TEMA 7 SERIES DE NÚMEROS REALES

1.- CONVERGENCIA

Definición 1.- Serie de números reales

Se llama serie de números reales, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$.

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

- A a_n se le denomina término general de la serie.
- A la sucesión $\{S_n\}_{n\in N}$ de término general $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se le llama sucesión de sumas parciales de la serie.

Ejemplo.- Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$, la sucesión de sumas parciales será:

$$\{S_n\}_{n\in N} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Definición 2.- Resto de una serie

Se llama serie de resto $k \in N$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a la serie $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$:

$$\boxed{\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots}$$

Ejemplo.- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$ es la serie de resto 1 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Definición 3.- Serie convergente

Se dice que una serie de números reales es convergente si converge la sucesión de sus sumas parciales, es decir, si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \{S_n\}_{n\in N} = S$.

● S recibe el nombre de suma de la serie. En caso de no existir el límite, la serie es divergente.

● Si una serie es convergente, cualquier resto suyo también es convergente.

Ejemplo.- Estudiar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^n - e^{n+1})$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^n - e^{n+1}) = (e - e^2) + (e^2 - e^3) + (e^3 - e^4) + \cdots + (e^n - e^{n+1}) + \cdots$$

Formamos la sucesión de sumas parciales:

$$S_1 = a_1 = e - e^2$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = e - e^2 + e^2 - e^3 = e - e^3$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = e - e^2 + e^2 - e^3 + e^3 - e^4 = e - e^4$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = e - e^2 + e^2 - e^3 + \cdots + e^{n-1} - e^n + e^n - e^{n+1} = e - e^{n+1}$$

Entonces, como:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(e - e^{n+1}) = e - \infty = -\infty$$

la serie es divergente.

Definición 4.- Serie absolutamente convergente

Se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si converge la serie de sus valores absolutos:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es absolutamente convergente si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ es convergente}}$$

● Toda serie absolutamente convergente es convergente

● El recíproco no es cierto, por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente y la de sus valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, como veremos más adelante.

CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

● Esta condición necesaria de convergencia no es suficiente, esto es, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no podemos asegurar que la serie sea convergente. Lo que se afirma este teorema es que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie es divergente.

<u>Ejemplo</u>.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$ es divergente, ya que:

$$\text{lím}_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

<u>PROPIEDADES</u>

1. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergentes. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha a_n + \beta b_n]$ es convergente y:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha a_n + \beta b_n] = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \forall \alpha, \beta \in R$$

2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una convergente y otra divergente. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ es divergente}$$

3. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $0 < a_n \leq b_n \quad \forall n \in N$. Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \bullet \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge } \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{array}}$$

2.- EL CRITERIO INTEGRAL

Teorema 1
Sea f una función continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ y $f(n) = a_n \quad \forall n \in N$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

● El criterio asegura que la serie y la integral impropia convergen simultáneamente, pero no que lo hagan al mismo número.

El teorema siguiente permite estimar el error que se comete al aproximar la suma de una serie convergente por una de sus sumas parciales, así como saber cuántos términos de una serie hay que sumar para obtener el valor de la suma con una determinada precisión.

Teorema 2
Sea f una función continua, no negativa y decreciente para $x \geq 1$ y $f(n) = a_n \quad \forall n \in N$.
Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, el resto R_n de la serie satisface:

$$\boxed{0 \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx}$$

Ejemplo.- Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Cuántos términos hay que considerar en una suma parcial, para tener una aproximación de su suma con un error menor que 10^{-4}?

Solución:
Para estudiar la convergencia utilizamos el teorema 1, puesto que la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es continua, decreciente y no negativa $\forall x \geq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^{x=x} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{x} + 1 \right] = 1$$

por lo tanto, la serie es convergente.

