# APRENDIZAJE AUTOMÁTICO: TERCER CURSO DEL GRADO DE ING. INFORMÁTICA EN COMPUTACION

## CONCEPTOS BÁSICOS DE CALCULO DE PROBABILIDADES

César Hervás-Martínez
Grupo de Investigación AYRNA

Departamento de Informática y Análisis Numérico
Universidad de Córdoba
Campus de Rabanales. Edificio Einstein.
Email: chervas@uco.es

Curso 2019-2020

# Objetivos

- Conceptos básicos
- Probabilidad condicionada
- Teorema de Bayes

# Definiciones

- **Fenomenos aleatorios:** son experimentos cuyo resultado no se puede predecir, p.e. el lanzamiento de un dado.

- **Espacio muestral E:** Es el conjunto de todos los posibles sucesos.

- **Suceso elemental:** Es cada uno de los posibles resultados que pueden darse en un experimento. Es un suceso que se puede describir mediante una única caraterística y es indivisible. Por ejemplo que salga un seis.

# Definiciones

- **Suceso:** Es un posible resultado que se obtiene mediante los operadores de unión, intersección y complementario. Por ejemplo que salga un número par, que es la unión de los sucesos elementales que salga un 2, o un 4, o un 6.

- **Probabilidad:** es la medida de la confianza que tenemos de que ocurra un determinado suceso.

# Tipos de medidas de probabilidad

Existen al menos tres aproximaciones para asignar la probabilidad a un suceso:

1. **Probabilidad a priori:** La probabilidad de un suceso se basa en el conocimiento que tenemos a priori del proceso que lo genera.

2. **Probabilidad empírica:** La probabilidad de un suceso se basa en los datos observados.

3. **Probabilidad subjetiva:** La probabilidad de un suceso viene determinada por un individuo, la cual está basada en su pasada experiencia, opinión personal, y/o el análisis de una situación particular.

## Axiomas del Cálculo de Probabilidades

**Dados un espacio muestral y un conjunto de sucesos asociados a ese experimento, se verifica que**

a) $P(A_i) \geq 0, \forall i=1,..,n$

b) P(E)=1, siendo E el suceso seguro

c) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, siempre que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$, esto es, los sucesos son incompatible

en el caso en que tengamos un conjunto infinito de sucesos , entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ siempre que } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$$

**A partir de estos axiomas se construye la teoría de la probabilidad, por ejemplo**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{en general}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

# Calculo de Probabilidades

**Suponiendo que los sucesos elementales son equiprobables**

**1. Probabilidad a priori**

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}$$

**Ejemplo.- P(sacar un seis)=1/6**

**2. Probabilidad empírica:**

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{nº de casos favorables observados}}{\text{nº de casos posibles observados}}$$

**Ejemplo.- P(sacar un seis en 100 lanzamientos del dado) =nº de seises en los cien lanzamientos/100**

# Ejemplos de probabilidad: Regla de Laplace

**1) Hallar la probabilidad de sacar una carta que tenga una figura (Sota, Caballo o Rey) de una baraja estandar de 52 cartas, suceso S.**

$$P(S) = \frac{\text{nº de cartas con figuras}}{\text{nº total de cartas}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

**2) Una persona contesta al azar un cuestionario con 10 preguntas del tipo verdadero-falso. Hallar la probabilidad de que conteste 3 bien.**

$$P(S) = \frac{\text{nº de formas posibles de distribuir las tres respuestas correctas en 10 posiciones}}{\text{nº total de casos posibles}} =$$

$$= \frac{C_{10,3}}{VR_{2,10}} = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = 0.1171875$$

# Ejemplos de probabilidad: Regla de Laplace

**3) Un experimento consiste en extraer dos bolas a la vez de una urna que contiene 1 bola azul, 2 blancas y 3 rojas. Hallar la probabilidad de sacar al menos una bola roja, suceso S.**

