Asignatura: Matemática General (1º Grado de BIOQUÍMICA)

Profesor: *José Antonio Herencia González*

Tema 3
Funciones reales de una variable. Límites y continuidad

Contenido: Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Funciones polinómicas, racionales, exponencial, logarítmica y trigonométricas (circulares e hiperbólicas). Funciones inversas. Límites y continuidad. Cortes con los ejes, simetrías y asíntotas.

Introducción: En este tema se repasan (por haberse tratado, en buena parte, en cursos anteriores) y estudian los conceptos fundamentales sobre las funciones reales de una variable real. Se trata de una herramienta básica y muy importante en cualquier disciplina científica, ya que al considerar cualquier variable cuantitativa (longitud, área, volumen, peso, densidad, temperatura, etc.) interesa generalmente conocer también cómo cambia en función del tiempo o de otra(s) variable(s). En particular, todo bioquímico debe conocer bien las funciones usuales, así como el concepto y cálculo de límites y continuidad.

Índice

1. Conceptos básicos sobre funciones reales

Los números reales (estudiados en el tema 1) permiten cuantificar magnitudes que usamos en la realidad (la cantidad de asistentes a un evento, el saldo de una cuenta bancaria, la longitud de una mesa, el área de una finca, la temperatura corporal de un enfermo, la presión atmosférica en cierto lugar, etcétera). Pero, si en vez de conocer el valor que toma una magnitud en un momento concreto, queremos estudiar su comportamiento y evolución, en la mayoría de los casos se tratará de valores que van cambiando con el tiempo (o con el cambio de otra variable). Así, en vez de tener un número concreto, tendremos un número que va cambiando en función del tiempo o de otra variable a la cual lo referimos. Esta última variable, que es conocida y puede tomar libremente cualquier valor (dentro de cierto dominio admisible) se denomina *variable independiente*. Mientras que la magnitud que estudiamos y que varía en función de ella se denomina *variable dependiente* o *función*. El concepto de función también engloba al concepto de número que no cambia, porque puede tratarse de una *función constante* (por ejemplo, según la *teoría de la relatividad*, la velocidad de la luz es una constante que no cambia con el tiempo).

En este tema estudiamos los conceptos fundamentales sobre funciones (repasando, en particular, los tipos de funciones más usuales), incluyendo el cálculo de límites y la continuidad. En los dos temas siguientes proseguimos el estudio de las funciones, considerando su derivación e integración, respectivamente.

Nota: En los tres temas aludidos (con los que se completa el contenido de esta asignatura), al igual que ocurre en bachillerato, se considera cómo la variable dependiente varía en función de una sola variable independiente. Por salirse del contenido de la asignatura, omitimos el estudio detallado (aunque sí veremos pequeños detalles) de funciones que dependen de varias variables independientes, lo cual es muy usual en la realidad. Veamos algunos ejemplos:

- El volumen de un cilindro depende de dos variables: el radio de la base y la altura.
- La presión de un gas confinado en un recipiente depende de dos variables: el volumen del recipiente y la temperatura.
- El IPC (índice de precios de consumo) dependería de tantas variables si se quisiera calcular de forma totalmente exhaustiva que para su definición y cálculo se considera solamente un listado de las más importantes. ►

Desde el punto de vista de las Matemáticas, al igual que interesa conocer las propiedades de los números sin que les afecte su procedencia o aplicación (por ejemplo, puede interesar la descomposición en factores primos del número 2016, independientemente de que estemos hablando de un año o del número de asistentes a una manifestación o de un sueldo bruto mensual), también interesa conocer las propiedades y peculiaridades de las funciones con independencia de cuál sea el significado real de sus dos variables, la dependiente y la independiente. Para establecer la nomenclatura que nos permita hablar de los distintos aspectos que aparecen al estudiar funciones de esta forma abstracta, se usan varias definiciones, como las que recordamos a continuación.

Definición 1 *Dados dos subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, se llama* ***función*** *a toda aplicación de A en B, $f : A \to B$, es decir, a toda correspondencia entre A y B que asigna a cada valor de $x \in A$ un único valor $y = f(x) \in B$.*

A la variable y, cuyo valor depende *del valor dado a x, se le llama* ***variable dependiente****. A x se le llama* ***variable independiente****. Se representa la función por $y = f(x)$.*

Definición 2 *Se dice que la función $y = f(x)$ está definida en un punto $x = c$, si existe $f(c)$. Análogamente, se dice que $f(x)$ está definida en un intervalo (a, b) si está definida para todo valor $x \in (a, b)$.*

Definición 3

- *Se denomina* ***dominio*** *(o* ***campo de existencia*** *o* ***campo de definición****) de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al conjunto de elementos $x \in \mathbb{R}$ que tienen imagen $f(x) \in \mathbb{R}$:*

$$D = \operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

- *Se denomina* ***recorrido*** *(o* ***imagen*** *o* ***rango****) de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al conjunto de elementos $y \in \mathbb{R}$ que son imagen del algún $x \in \mathbb{R}$:*

$$R = \operatorname{Rec} f = \operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

- *Al conjunto puntos del plano de la forma $\{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$ se le denomina* ***gráfica*** *de f.*

<u>**Nota:**</u> Para determinar en la práctica el dominio o campo de existencia de una función (lo que hay que tener en cuenta, por ejemplo, para saber sobre qué parte del eje OX existe su gráfica), simplemente debemos decidir para qué conjunto de números reales tiene sentido la fórmula que representa a la función. En ese sentido, debemos tener en cuenta que:

- Si aparece un cociente, debemos evitar los puntos en los cuales el denominador se anule, ya que no está definida la división por cero.
- Tampoco tienen sentido, en el conjunto de los números reales, las raíces cuadradas (o de otro índice par) de números negativos.
- Finalmente, si aparecen logaritmos, debemos tener en cuenta que la cantidad a la que se calcula el logaritmo debe ser positiva. ►

Definición 4 *Una función real de variable real se dice que es (o está)* ***acotada*** *si lo es su conjunto imagen, es decir: $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, si y solo si $f(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, o sea, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in A$$

Definición 5 *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es* ***periódica*** *de* **período** *T si $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Observemos que si T es un período para la función periódica f, entonces también lo es nT para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por eso se suele denominar período (o, para especificar mejor,* **período fundamental***) solamente al mínimo de todos los períodos posibles. Una función constante se puede considerar periódica con cualquier período (no existiendo en este caso especial el período fundamental).*

Como ejemplo típico de funciones tanto acotadas como periódicas tenemos las funciones seno y coseno, ambas acotadas por 1 y con período fundamental 2π ya que, $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

1.1. Cortes con los ejes y simetrías

El **eje** OX o eje **de abscisas** tiene ecuación $y = 0$ porque todos sus puntos son de la forma $(x, 0)$ (pudiendo variar el valor de x, pero siendo siempre $y = 0$). De forma análoga, el **eje** OY o eje **de ordenadas** tiene ecuación $x = 0$ porque todos sus puntos son de la forma $(0, y)$ (pudiendo variar el valor de y, pero siendo siempre $x = 0$). Estos hechos permiten que sea muy simple el procedimiento para calcular en qué puntos corta la gráfica de una función $y = f(x)$ a los **ejes coordenados**:

- Para hallar en qué puntos corta la gráfica $y = f(x)$ al eje OX basta resolver la ecuación $f(x) = 0$. Si sus raíces son $x_1, x_2, \ldots$, entonces los puntos buscados son $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots$.
- Para hallar en qué puntos corta la gráfica $y = f(x)$ al eje OY basta calcular la imagen $f(0)$. Entonces el punto buscado es $(0, f(0))$. Al ser f una función debe tratarse solamente de un punto. No obstante, podemos encontrarnos también con los siguientes casos:
  - Que la gráfica $y = f(x)$ no corte al eje OY, por no pertenecer el punto 0 a su dominio.
  - Que la gráfica $F(x, y) = 0$ corte al eje OY en varios puntos, por tratarse de una función implícita, que representa varias funciones explícitas.

Otro aspecto de interés al considerar la gráfica $y = f(x)$ de una función $f(x)$ son sus posibles simetrías. A ese respecto debemos considerar las siguientes definiciones:

Definición 6 *Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es:*

- ***par*** *si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$. En este caso su gráfica es simétrica respecto al eje OY.*
- ***impar*** *si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$. En este caso su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

La mayoría de las funciones no son pares ni impares. Ejemplos importantes de funciones pares son: $y = x^{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{Z}), y = \cos x, y = \operatorname{ch} x, y = \sec x, y = \operatorname{sech} x$. Ejemplos importantes de funciones impares son: $y = x^{2n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{Z}), y = \operatorname{sen} x, y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{cosec} x, y = \operatorname{cosech} x$. La única función que es par e impar a la vez es la función nula $y = 0$.

Notas:

- Las funciones $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sech} x$, $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{cosech} x$, que se han incluido entre los ejemplos de funciones pares e impares, son funciones hiperbólicas cuya definición aparecerá en el apartado 2.3.
- Si en la raíz de índice par $y = \pm \sqrt[2n]{x}$ consideramos los dos posibles signos, entonces la gráfica $y = f(x)$ presenta simetría respecto al eje OX. ▶

1.2. Funciones explícitas, implícitas y paramétricas

Todas las funciones manejadas anteriormente son **explícitas**; es decir, vienen expresadas en la forma $y = f(x)$, que asigna a cada valor x de la variable independiente (dentro de su dominio) una única imagen o valor de la variable dependiente $y = f(x)$.

