Ejercicio 1.- Sea una variable aleatoria Y que toma los valores Y=1 si un determinado sujeto desarrolla el Covid-19 en un determinado periodo de tiempo e Y=0 si no lo desarrolla.
Suponemos que son 3 variables las que se miden al comienzo del período y que presumiblemente influyen en el proceso de determinación de cuál de los dos sucesos ocurre. Estas variables son: X_1 es la edad del sujeto, X_2 es el habito de fumar: 1 si fumaba; 0 en caso contrario, y X_3 si es, (valor= 1), o no, personal sanitario en activo (valor= 0). Imaginemos que una vez estimados los parámetros, el modelo de regresión logística, es el siguiente:

$$\text{logit}(p) = -5{,}014 + 0{,}055X_1 + 0{,}014X_2 + 0{,}088X_3$$

Utilizando las nociones de riesgo relativo (RR) y risk odds ratio (ROR)
¿Cuanta más probabilidad de desarrollar el Covid-19 tiene un sujeto de 65 años, fumador y sanitario, que uno de 58 años, no fumador y no sanitario? Interprete los resultados.

Solución.-
El riesgo relativo (RR) es el cociente de las probabilidades de pertenencia a la clase Y=1 asociadas a ambos sujetos; mientras que el risk odds ratio (ROR), es el cociente de las posibilidades de ambos sujetos.
De esta forma

$$\text{p(y=1)=}\frac{e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055X_1+\ 0{,}014X_2+\ 0{,}088X_3}}{1+e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055X_1+\ 0{,}014X_2+\ 0{,}088X_3}}$$

Ahora para el primer sujeto

$$\text{p(y=1)=}\frac{e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055\times 65+\ 0{,}014\times 1+\ 0{,}088\times 1}}{1+e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055\times 65+\ 0{,}014\times 1+\ 0{,}088\times 1}}=\frac{0{,}2626}{1+0{,}2626}=0{,}2079$$

Mientras que para el segundo

$$\text{p(y=1)=}\frac{e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055\times 58+\ 0{,}014\times 0+\ 0{,}088\times 0}}{1+e^{-5{,}014\ +\ 0{,}055\times 58+\ 0{,}014\times 0+\ 0{,}088\times 0}}=\frac{0{,}1614}{1+0{,}1614}=0{,}1389$$

Teniendo en cuenta este resultado el RR para el primer sujeto con respecto al segundo es
RR 1versus2=0,2079/0,1389= 1,4967.
Podemos interpretar que tiene 1,5 veces más riesgo el individuo 1 que el 2.
Por otra parte si considerados los ODDS, estos son para el primer sujeto
$\frac{\text{p(y=1)}}{\text{1-p(y=1)}}=0{,}2079/0{,}7921=0{,}2624$ y para el individuo 2, $\frac{\text{p(y=1)}}{\text{1-p(y=1)}}=0{,}1389/0{,}8611=0{,}1613$,
Luego el ROR=0,2624/0,1613=1,6267

Ejercicio 2.- Dado un modelo de regresión logística, demostrar que el parámetro Cβi asociado a una variable no dicotómica Xi expresa el cambio que se produce en ln(OR) cuando Xi aumenta en C unidades y el resto de la variables permanecen inalteradas.

Solución.-

$$\ln(\text{OR})_{inicial}=\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\ =\ \beta_0\ +\ \beta_1X_1+\ ...+\beta_iX_i+\ ...+\beta_kX_k$$

$$\ln(\text{OR})_{final}=\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\ =\ \beta_0\ +\ \beta_1X_1+\ ...+\beta_i(X_i+C)+\ ...+\beta_kX_k$$

luego

$$\begin{aligned}\ln(\text{OR})_{final}-\ln(\text{OR})_{inicial} &= \beta_0\ +\ \beta_1X_1+\ ...+\beta_i(X_i+C)+\ ...+\beta_kX_k \\ &-\beta_0\ +\ \beta_1X_1+\ ...+\beta_iX_i+\ ...+\beta_kX_k=\beta_iC\end{aligned}$$