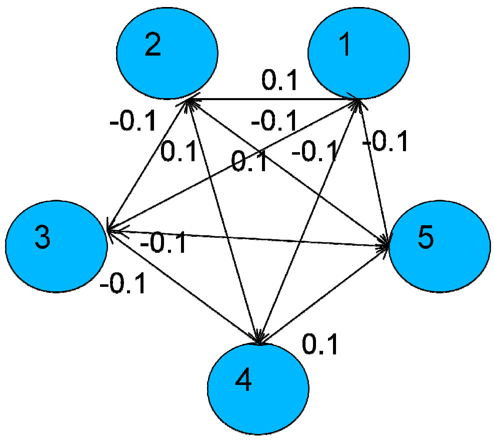
Ejercicio 1.- Considere la siguiente matriz de pesos **W**:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a)) ¿Qué tipo de red implementa? Muestre el grafo de esta red.
b) Comenzando en el estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el flujo desde este estado al estado estable usando actualizaciones asincrónicas y síncronas.
d) ¿Cómo se calcula su función de energía?

Solución.- a) Es una red de Hopfield con 5 nodos, donde los pesos son simétricos $w_{ij}=w_{ji}$ y donde la matriz de pesos tiene la diagonal principal con valores $w_{ii}=0$



b) Síncrona

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} \text{luego pasa al} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ luego se queda igual, luego es un

estado estable, de vector [-1, -1, 1, 1, 1],

b) **Asíncrona**

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$ actualizamos el 5º elemento

$$\left(-0.1, 0.1, -0.1, 0.1, 0.0\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = +0.2 \text{ pasa al } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Si actualizamos ahora el 3º

tenemos

$$\left(-0.1, -0.1, 0, -0.1, -0.1\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -0.2 \text{ pasa al } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ y este **es un estado estable**

$$W\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -0,2 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{pmatrix} \text{ pasa al } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Si suponemos que ϴ= 0, entonces para el estado de vector [-1, -1, 1, 1, 1], la función de energía es:

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}^{5} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}2(w_{12}s_1s_2 + w_{13}s_1s_3 + \ldots + \mathrm{w}_{35}\mathrm{s}_3\mathrm{s}_5 + w_{45}\,\mathrm{s}_4\mathrm{s}_5) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0.1(-1)(-1) - 0.1(-1)(1) - 0.1(-1)(1) - 0.1(-1)(1) \\ -0.1(-1)(1) + 0.1(-1)(1) + 0.1(-1)(1) \\ -0.1(1)(1) - 0.1(1)(1) \\ 0.1(1)(1) \end{pmatrix} = -0.2$$

$$\textit{o también } E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\left((-1)(-0,4) + 0 + 0 + 0 + 0\right) = -0,2$$

Valor que se obtiene matricialmente en la forma

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_i s_i \sum_j w_{ij}s_j = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}\times(\mathbf{W}\times\mathbf{s})\right)$$

$$E(t) = -\frac{1}{2}(-1,-1,1,1,1)\begin{pmatrix} 0.0 & 0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-1,-1,1,1,1)\begin{pmatrix} -0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} 0,4 = -0,2$$

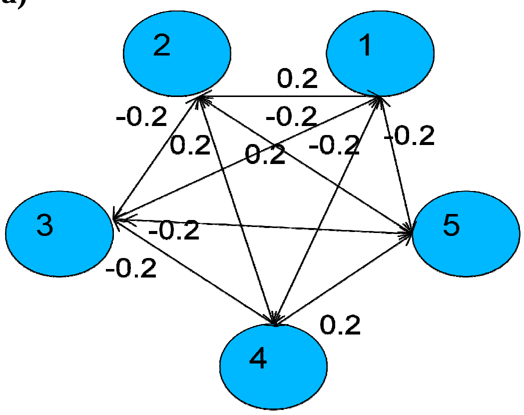
Ejercicio 2.- Considere la siguiente matriz de pesos **W**:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a) Muestre el grafo de esta red y explique el significado de los pesos de la matriz **W**
b) Comenzando en el estado [1, 1, 1, 1, 1], calcule el flujo desde este estado a un estado estable usando actualizaciones síncronas.
c) ¿Calcule la función de energía del estado anterior y del estado estable al que llega? Comente estos resultados.

Solución.-

a)



b) $$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,4 \\ -0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ luego pasa al $$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,4 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$ luego, de nuevo, pasa al $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, siendo este, por tanto, un estado estable.

c) La función de energía del estado asociado al vector [1, 1, 1, 1, 1], es

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i}^{5} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\big((1)(-0,4)+(1)(0,4)+(1)(-0,8)+0+0\big) = 0,4$$

Valor que se obtiene matricialmente en la forma

$$E(t) = -\frac{1}{2}(1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(1,1,1,1,1)\begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,4 \\ -0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-0,4+0,4-0,8+0+0) = 0,4$$

Mientras que la función de energía del estado estable asociado al vector [-1, 1, -1, 1, 1], es

$$E(t) = -\frac{1}{2}(-1,1,-1,1,1)\begin{pmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-1,1,-1,1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ -0,4 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(0+0,4-0,4+0,8+0,8) = -0,8$$

Luego en este estado estable existe un mínimo de la función de energía.