Nota: Por ejemplo, la función $y = \sqrt{x}$ asigna a cada $x \geq 0$ el valor positivo de su raíz cuadrada (así, $2 = \sqrt{4}$, $3 = \sqrt{9}$, $1.41 \approx \sqrt{2}$, $1.73 \approx \sqrt{3}$, etc.). Para expresar que queremos calcular la raíz cuadrada negativa debemos poner $y = -\sqrt{x}$ y para usar ambas raíces, positiva y negativa, debemos poner $y = \pm\sqrt{x}$. Esta última posibilidad es la que debemos usar cuando, al resolver una ecuación, tenemos que extraer la raíz cuadrada. Por ejemplo, aparece el doble signo en la conocida fórmula

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Lo que hemos dicho antes para la raíz cuadrada es válido para cualquier raíz de índice par; sin embargo no es válido para las raíces de índice impar, ya que cada número real tiene una sola raíz impar, que tiene el mismo signo que el radicando. Por ejemplo, $2 = \sqrt[3]{8}$, $-2 = \sqrt[3]{-8}$. ▶

Hay veces en que la función viene dada en forma **implícita**. En estos casos, la función está determinada por una relación entre las variables x e y, expresada mediante una igualdad. Siempre podemos pasar al primer miembro los términos que haya en el segundo, por lo que la expresión general de una función implícita es:

$$F(x, y) = 0$$

Si de esta expresión implícita podemos despejar la y, se pasaría así a su forma explícita, que normalmente es más cómoda de manejar. Pero hay ocasiones en las que es difícil o imposible despejar y, lo que obliga a manejar estas funciones en forma **implícita**.

Nota: Aunque normalmente no interese hacerlo, siempre podemos pasar una función explícita $y = f(x)$ a forma implícita: basta escribir $y - f(x) = 0$. ▶

Consideremos, por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Esta ecuación define implícitamente la variable y como función de x. Si despejamos y, encontramos dos posibles valores: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Por tanto, la función implícita en este caso determina dos funciones explícitas (suele ocurrir de igual forma que una función implícita represente varias explícitas):

- La parte positiva $y = \sqrt{1-x^2}$, que asigna a cada $x \in [-1,1]$ la coordenada y del punto $(x, \sqrt{1-x^2})$ de la circunferencia, que está en el primer o segundo cuadrante.
- La parte negativa $y = -\sqrt{1-x^2}$, que asigna a cada $x \in [-1,1]$ la coordenada y del punto $(x, -\sqrt{1-x^2})$ de la circunferencia, que está en el tercer o cuarto cuadrante.

Una tercera forma en la que puede venir dada una función es de forma **paramétrica**. Esto quiere decir que las variables x e y vienen expresadas como función de un parámetro p:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(p) \\ y = f_2(p) \end{array} \right.$$

Dándole a p los distintos valores admisibles (que pueden ser todos los números reales o restringirse a cierto dominio), se obtienen los distintos puntos de la curva que representa la función en forma paramétrica.

La función implícita $x^2 + y^2 = 1$ también se puede expresar en forma paramétrica. Para ello basta tomar como parámetro p el ángulo, siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos p \\ y = \operatorname{sen} p \end{array} \right.$$

Este caso también ilustra la situación general: una función paramétrica puede representar varias funciones explícitas.

Si consideramos el caso de funciones lineales (en las que todos los términos son de primer grado o términos independientes), su representación gráfica es una recta. Por tratarse de una fórmula simple, ya hemos visto (en el tema 2) cómo la recta puede expresarse en las tres formas aquí consideradas: explícita, implícita y paramétrica.

Por lo general, el estudio de las funciones se refiere a su expresión en forma explícita (que es como aparecerán generalmente en este tema y los siguientes).

2. Tipos usuales de funciones

Como ya se ha dicho, la definición de función dada anteriormente supone un "marco general" que engloba multitud de posibilidades. Lo cual concuerda con el procedimiento usual en Matemáticas de tratar con conceptos abstractos, a los que se suele llegar como generalización de múltiples casos particulares.

Desde el punto de vista de los cálculos involucrados en las funciones, podemos considerar la siguiente clasificación general (que se completa con los casos más específicos que vemos más adelante):

Definición 7 *Atendiendo al tipo de transformación aritmética que realizan las funciones, se usa la siguiente nomenclatura:*

- ***Funciones algebraicas*** *son aquellas en las que las operaciones que se realizan con la variable independiente son suma (o resta), multiplicación (o división) y potenciación (o radicación) con exponente (o índice) natural. Entre ellas se distinguen:*

- ***Funciones irracionales*** *son aquellas en las que la variable aparece bajo el signo radical (o con exponente fraccionario).*
- ***Funciones racionales*** *son los cocientes de dos funciones polinómicas.*

- ***Funciones trascendentes*** *son las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas (circulares e hiperbólicas).*

Históricamente se comenzó usando un concepto de función bastante restringido, que englobaba solamente las funciones más usuales, resultantes del manejo de variables en Física sobre todo. Sigue teniendo interés conocer bien esas funciones usuales, de las que consideramos a continuación las fundamentales.

2.1. Funciones polinómicas y racionales

Las funciones más simples (obtenidas solamente mediante sumas y productos) son las **funciones polinómicas** $y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Dependiendo del valor del **grado** ($n \in \mathbb{N}$), de los **coeficientes** ($a_n, \ldots, a_2, a_1 \in \mathbb{R}$) y del **término independiente** ($a_0 \in \mathbb{R}$), tenemos como casos particulares:

- La **función lineal** (cuya gráfica es una recta): $y = mx$ en sentido estricto, $y = mx + b$ en sentido amplio.

  A su vez, como casos particulares de la función lineal, podemos considerar:

  - La **función identidad**: $y = x$.
  - La **función constante**: $y = a_0$.

- La **función cuadrática** (cuya gráfica es una parábola): $y = ax^2$ en sentido estricto, $y = ax^2 + bx + c$ en sentido amplio.

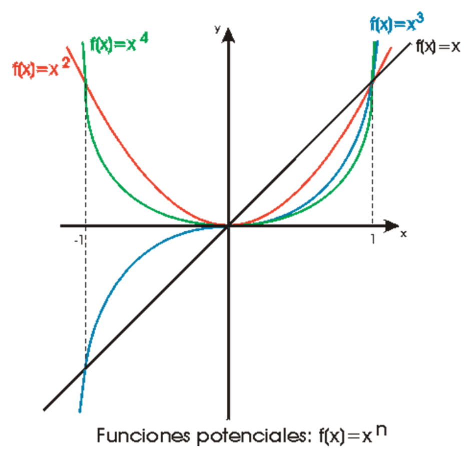


Figura 1: Funciones potenciales x, x^2, x^3 y x^4

- La **función potencial** $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Cuando n es par, esta función es par y pasa por los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Cuando n es impar, esta función es impar y pasa por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Para valores positivos de x, la función potencial es estrictamente creciente. Además, para $x > 1$, este crecimiento es más rápido cuanto mayor sea el exponente n (mientras que, para $0 < x < 1$, el aumento de n da lugar a una aproximación más rápida a cero). En la figura 1 aparecen las gráficas de las funciones potenciales x, x^2, x^3 y x^4.

Como se ha dicho anteriormente, se denomina **función racional** a la que es cociente de dos funciones polinómicas: $y = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_k x^k + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$.

2.2. Funciones exponenciales y logarítmicas

El cálculo de exponentes y logaritmos da lugar a:

- La **función exponencial de base** a: $y = a^x$ con $a > 0, a \neq 1$. Cuando $a > 1$, esta función es estrictamente creciente, creciendo más rápidamente que la función potencial ($\forall n \in \mathbb{N}$); por eso suele hablarse del "crecimiento exponencial". En cambio, cuando $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente, tratándose de una función que se acerca rápidamente a cero.

  En la figura 2 aparece la gráfica de la función exponencial $y = a^x$ en los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$.

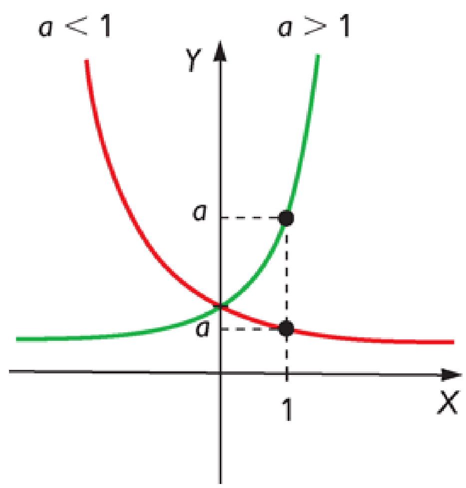


Figura 2: Función exponencial

  Nota: Para relacionar la gráfica del caso $0 < a < 1$ con la del caso $a > 1$ basta escribir $a = 1/b$ con lo que $a^x = 1/b^x$. ▶

- La **función logarítmica de base** a: $f(x) = \log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$.

  En la figura 3 aparece la gráfica de la función $y = \log_a x$ en los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$.

