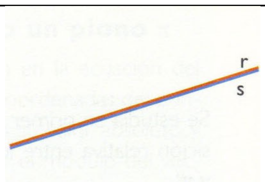
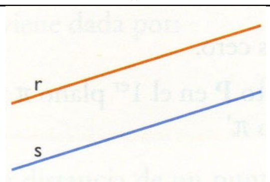
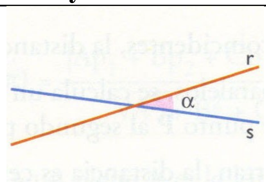
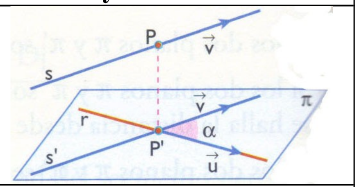


Ejemplo:

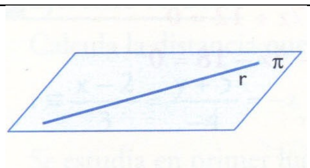
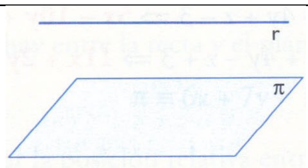
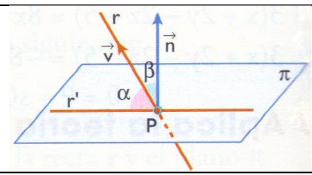
Calcula el plano bisector de los planos $\pi \equiv x+2y-2z=5$ y $\pi' \equiv 8x-4y+z-3=0$

4.-ÁNGULOS EN EL ESPACIO.

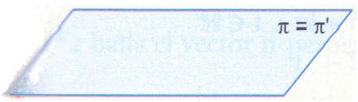
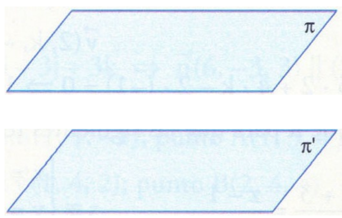
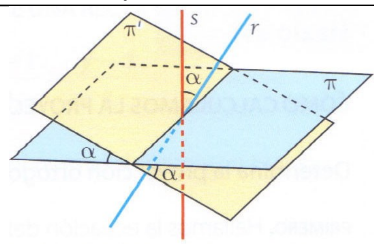
4.1.-Ángulo formado por dos rectas.

$r \equiv s$	$r \parallel s$	r y s se cortan	r y s se cruzan
			
Ángulo = 0º	Ángulo = 0º	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$ el ángulo menor que forman	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$ s' es una recta paralela a s que se corta con r

4.2.-Ángulo formado por una recta y un plano.

$r \subset \pi$	$r \parallel \pi$	r corta a π
		
Ángulo = 0º	Ángulo = 0º	$sen\,\alpha = \dfrac{\lvert \vec{v}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ β es el menor ángulo formado por v y n r' es la proyección de la recta r sobre el plano π α es el complementario a β

4.3.-Ángulo formado por dos planos.

$\pi \equiv \pi'$	$\pi \parallel \pi'$	π y π' se cortan
		
Ángulo = 0º	Ángulo = 0º	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert \vec{n}\cdot\vec{n}'\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{n}'\rvert}$ α es el menor ángulo formado por dos rectas secantes y perpendiculares, respectivamente, a cada uno de los planos.

10 Halla el ángulo que forman las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2+5t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{-7} = -z$

11 Halla el ángulo que forma la recta $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{-3}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 5y + z + 7 = 0$

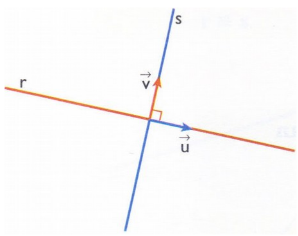
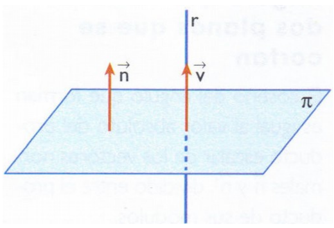
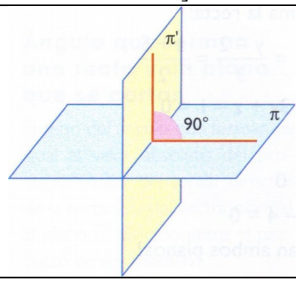
12 Halla el ángulo que se forma entre los planos $\pi \equiv x + 2y - z + 2 = 0$ y $\pi' \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda+2\mu \\ y = 3-\lambda+\mu \\ z = 3 \end{cases}$

13 Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

a) Determina su posición relativa
b) En caso de cortarse, determina el ángulo que forman.