Ejercicio 3.- Analizar como la siguiente red de Hopfield actualiza su estado. Siendo la matriz de pesos de la forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El estado inicial es (1,-1,1). Busque algunos estados estables y calcule sus funciones de energía.

Solución.- A continuación, activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si elegimos una metodología síncrona en la primera iteración, la entrada total a la neurona 1 es -3, y por lo tanto su salida es -1. La entrada total a la neurona 2 es 2, y por lo tanto su salida es 1. la entrada total a la neurona 3 es -3, y por lo tanto su salida es -1. De esta forma pasamos del estado (1,-1,1) al estado (-1,1,-1).
En la segunda iteración activamos la red de nuevo en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, la entrada total a la neurona 1 es 3, y por lo tanto su salida es 1. La entrada total a la neurona 2 es -2, y por lo tanto su salida es -1. la entrada total a la neurona 3 es 3, y por lo tanto su salida es 1. De esta forma pasamos del estado (-1,1,-1) al estado (1,-1,1). De esta forma tenemos un bucle entre ambos estados, ninguno de ellos estable.
Sus funciones de energía son

$$E(t) = -\frac{1}{2}(1,-1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(1,-1,1)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-3-2-3) = 4$$

$$E(t) = -\frac{1}{2}(-1,1,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-1,1,-1)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-3-2-3) = 4$$

Ambos tienen la misma función de energía. Los estados (-1,1,-1) y (1,-1,1)
En cambio el (1,1,-1) es estable porque no cambia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ y su función de energía es

$$E(t) = -\frac{1}{2}(1,1,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(1,1,-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(3+0+1) = -2$$

luego presenta en este estado un mínimo local

También el estado (-1,1,1) es estable

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$ y su función de energía es

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1,1,1)\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1,1,1)\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1+0+3)=-2$$

luego también es un mínimo local

Por otra parte, los estados (1,1,1) y (-1,-1,-1) transitan el primero a (-1,1,-1) y el segundo a (1,-1,1), siendo sus funciones de energía respectivamente

$$E(t)=-\frac{1}{2}(1,1,1)\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1,1,1)\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1+2-1)=0$$

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1,-1,-1)\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1,-1,-1)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1+2-1)=0$$

Por último los estados (-1,-1,1) y (1,-1,-1), son también estables, puesto que el primero no cambia y el segundo tampoco

$$\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

siendo sus funciones de energía

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1,-1,1)\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1,-1,1)\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(3+0+1)=-2$$

y

$$E(t)=-\frac{1}{2}(1,-1,-1)\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1,-1,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1+0+3)=-2$$

Luego hay cuatro estados estables con función de energía igual a -2, dos que forman un bucle con función de energía 4 y dos que transitan a los elementos del bucle con función de energía igual a 0. Es un caso donde la matriz de pesos no está basada en patrones de entrenamiento.

Ejercicio 4.- Analice porque la simetría de la matriz de pesos es importante para la convergencia. a) Considere una red de Hopfield de 2 neuronas con la matriz de pesos

$$W=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Examine si la red converge o no si el estado inicial es v = $(1, -1)^T$

b) Establezca ahora como matriz de pesos

$$W=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Hacer todos los pasos anteriores de nuevo. ¿La red alcanza un estado estable?

Solución.-
a) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = $(1, -1)^T$ al estado v´ = $(-1, -1)^T$. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que no hay ningún estado estable
b) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = $(1, -1)^T$ al estado v´ = $(-1, 1)^T$. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos un bucle entre ambos estados, pero ninguno de los dos es estable.
En cambio si suponemos que el estado inicial es **v** = $(1, 1)^T$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces este estado si es un estado estable y de la misma forma como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, también el estado v = $(-1,-1)^T$ es estable
También es un caso de matriz que no está construida por ninguno de las cuatro posibles configuraciones de la red de dos nodos.