**El suceso S esta formado por la unión de los sucesos S1 y S2, S1=extraer una bola roja y otra cualquiera y S2= extraer dos bolas rojas**

$$\mathrm{P(S)} = P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) = \frac{12}{15}$$

$$P(S_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} + \frac{3}{15}$$

$$P(S_2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

# Ejemplos de probabilidad empírica

**Hallar la probabilidad de seleccionar un Hombre Haciendo encuestas, suceso S, tomando como referencia los datos muestrales obtenidos de la población y que se muestran en la tabla adjunta:**

| | Haciendo encuestas | No haciendo encuestas | Total |
|---|---|---|---|
| Hombre | 84 | 145 | 229 |
| Mujer | 76 | 134 | 210 |
| Total | 160 | 279 | 439 |

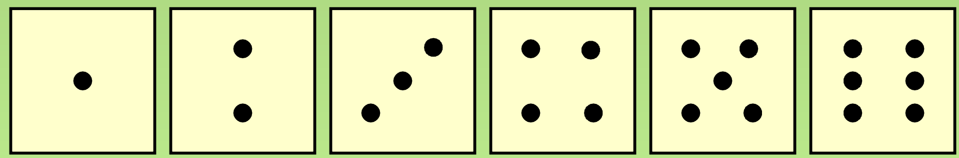
$$P(S) = \frac{\text{nº de hombres haciendo encuestas}}{\text{nº total de personas}} = \frac{84}{439} = 0.191$$

# Ejemplos de Espacio Muestral

**El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles sucesos elementales del experimento**

**Ejemplos**

**Las seis caras de un dado:**



**Las 52 cartas de una baraja**

**Los dos posibles resultados de un parto simple: niño o niña**

# Sucesos asociados a un espacio muestral

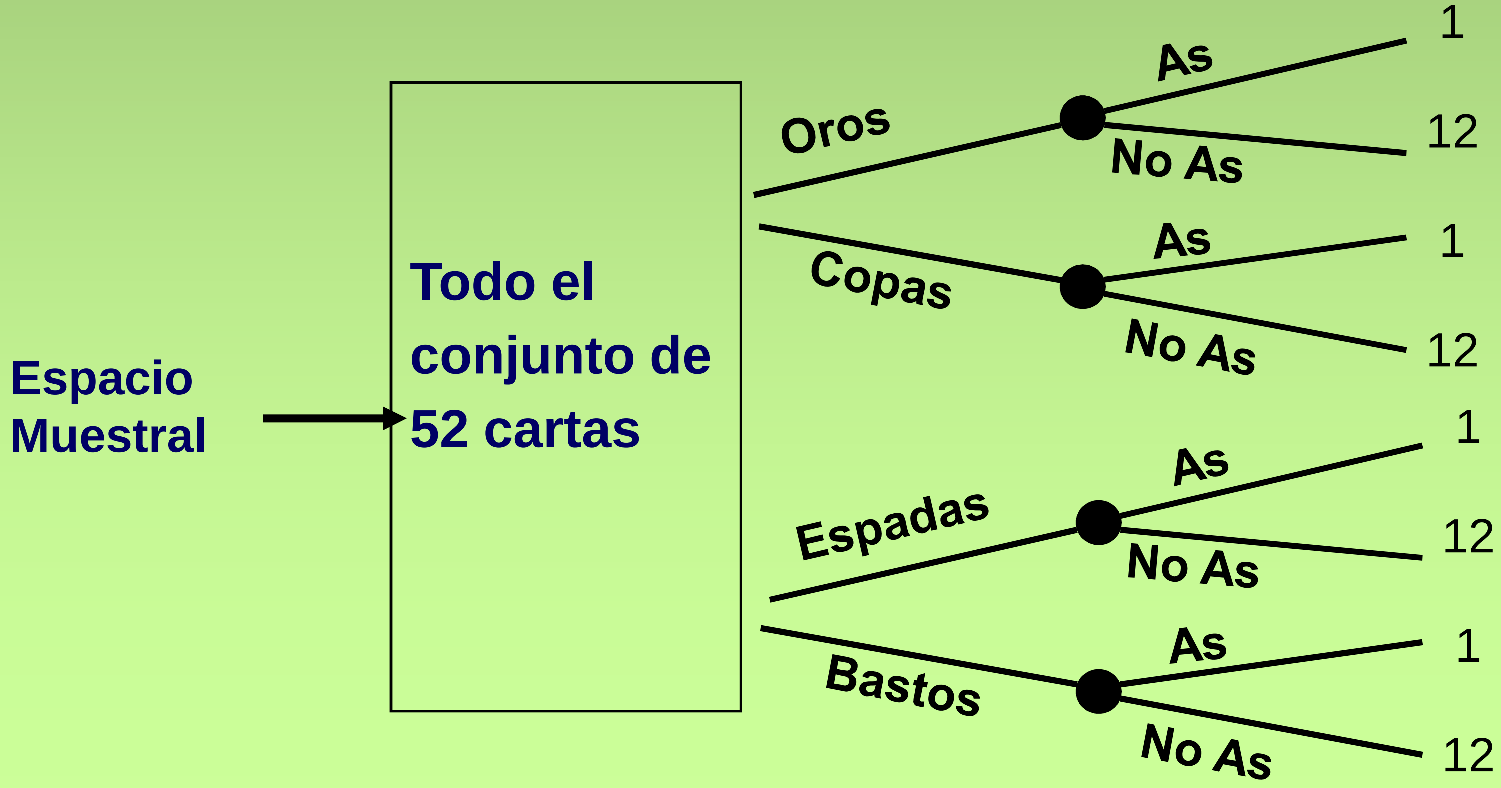
- **Suceso elemental**
  - **El resultado de un experimento asociado a un espacio muestral con una sola caracteristica**
  - **Ejemplo. Sacar una carta que sea un oro de una baraja de cartas**
- **Complementario de un suceso A (nombrado como $A^C$ o $\bar{A}$ )**
  - **Todos los sucesos del espacio muestral que no formen parte del suceso A**
  - **Todas las cartas que no sean oros**
- **Intersección de sucesos Involucra a dos o más sucesos simultáneamente**
  **Ejemplo. Sacar un as que es también un oro de una baraja de cartas**

