Cálculo Diferencial e Integral en Una Variable para el Grado de Ingeniería Informática

Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba

Consuelo Ramírez Torreblanca

Curso 2017-2018

Índice general

Capítulo 1

Cálculo y Geometría Elemental

1.1. Los números reales

Los conjuntos con los que trabajaremos a lo largo del curso estarán formados por números que están divididos en varias categorias:

- **Los números naturales.** Son los números que utilizamos para contar. El conjunto de los números naturales se denota con la letra $\mathbb{N}$:

  $$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

  (Algunos matemáticos consideran que el cero también debería ser natural).

- **Los números enteros.** Son los naturales con signo junto con el cero. El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$:

  $$\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

- **Los números racionales.** Son las fracciones de la forma: $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$. El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$:

  $$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

- **Los números reales.** Son todos los números que conocemos. Se representan con la letra $\mathbb{R}$. Los números reales son necesarios para poder efectuar operaciones como las raices cuadradas, las cúbicas, etc. Gráficamente se suelen representar en una linea recta (la recta real).

- **Los números irracionales.** Son los números reales que no son racionales. Los denotamos por $\mathbb{I}$.

Se tienen las siguientes relaciones de inclusión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

1.2. Desigualdades

Los números reales pueden ordenarse. Se pueden visualizar usando un sistema de coordenadas unidimensional que se llama la recta real (numérica).

Dados dos números reales a y b, diremos que a es menor que b, y lo representamos $a < b$, si a queda a la izquierda de b en la recta real. De modo análogo se definen:

- $a > b$ "a es mayor que b".
- $a \leq b$ "a es menor o igual que b".
- $a \geq b$ "a es mayor o igual que b".

Propiedades de orden

Para cualesquiera números reales a, b, c y d se verifican las siguientes propiedades:

- Ley de la tricotomía: Una y sólo una de las siguientes relaciones es cierta:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

- Propiedad transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
- Propiedad aditiva: Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
  Caso particular: Si $a \leq b$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $a + k \leq b + k$, independiente del signo de k.
- Propiedad multiplicativa: Si $a \leq b$ y $k \geq 0$ entonces $ak \leq bk$. Si $a \leq b$ y $k \leq 0$ entonces $ak \geq bk$.

Ejemplo: Hallar los valores de x que verifiquen $-2x + 5 \leq 7$.

Primero sumamos -5 en ambos miembros de la desigualdad y simplificamos:

$$-2x + 5 + (-5) \leq 7 + (-5) \Rightarrow -2x \leq 2.$$

Ahora multiplicamos por $-\frac{1}{2}$, teniendo en cuenta que como es negativo la desigualdad cambia:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \geq \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \Rightarrow x \geq -1.$$

Solución: $x \geq -1$ ó $-1 \leq x$.

1.3. Intervalos

Sean a y b números reales con $a \leq b$. Definimos primero los intervalos acotados de extremos a y b:

- Intervalo cerrado. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

  Dicho de otra forma, $[a, b]$ es el conjunto de los números reales que hay entre a y b incluyendo a los extremos a y b.

- Intervalo abierto. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

  Dicho de otra forma, (a, b) es el conjunto de los números reales que hay entre a y b sin incluir a los extremos a y b.

- Intervalo semiabierto. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

  En este caso a pertenece al conjunto pero b no.

  De modo análogo se define $(a, b]$.

También podemos hablar de intervalos infinitos:

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son mayores que a incluyendo al a.
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son mayores que el a sin incluir al b.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son menores que el b incluyendo al b.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son menores que el b sin incluir al b.

Observaciones

1. Es importante notar que ∞ es sólo un símbolo, no hay que confundirlo con un número. Por eso no tiene sentido expresiones como:

$$[-\infty, a) \quad \text{ó} \quad [b, \infty].$$

2. Es claro que $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Ejemplo: El conjunto de números que verifican la desigualdad $-2x + 5 \leq 7$ ha resultado ser el intervalo $[-1, \infty)$.