14 Halla el valor de a para que la recta $r: \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi : ax - y + z = 5$ formen un ángulo de 30° .

5.-PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO.

Rectas perpendiculares [$r \perp s \equiv$ el ángulo que forman es de 90°]	**Recta y plano perpendiculares** [$r \perp \pi \equiv$ el ángulo que forman es de 90°]	**Planos perpendiculares** [$\pi \perp \pi' \equiv$ el ángulo que forman es de 90°]
		
El producto escalar de sus vectores directores es cero.	La recta es paralela al vector normal al plano.	El producto escalar de los vectores normales es cero.

15 Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 5+kt \\ z = -2-t \end{cases} ; t \in$ IR, sean perpendiculares.

16 Justifica por qué la recta $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = z$ y el plano $\pi : 4x - 2y + 2z + 7 = 0$ son perpendiculares.

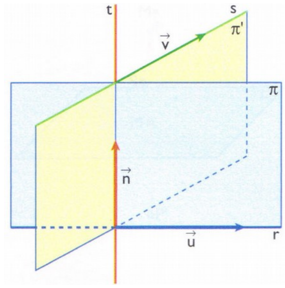
17 Halla el plano perpendicular a la recta $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = z$, que contiene al punto $P(0,2,0)$.

18 Halla la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t; t\in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x+y-z=2$.

19 Considera los planos $\pi: 2x+5=0$ y $\pi': 3x+3y-4=0$. Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

5.1.-Recta que CORTA PERPENDICULARMENTE a otras dos.

Se llama **perpendicular común** de dos rectas cruzadas a la recta que corta perpendicularmente a cada una de ellas.



Procedimiento:

1º. Se hallan los vectores directores u y v de las rectas r y s.

2º. El vector director de la recta perpendicular será $n = u \times v$.

3º. La ecuación de la recta se da como intersección de dos planos:

El plano π que contiene a la recta r y a n.

El plano π' que contiene a la recta s y a n.

20 Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv x-1=y-3=\frac{z+1}{-1} \quad \text{y} \quad s \equiv x-2=\frac{y-4}{4}=\frac{z-4}{2}$$

21 Halla la ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas

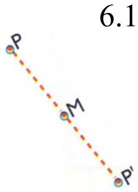
$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{-2} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$$

22 Halla la recta t perpendicular a $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$ y a $s: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+5}{4}$ y que pasa por el punto $P(1,1,2)$.

23 Halla la recta t que pasa por el origen y corta a las rectas $r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}$ y $s: \frac{x-2}{3}=y+1=z+2$.

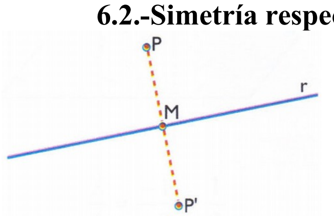
6.-PUNTOS SIMÉTRICOS.

6.1.-Simetría respecto de un punto.



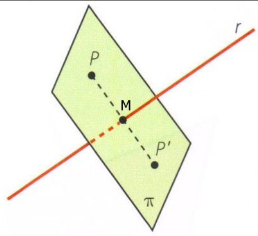
El simétrico del punto P respecto del punto M es el punto P' tal que M es el punto medio del segmento PP'.

6.2.-Simetría respecto de una recta.



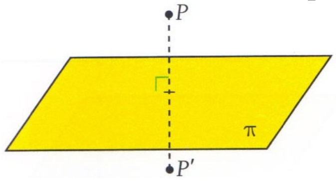
El simétrico del punto P respecto de la recta r es el punto P' tal que la recta s que pasa por P y P' es perpendicular a la recta r, y el punto de intersección de las rectas r y s es el punto medio del segmento PP'.

Para hallar el punto P' se sigue el siguiente <u>*procedimiento*</u>:



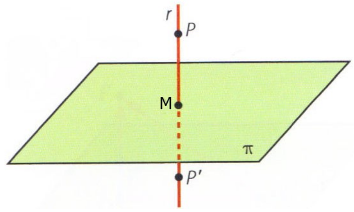
1º. Se halla el plano π perpendicular a la recta r que pase por el punto P.
2º. Se halla el punto M de intersección de la recta r con el plano π.
3º. Se aplica que el punto M es el punto medio del segmento PP'.

6.3.-Simetría respecto de un plano.



El simétrico del punto P respecto del plano π es el punto P' tal que la recta r que pasa por P y P' es perpendicular al plano π y el punto de intersección de las rectas r y el plano π es el punto medio del segmento PP'.

