

## Ejercicios de Regresión Logística 2019-2020

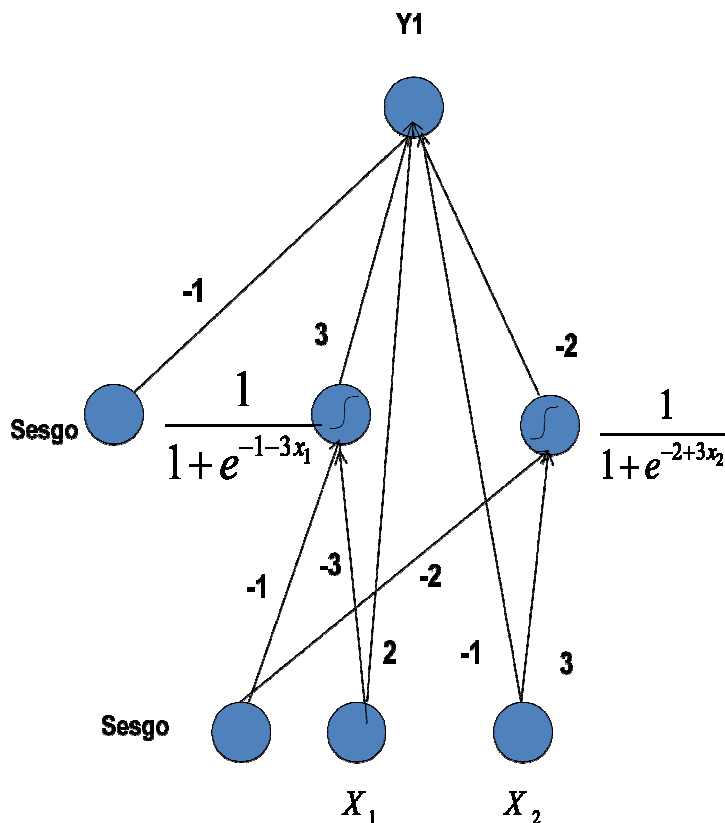
**Cuestión 1.-** La siguiente ecuación que tipo de modelo representa? Explique lo que significan las funciones, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo ¿Cuál es su misión? Calcule la probabilidad de pertenencia a la clase positiva de un determinado patrón. A que clase pertenece el patrón de características (0,1)?

$$\log \frac{p(y=1|\mathbf{x}_i)}{1-p(y=1|\mathbf{x}_i)} = -1 + 2x_1 - x_2 + 3 \frac{1}{1+e^{-1-3x_1}} - 2 \frac{1}{1+e^{-2+3x_2}}$$

**Solución.-**

La ecuación representa un modelo de regresión logística, especial, con dos clases y dos variables independientes, donde la parte derecha de la ecuación tradicional de la regresión logística es un modelo lineal más un modelo no lineal formado por la combinación lineal de dos funciones sigmoideas. Su misión es poder calcular la probabilidad de pertenencia a la clase positiva  $y=1$ .

El grafo es de la forma



La probabilidad de pertenencia a la clase 1 es igual a

$$p(y=1) = \frac{e^{-1+2x_1-x_2+3\frac{1}{1+e^{-1-3x_1}}-2\frac{1}{1+e^{-2+3x_2}}}}{1+e^{-1+2x_1-x_2+3\frac{1}{1+e^{-1-3x_1}}-2\frac{1}{1+e^{-2+3x_2}}}}$$

luego el patrón de valores (0,1), tiene una probabilidad

$$p(y=1) = \frac{e^{\frac{-1+0-1+3}{1+e^{-1-0}} - 2 \frac{1}{1+e^{-2+3}}}}{1+e^{\frac{-1+0-1+3}{1+e^{-1-0}} - 2 \frac{1}{1+e^{-2+3}}}} = \frac{0,7062}{1+0,7062} = 0,4114$$

Luego pertenece, según el modelo, a la clase  $Y=0$ , habría que saber la etiqueta que tiene el patrón para ver si es un acierto o un fallo.

**Cuestión 2.-** Las siguiente ecuación que tipo de modelo representa? Explique lo que significan la función, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo. Calcule las probabilidades de pertenencia a cada una de las J clases del modelo.

$$\ln \frac{p(Y_j = 1)}{p(Y_j = 1)} = \ln \frac{P_{Y_j=1}}{1 - \sum_{j=1}^{J-1} p_{Y_j=1}} = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{2i} + \beta_{2j} X_{1i}^2 + \beta_{3j} X_{2i}^2 + \varepsilon_i$$