# Visualización de los sucesos del espacio muestral

- Tablas de contingencia:

| | As | No As | Total |
|---|---|---|---|
| Oros | 1 | 12 | 13 |
| Copas | 1 | 12 | 13 |
| Espadas | 1 | 12 | 13 |
| Bastos | 1 | 12 | 13 |
| Total | 4 | 48 | 52 |

Diagramas de árbol:



## Definiciones: probabilidad simple o marginal frente a probabilidad conjunta

- **Probabilidad simple se refiere a la probabilidad de un suceso simple.**
  - **Ejemplo P(sacar un rey)**
- **Probabilidad conjunta. Se refiere a la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos.**
  - **Ejemplo P(sacar un Rey y que sea de Espadas)**

# Definiciones: Sucesos mutuamente excluyentes

- Dos sucesos se dice que son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir juntos (simultaneamente). Esto es $A \cap B = \varnothing$

- Ejemplo:
  - A = rey de copas;  B = rey de oros
  - Los sucesos A y B son mutuamente excluyentes si se extrae una sola carta
- Ejemplo:
  - B = tener un niño;  G = tener una niña
  - Los sucesos B y G son mutuamente excluyentes si nace un solo niño en el parto

# Definiciones: Sucesos exhaustivos

- **Sucesos exhaustivos**
  - **Uno de los sucesos debe de ocurrir**
  - **El conjunto de todos los sucesos cubre todo el espacio muestral**

- **Ejemplo**
  - **A = sotas, caballos o reyes; B = cartas sin figuras; C = oros o copas; D = espadas o bastos**
  - **Los sucesos A, B, C y D son colectivamente exhaustivos (pero no mutuamente excluyentes, puesto que un rey puede tambien ser un oro)**
  - **Los sucesos A y B son colectivamente exhaustivos y también mútuamente excluyentes. Lo mismo que los sucesos C y D**