Para saber cuántos términos hay que considerar en una suma parcial de la serie para que el error cometido en la aproximación sea menor que 10^{-4}, aplicamos el teorema 2. Como el error satisface la desigualdad:

$$R_n \leq \int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \int_n^x \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=n}^{x=x} = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n}$$

deberá ser:

$$\frac{1}{n} < 10^{-4} \;\; \to \;\; n > \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

3.- ALGUNOS TIPOS DE SERIES

Definición 1.- Serie geométrica

Se llama serie geométrica de razón $a \in R$ a la que presenta la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \approx \sum_{n=0}^{\infty} a^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \approx \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n + \cdots$$

Convergencia:

Aplicamos la definición, calculamos el límite de la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$$

Como la suma de estos n términos de la progresión geométrica de razón a es:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^{n-1}a - 1}{a-1} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

Vemos que el límite de esta expresión solamente existe cuando $|a| < 1$, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - 1}{a-1} = \frac{-1}{a-1} \qquad \forall a \in R \;\; t.q. \;\; |a| < 1$$

y concluimos:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \quad converge \quad \Leftrightarrow \quad |a|<1 \quad y \quad S=\frac{1}{1-a}}$$

<u>Ejemplo</u>.- Hallar la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}+\cdots$

La serie es geométrica, de razón $a=-\frac{1}{2}$, convergente. Su suma será:

$$S=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$$

Definición 2.- Serie armónica

Se llama p-serie a la serie cuyo término general presenta la forma: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \qquad p\in R^+$

● Se llama serie armónica a la que se tiene para $p=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Convergencia:

Aplicamos el criterio integral:

Consideramos la función $f(x)=\frac{1}{x^p}$ continua, decreciente y no negativa $\forall x\geq 1$ si $p\in R^+$:

Si $p\neq 1$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\int_1^{x}\frac{dx}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right]=\left\{\begin{matrix}-p+1<0\\ p>1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{p-1}$$

Si $p=1$:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{x\to\infty}\int_1^{x}\frac{dx}{x}=\lim_{x\to\infty}Lx\Big|_{x=1}^{x=x}=\lim_{x\to\infty}\left(Lx-L1\right)=\infty$$

Conclusión:

- Una p-serie converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$
- La serie armónica es, por tanto, divergente

Ejemplo.- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$ diverge puesto que $p = \frac{1}{2} < 1$

4.- SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Consideramos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tales que $a_n > 0 \quad \forall n \in N$ y establecemos dos criterios que nos permiten determinar la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. COMPARACIÓN

Sea $a_n, b_n > 0 \quad \forall n \in N$.

Entonces, si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in R^+$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge (diverge)} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge (diverge)}}$$

2. COCIENTE (D´ALEMBERT)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n > 0 \quad \forall n \in N$.

Entonces, si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$:

- Si $L < 1 \rightarrow$ serie convergente
- Si $L > 1 \rightarrow$ serie divergente

Ejemplo 1.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$

Aplicamos el criterio de comparación. Comparamos con la serie armónica, para asegurarnos que el límite es real y positivo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2 \in R^+$$

Entonces, ambas tienen el mismo carácter y la serie es divergente.

Ejemplo 2.- Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(n+1)}{5^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$$

Entonces, la serie es convergente.

5.- SERIES ALTERNADAS

Definición.- Serie alternada

Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$, tal que $a_n > 0 \quad \forall n \in N$, se llama serie alternada a la que presenta la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

Ejemplo.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$

CRITERIO DE LEIBNITZ

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de términos positivos, decreciente y convergente a cero, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es convergente.

Teorema (resto de una serie alternada)

Si la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es tal que $a_{n+1} \leq a_n$, el valor absoluto del resto R_N que resulta al aproximar su suma S por la suma parcial S_N es menor o igual que el primer término no considerado:

$$\boxed{|R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1}}$$

<u>Ejemplo</u>.- Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Cuántos términos hay que considerar en una suma parcial, para tener una aproximación de su suma con error menor que 10^{-4} ?

<u>Solución:</u>

La sucesión $\{a_n\}_{n \in N} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n \in N}$ cumple las condiciones de Leibniz, es de términos positivos, decreciente y convergente a cero. Entonces, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Para saber cuántos términos hay que considerar en una suma parcial, utilizamos el teorema del resto:

$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < 10^{-4} \;\rightarrow\; 10^4 < (n+1)^2 \;\rightarrow\; n+1 > 100 \;\rightarrow\; n > 99$$