Ejercicio 5.- Demuestre que los estados NO estables de una red de Hopfield cuando cambian de estado disminuye su función de energía (utilice sólo una red con dos estados). Recuerde que

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j+\sum_i s_i\Theta_i$$

Solución.- s_i es inicialmente –1 (inactivo) en el instante t y $\sum_j w_{ij}s_j<\Theta_i$ o igual a 0 entonces s_i sigue siendo -1 en el instante t+1.
Si consideramos que tenemos sólo dos estados. Si los dos estados son inactivos entonces tenemos un estado estable pues no cambia, de esta forma tanto s_1 como s_2 tendrán valores de -1 y la función de energía será

$E(t)=-\frac{1}{2}w_{12}s_1s_2-\frac{1}{2}w_{21}s_2s_1+s_1\Theta_1+s_2\Theta_2;$ para s_1=-1 y s_2=-1, tenemos

$$E(t)=-\frac{1}{2}w_{12}-\frac{1}{2}w_{21}-\Theta_1-\Theta_2=-w_{12}-\Theta_1-\Theta_2$$

$$w_{12}s_2\le\Theta_1$$

Si s_1 es inicialmente inactivo y se verifica que entonces s_1 seguirá siendo inactivo, pero s_2 es activo por lo que su valor será 1 y deberá seguir siendo activo para que el estado sea estable, entonces la función de energía en el instante t será

$$E(t) = -\frac{1}{2}w_{12}s_1s_2 - \frac{1}{2}w_{21}s_2s_1 + s_1\Theta_1 + s_2\Theta_2;\ \text{para } s_1 = -1 \text{ y } s_2 = 1 \text{ tenemos}$$
$$E(t) = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} \le \Theta_1$$

y en el instante t+1, para s_1(t+1)=-1, y s_2(t+1)= 1, tenemos

$$E(t+1) = \frac{1}{2}w_{12} + \frac{1}{2}w_{21} - \Theta_1 + \Theta_2 = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} \le \Theta_1\ ,\ w_{12} - \Theta_1 \le 0$$

luego no varía el valor de la energía y estamos ante un mínimo local.

De forma similar si s_2 es inicialmente inactivo y $w_{12}s_1 \le \Theta_2$ se verifica que entonces s_2 seguirá siendo inactivo, pero s_1 es activo por lo que su valor será 1 y deberá seguir siendo activo para que el estado sea estable

$$E(t) = E(t+1) = w_{12} + \Theta_1 - \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} \le \Theta_2,\ \text{esto es } w_{12} - \Theta_2 \le 0$$

Habría que probar que la función de energía de estados no estables es mayor que la de los estados estables.

Si s_1 es inicialmente inactivo y se verifica que $w_{12}s_2 > \Theta_1$ entonces s_1 pasará a ser activo, pero s_2 es activo por lo que su valor será 1 y si sigue siendo activo, entonces la función de energía en el instante t será

$$E(t) = -\frac{1}{2}w_{12}s_1s_2 - \frac{1}{2}w_{21}s_2s_1 + s_1\Theta_1 + s_2\Theta_2;\ \text{para } s_1 = -1 \text{ y } s_2 = 1 \text{ tenemos}$$
$$E(t) = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} > \Theta_1$$

Mientras que en el instante t+1, para s_1(t+1)=1, y s_2(t+1)=1

$$E(t+1) = -\frac{1}{2}w_{12} - \frac{1}{2}w_{21} + \Theta_1 + \Theta_2 = -w_{12} + \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} > \Theta_1\ ,\ -w_{12} + \Theta_1 < 0$$

Si s_1 está activo y se verifica $w_{12}s_2 \le \Theta_1$ entonces s_1 pasará a ser inactivo, siendo s_2 activo, luego

$$E(t+1) = \frac{1}{2}w_{12} + \frac{1}{2}w_{21} - \Theta_1 + \Theta_2 = w_{12} - \Theta_1 + \Theta_2,\ \text{siendo } w_{12} < \Theta_1\ ,\ w_{12} - \Theta_1 < 0$$

Ejercicio 6.- a) Calcule la matriz de pesos para una red de Hopfield con los dos vectores $\mathbf{x_1}=(1, -1, 1, -1, 1, 1)^T$ y $\mathbf{x_2}=(1, 1, 1, -1, -1, -1)^T$ almacenados en ella.
b) Confirme que ambos vectores son estados estables de la red.

Solución.- Los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x_i}\mathbf{x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para confirmar que son estados estables activamos la red en la forma

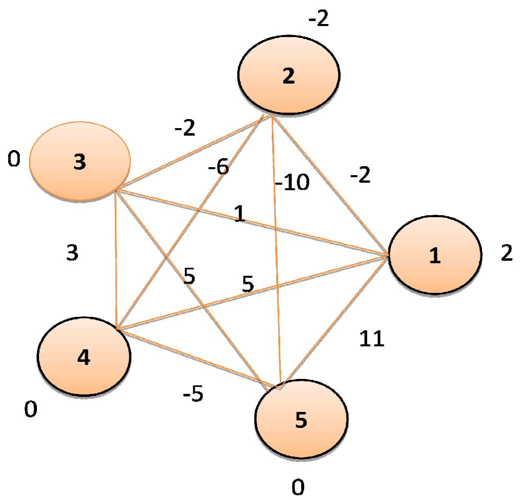
$$\mathbf{W.x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

, como podemos ver se mantiene el signo por lo que no cambia de estado de esta forma es estable, de la misma forma

$$\mathbf{W.x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

mantiene también el signo por lo que también es un estado estable.