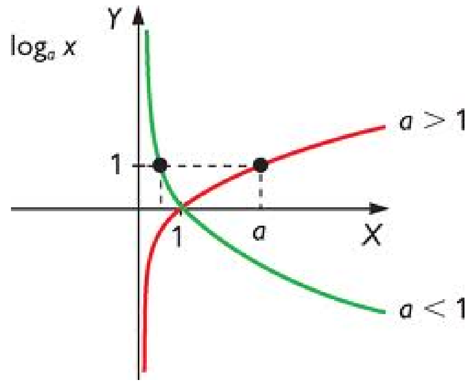


Figura 3: Función logarítmica

Nota: De forma análoga a la considerada con la función exponencial, si $0 < a < 1$ podemos escribir $a = 1/b$ (con lo que $b > 1$). Entonces se cumple que:

$$\log_a x = \log_{1/b} x = \frac{\log_b x}{\log_b(1/b)} = -\log_b x$$

En definitiva, la igualdad $\log_a x = -\log_b x$ permite relacionar las gráfica de la función logarítmica correspondiente al caso $0 < a < 1$ con la del caso $a > 1$. ▶

2.3. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Al final del tema 1 (en su apéndice 1) consideramos las **funciones trigonométricas**, que también debemos tener en cuenta aquí, por tratarse de un tipo importante de funciones. Se deben repasar aquellos contenidos para así recordar ahora sus definiciones y principales propiedades.

Incluimos las gráficas fundamentales en la figura 4.

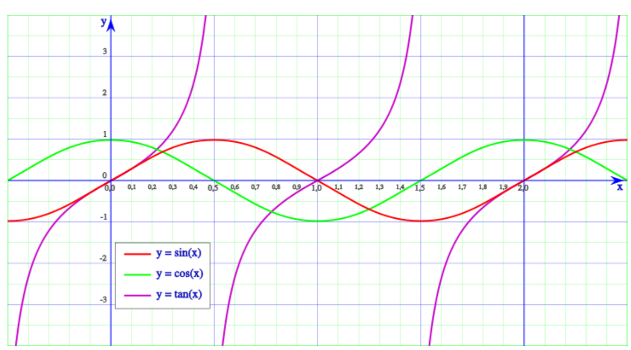


Figura 4: Funciones seno, coseno y tangente

Muy relacionadas con las funciones trigonométricas (por los motivos poco evidentes que veremos más adelante) están las denominadas **funciones hiperbólicas**, cuyas definiciones son las siguientes:

- **Seno hiperbólico**:

$$y = \operatorname{senh} x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Coseno hiperbólico**:

$$y = \cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Tangente hiperbólica**:

$$y = \operatorname{tgh} x = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Cotangente hiperbólica**:

$$y = \operatorname{cotgh} x = \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- **Secante hiperbólica**:

$$y = \operatorname{sech} x = \operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Cosecante hiperbólica**:

$$y = \operatorname{cosech} x = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

En la figura 5 aparecen las gráficas de las tres primeras.

Aparentemente, estas funciones (que no son periódicas) están más relacionadas con la función exponencial que con las funciones trigonométricas. No obstante, vamos a ver dos motivos que las relacionan estrechamente con las funciones trigonométricas (que también se denominan *funciones circulares* o *funciones trigonométricas circulares*), por lo que las funciones hiperbólicas también se denominan *funciones trigonométricas hiperbólicas*.

El primer motivo lo proporcionan las siguientes fórmulas, que se deducen al operar con las funciones hiperbólicas, resultando similares a las trigonométricas:

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 \tag{1}$$

$$(\text{de donde resulta que} \quad 1 - \operatorname{th}^2 \alpha = \operatorname{sech}^2 \alpha, \quad \operatorname{cth}^2 \alpha - 1 = \operatorname{csch}^2 \alpha)$$

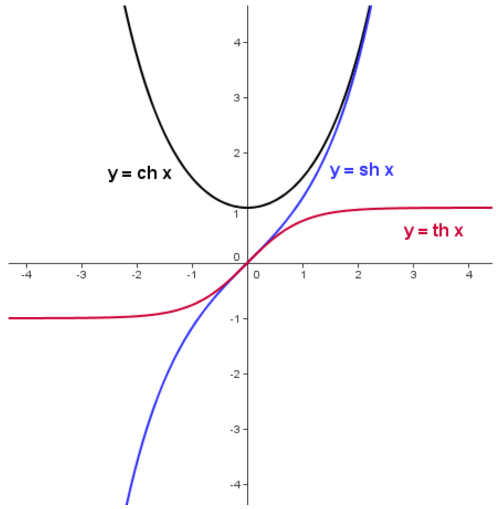


Figura 5: Seno, coseno y tangente hiperbólicos

$$\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha \quad \text{(por lo que la función seno hiperbólico es impar)},$$
$$\operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{ch}\alpha \quad \text{(por lo que la función coseno hiperbólico es par)},$$

De aquí se deduce de forma inmediata que:

$$\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th}\alpha, \quad \operatorname{cth}(-\alpha) = -\operatorname{cth}\alpha, \quad \operatorname{sch}(-\alpha) = \operatorname{sch}\alpha, \quad \operatorname{csch}(-\alpha) = -\operatorname{csch}\alpha$$

Por otro lado se cumple que:

$$\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta \tag{2}$$
$$\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta \tag{3}$$

Sustituyendo $\beta = \alpha$ en las fórmulas anteriores, resultan las correspondientes a la imagen de 2α:

$$\operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha \tag{4}$$
$$\operatorname{ch}(2\alpha) = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha \tag{5}$$

Sumando y restando las fórmulas (1) y (5), se obtienen las igualdades:

$$2\operatorname{ch}^2\alpha = 1 + \operatorname{ch}2\alpha, \qquad\qquad 2\operatorname{sh}^2\alpha = \operatorname{ch}2\alpha - 1$$

Basta sustituir aquí $2\alpha = \vartheta$ (con lo que $\alpha = \vartheta/2$) para obtener:

$$\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\vartheta - 1}{2}} \tag{6}$$
$$\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\vartheta}{2}} \tag{7}$$

Al calcular el seno hiperbólico mediante la fórmula anterior, deberemos usar el signo $+$ cuando $\vartheta/2$ sea positivo (lo que equivale a que ϑ sea positivo) y el signo $-$ cuando $\vartheta/2$ (o ϑ) sea negativo.

De igual forma que ocurre con las funciones trigonométricas circulares, las fórmulas anteriores del seno y coseno hiperbólicos permiten obtener fácilmente otras fórmulas en dos sentidos: cambiando el signo de algunos argumentos y calculando la tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas. Enunciamos algunas a modo de ejemplo:

$$\operatorname{sh}(\alpha-\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta-\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta, \qquad \operatorname{ch}(\alpha-\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta$$

$$\operatorname{th}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{th}(\alpha)\pm\operatorname{th}(\beta)}{1\pm\operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)}, \quad \operatorname{th}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{th}(\alpha)}{1+\operatorname{th}^2(\alpha)}, \quad \operatorname{th}\frac{\vartheta}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\vartheta-1}{\operatorname{ch}\vartheta+1}}$$

El segundo motivo de la analogía entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas, al cual deben éstas su nombre, es la representación gráfica del seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicas sobre la hipérbola $x^2-y^2=1$. Como vemos a continuación, esta representación es análoga a la efectuada para las funciones trigonométricas circulares sobre la circunferencia goniométrica $x^2+y^2=1$.

La fórmula $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$ permite considerar los puntos (x,y) de la circunferencia $x^2+y^2=1$ como los valores $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ de los correspondientes ángulos α. Observemos que las dos semirrectas que delimitan un ángulo α positivo (la parte positiva del eje OX y el resultado de girarla α radianes en sentido positivo; es decir, antihorario), delimitan también un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el valor de α en radianes y un sector circular cuya área es la mitad del valor de α (figura 6). Si el ángulo α es negativo, el eje OX se gira en sentido horario, por lo que la longitud del arco de circunferencia y el doble del área del sector circular que delimitan coinciden con $-\alpha$.

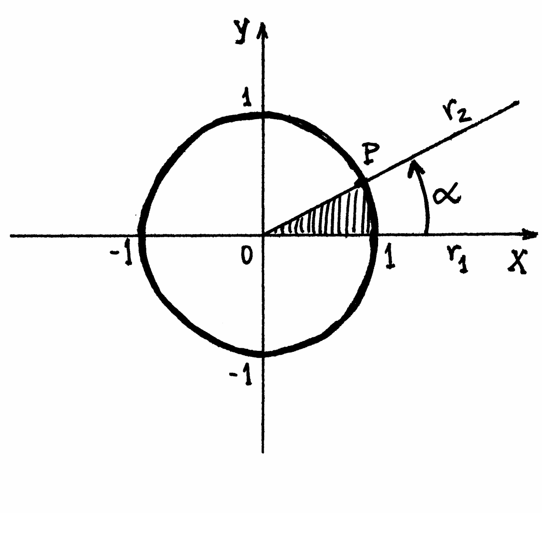


Figura 6: Ángulo circular

Para representar las funciones hiperbólicas, en base a la fórmula (1), sobre la hipérbola $x^2-y^2=1$, se debe cambiar la forma de representar el ángulo. Por eso se define el **ángulo hiperbólico** α como el delimitado por la parte positiva del eje OX y el resultado de girarlo de forma que el área del correspondiente sector hiperbólico sea igual a la mitad de α si se gira en sentido positivo (figura 7) o a la mitad de $-\alpha$ si se gira en sentido negativo.

