## 1.- TIPOS DE MATRICES.

### 1.1.- Definición de matriz. Terminología. Tipos de matrices.

Una **matriz** es una tabla de números distribuidos en filas y columnas.

Se dice que es de dimensión $n \times p$, es decir, tiene $n$ filas y $p$ columnas.

$$A = (a_{ij})_{n \times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Dos **matrices son iguales** si tienen las mismas dimensiones y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

| Tipos de matrices según su forma | *Ejemplo* |
|---|---|
| **Matriz fila:** es una matriz que sólo tiene una fila. | $A_{1 \times 3} = (3 \quad -5 \quad 7)$ |
| **Matriz columna:** es una matriz que sólo tiene una columna. | $A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz cuadrada:** es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, $n \times n$; se dice que es de orden $n$.<br><br>Se llama <u>*diagonal principal*</u> de una matriz cuadrada a los elementos $a_{ii}$. Va de izquierda a derecha y de arriba abajo. | $A_{2 \times 2}$ (o sólo $A_2$) $= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$<br><br>$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 8 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz simétrica:** es una *matriz cuadrada* en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$. | $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 7 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz antisimétrica:** es una *matriz cuadrada* en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$. Los elementos de la diagonal principal deben ser ceros. | $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ |

| Tipos de matrices según sus elementos | *Ejemplo* |
|---|---|
| **Matriz nula:** es una matriz en la que todos sus elementos son cero. | $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz diagonal:** es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que **no** están en la diagonal principal son nulos. | $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz escalar:** es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales. | $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz unidad o identidad:** es una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. Se representa por $I_{n \times n}$. | $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz triangular superior:** es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que están debajo de la diagonal principal son nulos. | $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **Matriz triangular inferior:** es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que están encima de la diagonal principal son nulos. | $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ |

### 1.2.- Matriz traspuesta de una matriz.

<u>Propiedades de la traspuesta</u>

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

La matriz traspuesta de una matriz $A$ es la matriz que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. Se representa por $A^t$.

***Ejemplo:*** $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

## 2.- OPERACIONES CON MATRICES.

### 2.1.- Suma/Resta de matrices.

Para sumar/restar dos matrices, éstas han de tener las mismas dimensiones, y se suman/restan elemento a elemento.

***Ejemplo:*** $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Propiedades de la suma de matrices</u>

a) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
b) Conmutativa: $A + B = B + A$
c) Matriz nula ( $O$ ): $A + O = O + A = A$
d) Matriz opuesta: es la matriz que se obtiene al cambiar todos los elementos de signo. Verifica: $A + (-A) = O$

### 2.2.- Producto de un número por una matriz.

Para multiplicar un número por una matriz, se multiplica el número por cada elemento de la matriz.

***Ejemplo:*** $5\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 20 \\ 35 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

### 2.3.- Producto de matrices.

<u>Producto de una matriz fila por una matriz columna.</u>

Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna (*han de tener el mismo número de elementos*), se multiplican elemento a elemento y se suman los productos obtenidos. Se obtiene un número.

***Ejemplo:***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

<u>Producto de dos matrices.</u>

Para multiplicar dos matrices (*tiene que coincidir el número de columnas de la 1ª con el número de filas de la 2ª*), se multiplica cada fila de la 1ª matriz por cada columna de la 2ª. El resultado es una matriz que tiene tantas filas como la 1ª y tantas columnas como la 2ª. $A_{n\times p} \cdot B_{p\times q} = C_{n\times q}$

***Ejemplo:***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 9 + 4\cdot 2 & 3\cdot 0 + 4\cdot 3 & 3\cdot 1 + 4\cdot 4 \\ 5\cdot 9 + 6\cdot 2 & 5\cdot 0 + 6\cdot 3 & 5\cdot 1 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 9 + 8\cdot 2 & 7\cdot 0 + 8\cdot 3 & 7\cdot 1 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 & 9 \\ 35 & 12 & 19 \\ 57 & 18 & 29 \\ 79 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedades del producto de matrices</u>

a) Asociativa: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
b) En general, el producto de matrices **no** es <u>conmutativo</u>: $A\cdot B \neq B\cdot A$