# Probabilidad marginal y conjunta

- **La probabilidad de un suceso conjunto, A y B es:**

$$P(A \cap B) = \frac{n^{o}\, de \text{ sucesos que satisfacen A y B}}{n^{o}\, total \text{ de sucesos elementales}}$$

- **Calculo de una probabilidad marginal :**

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(A} \cap \mathrm{B_1)} + \mathrm{P(A} \cap \mathrm{B_2)} + \cdots + \mathrm{P(A} \cap \mathrm{B_k)}$$

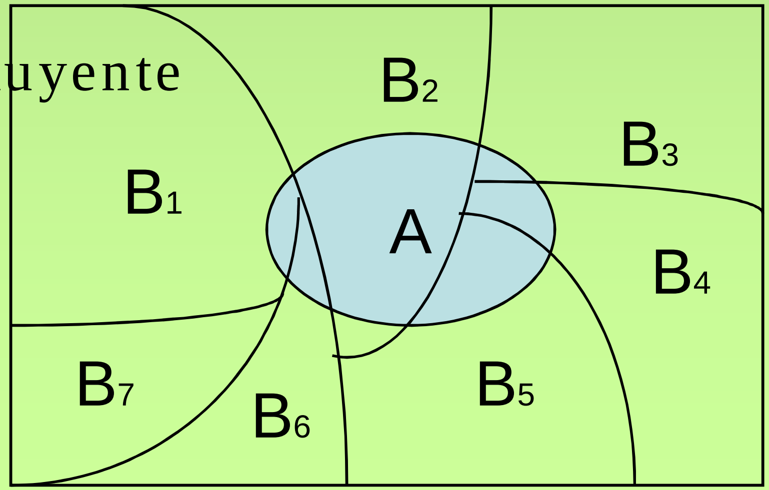
- **Donde $B_1$, $B_2$, …, $B_k$ son k sucesos mutuamente excluyentes y forman un sistema exhaustivo**

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ forman una partición, si se verifica que

i) forman un sistema exhaustivo $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = E$

ii) forman un sistema mutuamente excluyente

$$B_i \cap B_j = \varnothing;\ \forall i \neq j$$



# Ejemplo de probabilidad conjunta

$$P(\text{Oro y As}) = \frac{\text{nº de cartas que son oro y as}}{\text{nº total de cartas}} = \frac{1}{52}$$

| | As | No As | Total |
|---|---|---|---|
| Oros | 1 | 12 | 13 |
| Copas | 1 | 12 | 13 |
| Espadas | 1 | 12 | 13 |
| Bastos | 1 | 12 | 13 |
| Total | 4 | 48 | 52 |

# Ejemplo de probabilidad marginal:

$$P(\text{Rey})=P(\text{Rey y Oro})+P(\text{Rey y Copa})+$$

$$+P(\text{Rey y Espada})+P(\text{Rey y Basto})=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{4}{52}$$

| | As | No As | Total |
|---|---|---|---|
| Oros | 1 | 12 | 13 |
| Copas | 1 | 12 | 13 |
| Espadas | 1 | 12 | 13 |
| Bastos | 1 | 12 | 13 |
| Total | 4 | 48 | 52 |

# Probabilidad conjunta utilizando una tabla de contingencia

| Suceso | Suceso $B_1$ | $B_2$ | Total |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $P(A_1 \text{ y } B_1)$ | $P(A_1 \text{ y } B_2)$ | $P(A_1)$ |
| $A_2$ | $P(A_2 \text{ y } B_1)$ | $P(A_2 \text{ y } B_2)$ | $P(A_2)$ |
| Total | $P(B_1)$ | $P(B_2)$ | 1 |

**Probabilidades conjuntas**

**Probabilidades marginales**

# Probabilidad de la unión de sucesos

**La regla general de la probabilidad de la unión de dos sucesos es la siguiente**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Si A y B son dos sucesos mútuamente excluyentes, entonces**