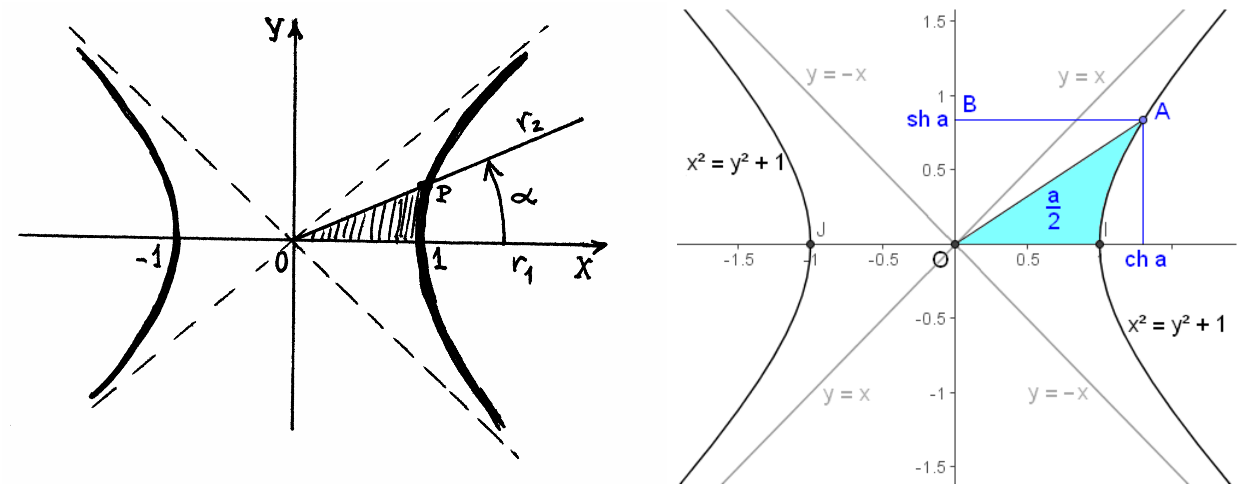


Figura 7: Ángulo hiperbólico

Teniendo en cuenta lo anterior, representemos ahora gráficamente (en la figura 8) la hipérbola $x^2-y^2=1$, que pasa por los puntos $(\pm 1, 0)$ y tiene las dos bisectrices de los cuadrantes por asíntotas. En realidad necesitaremos solamente la rama derecha de esta hipérbola. Representamos también un ángulo hiperbólico α, comprendido entre la semirrecta r_1 (igual a la parte positiva del eje de abscisas OX) y la semirrecta r_2. Entonces, r_2 corta a la hipérbola en un punto P. El origen de coordenadas junto con el punto P y con su proyección sobre el eje OX forman un triángulo rectángulo, sobre el que obtenemos una representación gráfica de las siguientes funciones hiperbólicas:

El seno hiperbólico coincide con la coordenada y del punto P.

El coseno hiperbólico coincide con su coordenada x.

La tangente hiperbólica es igual a la longitud del segmento de la recta t_1 comprendido entre las semirrectas r_1 y r_2, siendo t_1 la recta tangente a la hipérbola en el punto $(1,0)$ (es decir, la recta de ecuación $x=1$). Un extremo de dicho segmento es el punto $(1,0)$. El otro extremo aparece en la gráfica como Q_1.

La cotangente hiperbólica es igual a la longitud del segmento de la recta t_2 comprendido entre la semirrecta r_2 y el eje de ordenadas OY, siendo t_2 la recta de ecuación $y=1$. Un extremo de dicho segmento es el punto $(0,1)$. El otro extremo aparece en la gráfica como Q_2.

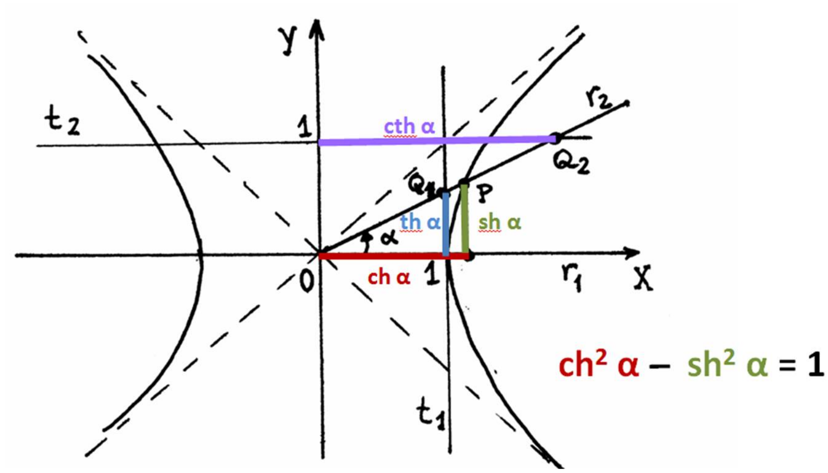


Figura 8: Seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos en la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

2.4. Función parte entera

En todas las funciones consideradas previamente tanto la variable independiente (x) como la variable dependiente (y) toman todo tipo de valores reales. Pero hay casos en los que la función debe tomar solo valores enteros (porque determine, por ejemplo, un número de personas, vehículos, clientes, etcétera). A ese respecto interesa considerar la **función parte entera** que asigna a cada número real x el máximo de los números enteros que son menores o iguales que x. Lo expresamos matemáticamente, a la vez que incluimos las dos notaciones más usadas para esta función:

$$y = [x] = E[x] = \text{máx}\,\{n/\, n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$$

Es inmediato obtener su gráfica, que aparece en la figura 9.

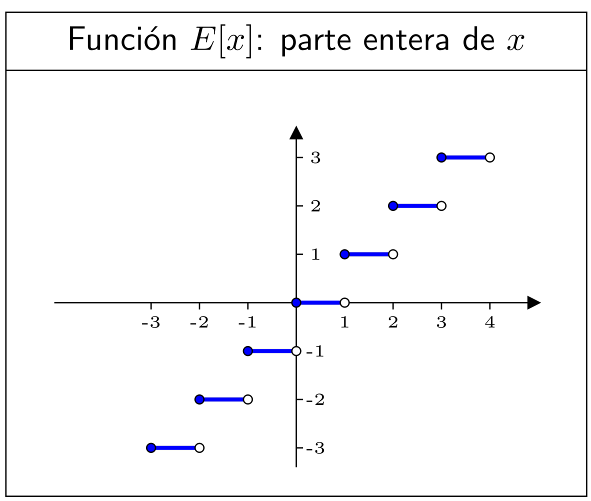


Figura 9: Función parte entera

Notas:

- Cuando $x \geq 0$, basta considerar su expresión decimal, siendo $E[x]$ el número entero que aparece a la izquierda del punto decimal. Por ejemplo, $E[17.389] = 17$ y $E[\pi] = 3$. En cambio, cuando x es negativo y no entero, hay que restar uno al entero que aparece a la izquierda del punto decimal para obtener $E[x]$. Por ejemplo, $E[-17.389] = -18$ y $E[-\pi] = -4$.

- También se considera la **función parte decimal** de x definida simplemente como $x - E[x]$. Su gráfica aparece en la figura 10. ▶

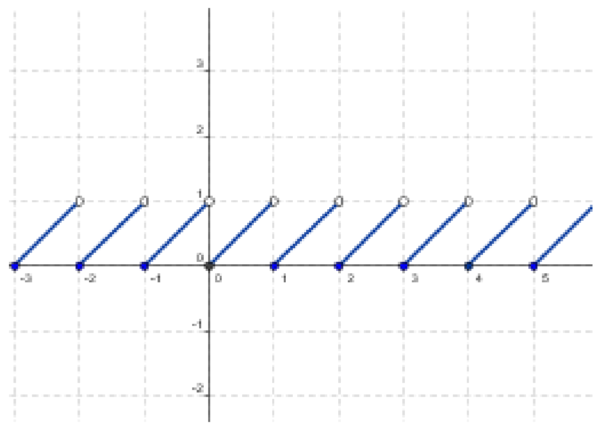


Figura 10: Función parte decimal

3. Operaciones con funciones

Una función representa cierto valor numérico que no vale siempre lo mismo necesariamente (salvo que se trate de una función constante) sino que puede cambiar, dependiendo de cierta variable independiente. En consecuencia, con las funciones se pueden efectuar las mismas operaciones que con los números. Por ejemplo, para funciones arbitrarias $f(x), g(x)$ y cualquier número real c, tenemos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(cf)(x) = cf(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad (f^g)(x) = f(x)^{g(x)}, \qquad \text{etc.}$$

Nota: En particular, recordemos las operaciones usuales con *fracciones algebraicas*:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)S_1(x) \pm P_2(x)S_2(x)}{Q(x)},$$

siendo $Q(x) = m.c.m.\{Q_1(x), Q_2(x)\}$, $S_1(x) = Q(x)/Q_1(x)$ y $S_2(x) = Q(x)/Q_2(x)$.

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}, \qquad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}$$

Cuando una fracción algebraica (al igual que una fracción numérica) contiene factores comunes en el numerador y en el denominador, estos factores se pueden y deben simplificar, obteniendo así una *fracción irreducible*. Por ejemplo:

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Por tanto, si debemos efectuar operaciones con fracciones algebraicas en las que es posible efectuar simplificaciones del tipo anterior, para no complicar innecesariamente los cálculos, es preferible SIMPLIFICAR TAN PRONTO COMO SE PUEDA (sin necesidad de esperar a obtener el resultado final para simplificarlo). ►

Operando con funciones pares e impares, se cumplen los resultados que vemos a continuación.