Ejercicio 7.-
a) ¿Se puede almacenar el vector (1, 0, -1, 0, 1) en una red de Hopfield de 5 neuronas? Si es así, ¿cuáles son los pesos para una red con ese vector almacenado en ella? Si no es así, ¿por qué no?
b) Considere la red de Hopfield dada a continuación. Calcule los pesos correspondientes de la matriz, de forma tal que el peso w_{ij} esté en la columna i y en la fila j. Anote el vector de umbrales $\boldsymbol{\theta}$, de forma tal que el elemento θ_i sea el sesgo de la neurona i.



c) Encuentre al menos un estado estable de la red dada utilizando actualizaciones síncronas.

Solución.- a) No es posible porque la codificación es con valores de la matriz de pesos es de la forma -1 y 1
b)

$$\mathbf{W}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & -2 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matriz de sesgos es } \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma tal que

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}' - \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Si por ejemplo consideramos el vector de componentes (1,1,1,-1,1) y le aplicamos una activación síncrona, tenemos

$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x_1}$=(1,1,1,-1,1)^T No es un estado estable porque cambia de signo en la segunda componente del vector en la activación síncrona de la red, por tanto debemos seguir, ahora $\mathbf{x_2}$=(1,-1,1,-1,1)^T

$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5 \\ 9 \\ 31 \end{pmatrix},$$

Tampoco es un estado estable y pasamos al vector $\mathbf{x}_3$=(1,-1,1,1,1)^T

$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 & 11 \\ -2 & 0 & -2 & -6 & -10 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & -6 & 3 & 0 & -5 \\ 11 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -20 \\ 11 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix},$$

Es un estado estable porque NO cambia de signo ninguna componente del vector en la activación síncrona de la red

Ejercicio 8.- a) Considere la matriz de pesos **W** y el vector de umbral **θ**. Comenzando con el estado inicial **v**, calcule el flujo de estados de la red de Hopfield hacia el estado estable mediante actualizaciones asíncronas

b) Lo mismo paro para actualizaciones síncronas.

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4&-2\\1&0&-4&3&4&-4\\0&-4&0&-7&-6&-2\\0&3&-7&0&-4&3\\-4&4&-6&-4&0&-6\\-2&-4&-2&3&-6&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Solución.-

a) Comenzando en el mismo estado **v**, calcular el flujo de estados usando W. En este caso asíncrono activamos una neurona al azar en un vector de estados, por ejemplo, en la forma

$$\mathbf{W}.\mathbf{v}-\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4&-2\\1&0&-4&3&4&-4\\0&-4&0&-7&-6&-2\\0&3&-7&0&-4&3\\-4&4&-6&-4&0&-6\\-2&-4&-2&3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

pero ahora, si cambiamos la primera componente del vector de estados (-1,-1,-1,-1,1,1) tenemos

$$(0,1,0,0,-4,-2)\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}-(-5)=-7+5=-2$$ y cambia a -1 por lo que no cambia

pasamos de nuevo al (-1,-1,-1,-1,1,1)

y así sucesivamente

b) Cálculo de los valores de los campos inducidos por el vector v para una activación síncrona

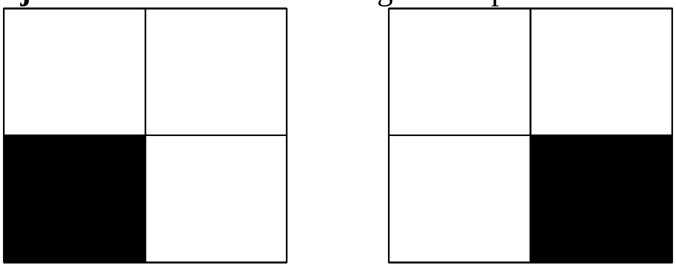
$$\mathbf{W}.\mathbf{v}-\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4&-2\\1&0&-4&3&4&-4\\0&-4&0&-7&-6&-2\\0&3&-7&0&-4&3\\-4&4&-6&-4&0&-6\\-2&-4&-2&3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\3\\3\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\2\\4\\-1\end{pmatrix}$$

por lo que ahora el estado es $(-1,-1,1,1,1,-1)^T$, e iterando de nuevo

$$\mathbf{W}.\mathbf{v}-\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4&-2\\1&0&-4&3&4&-4\\0&-4&0&-7&-6&-2\\0&3&-7&0&-4&3\\-4&4&-6&-4&0&-6\\-2&-4&-2&3&-6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-7\\-17\\-4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\-9\\-18\\-4\\1\end{pmatrix}$$

por lo que el nuevo estado es $(1,1,-1,-1,-1,1)^T$ y así sucesivamente

Ejercicio 9.- Considere los siguientes patrones



a)¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfiel?
b) Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb y muestre como el vector con todos los nodos activos transita de forma síncrona por los estados de la red.
c)¿Calcule la función de energía de un estado estable de la red?