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

**Y entonces la probabilidad de la unión de A y B es**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# Ejemplo: Regla general aditiva

**Hallar la probabilidad de seleccionar un Hombre o un estudiante Haciendo encuestas a partir de los datos muestrales aportados por la tabla adjunta:**

| | Haciendo encuestas | No haciendo encuestas | Total |
|---|---|---|---|
| Hombre | 84 | 145 | 229 |
| Mujer | 76 | 134 | 210 |
| Total | 160 | 279 | 439 |

**P(Hombre, H, o Haciendo encuestas, S) = P(H) + P(S) – P(H y S)**
**= 229/439 + 160/439 – 84/439 = 305/439**

$$P(H \cup S) = P(H) + P(S) - P(H \cap S) = 0.521 + 0.364 - 0.191 = 0.694$$

# Probabilidad Condicionada

- Una probabilidad condicionada es la probabilidad de que ocurra un suceso dado que ha ocurrido otro.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Longrightarrow \quad \text{Probabilidad de A dado que ha ocurrido B}$$

$$P(B) \neq 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Longrightarrow \quad \text{Probabilidad de B dado que ha ocurrido A}$$

$$P(A) \neq 0$$

**Donde P(A y B) = Probabilidad conjunta de A y B**

**P(A) = Probabilidad marginal de A**

**P(B) = Probabilidad marginal de B**

# Calculo de la probabilidad condicionada

- De los coches de un concesionario el 70% tienen aire acondicionado (A) y el 40% tienen un dispositivo de CDs (B). El 20% de los coches tienen ambas cosas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga un dispositivo de CDs, dado que tiene aire acondicionado?

- Queremos hallar por tanto P(B | A).

# Calculo de la probabilidad condicionada

| | B | $\bar{B}$ | Total |
|---|---|---|---|
| A | 0.2 | 0.5 | 0.7 |
| $\bar{A}$ | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| Total | 0.4 | 0.6 | 1.0 |

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.7} = 0.2857$$

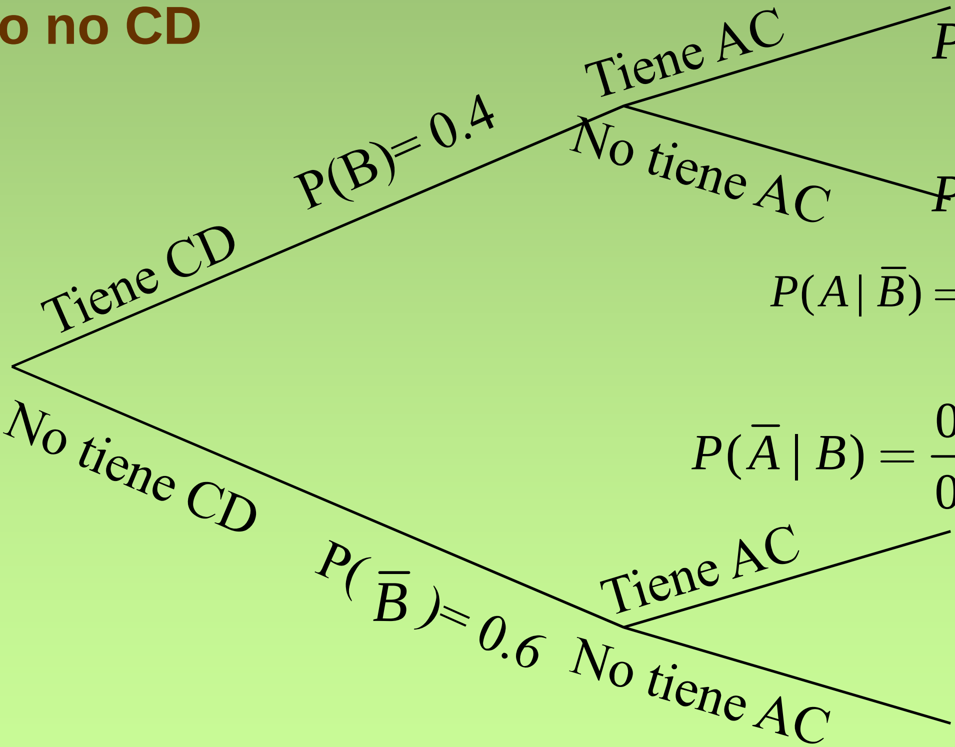
**Siendo $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los sucesos complementarios a A y B**