Proposición 1

- *La suma de dos funciones pares es otra función par.*
- *La suma de dos funciones impares es otra función impar.*
- *El producto de dos funciones pares es otra función par.*
- *El producto de dos funciones impares es otra función par.*
- *El producto de una función par por otra impar es una función impar.*

Demostremos el primer apartado: si f_1 y f_2 son pares, se cumple que

$$f_1(-x) = f_1(x) \quad \text{y} \quad f_2(-x) = f_2(x).$$

Entonces, para la función suma $f = f_1 + f_2$ tenemos que

$$f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = f(x),$$

por lo que f es par. Este mismo tipo de razonamiento permite demostrar los demás apartados.

Proposición 2 *Para cualquier función f cuyo dominio sea simétrico respecto al punto $x = 0$ (en particular, para las que tienen por dominio toda la recta real), se cumple que:*

- *La función $f_1(x) = f(x) - f(-x)$ es impar.*
- *La función $f_2(x) = f(x) + f(-x)$ es par.*
- *La función $f_3(x) = f(x)f(-x)$ es par.*

Esta proposición se demuestra por el mismo fácil método que la anterior. Por eso nos limitamos aquí también a demostrar el primer apartado (proponiendo al estudiante que demuestre los demás): $f_1(-x) = f(-x) - f(x) = -\left(f(x) - f(-x)\right) = -f_1(x)$, por lo que f_1 es impar.

Observemos que se precisa la hipótesis de que el dominio sea simétrico respecto al punto $x = 0$ para que, dado cualquier x del dominio de f, también exista $f(-x)$ (y podamos así definir las tres funciones f_1, f_2 y f_3). Para funciones que cumplan esta hipótesis tenemos el interesante resultado siguiente:

Teorema 1 *Toda función f cuyo dominio sea simétrico respecto al punto $x = 0$ (en particular, cualquiera cuyo dominio sea toda la recta real) se puede expresar como suma de una función impar y otra par.*

Este resultado es evidente en los casos en los que la función de partida ya sea par o impar, porque basta tomar la función nula (constantemente igual a cero) como el sumando que falta. Pero demostremos que es cierto en cualquier caso. Para ello, dada f, debemos hallar f_1 impar y f_2 par tales que $f = f_1 + f_2$. Entonces debe cumplirse que:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{8}$$

$$f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) + f_2(x) \tag{9}$$

Sumando los primeros y últimos miembros de las ecuaciones (8) y (9) resulta que

$$f(x) + f(-x) = 2f_2(x) \tag{10}$$

Mientras que restándolos resulta que

$$f(x) - f(-x) = 2f_1(x) \tag{11}$$

De esta forma, la ecuación (10) nos proporciona el sumando par f_2 (que lo es como asegura el segundo apartado de la proposición anterior) y la ecuación (11) nos proporciona el sumando impar f_1 (que lo es como asegura el primer apartado de la proposición anterior). En definitiva, hemos probado que:

f es la suma de la función impar $f_1 = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ más la función par $f_2 = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

Nota: En particular, para la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos:

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x\,, \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Es decir, que las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico proporcionan los sumandos impar y par en los que se puede descomponer la función exponencial:

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \qquad \blacktriangleright$$

3.1. Composición y funciones inversas

Tiene especial relevancia la operación *composición*, que es específica para funciones (y no para números, como sí lo han sido las antes consideradas), de la cual surge el concepto de *función inversa.*

Definición 8 *Dadas dos funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la* ***composición*** *de f y g como:*

$$(g \circ f) : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que a todo $x \in A$ le hacemos corresponder $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$.

Aunque la suma y el producto de funciones tienen la propiedad conmutativa, la composición no la tiene. Es decir, en general $g \circ f \neq f \circ g$. Para comprobarlo basta considerar ejemplos como los siguientes: $e^{\operatorname{sen} x} \neq \operatorname{sen} e^x$, $\dfrac{1}{1+x} \neq 1 + \dfrac{1}{x}$, $\ln\sqrt{x} \neq \sqrt{\ln x}$, etc.

<u>Nota:</u> Tanto la composición como las operaciones consideradas anteriormente se pueden efectuar también, dicho en términos generales (es decir, salvo cuando haya condiciones que lo impidan), con funciones que dependen de más de una variable. ▶

Definición 9 *Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, esto es, tal que todo elemento $y \in B$ es imagen de un único elemento de $x \in A$, se define la* ***función inversa*** *$f^{-1} : B \to A$ como aquella que verifica*

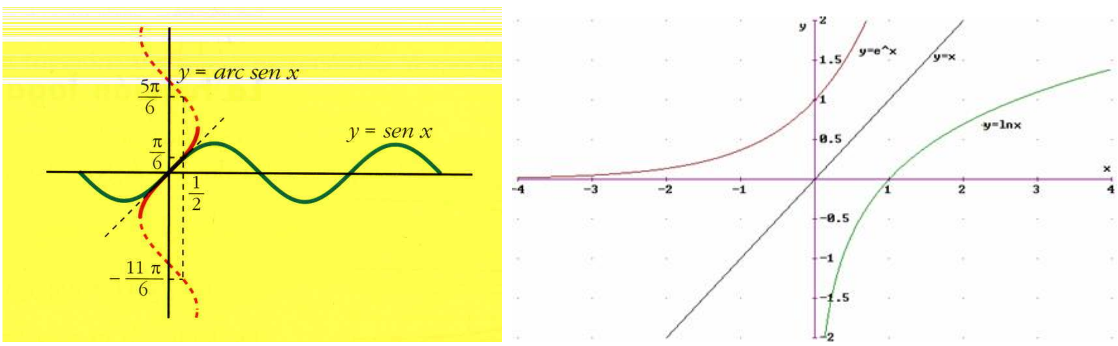
$$\begin{aligned} f^{-1}[f(x)] &= x, \quad \forall x \in A \\ f[f^{-1}(y)] &= y, \quad \forall y \in B \end{aligned}$$

<u>Nota:</u> No debemos confundir la inversa para la composición $f^{-1}(x)$ con la inversa para el producto $\dfrac{1}{f(x)}$. Por ejemplo, dada la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, su inversa para la composición es $f^{-1}(x) = \operatorname{arsen} x$ mientras que su inversa para el producto es $\dfrac{1}{f(x)} = \operatorname{cosec} x$. ▶

Respecto a las funciones inversas, debemos tener en cuenta los aspectos siguientes:

- Al considerar la **función inversa** f^{-1} de cada una de las funciones usuales f vistas anteriormente, debemos restringirnos a su dominio y recorrido, que se convertirán respectivamente en recorrido y dominio. Por ejemplo, la inversa de la función exponencial, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyo recorrido es $(0, +\infty)$, es la función logarítmica, de dominio $(0, +\infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$. En casos como $y = x^{2n}$, donde dos valores de x tienen igual imagen y, debemos considerar las dos posibles ramas de su función inversa (así tenemos, por ejemplo, la rama positiva y la negativa de la raíz de x, ambas inversas del cuadrado). De forma análoga tenemos infinitas ramas de las funciones periódicas, como el seno y el coseno. En este caso nos restringimos a un intervalo de valores donde estén definidas de forma unívoca las correspondientes inversas ($y = \operatorname{arsen} x$ e $y = \operatorname{arcos} x$); por ejemplo, al intervalo $[0, 2\pi)$ o al intervalo $(-\pi, \pi]$.

- Para calcular la inversa f^{-1} de una función $y = f(x)$, basta con intercambiar las variables x e y y despejar la y (que antes ocupaba el lugar de x).
- El concepto de función inversa, que se refleja en el cálculo antedicho, implica que las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante por el motivo siguiente: si el punto (x, y) pertenece a una de las gráficas, el punto (y, x) pertenece a la otra. Como ejemplos, tenemos en la figura 11 las gráficas de las funciones seno y arcoseno y las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica



(a) Funciones seno y arcoseno (b) Funciones exponencial y logarítmica (con base e)

Figura 11: Ejemplos de funciones inversas

El hecho de que las funciones hiperbólicas estén definidas mediante operaciones con funciones exponenciales da lugar a que las inversas de las funciones hiperbólicas se puedan expresar mediante funciones logarítmicas. En efecto, aplicando los cálculos antes indicados para la inversa de cada función, podemos deducir las fórmulas siguientes (aunque con la dificultad de considerar en cada caso los dominios, recorridos y posibles dobles signos):

- **Arco seno hiperbólico**:
$$\mathrm{sh}^{-1}\, x = \mathrm{arsh}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- **Arco coseno hiperbólico**:
$$\mathrm{ch}^{-1}\, x = \mathrm{arch}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) , \quad \forall x \in [1, +\infty).$$
- **Arco tangente hiperbólica**:
$$\mathrm{th}^{-1}\, x = \mathrm{arth}\ x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} , \quad \forall x \in (-1, 1).$$
- **Arco cotangente hiperbólica**:
$$\mathrm{cth}^{-1}\, x = \mathrm{arcth}\ x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} , \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

- **Arco secante hiperbólica**:

$$\mathrm{sech}^{-1}\, x = \mathrm{arsech}\; x = \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,, \quad \forall x \in (0,1].$$

- **Arco cosecante hiperbólica**:

$$\mathrm{cosech}^{-1}\, x = \mathrm{arcosech}\; x = \ln \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{0\}.$$

Las funciones arco coseno hiperbólico y arco secante hiperbólica tienen dos ramas (una positiva y otra negativa), simétricas respecto al eje de abscisas (de igual forma que ocurre con las funciones $y = \sqrt[n]{x}$ para cualquier índice natural n par). En las definiciones anteriores hemos considerado solamente la rama positiva. Si consideramos conjuntamente las dos ramas, tenemos las expresiones siguientes:

- **Arco coseno hiperbólico**: $\mathrm{ch}^{-1}\, x = \mathrm{arch}\; x = \pm \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$.
- **Arco secante hiperbólica**: $\mathrm{sech}^{-1}\, x = \mathrm{arsech}\; x = \pm \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \ln \dfrac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$.