Para hallar el punto P' se sigue el siguiente <u>*procedimiento*</u>:



1º. Se halla la recta r perpendicular al plano π que pase por el punto P.
2º. Se halla el punto M de intersección de la recta r con el plano π.
3º. Se aplica que el punto M es el punto medio del segmento PP'.

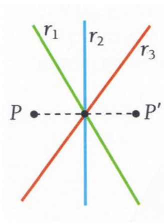
24 Halla el punto simétrico P' del punto $P(2,-3,-5)$ respecto del punto $M(3,1,-1)$.

25 Halla el punto P' simétrico del punto $P(2,-3,-5)$ respecto de la recta $r \equiv \dfrac{x-8}{5} = \dfrac{y+2}{2} = z-3$

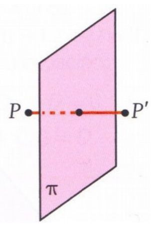
26 Halla el punto P' simétrico del punto $P(3,-4,4)$ respecto del plano $\pi \equiv 2x-3y+2z-9=0$

27 Sean $A(2,2,1)$ y $B(4,u,v)$. Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto del plano $\pi : 2x-y+z+D=0$. Hallar de forma razonada los valores de u, v y D.

Dados dos puntos, P y P', existe una recta r respecto de la cual son simétricos. Esa recta pasa por el punto medio del segmento PP' y es perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$. Hay infinitas rectas respecto de las cuales dos puntos fijados son simétricos.

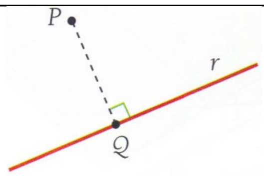
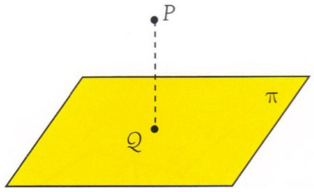
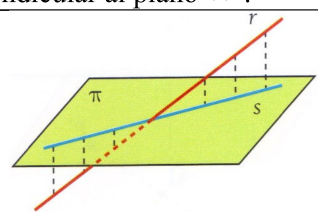


Dados dos puntos, P y P', existe un único plano π respecto del cual son simétricos. Ese plano contiene al punto medio del segmento PP' y es perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$.

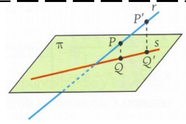


28 Si los puntos $P(1,0,5)$ y $P'(3,2,-3)$ son simétricos, halla **una** recta y **el** plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos.

7.-PROYECCIONES ORTOGONALES.

Proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r	**Proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π**	**Proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π**
Es otro punto Q que pertenece a la recta y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.	Es un punto Q que pertenece al plano y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a los vectores directores del plano.	Es una recta s que está contenida en el plano y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.
		

Nota: También se puede calcular esco-giendo dos puntos de la recta, calculando su pro-yección ortogonal sobre el plano y, posteriormente, hallando la recta que pasa por las proyecciones.



29 Determina la proyección ortogonal de $P(0,0,0)$ sobre la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y-3 = \dfrac{z}{-1}$.

30 Determina la proyección ortogonal de $P(0,0,0)$ sobre el plano $\pi: 2x-3y+z-2=0$.

31 Determina la proyección ortogonal de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y-3 = \dfrac{z}{-1}$ sobre el plano $\pi: 2x-3y+z-2=0$.

32 Calcula el punto del plano $2x+y-z=1$ más cercano al punto $P(1,2,-3)$.

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

33 Encuentra la ecuación del plano que:

a) Pasa por el punto $(1, \; -1, \; 2)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{5}$ *Sol.:* $3x+y+5z-12=0$

b) Pasa por $P(-1, \; 2, \; 1)$, es perpendicular al plano $x-y-2z=0$ y paralela a $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z=2 \end{cases}$ *Sol.:* $x-y+z+2=0$

34 Considera el plano $\pi \equiv 2x+y-z+2=0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$ *(Selectividad Junio 2006)*

a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m. *Sol.: para m=-3 la recta es paralela al plano y* *para m ≠ -3 se cortan en un punto*

b) Para m=-3, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π . *Sol.:* $x-4y-2z+7=0$

c) Para m=-3, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π . *Sol.:* $2x+y-z-4=0$

35 Halla el ángulo que forman las rectas:

a) $r \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ *y* $s \equiv \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ **b)** $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-z+1=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases}$ *y* $s \equiv \begin{cases} 3x-y+z-3=0 \\ 2x+y-3z+1=0 \end{cases}$

c) $r \equiv x=y=z$ *y* $s \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ *Sol.: a)* 80\`41º *b)* 48\`70º *c)* 90º