**Dado A, sólo consideramos la fila superior (70% de los coches). De estos, el 20% tiene CD. El 20% del 70% es de un 28.57%.**

# Calculo de la probabilidad condicionada: Arbol de decisión

**Dado CD o no CD**

**Todos los coches**




$$P(A \mid B) = \frac{0.2}{0.4}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = 0.2$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) = 0.2$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{0.2}{0.4}$$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{0.5}{0.6}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B)P(\overline{A} \mid B) = 0.5$$

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{0.1}{0.6}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 0.1$$

# Independencia estadística

- Se dice que dos sucesos son independientes si y solo si (sii):

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$o\ tambien\ \mathrm{P(A|B) = P(A)}$$

$$o\ tambien\ \mathrm{P(B|A) = P(B)}$$

- Los sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de un suceso no se ve afectada por la de otro suceso.

# Probabilidad de la intersección de sucesos

- La probabilidad de la intersección de dos sucesos A y B:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A)$$

- Si los sucesos A y B son independientes, entonces

$$P(A|B) = P(A) \text{ y } P(B|A) = P(B)$$

y la probabilidad de la intersección es ahora:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

## Ejemplo de la probabilidad de la intersección de sucesos

- **Supongamos que los concejales del ayuntamiento de una determinada ciudad esta compuesto por 5 del partido D, 4 de partido R y 3 del partido I. Halle la probabilidad de seleccionar al azar a un concejal del partido D seguido de un concejal del partido I.**

$$P(I \cap D) = P(D)P(I|D) = (5/12)(3/11) = 5/44 = 0.114$$

- **Observemos que después de elegir a un concejal del partido D, quedan tan sólo 11 concejales posibles en el espacio muestral**

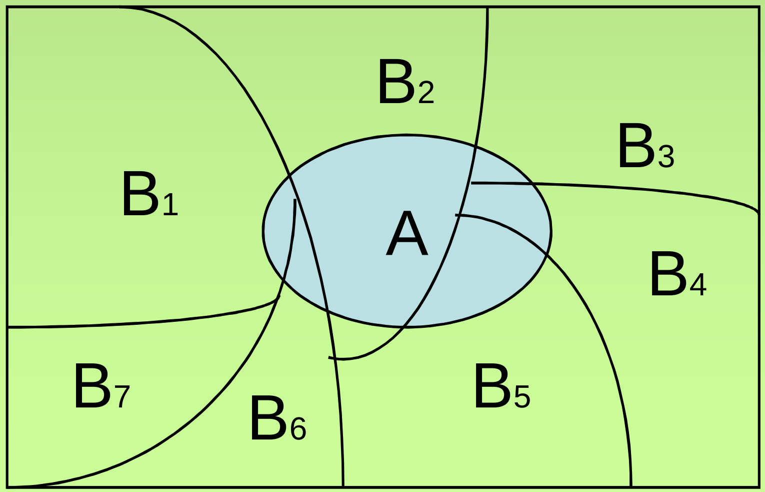
# Probabilidad marginal utilizando la probabilidad de la intersección de sucesos

- **Probabilidad marginal del suceso A:**

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) =$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k)$$

**Donde $B_1$, $B_2$, …, $B_k$ son k sucesos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos**



- **El teorema de Bayes se utiliza para revisar las probabilidades previamente calculadas basándose en una nueva información acerca de un suceso.**

- **Desarrollado por Thomas Bayes en el siglo 18.**

- **Es una extensión de la probabilidad condicionada**

# Teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(\mathrm{B_i}|\mathrm{A}) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B_i)}{P(\bigcup_{i=1}^{k}(A\bigcap B_i))} = \frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A\cap B_i)} =$$