<u>**Nota:**</u> El hecho de que las funciones exponenciales y las logarítmicas sean funciones inversas (lo que se refleja en la propia definición de logaritmo), permite relacionar sus correspondientes propiedades. Recordamos a continuación tales propiedades (ya que es preciso conocerlas a la hora de manejar y simplificar los cálculos con funciones exponenciales y logarítmicas):

$$b^p\, b^q = b^{p+q} \qquad \text{equivale a:} \qquad \log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$$

$$\frac{b^p}{b^q} = b^{p-q} \qquad \text{equivale a:} \qquad \log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

$$(b^p)^q = b^{pq} \qquad \text{equivale a:} \qquad \log_b A^q = q \log_b A$$

$$\sqrt[q]{b^p} = b^{\frac{p}{q}} \qquad \text{equivale a:} \qquad \log_b \sqrt[q]{A} = \frac{\log_b A}{q}$$

Para establecer las equivalencias anteriores basta escribir $A = b^p$, $B = b^q$ y aplicar la definición de logaritmo. Si además consideramos el caso $b^p = (b^q)^r$, con lo que $r = \dfrac{p}{q}$, se deduce la fórmula:

$$\log_B A = \frac{\log_b A}{\log_b B}$$

Por el contrario, es inmediato encontrar contraejemplos para comprobar que, en general, se tiene:

$$b^p + b^q \neq b^{p+q} \qquad \text{por lo que} \qquad \log_b(A+B) \neq \log_b A + \log_b B$$

$$b^p - b^q \neq b^{p-q} \qquad \text{por lo que} \qquad \log_b(A-B) \neq \log_b A - \log_b B$$

$$(a+b)^p \neq a^p + b^p \qquad \text{por lo que} \qquad \sqrt[p]{a+b} \neq \sqrt[p]{a} + \sqrt[p]{b} \;\blacktriangleright$$

4. Límites y continuidad

4.1. Límites de una función

Definición 10 *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}$ es el* ***límite*** *de f en el punto a (o cuando x tiende a a) si $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a ℓ eligiendo x lo suficientemente próximo a a (pero siendo $x \neq a$), es decir, cuando $|f(x) - \ell|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera sin más que tomar $|x - a|$ suficientemente pequeño. Matemáticamente, esto se escribe así:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{tal} \quad \textit{que} \quad \textit{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

o bien así:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{tal} \quad \textit{que} \quad \textit{si} \quad x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a \quad \textit{entonces} \quad f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

En esta definición consideramos intervalos de la forma $(a - \delta, a + \delta)$, cuyos elementos están próximos al número a. Se denominan **entornos de** a tanto a este tipo de intervalos como otros que contengan a a (aunque este número no esté justo en su centro). Además se habla de **entorno reducido de** a cuando a cierto entorno le quitamos justamente el punto a (como ocurre en la definición anterior). Por ejemplo, un entorno reducido de a es: $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Notas:

- De que aparezca en la definición que $0 < |x - a|$ deducimos que el límite de una función en un punto no depende del valor de la función en ese punto sino de lo que valga en los puntos de un entorno.
- El número δ, que aparece en la definición de límite, no es único, puesto que si algún valor específico δ_0 lo satisface, entonces cualquier número positivo δ' menor que δ_0 también lo hace.
- El número δ depende de ε y de a. ▶

Calcular el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a (o en el punto a) supone ver a qué valor se acercan (tanto cuanto queramos) las imágenes $f(x)$ cuando a la variable independiente x le damos valores cada vez más próximos a a. Puede ocurrir que se cumpla la definición anterior, valiendo entonces ℓ dícho límite, lo que notamos así: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. Pero debemos tener en cuenta que no siempre existirá un límite. Para probarlo, basta considerar un ejemplo como es $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ cuando x tiende a 0. En efecto,

$$\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque cuando x se acerca a 0 las imágenes $\operatorname{sen}(1/x)$ van oscilando, tomando todos los valores del intervalo $[0, 1]$ y sin acercarse a ninguno de ellos concretamente.

Ahora bien, en caso de existir el límite, éste necesariamente es único, ya que no se puede cumplir la definición (que exige la aproximación al valor del límite en una cantidad tan pequeña como queramos) para dos (o más) valores límite a la vez. Por tanto tenemos:

Proposición 3 *El límite, si existe, es único.*

Por otro lado, observemos que en la definición de límite, al considerarse en valor absoluto la diferencia $x-a$ en la desigualdad $0<|x-a|<\delta$ estamos expresando la posibilidad de que el punto variable x tienda hacia a por valores mayores o menores que a indistintamente.

Tiene interés, no obstante, el considerar el caso en que el punto x permanece siempre a la derecha o siempre a la izquierda de a; es decir, el caso en que sea $x>a$ ó $x<a$. Esto conduce a la noción de límite lateral por la derecha o por la izquierda:

Definición 11 *Se dice que ℓ es el **límite por la derecha** de la función f en a cuando $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a ℓ si x se elige lo suficientemente próximo a a, siendo estrictamente mayor que a, es decir:*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \textit{tal que si } \; 0<x-a<\delta \; \textit{ entonces } \; |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

y escribiremos $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell$ *o bien* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell.$

Definición 12 *Se dice que ℓ es el **límite por la izquierda** de la función f en a cuando $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a ℓ si x se elige lo suficientemente próximo a a, siendo estrictamente menor que a, es decir:*

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \textit{tal que si } \; 0<a-x<\delta \; \textit{ entonces } \; |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

y escribiremos $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x)=\ell$ *o bien* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell.$

Así, si ℓ es el límite ordinario de f en el punto a, este número ℓ será a la vez el límite por la derecha y por la izquierda, pero puede ocurrir que una función admita los límites laterales en a y que estos límites sean distintos, con lo cual la función no podrá tener límite ordinario en a.

Ahora bien, si una función tiene límite por la derecha y por la izquierda en el punto a y estos límites coinciden, el valor común ℓ de ellos es el límite ordinario de f en a.

Nota: Hay que calcular el límite por la derecha y por la izquierda cuando la función dada presente un comportamiento diferenciado por cada lado. Pero eso no ocurre siempre. En muchas ocasiones se puede calcular de una vez el límite cuando nos acercamos a un punto sin necesidad de recurrir a los límites laterales.

Por ejemplo, consideremos la función: $\quad f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, & x\le 1\\ e^{x}, & x>1\end{cases}$

En este caso, hay que calcular los límites laterales cuando nos acercamos a los puntos $x=0$ y $x=1$, pero ello no es preciso para los demás puntos. En el punto $x=0$, se precisa recurrir a los límites laterales debido al signo del límite ∞ (este valor, cuando se escribe sin signo, suele englobar los dos casos $+\infty$ y $-\infty$; pero en muchas ocasiones hay que precisar de qué signo se trata):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}=e^{-\infty}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty.$$

En el punto $x = 1$, se precisa recurrir a los límites laterales debido a la definición de f en los dos "trozos" $(-\infty, 1]$ y $(1, +\infty)$, aunque en este ejemplo concreto obtengamos el mismo valor por ambos lados:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{1/x} = e^1 = e,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{x} = e^1 = e.$$

Por tanto, podemos concluir el estudio en estos dos puntos diciendo que $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ y que $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = e$.

En todos los demás puntos, el límite se obtiene de una vez, sin tener que recurrir a los límites laterales. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} e^{1/x} = e^{-1} = 1/e,$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} e^{x} = e^2. \ \blacktriangleright$$

Teorema 2 *Si dos funciones toman valores iguales en los puntos de un cierto entorno del punto a con la posible excepción de $x = a$ (donde no importa cuál sea su imagen) y una de ellas tiene límite cuando $x \to a$, entonces la otra tiene este mismo límite.*

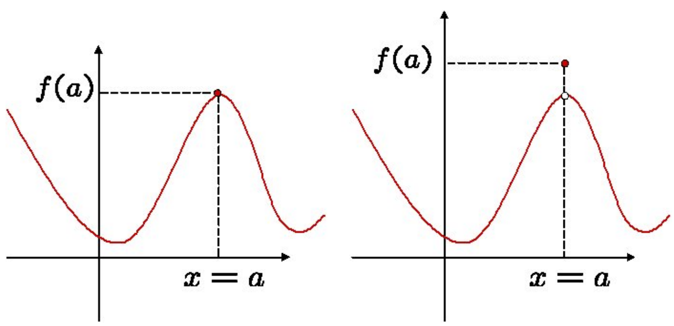


Figura 12: Las dos funciones tienen igual límite en $x = a$

Este teorema permite hacer transformaciones en las expresiones cuyos límites tratamos de calcular simplificándolas, siendo lícitas operaciones que no lo serían si se considerase que la función puede evaluarse en $x = a$. Por ejemplo:

$$\text{como } f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ coincide con } g(x) = x + 1 \text{ en } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty),$$

podemos resolver directamente la indeterminación $0/0$ que surge al calcular el límite $\lim_{x\to 1} f(x)$ de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2. \ \blacktriangleright$$

Consideremos ahora la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Cuando tomamos números reales cada vez más próximos a cero, su imagen se hace mucho mayor. Por tanto, en el punto $a = 0$ no existe el límite (en el sentido exacto de la definición). Sin embargo, su comportamiento es muy regular. Vamos a generalizar el concepto de límite para funciones como ésta.