Ejercicio: Hallar el conjunto de números reales tales que $x^2 < x + 6$.

1.4. Valor absoluto

Definición 1.4.1. El *valor absoluto de un número real* x es el mismo dígito pero con signo positivo y lo denotamos por $|x|$. De este modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

El valor absoluto de x siempre va a ser moyor o igual que cero, independientemente del signo de x. Se puede ver también como la distancia que hay entre x y 0 en la recta real:

El valor absoluto se usa para definir la distancia entre dos puntos (números) de la recta real. La distancia entre dos números reales a y b es: $|a - b|$

Algunas propiedades básicas del valor absoluto:

- $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- $|-x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$.
- $|x| = +\sqrt{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|x^n| = |x|^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
- Sea $c \geq 0$. Entonces $|x| \leq c$ si y sólo si $-c \leq x \leq c$.
- Sea $c \geq 0$. Entonces $|x| \geq c$ si y sólo si $x \geq c$ ó $x \leq -c$.
- Desigualdad triangular:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Hallar los valores de x tales que $|x - 3| \leq 2$.

$$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Gráficamente, la expresión $|x - 3| \leq 2$ significa que la distancia de x a 3 es menor o igual que 2, y evidentemente esto sólo se cumple para los números que estén entre 1 y 5.

Ejercicio: Hallar los valores de x para los que $|x - 2| > 3$.

1.5. Raiz cuadrada de un número positivo

Definición 1.5.1. Sea a un número real positivo (positivo significa mayor que 0), definimos la *raiz cuadrada de a*, $\sqrt{a}$, como el único número real positivo cuyo cuadrado es a. Si $a = 0$, $\sqrt{a} = 0$.

Entonces tenemos:

Si $a \geq 0$, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $b \geq 0$ y $b^2 = a$.

Observaciones

1. El símbolo $\sqrt{\cdot}$ denota siempre una cantidad mayor o igual que cero. Un malentendido habitual es escribir cosas del tipo: $\sqrt{4} = \pm 2$.

2. Es correcto hacer operaciones como la que sigue:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

3. Un error muy frecuente es decir $\sqrt{x^2} = x$, pero esto es falso. Lo hemos anotado como una propiedad del valor absoluto y es muy fácil de razonar. Por ejemplo: $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Propiedades

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

2. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ejercicio: Hallar los valores de x para los que la expresión $\sqrt{4 - x^2}$ tiene sentido.

1.6. Los números complejos

Observemos que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real. Hay muchas otras ecuaciones sin solución real, es decir, ningún número real las verifica.

El cuerpo de los números complejos se introduce con el fin de que estas ecuaciones tengan siempre solución.

Introducimos una nueva unidad: i y le asignamos la propiedad:

$$i^2 = 1 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{-1} = i.$$

Si aceptamos este hecho, entonces observamos que la ecuación $x^2 = -1$ tiene como solución i y $-i$.

Si multiplicamos i por un número real obtenemos un *número imaginario*. Por ejemplo: $2i$ es un número imaginario que tiene la propiedad:

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = 4(-1) = -4.$$

Los *números complejos* se definen como el conjunto:

$$\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

es decir, están formados por la suma de un número real mas un número imaginario.

Sea $z = a + ib$ un número complejo

- El número real a se llama *parte real* y el número real b *parte imaginaria*.
- El número $\overline{z} = a - ib$ se llama *conjugado de z*.
- El número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se llama *módulo de z*.
  También se tiene la relación $|z|^2 = z\overline{z}$.

Observaciones

1. Si la parte imaginaria de un número complejo z es 0, $z \in \mathbb{R}$, luego $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. En el contexto de los números complejos, los números negativos tienen raiz cuadrada.
3. En $\mathbb{C}$ no hay relación de orden.
4. Todas las ecuaciones polinómicas tienen al menos una solución.