para todo  $j=1, \dots, J-1$ , siendo  $i=1, \dots, 100$ ,

**Solución.-**

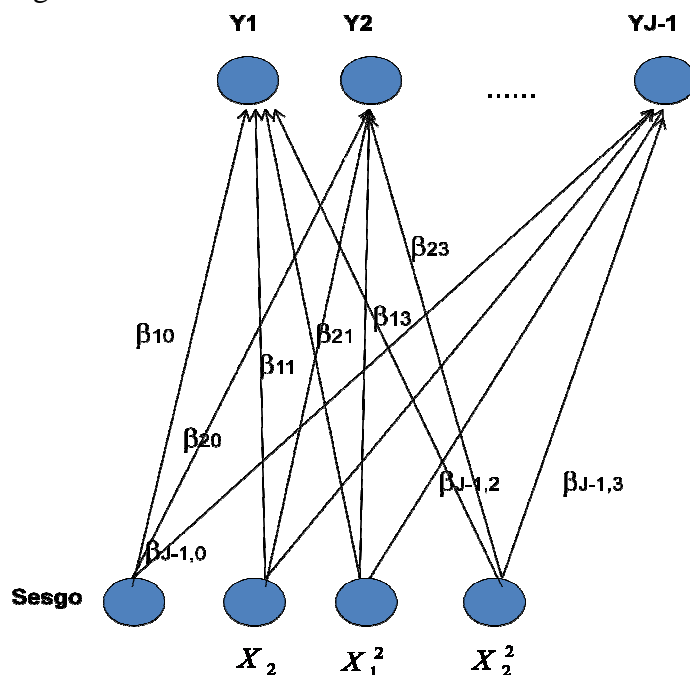
Es un modelo de regresión logística multiclasa con J clases, donde la función asociada a la parte derecha de la ecuación logarítmica no es lineal, sino cuadrática. En este problema hay 100 patrones y dos variables independientes o características.

Las probabilidades de pertenencia a cada clase son

$$p(Y_j=1) = \frac{e^{\beta_{0j} + \beta_{1j} X_{2i} + \beta_{2j} X_{1i}^2 + \beta_{3j} X_{2i}^2}}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} e^{\beta_{0j} + \beta_{1j} X_{2i} + \beta_{2j} X_{1i}^2 + \beta_{3j} X_{2i}^2}}$$

$$p(Y_J = 1) = 1 - \sum_{j=1}^{J-1} p(Y_j=1)$$

El grafo es



**Cuestión 3.-** La siguiente ecuación que tipo de modelo representa? Explique lo que significan la función, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo ¿Cuál es su misión? Calcule la probabilidad de pertenencia a la clase positiva de un determinado patrón

$$\ln \left( \frac{P_{Y_i=1}}{1 - P_{Y_i=1}} \right) = \gamma_0 + \sum_{l=1}^2 \alpha_l C_l (\mathbf{X}_i, \mathbf{w}_l) + \sum_{m=1}^3 \beta_m B_m (\mathbf{X}_i, \mathbf{w}_m)$$

para  $i=1, \dots, 100$

**Cuestión 4.-** Las siguientes ecuaciones que tipo de modelo representa? Explique lo que significan las funciones, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo ¿Cuál es la regla de decisión?

$$\log \frac{p(y^{(l)} = 1 | \mathbf{x})}{p(y^{(J)} = 1 | \mathbf{x})} = f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad p(y^{(l)} = 1 | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l)}{\sum_{j=1}^J \exp f_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_j)}, \quad l = 1, 2, \dots, J$$

$$f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l) = \alpha_0^l + \sum_{i=1}^k \alpha_i^l x_i, \quad l = 1, 2, \dots, J-1; \quad f_J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_J) = 0$$

**Cuestión 5.-**

Las siguientes ecuaciones que tipo de modelo representa? Explique lo que significan las funciones, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo ¿Cuál es la regla de decisión?

$$\log \frac{p(y^{(l)} = 1 | \mathbf{x})}{p(y^{(J)} = 1 | \mathbf{x})} = f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad p(y^{(l)} = 1 | \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l)}{\sum_{j=1}^J \exp f_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_j)}, \quad l = 1, 2, \dots, J$$

$$f_l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_l) = \alpha_0^l + \sum_{i=1}^k \alpha_i^l x_i, \quad l = 1, 2, \dots, J-1; \quad f_J(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_J) = 0$$

**Cuestión 6.-** La siguiente ecuación que tipo de modelo representa? Explique lo que significan las funciones, variables y coeficientes que aparecen en el mismo. Construya el grafo del modelo ¿Cuál es su misión? Calcule la probabilidad de pertenencia a la clase l-ésima de un determinado patrón.

$$\log \frac{p(y^{(l)} = 1 | \mathbf{x})}{p(y^{(J)} = 1 | \mathbf{x})} = \gamma_0 + \sum_{p=1}^k \alpha_p^l x_p + \sum_{m=1}^3 \beta_m^l B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m), \quad l = 1, 2, \dots, J$$

para  $i=1, \dots, 200$

$$\text{siendo } B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m) = \prod_{j=1}^k x_{jm}^{w_{mj}}$$

**Solución.-** Es un modelo de regresión logística multiclase, en concreto con J clases, pero donde hay una parte lineal del modelo

$$\gamma_0 + \sum_{j=1}^k \alpha_j^l x_j$$

más una parte no lineal del mismo, formada por tres unidades de base de tipo producto.

$$\sum_{m=1}^3 \beta_m B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m), \text{ siendo } B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m) = \prod_{j=1}^k x_{jm}^{w_{mj}}$$

La probabilidad de pertenencia a la clase  $l$  es:

$$P(Y_l=1) = \frac{\exp(\gamma_0 + \sum_{p=1}^k \alpha_p^l x_p + \sum_{m=1}^3 \beta_m^l B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m))}{1 + \sum_{j=1}^{J-1} \exp(\gamma_0 + \sum_{p=1}^k \alpha_p^j x_p + \sum_{m=1}^3 \beta_m^j B_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_m))}, \text{ para } l=1, \dots, J-1$$