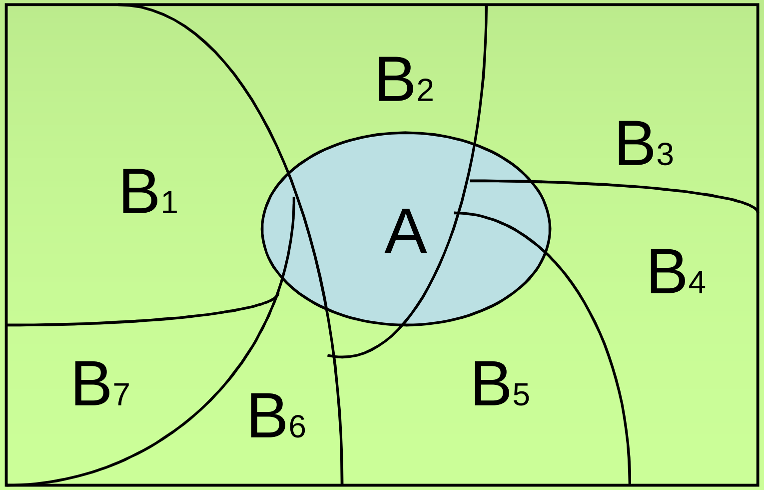
$$= \frac{\mathrm{P(A|B_i)P(B_i)}}{\mathrm{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k)}}$$

**Donde :**

**$B_i$ = es el suceso i-esimo de k sucesos exhaustivos y mutuamente excluyentes**

**A = nuevo suceso que puede afectar a la $P(B_i)$**

**Ejemplo para k=7**



# Ejemplo del Teorema de Bayes

- Una empresa de prospecciones petrolíferas ha estimado una probabilidad del 40% de encontrar petróleo para su nuevo pozo.

- Un detallado test se ha realizado para obtener más información. Históricamente, el 60% de los pozos exitosos han tenido tests, y el 20% de los pozos no exitosos han tenido tests.

- Teniendo en cuenta que este pozo ha sido programado mediante un test, ¿cuál es la probabilidad de que el pozo sea un éxito?

# Ejemplo del Teorema de Bayes

- **Sean los sucesos**

  **S = pozo exitoso (obtener petróleo)**

  $\overline{S}$ **= pozo sin éxito (no obtener petróleo)**

- **P(S) = 0.4 , P($\overline{S}$ ) = 1-P(S)= 0.6 (*probabilidades a priori*)**

- **Definimos el suceso de hacer un test como D.**

- **Las probabilidades condicionadas son:**
  - **P(D|S) = 0.6 P(D| $\overline{S}$ ) = 0.2**

- **Meta: Calcular P(S|D)**

## Aplicación del Teorema de Bayes:

$$\mathrm{P(S|D)} = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{P(S \cap D)}{P((D \cap S) \cup (D \cap \overline{S}))} = \frac{\mathrm{P(S)P(D|S)}}{\mathrm{P(S)P(D|S)} + \mathrm{P(\overline{S})P(D|\overline{S})}}$$

$$= \frac{(0.6)(0.4)}{(0.4)(0.6) + (0.6)(0.2)} = \frac{0.24}{0.24 + 0.12} = 0.667$$

**Así, la probabilidad condicionada de obtener éxito, dado que el pozo ha sido programado mediante un detallado test, es 0.667**

# Ejemplo del Teorema de Bayes

- **Sabiendo que se ha realizado un test, la probabilidad condicionada de obtener éxito se ha elevado a 0.667 desde la probabilidad a priori inicial de 0.4.**

| Suceso | Prob. *A Priori* | Prob. Condicional | Prob. Conjunta | Prob. Condicionada |
|---|---|---|---|---|
| S (Exito) | 0.4 | 0.6 | 0.4*0.6 = 0.24 | 0.24/0.36 = 0.667 |
| $\overline{S}$ (No Exito) | 0.6 | 0.2 | 0.6*0.2 = 0.12 | 0.12/0.36 = 0.333 |

# RESUMEN

## Hemos presentado

- Una discusión de los conceptos básicos de la probabilidad.
  - Espacio muestral y sucesos, tablas de contingencia, probabilidades simples, probabilidades conjuntas

- Un examen de las reglas básicas de la probabilidad.
  - Regla general aditiva, regla aditiva para sucesos mútuamente excluyentes, regla para sucesos colectivamente exhaustivos.