1.7. Razones trigonométricas: seno, coseno, tangente

1.7.1. Ángulos

Dos semirectas con origen común determinan dos ángulos.

Para evitar confusiones sobre el ángulo al que nos referimos podemos establecer un orden entre los lados y considerar que el ángulo queda determinado por un giro que hace coincidir su primer lado sobre el segundo. De esta forma hablaremos de *ángulos orientados* y diremos que el ángulo es *positivo* si el giro se efectua en sentido contrario al de las agujas del reloj, y *negativo* si se efectua en el mismo sentido.

Definimos *ángulo recto* como el ángulo positivo que determinan dos semirrectas perpendiculares con origen común.

A partir de ahora nos centramos en ángulos positivos.

1.7.2. Medida de ángulos

Para dar la medida de un ángulo cualquiera tomaremos como referencia el ángulo recto.

Existen dos formas de medir ángulos:

Grados sexagesimales. La primera es asignarle al ángulo recto 90°. A partir de ahí el ángulo que bisecta al ángulo recto sería de 45°, la suma de dos ángulos rectos daría 180°, una vuelta completa (una circunferencia) tendría 4 ángulos rectos, luego sería $4 \times 90° = 360°$.

Radianes. La segunda forma de medir ángulos se basa en la geometría de la circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia de radio r viene dada por la expresión:

$$L = 2\pi r.$$

Entonces la proporción entre longitud y radio de una circunferencia es siempre constante:

$$\frac{L}{r} = 2\pi.$$

O sea, el perímetro de una circunferencia contiene exactamente 2π radios suyos.

Esto nos indica que podemos utilizar la constante 2π y asignársela al ángulo de una vuelta completa. O sea, diremos que una vuelta completa tiene un ángulo de 2π radianes. De esta forma, un ángulo recto tendría asignado un ángulo equivalente a $\frac{1}{4}$ el de la circunferencia. O sea, un ángulo recto mediría $\frac{\pi}{2}$ radianes, etc.

La ventaja de utilizar radianes en lugar de grados consiste en que si tenemos una circunferencia de radio 1, y trazamos un ángulo, la longitud del arco de circunferencia que se forma es exactamente igual a la medida del ángulo en radianes.

1.7.3. Triángulos

Decimos que dos triángulos son *semejantes* cuando los ángulos de uno coinciden con los del otro. Dados dos triángulos semejantes, el Teorema de Thales nos dice que los lados de uno son proporcionales a los del otro.

ABC es semejante a ADE y por tanto,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Suma de los ángulos de un triángulo. Recordemos que la suma de los ángulos de un triángulo es π, o sea, 180°.

Trazamos una linea paralela a uno de los lados (el de abajo) y prolongamos los otros dos. Se forma de este modo tres nuevos ángulos que coinciden con los originales. La suma $\alpha + \beta + \gamma$ es un ángulo llano, luego $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Usando esta propiedad deducimos que para que dos triángulos sean semejantes, basta que comprobemos que tienen dos ángulos iguales; el tercero también será igual automáticamente.

Triángulo rectángulo. Un triángulo *rectángulo* es aquel que tiene un ángulo recto (los otros dos ángulos han de tener medida inferior). En las figuras que siguen, el ángulo recto está se nalado por un cuadrado.

Dado un triángulo rectángulo con ángulo α, definimos los siguientes términos:

- **Hipotenusa:** es el lado del triángulo opuesto al ángulo recto.
- **Cateto opuesto a α:** es el lado opuesto al ángulo α.
- **Cateto adyacente a α:** es el lado restante.

El teorema de Pitágoras dice que:
La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

1.7.4. Razones trigonométricas

Si dos triángulos rectángulos cualesquiera tienen un ángulo α entonces son semejantes (ya que tienen dos ángulos iguales: α y $\frac{\pi}{2}$) y por el teorema de Thales sus lados son proporcionales

$$\frac{a}{c} = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{c}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{c}}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}.$$

Como estas proporciones sólo dependen del ángulo α (no dependen del triángulo concreto que usemos) podemos definirlas en función de α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Estas son las razones trigonométricas más importantes. Las hemos definido sobre un triángulo rectángulo pero también se puede definir geométricamente a partir de una circunferencia de radio r.