Solución.- a) Codificando por filas con 1, para los estados activos (blancos) y -1 para los estados inactivos (negros), tenemos una red de Hopfield con los dos vectores $\mathbf{x_1}=(1, 1, -1, 1)^T$ y $\mathbf{x_2}=(1, 1, 1, -1)^T$ almacenados en ella.

b) los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x_i x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ \text{-}1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W = x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Wx_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se mantiene el signo, luego $\mathbf{x_1}$ es un estado estable, de forma análoga $\mathbf{x_2}$ también es un estado estable

$$\mathbf{Wx}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Wx}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por otra parte el vector $\mathbf{x_3}$ con todos los nodos activos no es estable y transita al vector $\mathbf{x_4}=(1, 1, -1, -1)^T$ y a su vez este transita de nuevo al vector x_3, luego x_3 y x_4 forman un bucle.

$$\mathbf{W}\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

También forman un bucle el (-1,1,1,1) y el (1,-1,-1,-1)

c) Por ejemplo para $\mathbf{x}_1$. El vector x_1 está caracterizado por tres blancos y uno negro, esto es, tres unidades están activadas, s_1=1, s_2=1, y s_4=1 y una no, s_3= -1. Así, s_i es +1 para tres neuronas y es -1 para una. Si suponemos que ϴ= 0, entonces como

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij} s_i s_j = -\frac{1}{2}(w_{11}s_1^2 + ... + w_{44}\,s_4^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(2s_1s_2 + 2s_2s_1 - 2s_3s_4 - 2s_4s_3) = -\frac{1}{2}(2+2+2+2) = -4$$

O también

Como $\Theta_i = 0$

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j$$

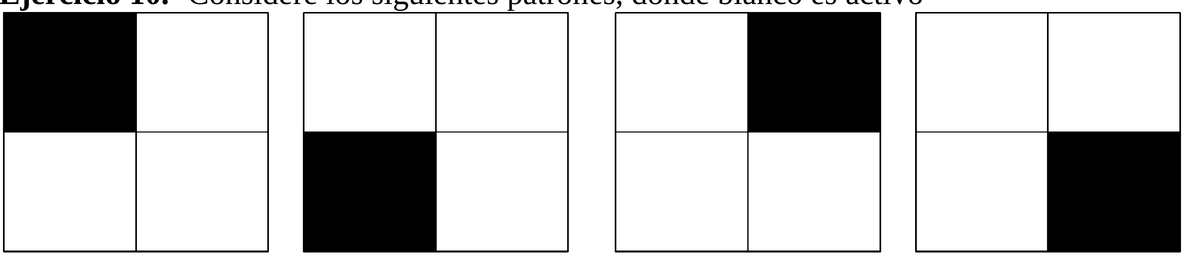
$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i} s_i \sum_{j} w_{ij} s_j = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}\times(\mathbf{W}\times\mathbf{s})\right)$$

y tenemos

$$\mathbf{x}_1\mathbf{W}\mathbf{x}_1 = (1,1,-1,1)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1,-1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2+2+2+2 = 8$$

luego E(t)=-4

Ejercicio 10.- Considere los siguientes patrones, donde blanco es activo



a) ¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfield?

b) Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb y muestre como el vector con todos los nodos activos, todos blancos, transita de forma síncrona por los estados de la red.

c) ¿Calcule la función de energía de un punto estable de la red?

Solución.- a) Codificando por filas con 1, para los estados activos (blancos) y -1 para los estados inactivos (negros), tenemos una red de Hopfield con los cuatro vectores $\mathbf{x_1}$=(-1, 1, 1, 1)^T y $\mathbf{x_2}$=(1, 1, -1, 1)^T $\mathbf{x_3}$=(1, -1, 1, 1)^T y $\mathbf{x_4}$=(1, 1, 1, -1)^T almacenados en ella. b) los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{x_i}\mathbf{x_i^T} - N\mathbf{I}$**,** de esta forma

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1,\ 1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ \text{-}1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ \text{-}1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_4\mathbf{x}_4^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{x_1}\mathbf{x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_4\mathbf{x}_4^{\mathbf{T}} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W}\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego es un estado estable como todos los de la red

c) Cualquier estado es estable. Si suponemos que ϴ= 0, entonces

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}(w_{11}s_1^2 + ... + w_{44}\,\mathrm{s}_4^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(0s_1s_2 + 0s_1s_3 + 0s_2s_1 + 0s_2s_4 + 0s_3s_1 + 0s_3s_4 + 0s_4s_2 + 0s_4s_3) = 0$$

Ejercicio 11.- Considere la siguiente matriz de pesos **W**:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a)¿Qué tipo de red implementa? Muestre el grafo de esta red.

b) Comenzando en el estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el flujo desde este estado al estado estable usando actualizaciones asincrónicas.

c) Comenzando en el (mismo) estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el siguiente estado usando actualizaciones síncronas.

d)¿Cómo se calcula su función de energía?