***Ejemplo:*** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 52 & 76 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 34 \\ 46 & 74 \end{pmatrix}$

Por ello, tampoco serán ciertos los productos notables:
$(A + B)^2$ no tiene por qué ser $A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2$ no tiene por qué ser $A^2 - 2AB + B^2$
$(A + B)(A - B)$ no tiene por qué ser $A^2 - B^2$

c) Matriz unidad ( $I$ ): $A\cdot I = I\cdot A$
d) Dada una matriz cuadrada, **no** siempre existe otra matriz cuadrada tal que al multiplicarla nos da la matriz unidad. (Si existe, se trata de la matriz inversa de la matriz original $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$ )
e) En general, el producto de matrices **no** es <u>simplificable</u>: De $A\cdot B = A\cdot C$ **no se sigue** $B = C$.

***Ejemplo:*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

f) El producto de dos matrices no nulas puede ser la matriz nula.

***Ejemplo:*** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) Distributiva: $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$

## E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

**1** Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & 0\end{pmatrix}$ calcula: a) $A+B$ b) $A-B$ c) $5A$ d) $2A-3B$

**2** Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar: a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$

**3** Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$ calcula: a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$ c) Conclusiones

**4** Sea la matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Halla una matriz $B$ tal que $A\cdot B=O_{2\text{x}2}$, con la condición de que $B$ no sea la matriz nula de dimensión $2 \text{ x } 2$.

**5** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, calcula $A^k$.

**6** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcula $A^{257}$.

**7** Resuelve el siguiente sistema matricial:
$$\left.\begin{array}{l} 3A-B=\begin{pmatrix}9 & -7 & 7\\ 20 & 3 & -10\end{pmatrix}\\[2ex] 6A+B=\begin{pmatrix}9 & -2 & 20\\ 25 & -3 & -8\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

**8** Una fábrica distribuye sus productos alimenticios A, B y C a cuatro países P, Q, R y S, según se describe en la matriz M (cantidades de toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas E y F para el transporte de los productos a los países de destino, como indica la matriz N (en euros por tonelada).

$$M=\begin{array}{c} \\ P\\ Q\\ R\\ S\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}200 & 100 & 120\\ 110 & 130 & 200\\ 220 & 200 & 100\\ 150 & 160 & 150\end{pmatrix}\end{array} \quad \text{y} \quad N=\begin{array}{c} \\ E\\ F\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}P & Q & R & S\end{array}\\ \begin{pmatrix}500 & 450 & 375 & 350\\ 510 & 400 & 400 & 350\end{pmatrix}\end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

- **a)** ¿Qué representa el elemento $a_{11}$ de la matriz producto?
- **b)** ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa F?
- **c)** Indica qué elementos de la matriz producto te permiten decidir cuál es la empresa que más barato transporta el producto B a todos los países.

**9** En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos y aceros especiales. Estos productos requieren, por cada unidad de producto fabricado, chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades en kilogramos que se indican en la tabla de la derecha:

| | Láminas | Rollos | Especiales |
|---|---|---|---|
| Chatarra | 8 | 6 | 6 |
| Carbón | 6 | 6 | 4 |
| Aleaciones | 2 | 1 | 3 |

- **a)** Si durante el próximo mes se desea fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollo y 3 unidades de aceros especiales, obtén la matriz que indica las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.
- **b)** Si se dispone de 34 kg de chatarra, 28 kg de carbón y 8 kg de aleaciones, ¿Cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

**10** Comprueba que $A^2 - A - 2I_3 = O$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**11** Resuelve $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**12** Sean $A$, $B$ y $C$ tres matrices tales que el producto $A \cdot B \cdot C$ es una matriz $3 \times 2$ y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de $A$, $B$ y $C$.

**13** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $A^{10}$.

**14** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Estudia si existe algún valor de $\lambda \in \Re$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

**15** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ calcula $A^{253}$.

**16** Resuelve el siguiente sistema matricial: $\left\{ \begin{array}{l} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 11 & -13 & -1 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -6 & 15 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \right.$