En estas condiciones se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Otras razones trigonométricas destacables son: cosecante, secante y cotangente, que no son más que las inversas de las anteriores:

$$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Propiedades

1. El seno y el coseno de cualquier ángulo están comprendidos entre -1 y 1.

2. Las razones trigonométricas $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ pueden ser relacionadas entre sí utilizando el teorema de Pitágoras. La fórmula trigonométrica más importante, porque a partir de ella se pueden deducir muchas otras, es

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

   Si dividimos entre $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}^2\alpha$ obtenemos respectivamente:

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \text{cotan}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha.$$

3. Suma y diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

4. Ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

5. Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

6. Otras fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

En la siguiente tabla aparecen algunos valores del seno, coseno y la tangente frecuentemente usados

Ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Hasta ahora sólo hemos tratado con ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Si representamos las razones trigonométricas en una circunferencia de radio 1, también llamada *circunferencia goniométrica*, podemos extender las definiciones de seno, coseno y tangente para que abarquen todos los ángulos posibles. Además con la ayuda de la circunferencia unidad, es muy fácil visualizar los valores de las razones trigonométricas y obtener relaciones entre ellas, entre las que se encuentran las dadas anteriormente.

Representamos un triángulo rectángulo de ángulo distinguido α en la circunferencia colocando el vértice en el centro, y el cateto adyacente sobre el eje horizontal positivo. De este modo se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale 1 (porque coincide con el radio de la circunferencia). Entonces $\operatorname{sen}\alpha$ es exactamente lo que mide el cateto opuesto, es decir, la linea vertical, y $\cos\alpha$ es el valor del cateto adyacente (linea horizontal).

Si queremos visualizar el valor de $\tan\alpha$, sólo tenemos que prolongar la hipotenusa, de manera que se forme un triángulo equivalente al anterior pero con cateto adyacente de longitud 1, así, el valor de $\tan\alpha$ es el valor del otro cateto.

En los otros cuadrantes, es decir, cuando el ángulo es más grande que $\frac{\pi}{2}$, el razonamiento es similar, aunque tenemos que hacer caso de la siguiente regla de signos:

Cuadrante	1	2	3	4
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

Además se puede observar en el dibujo relaciones como las que siguen:

$$\operatorname{sen}(2\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha.$$

1.8. El número e

Un número real que tiene particular importancia en todas las ciencias es el número e. Tal vez sea, junto con el número π, el número más famoso de las matemáticas; tiene propiedades muy variopintas y suele aparecer donde menos se lo espera uno, como veremos a lo largo del curso. Daremos una idea intuitiva de su definición.

Su origen resulto ser más una curiosidad que otra cosa. Nació como consecuencia del estudio de la siguiente familia de números reales:

$$\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Calculemos los primeros términos de esta familia, es decir, sustituyamos n por 1,2,3,4,etc.:

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2 \qquad a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25$$

$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2,37\cdots \qquad a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2,44\cdots$$

A primera vista, observamos que cuanto mayor sea el valor de n en estos primeros términos, mayor es el valor de a_n. ¿Qué pasará cuando n sea muy grande?; ¿obtendremos que a_n también será muy grande, o por el contrario, se acercará hacia un número fijo?.

Se puede comprobar que los términos de esta familia verifican $a_n\le a_{n+1}$ y $a_n\le 3$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como ya hemos visto que $a_1=2$, todos los términos de esta familia tienen que estar comprendidos entre 2 y 3.

En estas condiciones, parece lógico pensar que a medida que n se hace grande, a_n se acerca a algún número que estará comprendido entre 2 y 3. A este número es al que llamaremos ***número*** e.