Definición 13 *Diremos que f tiende a $+\infty$ cuando x tiende hacia a y escribiremos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, si*

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que si} \quad 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > K.$$

y diremos que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to a$ y escribiremos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, si

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que si} \quad 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < -K.$$

También es interesante conocer cómo se comporta la función cuando la variable independiente toma valores muy grandes (o muy pequeños).

Definición 14 *Diremos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \quad \textit{tal} \quad \textit{que} \quad \textit{si} \quad x > K \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

y diremos que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \quad \textit{tal} \quad \textit{que} \quad \textit{si} \quad x < -K \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Para cualquiera de los tipos de límite considerados (que la variable independiente x tienda a un valor a finito o infinito y que el límite ℓ sea finito o infinito), interesa tener algún procedimiento práctico que nos oriente sobre el valor que pueda tomar el límite y, si es posible, nos permita calcularlo sin tener que aplicar la definición. Con tal finalidad, interesa conocer las propiedades siguientes (que son lógicas e intuitivas, pero que pueden demostrarse de forma rigurosa a partir de la definición).

Propiedades:

- *Si el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ es positivo, entonces en todos los puntos de un entorno reducido de a la función también es positiva.*
- *Si el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ es negativo, entonces en todos los puntos de un entorno reducido de a la función también es negativa.*
- *Si f tiene límite finito en un punto a, existe un entorno reducido de a donde f está acotada.*
- **(Álgebra de límites)** *Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$. Entonces se verifica :*
  - $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$.
  - $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
  - Si $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

- Si $\ell_1 > 0$, $\lim_{x\to a} \left(f(x)^{g(x)}\right) = {\ell_1}^{\ell_2}$.

- *Si f está acotada en un entorno reducido de a y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
- *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, entonces se verifica que $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.*
- *Supongamos que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x perteneciente a un entorno reducido de a y que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell = \lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$.*

Al aplicar las propiedades anteriores, cuando $a \in \mathbb{R}$ (es decir, cuando a es finito), como entorno reducido de a podemos tomar un intervalo de la forma $(a-\delta, a+\delta)$ (con cualquier $\delta > 0$). Mientras que cuando $a = +\infty$, un entorno reducido de a es un intervalo de la forma $(K, +\infty)$ (con cualquier $K \in \mathbb{R}$) y, análogamente, un entorno reducido de $-\infty$ es un intervalo de la forma $(-\infty, K)$ (con cualquier $K \in \mathbb{R}$).

A efectos del cálculo práctico de límites, las propiedades más útiles son la denominada *álgebra de límites* (que permiten calcular por separado los límites de cada sumando, factor, base, exponente, etc.) y las tres que le siguen (cuando, respectivamente, encontramos un factor que tienda a cero estando el resto acotado o aparezca un valor absoluto o es fácil determinar dos funciones entre cuyos valores se encuentra aquella a la que queremos calcular el límite).

En particular, el *álgebra de límites* extiende las operaciones usuales con números reales, permitiendo operar también con $-\infty$ y $+\infty$. Además, la posibilidad de obtener infinito como resultado permite dividir entre cero, lo cual no está permitido cuando consideramos exclusivamente números reales en los operandos y en los resultados. En las tablas siguientes se resumen estas *operaciones con límites*. En ellas aparecen los resultados de operar (sumar, restar, multiplicar, dividir o elevar) los límites A y B, dependiendo de los distintos valores que puedan tomar estos límites (finitos o infinitos). Los posibles valores finitos aparecen como letras r, s, a, b, p y q, que representan números arbitrarios, pero pertenecientes a los intervalos siguientes:

- $r, s \in (-\infty, +\infty)$ (es decir, r y s son números reales cualesquiera).
- $a, b \in (0, +\infty)$ (es decir, a y b son números positivos cualesquiera, con lo que $-a$ y $-b$ son números negativos).
- $p \in (0, 1)$ (es decir, p está estrictamente comprendido entre 0 y 1).
- $q \in (1, +\infty)$ (es decir, q es estrictamente mayor que 1).

$\boxed{A+B}$ B \ A	$-\infty$	s	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	INDET.
r	$-\infty$	$r+s$	$+\infty$
$+\infty$	INDET.	$+\infty$	$+\infty$

$\boxed{A-B}$ B \ A	$-\infty$	s	$+\infty$
$-\infty$	INDET.	$-\infty$	$-\infty$
r	$+\infty$	$r-s$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	INDET.

$\boxed{A \times B}$ B / A	$-\infty$	$-b$	0	b	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	INDET.	$-\infty$	$-\infty$
$-a$	$+\infty$	ab	0	$-ab$	$-\infty$
0	INDET.	0	0	0	INDET.
a	$-\infty$	$-ab$	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	INDET.	$+\infty$	$+\infty$

$\boxed{A/B}$ B / A	$-\infty$	$-b$	0	b	$+\infty$
$-\infty$	INDET.	$+\infty$	∞	$-\infty$	INDET.
$-a$	0	a/b	∞	$-a/b$	0
0	0	0	INDET.	0	0
a	0	$-a/b$	∞	a/b	0
$+\infty$	INDET.	$-\infty$	∞	$+\infty$	INDET.

$\boxed{A^B}$ A \ B	$-\infty$	$-b$	0	b	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	INDET.	0	0
p	$+\infty$	$1/p^b$	1	p^b	0
1	INDET.	1	1	1	INDET.
q	0	$1/q^b$	1	q^b	$+\infty$
$+\infty$	0	0	INDET.	$+\infty$	$+\infty$

Observamos que hay casos en los que aparece el resultado "INDET.", indicando que se trata de **indeterminaciones**. Eso significa que en estos casos el valor del límite puede cambiar (valiendo cualquier número real, menos infinito o más infinito) dependiendo del ejemplo concreto en que aparezca tal indeterminación. Se debe saber (como se deduce de las tablas anteriores) que solo hay siete tipos de indeterminación que son los siguientes:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Nota: Hay veces en que el resultado de un límite infinito puede acompañarse del signo más o menos, especificando así que el valor del límite es $+\infty$ ó $-\infty$ respectivamente. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

En otras ocasiones podemos decir que se trata solamente del límite ∞, sin poder especificar su signo. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Pero este hecho de no poder especificar el signo del ∞ no es una indeterminación (aunque en algunos sitios se considere como tal, extendiendo así el concepto estricto de indeterminación). ▶

Para resolver las indeterminaciones que pueden aparecer a la hora del cálculo de límites, es muy útil la denominada *regla de L'Hôpital,* que es una de las propiedades de las funciones derivables que aparecerá en el tema 4 (aunque se supone conocida de cursos anteriores y se recuerda aquí un poco más adelante).

Tanto esta regla como otros métodos útiles para resolver indeterminaciones aparecen resumidos a continuación:

$\boxed{+\infty - \infty}$ Operar para convertirla en $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- Si se trata de una resta de fracciones, efectuarla dejando una sola fracción.
- Si aparece $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, puede interesar multiplicar y dividir por su conjugado $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

$\boxed{0 \cdot \infty}$ Usar la fórmula $ab = \dfrac{a}{1/b}$ (o bien $ab = \dfrac{b}{1/a}$) para convertirla en $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}}$ Usar la *regla de L'Hôpital* (derivando numerador y denominador por separado):

$$\text{Si } \exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \text{entonces} \quad \exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Además, para el cociente de dos polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, también se puede dividir $P(x)$ y $Q(x)$ entre:

- $x-a$, si $x \to a$ en la indeterminación $\dfrac{0}{0}$.
- $x^{\text{máximo grado}}$, si $x \to \infty$ en la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$. De ahí resulta que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } grad(P) > grad(Q) \\ 0 & \text{si } grad(P) < grad(Q) \\ \dfrac{p_n}{q_n} & \text{si } grad(P) = grad(Q) = n \\ & \text{siendo } p_n \text{ (resp. } q_n\text{) el coeficiente de } x^n \text{ en } P \text{ (resp. } Q\text{).} \end{cases}$$

$\boxed{\infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty}$ Calcular $\ln \lim b^p = \lim \ln b^p = \lim p \ln b$ para convertirla en $0 \cdot \infty$.
Al final, hallar $\lim b^p = e^{\ln \lim b^p}$

Además, en la indeterminación 1^∞, se puede usar la fórmula $\displaystyle\lim_{f(x)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

De donde se deduce que:

$$\text{Si } b(x) \to 1 \text{ y } p(x) \to \infty \quad \text{entonces} \quad \lim b(x)^{p(x)} = e^{\lim p(x)[b(x)-1]}$$

4.2. Continuidad de una función

Definición 15 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que f es* ***continua*** *en a si existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a y vale $f(a)$, es decir:*

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Haciendo uso de la definición de límite, podemos decir que f es continua en a si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que si } \ |x - a| < \delta \ \textit{ entonces } \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Observemos que si ocurre algunas de las siguientes situaciones:

- la función no está definida en a,
- no existe el límite en a,
- existe el límite en a pero no coincide con $f(a)$,

entonces la función no es continua en a, en este caso se dice que f es **discontinua** en a.

Los puntos de discontinuidad de una función se pueden clasificar de la siguiente manera (que es habitual, pero no la única, ya que en ocasiones se habla también de discontinuidades de tercera especie):

a) Discontinuidad de **primera especie**:

- **Discontinuidad evitable**. Si existe el límite de la función en el punto pero no coincide con el valor de la función.