36 Halla el ángulo formado por los planos: **a)** $\alpha \equiv x+y-3z+1=0$ $\beta \equiv 2x-3y+2z+1=0$ **b)** $\alpha \equiv x+2y+z+3=0$ *y* $\beta \equiv \begin{cases} x=1+3t+s \\ y=-2t \\ z=t-s \end{cases}$

Sol.: a) 59\`21º *b)* 0º

37 Halla el ángulo formado por la recta y el plano:

a) $r \equiv \begin{cases} x+3y-z+3=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ *y* $\alpha \equiv 2x-y+3z+1=0$ *Sol.: 67'09º* **b)** $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ con los planos coordenados

Sol.: $\begin{cases} 53`30^{\circ} \\ 15`50^{\circ} \\ 32`31^{\circ} \end{cases}$

38 Halla la distancia de $P(1,\ 2,\ 3)$ a la recta $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$ *Sol.:* $\sqrt{8}/6$

39 Halla la distancia del origen de coordenadas al plano $4x+2y-4z-6=0$ *Sol.: 1*

40 Halla la distancia de $P(1,\ 2,\ 5)$ al plano $x+y+z=4$. Calcula el punto de mínima distancia. *Sol.:* $4/\sqrt{3}$; $Q\left(-1/3,\ 2/3,\ 11/3\right)$

41 Halla la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=3+2t \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{2}$ *Sol.:* $8/\sqrt{153}$

42 Halla la distancia entre los planos $\alpha \equiv x+y+z+1=0$ *y* $\beta \equiv x+y+z-2=0$ *Sol.:* $3/\sqrt{3}$

43 Halla la distancia entre la recta $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ y el plano $x+y-3z-2=0$ *Sol.: 0*

44 Dados el punto $A(1,\ 2,\ 3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) Calcula distancia de A a r *Sol.:* $\sqrt{10}$

b) Halla el plano que pasa por A y es perpendicular a r. *Sol.:* $y-2=0$

45 Halla el volumen del tetraedro de vértices $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(2,\ 1,\ 3)$, $C(-1,\ 3,\ 1)$ y $D(1,\ 2,\ 1)$ *Sol.:* $11/6$

46 Halla el área del cuadrilátero definido por $A(2,\ 1,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(-3,\ 0,\ 0)$ y $D(0,\ -1,\ 0)$ *Sol.: 7'5*

47 Halla el volumen del tetraedro de vértices el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano $\alpha \equiv x+2y+3z-6=0$ con los ejes coordenados. *Sol.: 6*

48 Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x+y+2z=4 \quad y \quad 2x-y+z=2$ *Sol.:* $\sqrt{8/3}$

49 Considera un plano $\pi \equiv x+y+mz=3$ y la recta $r \equiv x=y=\dfrac{z-2}{2}$ *(Selectividad Septiembre 2005)*

a) Halla m para que r y π sean paralelos. *Sol.:* $m=-1$
b) Halla m para que r y π sean perpendiculares *Sol.:* $m=2$
c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π ? *Sol.:* no

50 Considera el punto $P(3, \quad 2, \quad 0)$ y la recta de ecuación: $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ *(Selectividad Junio 2006)*

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r. *Sol.:* $x+2y-4z-7=0$
b) Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r. *Sol.:* $Q(-1, \quad 0, \quad -2)$

51 Considera el plano $\pi \equiv x-y+2z=3$ y el punto $A(-1,-4,2)$:

a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A. *Sol.:* $x=-1+t, \quad y=-4-t, \quad z=2+2t$
b) Halla el punto simétrico de A respecto de π. *Sol.:* $A'\left(-7/3, \quad -8/3, \quad -2/3\right)$

52 Halla el punto simétrico de $A(1, \quad 2, \quad -1)$ respecto de:

a) El punto $M(1, \quad 2, \quad -4)$ *Sol.:* $A'(1, \quad 2, \quad -7)$
b) Respecto del plano $x+y-z+3=0$ *Sol.:* $A'\left(-11/3, \quad -8/3, \quad 11/3\right)$
c) Respecto de la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ *Sol.:* $A'\left(37/29, \quad -46/29, \quad 45/29\right)$

53 Calcula el punto de la recta de ecuación $x-1=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$ más cercano al punto $A(1, \quad -1, \quad 1)$ *Sol.:* $M\left(5/7, \quad -18/7, \quad -1/7\right)$

54 Los puntos $A(3,3,5)$ y $B(3, \quad 3, \quad 2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C consecutivo de B está en la recta $x=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$; a) Determina el vértice C *Sol.:* $C\left(3/2, \quad 9/2, \quad 2\right)$ b) Determina el vértice D *Sol.:* $D\left(3/2, \quad 9/2, \quad 5\right)$