En un principio, esta definición del número e parece muy artificial, (y lo es). Sin embargo este número tiene unas propiedades tan interesantes que le convierten en una herramienta muy importante en Matemáticas como veremos a lo largo del curso.

1.9. Exponentes y logaritmos

Consideremos un organismo unicelular que se reproduce utilizando el método de bipartición: después de cada periodo de tiempo fijo, y bajo condiciones ideales, cada célula se divide generando dos células nuevas. Así, si partíamos de una sola célula, entonces el número de células que hay en cada generación sigue la relación que se ve en la tabla.

generación	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
células	1	2	4	8	16	32	$\cdots$	2^n

¿Cuántas células tendremos en la décima generación?. Si para pasar de una generación a otra hemos de multiplicar por 2 el número de células, y sabemos que en la primera generación hay 2 células, entonces la décima generación tendrá

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} \quad \text{células.}$$

En la n-ésima generación habrá por tanto 2^n células.

Ahora hagámonos la pregunta inversa, ¿en qué generación alcanzaremos una cifra de 2^{20} células?. Está claro que esto sucederá en la generación 20.

Las operaciones que estamos realizando son *exponenciales y logaritmos*. Hagamos un repaso de estos conceptos.

1.9.1. Potencias

Sea a un número real. Definimos $a^1 := a$ y si $n \in \mathbb{N}$ $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Propiedades

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$.
2. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$.
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$.
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, definiremos las potencias de base real y exponente entero no natural, de forma que las propiedades establecidas se verifiquen para $n, m \in \mathbb{Z}$. Así, dado $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, ha de ser:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Por tanto, definimos $a^0 := 1$.

Siguiendo esta lógica, tenemos que si $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Por tanto, definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
Otra propiedad: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

El siguiente paso consiste en definir a^x cuando a es un número real positivo y x es un número racional cualquiera. Queremos extender las definiciones anteriores y que se verifiquen las propiedades mencionadas también para exponentes racionales.

Si $x = \frac{p}{q}$ y $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, queremos que $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$ y esto nos sugiere claramente la definición de $a^{\frac{p}{q}}$.

Sea a un número real positivo y sea $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{p}{q}}$ como el único número real positivo que elevado a q nos da a^p, es decir,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

La existencia de la raiz q-ésima positiva de a^p está asegurada.

Nuestro próximo objetivo es definir a^x, donde a es un número real positivo y x es un número real cualquiera. Lo que haremos será aproximar x mediante números racionales r_n. Daremos una idea intuitiva.

Dado un número real x cualquiera, podemos encontrar una familia de números racionales $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que a medida que n crece, r_n se acerca a x. Por tanto, si consideramos la familia $\{a^{r_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, esta también se acercará a un número a medida que n crece. Es lógico definir a^x como este número.

Se tienen todas las propiedades anteriores.

1.9.2. Logaritmos

Del mismo modo que la resta es la operación contraria a la suma, y la división es la operación contraria a la multiplicación, existen dos operaciones contrarias a la potenciación. Una de ellas es la extracción de raices: si $a^b = c$, entonces la raiz de orden b de c es a, es decir, $\sqrt[b]{c} = a$. Sin embargo, en esta sección nos concentraremos en la otra operación contraria a la potenciación: los *logaritmos*.

Consideremos de nuevo la célula que se reproduce por bipartición. Supongamos que en un momento dado se observan, por ejemplo, 1024 células. Nos preguntamos entonces en qué generación nos encontramos. Como sabemos que el número de células que debería haber en la generación n es 2^n, entonces nos encontramos con que queremos resolver la ecuación

$$2^n = 1024.$$

Esto es, queremos encontrar el exponente n, de manera que 2 elevado a dicho exponente sea 1024. Sin mucho esfuerzo se puede comprobar que la solución es $n = 10$.