- La definición de probabilidad condicional.
  - Independencia estadística, probabilidad marginal, árboles de decisión y la regla multiplicativa.

- Una discusión del Teorema de Bayes.

# Ejercicio

**Un experimento consiste en extraer una bola de una urna que contiene 1 bola azul, 2 blancas y 3 rojas.**

**a) Escribir el espacio muestral y el de los sucesos**

**b) Estudiar si la función P definida a continuación es una función de probabilidad**

$$P(\phi) = 0; P(E) = 1; P(A) = 1/6; P(B) = 1/3; P(R) = 1/2;$$
$$P(\{A, B\}) = 1/2; P(\{A, R\}) = 2/3; P(\{B, R\}) = 5/6$$

**Solución.- Apartado a)**

$$E = \{A_1, B_1, B_2, R_1, R_2, R_3\}; \quad \Omega(\mathrm{E}) = \{\phi, A_1, B_1, ..., R_3, \{A_1, B_1\}, ..., \{B_1, B_2, R_1, R_2, R_3\}, E\}$$

siendo car $\Omega(\mathrm{E}) = 2^6 = 64$

# Ejercicio

**Solución.- Apartado b)**

$$A=\{A_1\};B=\{B_1,B_2\};R=\{R_1,R_2,R_3\}$$

**Se cumplen los tres axiomas de Kolmogorov**

**1º La probabilidad de cualquier suceso $A_i$, $B_j$, $R_k$, perteneciente a E, es un número mayor o igual a cero.**

**2º La probabilidad de la unión de un número finito de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades**

$$P(\{A,B\})=P(A)+P(B)=1/6+2/6=1/2;$$

$$P(\{A,R\})=P(A)+P(R)=1/6+3/6=2/3;$$

$$P(\{B,R\})=P(B)+P(R)=2/6+3/6=5/6$$

**3º La probabilidad del suceso seguro es la unidad**

$$P(E)=P(\{A,B,R\})=P(A)+P(B)+P(R)=1/6+2/6+3/6=1$$

# Bibliografía


**Bibliografía Básica:**

M. Loève, *Probability Theory I*, Springer-Verlag. 1977

Venancio Tomeo, Isaias Uña, Jesús San Martín. *Lecciones de calculo de probabilidades: Curso teórico-práctico.* Ediciones Paraninfo. 2003. ISBN: 9788497321938

**Bibliografía Complementaria:**

Gouri K. Bhattacharyya / Richard A. Johnson.John Wiley & Sons, *Statiscal Concepts and Methods*,

Toray-Masson, *Elementos del Cálculo de Probabilidades*,

J. Bass, William Feller. Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones (Vol. I), Limusa,

Breiman, L. Edición 77. *Probability, E.D.* Addison - Wesly.

-Meyer, Paul.: Probabilidad y Aplicaciones estadísticas (edición revisada). Addison Wesley Iberoamericana, 1992.

-- Papoulis, A: Probabilíty and Statistics. Prentice Hall, 1990.

# APRENDIZAJE AUTOMÁTICO: TERCER CURSO DEL GRADO
# DE ING. INFORMÁTICA EN COMPUTACION

## CONCEPTOS BÁSICOS DE CALCULO DE PROBABILIDADES

## GRACIAS POR SU ATENCIÓN

**César Hervás-Martínez**
**Grupo de Investigación AYRNA**

**Departamento de Informática y Análisis Numérico**
**Universidad de Córdoba**
**Campus de Rabanales. Edificio Einstein.**
**Email: chervas@uco.es**

**Curso 2019-2020**