Solución.-b) De forma asíncrona

Si actualizamos la 5ª componente tenemos

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.1 + 0.1 - 0.1 + 0.1 = 0.2$$

Luego pasamos al vector de estados (-1,1,1,1,1). Si actualizamos ahora la tercera componente tenemos

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -0.1 - 0.1 - 0.1 - 0.1 = -0.4$$

Luego pasa al (-1,1,-1,1,1). Si seguimos actualizando la primera componente tenemos

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -0.1 - 0.1 - 0.1 - 0.1 = -0.4$$

Seguimos teniendo el mismo vector de estados, igual ocurre si cambiamos la 2ª o 4ª por lo que el vector (-1,1,-1,1,1) es un estado estable de la red.

c) De forma síncrona tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 \end{pmatrix},$$

luego se pasa al $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y de este estado se transita a si mismo, luego es este un estado estable

d) La función de energía para el estado [-1, 1, 1, 1, -1] es

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \Theta_i$$

$$E(t)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-0.2\\0\\0.2\end{pmatrix}=$$

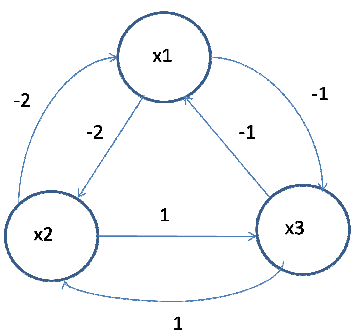
$$=-\frac{1}{2}(-0.2-0.2)=0.2$$

Si el vector **x** está caracterizado por todos blancos, esto es todas las unidades están activadas, entonces **x**=(1,1,1,1,1). Si suponemos que ϴ=0, entonces

$$E(t)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.1\\0\\-0.1\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}(-0.1-0.1)=0.1$$

Ejercicio 12.- Para la red de Hopfield ilustrada a continuación, dibuje el diagrama de transiciones síncronas posibles y luego determine los puntos fijos, o estados estables de la red.



Solución.-
Para la unidad elegida, se calcula la suma de los pesos de las conexiones sólo a los vecinos activos, si los hay. Si la suma es > 0, entonces la unidad elegida se convierte en activa, de lo contrario, se vuelve inactiva. Si suponemos que los tres nodos están activos tenemos de inicio X = [1 1 1], para los nodos 1, 2 y 3. La suma de las conexiones para x_1 es -2+(-1)=-3, por lo que se hace inactiva. la suma de las conexiones para x_2 tiene ahora como -2+1=-1, luego se hace inactiva. La suma de las conexiones para x_3 es -1+1 luego sigue activa. De esta forma el estado estable es X = [-1 -1 1].

La matriz de transición de estados es $W=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y matricialmente tenemos

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

luego se deduce que (1,1,1) $\Leftrightarrow$ (-1,-1,1)

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

luego se deduce que (1,1,-1) $\Leftrightarrow$ (-1,-1,-1)

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

luego se deduce que (-1,1,-1) $\Rightarrow$ (-1,1,1) y que (-1,1,1) es un estado estable

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

luego se deduce que (1,-1,1) $\Rightarrow$ (1,-1,-1) y que (1,-1,-1) es un estado estable

Si calculamos las funciones de energía de todos los estados tenemos

$$E(t)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}=2$$

$$E(t)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=2$$

Luego los dos estados en un bucle tienen la misma energía

$$\mathrm{E}(t)=-\frac{1}{2}(-1\quad -1\quad -1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1\quad -1\quad -1)\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=2$$

$$E(t)=-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad -1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1\quad 1\quad -1)\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}=2$$

Luego, de nuevo, los dos estados en un bucle tienen la misma energía

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1\quad 1\quad -1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1\quad 1\quad -1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=0$$

este estado transita al estado estable (-1,1,1)

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(-1\quad 1\quad 1)\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=-4$$

la energía de este estado estable es un mínimo local

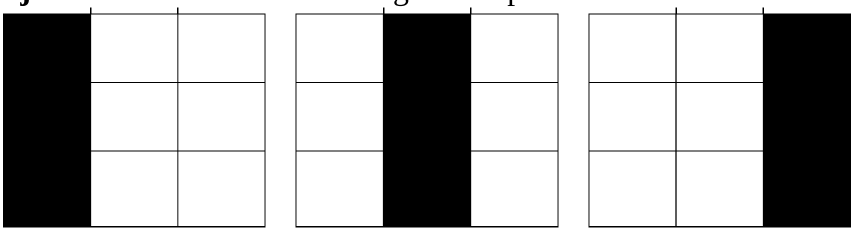
$$E(t)=-\frac{1}{2}(1\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -2\end{pmatrix}=0$$

este estado transita al estado estable (1,-1,-1)

$$E(\mathrm{t})=-\frac{1}{2}(1\quad -1\quad -1)\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(1\quad -1\quad -1)\begin{pmatrix}3\\ -3\\ -2\end{pmatrix}=-4$$

la energía de este estado estable es un mínimo local

Ejercicio 13.- Considere los siguientes patrones



a)¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfiel?
b) Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb.
c)¿Que es un punto fijo de una red? Calcule al menos un punto fijo de la red anterior.

