TEMA 8 SERIES DE FUNCIONES

1. Hallar el desarrollo limitado de Taylor de orden 4 en $x=0$ de la función $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Solución: $f(x)=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+R_4(x)$

2. Hallar el desarrollo limitado de Taylor de orden 4 en $x=0$ de la función $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Solución: $g(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{15}{48}x^3+\frac{105}{384}x^4+R_4(x)$

3. Hallar la serie de Taylor de $f(x)=Lx$ en $x=1$ y calcular su campo de convergencia.

Solución: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $\qquad I=\left]0,2\right]$

Hallar el desarrollo de Taylor de las funciones siguientes en $x=0$ y calcular su campo de convergencia:

4. $f(x)=\frac{1}{2-x}$

Solución: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n$ $\qquad I=(-2,2)$

5. $f(x)=e^{2x}$

Solución: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$ $\qquad I=R$

6. $f(x)=senh(x)$

Solución: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\qquad I=R$

7. $f(x) = x\,sen(2x)$

Solución: $f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad I = R$

8. $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Solución: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ $\quad I = (-1, 1)$

9. Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad -2 < x < 0 \\ 4 & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$. Estudiar la convergencia de la serie.

Solución: $a_0 = 6 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \forall n \;\; par \\ \dfrac{4}{\pi n} & \forall n \;\; impar \end{cases}$

10. Hallar la serie de Fourier de $f(x) = |x| \;\; \forall x \in [-\pi, \pi]$. Estudiar su convergencia.

Solución: $a_0 = \pi \qquad a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad b_n = 0$