55 Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están respectivamente en los planos $2x-2y+z-1=0 \quad y \quad 2x-2y+z-5=0$. *Sol.:* $64/27\, u^3$

56 Encuentra el punto que es proyección ortogonal del punto $P(1, \quad 2, \quad 3)$ sobre el plano $\alpha \equiv 2x-y+3z+5=0$ *Sol.:* $P'(-1, \quad 3, \quad 0)$

57 Calcula el punto que es proyección ortogonal del punto $P(1, \quad 2, \quad 3)$ sobre la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-1}{3}$ *Sol.:* $P'\left(18/11, \quad 59/11, \quad 23/11\right)$

58 Halla la recta que es proyección ortogonal de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ en el plano $\alpha \equiv 4x + y + z - 9 = 0$ *Sol.:*

$$r' \equiv \begin{cases} x - y - 3z + 10 = 0 \\ 4x + y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

59 Determina el punto P de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{x}{3}$ que equidista de los planos: *(Selectividad Junio 2003)*

$$\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad y \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases} \qquad \textit{Sol.: } P(-1, \; -2, \; -3)$$

60 Sabiendo que las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}$ se cruzan, halla los puntos A y B de r y s respectivamente, que están a mínima distancia *(Selectividad Junio 2003)* *Sol.:* $A(1, \; 1, \; 1)$ *y* $B(0, \; 2, \; 1)$

61 Determina los planos que son perpendiculares a la recta $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$ y distan 3 unidades del punto $P(-1, \; 1, \; 2)$

Sol.: $-2x - y + 2z + 4 = 0$ *y* $-2x - y + 2z - 14 = 0$

62 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, \; 2, \; 1)$ *Sol.:* $-x + 2y + z - 6 = 0$

63 Dados los puntos $A(3, \; -2, \; 0)$ *y* $B(1, \; -2, \; -2)$ y la recta $r \equiv x = y = z$, calcula la distancia de B al plano que contiene a r y al punto A *Sol.:* $6/\sqrt{38}$

64 Estudia la posición relativa de los tres planos en función de los valores de a:

$$\alpha \equiv (a-1)x + z = 0; \quad \beta \equiv ax + y + (a-1)z = a; \quad \gamma \equiv x + y = 1$$

Sol.: Si a=1, se cortan en una recta ; Si a=2, no tienen ningún punto en común ; Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tienen un punto en común

65 Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2}$ *y* $s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$ *Sol.:* $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$

66 Halla la perpendicular común a las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b - 1 \\ z = -1 \end{cases}$ (Selectividad Septiembre 2004) *Sol.:*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$$

67 Sean los puntos $A(3,6,7)$, $B(7,8,3)$ y sea la recta $r: \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$. Calcular el área del triángulo ABC, siendo C un punto cualquiera de la recta r.

68 Calcular la ecuación del plano que divide perpendicularmente al segmento de extremos $A(1,-1,-2)$ y $B(1,2,3)$.

El **plano mediador** de un segmento es el plano cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento. Es el plano perpendicular al segmento en el punto medio.

69 Dada la recta $r:\begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+2y+3z-1=0$. Halla la ecuación de la recta situada en el plano π que pase por el punto $P(2,1,-1)$ y sea perpendicular a r.

70 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,2,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r:\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

71 El vértice de un triángulo rectángulo pertenece a la recta $r:\begin{cases} x=3 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ y la hipotenusa tiene por extremos los puntos $B(2,1,-1)$ y $C(0,-1,3)$. Calcula el vértice A, el área y los ángulos agudos del triángulo ABC.

72 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralela a los planos $\pi: 3x+2y-z-1=0$ y $\pi':\begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=2+\lambda+2\mu \end{cases}$

73 Sean las rectas $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+1}{-1}$ y $s:\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=z+4$

a) Estudia su posición relativa.
b) Da las ecuaciones de un plano, si existe, que contenga a ambas rectas.

74 Encuentra la recta r que pasando por $P(2,0,-1)$ corta a las rectas $s:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=z+1$ y $t:\begin{cases} x+y-4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$

75 Escribe la ecuación del plano que contenga al punto $P(1,2,3)$ y nunca corte al plano $z=10$.

76 Dadas las rectas $r:\begin{cases} y-1=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$ y $s:(x,y,z)=(2,1,1)+\lambda(3,-1,3)$; encuentra el plano que pasa por r y es paralelo a s.

77 Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones $r:\dfrac{x-2}{-1}=y=\dfrac{z+1}{2}$ y $s:\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(1,1,2)$.