Sol.- a) La codificación se puede hacer por ejemplo por columnas asignando un 1 al negro (estado activo) y un -1 al blanco (estado inactivo), en la forma
$\mathbf{x_1}$=(1, 1, 1, −1, −1, −1, −1, −1, −1)^T , $\mathbf{x_2}$=(−1, −1, −1, 1, 1, 1, −1, −1, −1)^T , $\mathbf{x_3}$=(−1, −1, −1, −1, −1, −1, 1, 1, 1)^T.

b) Usando la regla de Hebb los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{x_i x_i^T} - 3\mathbf{I}$, de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(1,\ 1,\ 1,\ -1,\ \text{-}1,\ \text{-}1, -1, -1, -1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_2 x_2^T} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-1,\ \text{-}1,\ \text{-}1,\ 1,\ 1,\ 1, -1, -1, -1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_3 x_3^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, -1, -1, -1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^\mathbf{T} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$ y por tanto

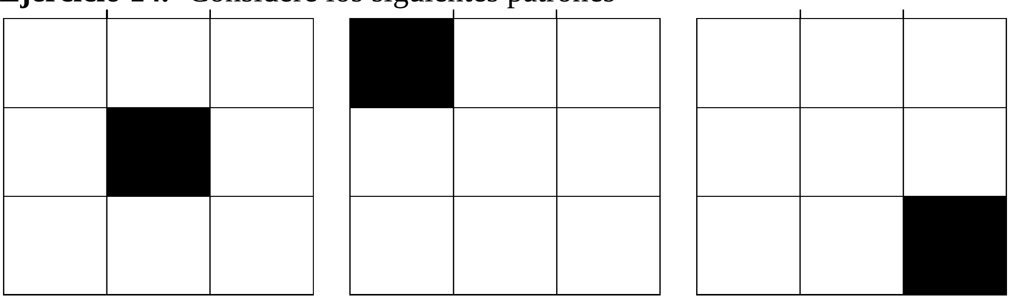
$$\mathbf{W} = \mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^\mathbf{T} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^\mathbf{T} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para confirmar que $\mathbf{x_1}$ es un estado estable activamos la red en la forma

$$\mathbf{W.x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

como podemos ver se mantiene el signo por lo que no cambian los estados de $\mathbf{x}_1$ y de esta forma $\mathbf{x}_1$ es estable.

Ejercicio 14.- Considere los siguientes patrones



a) Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb.
b) Calcule al menos un estado estable de la red anterior.
c)¿Cómo se calcula su función de energía?
Solución.- a) La codificación se puede hacer por ejemplo en la forma
$\mathbf{x_1}=(1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{x_2}=(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{x_3}=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)^T$, y esto es así porque la codificación se hace mediante unos para los estados activos (blancos) y -1 para los estados no activos (negros)

b) Usando la regla de Hebb los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{x_i x_i^T} - 3\mathbf{I}$, de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1,\ 1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{x_1}\mathbf{x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W.x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix},$$

luego no cambia ninguno de signo y es un estado estable de la red.
c) Para calcular la función de energía.
El vector x está caracterizado por todos blancos, esto es todas las unidades están activadas. Así, s_i es +1 para todo i y siempre será en este caso $\sum_j w_{ij} s_j > \Theta_i$ entonces s_i sigue siendo +1, para todo i. Si suponemos que Θ=0, entonces

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9} w_{ij} = -\frac{1}{2}(w_{11} + ... + w_{99}) =$$

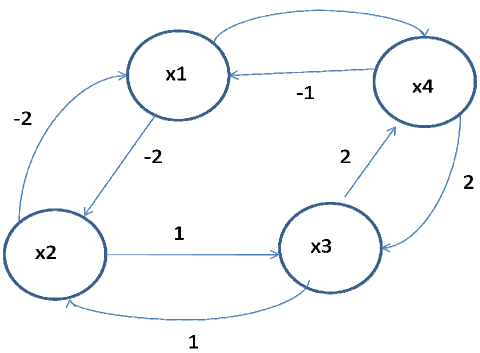
$$= -\frac{1}{2}(4 + 18 + 18 + 18 + 4 + 18 + 18 + 18 + 4) = -60$$

o también

$$E(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{xWx} = -\frac{1}{2}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(4+18+18+18+4+18+18+18+4) = -60$$

Ejercicio 15.-Para la red de Hopfield ilustrada a continuación, dibuje el diagrama de transiciones de los vectores de estado $(1,1,1,1)^T$ y $(-1,-1,-1,-1)^T$ de forma síncrona, y de forma asíncrona, y determine los posibles puntos fijos, o estados estables de la red, calculando su función de energía.