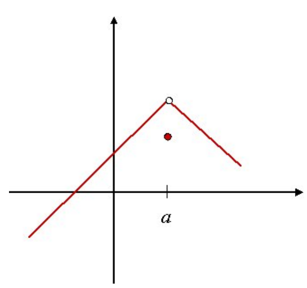


Figura 13: Discontinuidad evitable en $x = a$

- **Discontinuidad de salto**. Si existen los límites laterales en dicho punto pero son distintos entre sí.

b) Discontinuidad de **segunda especie**:
Si no existen alguno de los límites laterales o bien el límite existe pero es infinito.

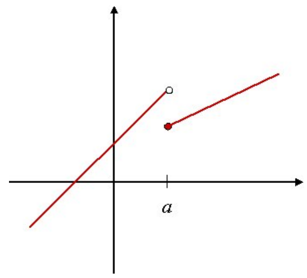


Figura 14: Discontinuidad de salto en $x = a$

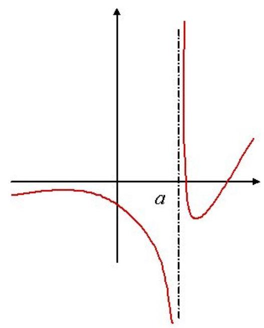


Figura 15: Discontinuidad de segunda especie en $x = a$

Propiedades:

- En virtud del álgebra de límites se deduce que *la suma, resta y producto de funciones continuas es una función continua. Así mismo lo es el cociente, siempre que el denominador no se anule.*

- *Sea* $f : I \to J$ *y* $g : J \to \mathbb{R}$ *tales que* f *sea continua en un punto* a *y* g *sea continua en* $f(a)$*, entonces la función compuesta* $(g \circ f)$ *es continua en* a.

  Nota: Obsérvese que, como consecuencia de esta propiedad, si f y g satisfacen las condiciones impuestas, podemos determinar el límite $g(f(x))$, cuando $x \to a$, así:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(f(a)) \quad \blacktriangleright$$

- *Sea* f *continua en* a *y* $f(a) \neq 0$*, entonces existe un entorno del punto* a *en donde la función no cambia de signo.*

- *Si una función es continua en un punto* a*, entonces existe un entorno del punto* a *donde la función está acotada.*

Si f es continua en cada punto del intervalo (a, b), se dice que f es continua en (a, b). En el caso de intervalos cerrados, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ¿qué continuidad se puede exigir en los extremos? Puesto que la función no tiene por qué estar definida a la izquierda del punto a (resp. a la derecha del punto b), sólo podemos estudiar el límite por la derecha cuando $x \to a$ (resp. por la izquierda cuando $x \to b$). Por eso, para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define:

- f es continua en $a \iff \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f es continua en $b \iff \exists \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Así podemos hablar de funciones continuas en un intervalo cerrado.

Nota: La búsqueda práctica de posibles puntos de discontinuidad, para una función cuya gráfica desconocemos, consiste (en primer lugar) en determinar si existen puntos de la recta real donde ocurren, entre otras, las siguientes situaciones:

- La función no está definida.
- La función está definida de forma diferente para valores superiores e inferiores al punto.
- La función diverge ($\to \infty$) al anularse su denominador.
- La función no puede calcularse al convertirse en negativo el argumento de una raíz de índice par o de un logaritmo.
- La función diverge ($\to -\infty$) al anularse el argumento de un logaritmo.
- El límite no puede calcularse por tender a infinito el argumento de una función trigonométrica.

En cada punto susceptible de presentar una discontinuidad de la función, procederemos a evaluarla, calcular sus límites laterales en aquel punto y averiguar el tipo de discontinuidad si la hubiese a partir de las definiciones dadas anteriormente. ▶

4.3. Cálculo de asíntotas

Una utilidad interesante del cálculo de límites es la determinación de asíntotas (si existen) de la gráfica de una función. Recordamos a continuación su definición y cálculo.

Definición 16 *Una recta vertical $x = a$ se llama* **asíntota vertical** *si $|f(x)|$ llega a ser tan grande como se quiera cuando $x \to a$, por la derecha o por la izquierda.*

Por tanto, se obtienen las asíntotas verticales en los puntos $x = a$ donde la función tiende a ∞ cuando $x \to a$. Un ejemplo es la recta $x = a$ que aparece en la gráfica anterior como discontinuidad de segunda especie. Tienen asíntotas verticales las funciones racionales, en los puntos que anulan el denominador (sin anular a la vez el numerador, en cuyo caso hay que resolver la indeterminación $0/0$ para ver cómo se comporta la función).

Nota: Para hacer un análisis exhaustivo, debemos distinguir si la recta $x = a$ es asíntota sólo a la izquierda o a la derecha o a ambos lados, considerando en ambos si $f(x) \to -\infty$ o bien $f(x) \to +\infty$. ▶

Una vez consideradas las asíntotas verticales ($x = a$), veamos ahora las oblícuas y horizontales. Estos dos últimos casos corresponden a la ecuación de una recta $y = mx + n$, siendo oblícua cuando $m \neq 0$ y horizontal cuando $m = 0$.

Definición 17 *Una recta no vertical de ecuación $y = mx + n$ se llama* **asíntota** *de la gráfica $y = f(x)$, si la diferencia*

$$f(x) - (mx + n)$$

tiende a cero cuando x tiende a infinito.

Para obtener las posibles asíntotas, se calcula

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

y si es finito, su valor es la pendiente m de la recta y

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Si $m \neq 0$, se trata de una **asíntota oblícua**. En el caso $m = 0$, tenemos una **asíntota horizontal**.

Los cálculos anteriores proporcionan tanto las asíntotas oblícuas como las horizontales, pero podemos también calcular directamente estas últimas teniendo en cuenta que la recta $y = n$ es asíntota horizontal si y sólo si

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = n.$$

Nota: Para estudiar completamente las asíntotas oblícuas y las horizontales, hay que considerar por separado lo que ocurre por la izquierda (es decir cuando $x \to -\infty$) y lo que ocurre por la derecha (es decir cuando $x \to +\infty$). ▶

5. Teoremas sobre funciones continuas

Anteriormente hemos visto algunas propiedades de las funciones continuas. Enunciamos ahora otras de gran importancia, como son los conocidos teoremas siguientes sobre funciones continuas:

Teorema 3 (de Bolzano o de los ceros).

Si f es continua en $[a, b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo opuesto, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el que $f(c) = 0$.

Notas:

- La hipótesis de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo se puede expresar abreviadamente con la fórmula $f(a)f(b) < 0$.
- Supongamos que interesa resolver la ecuación $f(x) = 0$ para una función f que no permite hacerlo de forma exacta. Entonces, el encontrar dos puntos a y b que verifiquen $f(a)f(b) < 0$ permite acotar el problema, pues sabemos que al menos existe una solución de la ecuación en el intervalo (a, b). Para aproximar al menos una solución de la ecuación buscada, basta ir reduciendo la amplitud de dicho intervalo, considerando puntos de su interior y calculando el signo de sus imágenes. Un método que se usa entonces es considerar de forma iterada el punto medio del intervalo que tenemos en cada paso, lo que permite cada vez ir reduciendo a la mitad la amplitud del intervalo en el que tenemos localizada una solución.

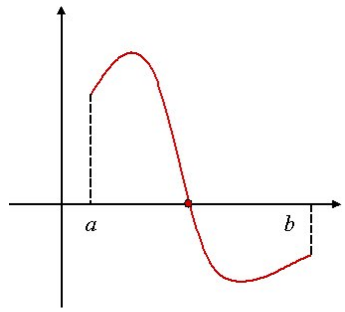


Figura 16: Teorema de Bolzano

- Observemos que el teorema no dice nada sobre el número de raíces que existen en el intervalo. ▶

Teorema 4 (de Darboux o de los valores intermedios).
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Nota: Sin embargo, una función puede pasar de un valor a otro pasando por todos los intermedios sin ser continua. ▶

Teorema 5 *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces está acotada en dicho intervalo.*

Nota: El teorema no se verifica si el intervalo es abierto, es decir, una función continua en un intervalo abierto no tiene por qué estar acotada. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es continua en $(0, 1)$ pero no está acotada en dicho intervalo. ▶

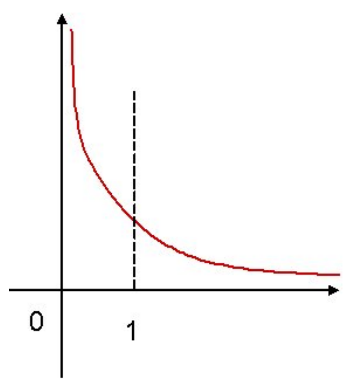


Figura 17: Función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0, 1) \subset (0, +\infty)$

Teorema 6 (de Weierstrass)
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces alcanza el máximo y el mínimo en el intervalo cerrado $[a, b]$. Es decir, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

Notas:

- Uniendo el teorema de *Darboux* y de *Weierstrass*, se puede afirmar que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre su mínimo y su máximo. Dicho de otra forma, su imagen es otro intervalo cerrado.

- El ejemplo considerado en la nota anterior (e ilustrado en la figura 17) muestra también que una función puede no alcanzar un máximo si no se cumplen las hipótesis del teorema de Weierstrass (en este caso, por no ser f continua en un intervalo cerrado, aunque sí lo sea en un intervalo abierto). ►