La operación "búsqueda de exponente" es lo que llamamos *logaritmo*. En nuestro caso particular, queremos calcular el logaritmo en base 2 de 1024, que corresponde al exponente al que tenemos que elevar 2 para obtener 1024. Así

$$\log_2 1024 = 10 \quad \text{porque} \quad 2^{10} = 1024.$$

En general, si $a > 0$ y $a \neq 1$, decimos que el logaritmo en base a de una cantidad positiva x es y, si y es el exponente al que tenemos que elevar a para obtener x

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x.$$

Observación: $\log_a x = y$ sólo tiene sentido si $x > 0$ porque $x = a^y > 0$. Además, ha de ser $a \neq 1$ porque si $a = 1$, $a^x = 1$.

Propiedades de los logaritmos

Como el cálculo de logaritmos es una operación contraria a la exponenciación, los logaritmos van a tener propiedades contrarias, en cierto sentido, a las potencias.

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.
4. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
5. $x = a^{\log_a x} = \log_a(a^x)$.
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, para todo a, b positivos distintos de 1.

Los logaritmos son muy prácticos porque permiten reducir la complejidad de las operaciones. En otras palabras, si tenemos que hacer una multiplicación, podemos tomar logaritmos y sumarlos (propiedad 1). También, si tenemos que hacer una potencia, tomamos logaritmos, y se nos queda reducido a una multiplicación (propiedad 4).

Notación.

- Si la base es 10, entonces escribiremos $\log_{10}$ como log.
- Si la base es e, entonces escribiremos $\log_e$ como ln, L ó Ln. Estos son los llamados logaritmos neperianos o naturales. (No obstante, a veces podemos ver el logaritmo neperiano escrito log).

Capítulo 2

Funciones reales de una variable real

La mayoría de las ideas del Cálculo tienen interpretaciones geométricas útiles y se pueden visualizar en términos de funciones. En este tema empezamos estudiando los conceptos básicos sobre funciones de variable real; presentamos las funciones elementales y las operaciones fundamentales con ellas. Como ejemplo de un tipo de gráficas especialmente frecuentes se estudian las cónicas y sus propiedades más importantes. Todos estos conceptos constituyen el punto de partida para las secciones y temas siguientes. Una técnica esencial en Cálculo es hacer "cambios infinitesimales" en una cantidad; damos un significado preciso a esta noción introduciendo y explorando el límite de una función y el concepto de continuidad, que está intimamente relacionado con él; primero estudiamos la continuidad de una función en un punto, y luego en un intervalo, destacando dos resultados importantes: el Teorema de Bolzano y el Teorema de los Valores Intermedios.

2.1. Funciones

Tal vez, el concepto matemático más importante (después del de número) sea el concepto de función. Es la columna vertebral del Cálculo.

Los científicos, economistas y otros investigadores estudian relaciones entre cantidades. Por ejemplo, un ingeniero puede necesitar saber la relación entre la iluminación que produce una fuente de luz sobre un objeto y la distancia entre el objeto y la fuente. El estudio matemático de esta relación requiere el concepto de función.

Una función no es más que una "regla"que asigna a cada número, otro número. Expresa la idea de una cantidad que depende de otra o que es determinada por otra. Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado.

Definición 2.1.1. Una *función* f, es una "regla"que asigna a cada elemento x de un conjunto X un único elemento y de un conjunto Y. El elemento y se llama *imagen de* x *por* f y se denota por $f(x)$ (se lee f de x).

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Llamaremos a x *variable independiente*, porque puede tomar cualquier valor de X, mientras que y es la *variable dependiente*, ya que depende del valor elegido para x.

Definición 2.1.2. Consideremos la función $f : X \longrightarrow Y$.

El conjunto X se llama *dominio* de f. Se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.

El conjunto formado por las imágenes de todos los elementos de X se llama *imagen*, *rango* o *recorrido*. Se denota por $f(X)$ ó $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Claramente $f(X) \subset Y$ aunque pueden no ser iguales.