Solución.- La matriz de transiciones es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transiciones síncronas del vector $(1,1,1,1)^T$ son

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ luego el vector nuevo de estados es $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de nuevo aplicandole la matriz de transiciones tenemos $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y el vector nuevo de estados es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tenemos un bucle $(1,1,1,1)^T \leftrightarrow (-1,-1,1,1)^T$. Análogamente para el vector (-1,-1,-1,-1) las transiciones síncronas son

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ luego el nuevo vector de estados es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y si seguimos con las transiciones $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos un bucle $(-1,-1,-1,-1)^T \leftrightarrow (1,1,-1,-1)^T$ Si ahora consideramos el vector $(1,1,1,1)^T$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ observamos que no cambia por lo que tenemos un estado estable

Las transiciones asíncronas del vector $(1,1,1,1)^T$, si sólo cambiamos la primera componente son

$$(0 \quad -2 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0-2+0-1=-3$$

luego el vector nuevo de estados es $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, es un estado estable. Si cambiamos sólo la segunda componente, tenemos

$$(-2 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = -2+0+1+0=-1$$

, luego pasamos a (1,-1,1,1) y asi sucesivamente.

Si calculamos la función de energía del estado estable $(-1,1,1,1)^T$.
Si suponemos que ϴ=0, entonces

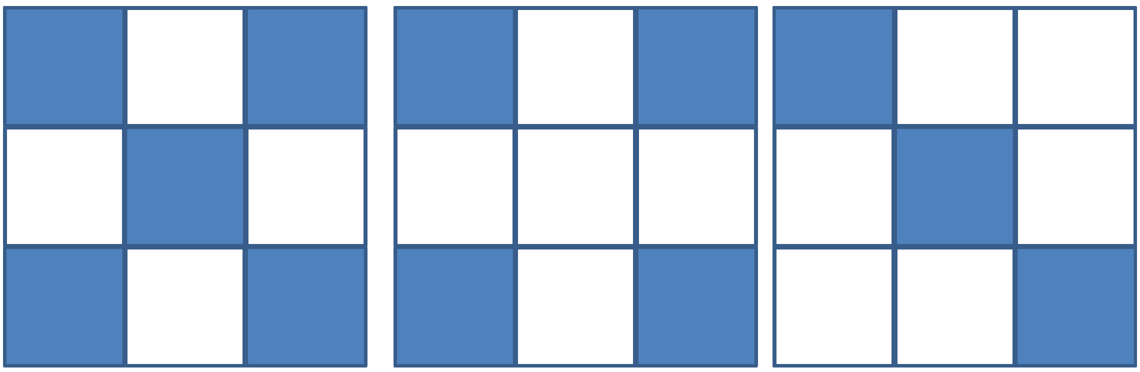
$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_{ij} = -\frac{1}{2}(w_{11}+\ldots+w_{44}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left((-1)(-3)+1*3+1*3+1*3\right) = -6$$

O también

$$E(t) = -\frac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\3\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(3+3+3+3) = -6$$

Ejercicio 16.- Considere los siguientes patrones



a) Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb.
b) Calcule al menos un estado estable de la red anterior
c)¿Cómo se calcula su función de energía?

Solución.- a) La codificación se puede hacer por ejemplo en la forma
$\mathbf{x_1}$=(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)^T , $\mathbf{x_2}$=(1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1)^T , $\mathbf{x_3}$=(1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1)^T, y esto es así porque la codificación se hace mediante unos para los estados activos (azules) y -1 para los estados no activos (blancos)

b) Usando la regla de Hebb los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{x_i x_i^T} - 3\mathbf{I}$, de esta forma

$$\mathbf{x_1 x_1^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,-1,1,-1,-1,-1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,-1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathrm{T}}$

$$-3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}.\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 8 \\ -18 \\ 4 \\ -18 \\ 8 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ luego } \mathbf{x}_4 \text{ es un estado estable}$$

al no cambiar de signo las componentes del vector

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \Theta_i$$

$$E(t) = -\frac{1}{2}(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 8 \\ -18 \\ 4 \\ -18 \\ 8 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(18+18+8+18+4+18+8+18+18) = -64$$

y de x4

$$E(t)=-\frac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)\begin{pmatrix} -18 \\ 18 \\ -8 \\ 18 \\ -4 \\ 18 \\ -8 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}(18+18+8+18+4+18+8+18+18)=-64$$

mientras que la de $\mathbf{x}_2=(1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1)^T$ es

$$E(t) = -\frac{1}{2}(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}(1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 10 \\ -16 \\ 4 \\ -16 \\ 10 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(16 - 16 + 10 - 16 + 4 - 16 + 10 - 16 + 16) = 4$$

Claramente muy superior al valor -64