En este tema vamos a trabajar con funciones con valores reales de una variable real, lo que restringe el dominio y el rango a los números reales.

Notación funcional

Las funciones se pueden representar de muchas maneras, pero la más usual, es la de una fórmula matemática consistente en escribir la ecuación que relacionan las variables x e y.

Ejemplo

El área de un cuadrado de lado x es x^2.

Esto se expresa por la fórmula $f(x) = x^2$.

A veces hay que definir las funciones a trozos porque su dominio se compone de varios trozos. Estas funciones requieren más de una fórmula para su definición, y se llaman *funciones definidas a trozos*.

Observación

El dominio de una función puede darse de dos formas distintas:

- De forma explícita. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathrm{Dom}(f)$ =[1,2].
- De forma implícita. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$.

  En este caso, se sobreentiende que el dominio de f es el mayor conjunto de puntos donde puede estar definida la función. Dicho de otra forma, cuando se de en forma implícita, el dominio consta de todos los números a los que es posible aplicar f. En el caso anterior sería $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplos

Estudiemos el dominio de las funciones $f(x) = \sqrt{1-2x}$ y $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$.

Para el estudio del dominio de la función f, hay que tener en cuenta que la raiz cuadrada sólo está definida para los números positivos, por lo que ha de ocurrir $1-2x \geq 0$, de donde $x \leq \frac{1}{2}$. Así:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

La expresión de la función g tiene sentido para los valores reales x que cumplan; $x^2+1 \geq 0$ y $x^2-4 \neq 0$. Evidentemente, para todo x se cumple $x^2+1 \geq 0$, luego sólo tendremos que excluir los valores x para los que $x^2-4=0$, es decir, 2 y -2. Así:

$$\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

Observación

En general, el cálculo de la imagen de una función es más difícil que la determinación de su dominio. De todos modos, para nuestro propósito será más importante el estudio del dominio que el del recorrido, por lo que dejaremos a ésta un poco de lado.

Los conceptos que vamos a dar a continuación se pueden usar para reducir a la mitad el trabajo necesario en muchos problemas.

Definición 2.1.3. Diremos que una función f es:

- par, si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$
- impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$

La función, $f(x) = x^2$, es un ejemplo de función par, y la función, $g(x) = x^3$, es un ejemplo de función impar.

Definición 2.1.4. Dos funciones f y g son iguales, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- tienen el mismo dominio.
- $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio.

Ejemplos

Estudiar el dominio de las siguientes funciones y decidir cuáles son iguales:

$$f(x) = 2x - 1; \quad g(x) = 2x - 1,\ x \neq -3; \quad h(x) = \frac{(2x-1)(x+3)}{x+3}; \quad F(x) = \sqrt{x+2}.$$

El dominio de f son todos los números reales.
El dominio de g son todos los números reales salvo el -3.
El dominio de h son todos los números reales salvo el -3 porque la expresión tiene sentido sólo para $x \neq -3$.
F tiene sentido sólo si $x+2$ es positivo, por tanto el dominio es $[-2, \infty)$.

Las funciones f y h no son iguales porque no tienen el mismo dominio. En cambio, las funciones g y h sí son iguales ya que tienen el mismo dominio y, para $x \neq -3$, se puede simplificar la fracción por $x+3$.

Definición 2.1.5.

- Una función, f, es *inyectiva* si cada elemento de la imagen proviene de un único elemento del dominio. Dicho de otra forma: si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Una función, f, es *sobreyectiva* si $f(X) = Y$. Es decir, si cualquier elemento $y \in Y$ proviene de algún elemento $x \in X$: $f(x) = y$.
- Una función es *biyectiva*, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Los gráficos tienen un cierto impacto visual. También suministran información que puede no ser evidente en los tratamientos algebraicos o calculísticos.

Para representar geométricamente una función $y = f(x)$ como una gráfica, es tradicional usar un sistema de coordenadas cartesianas, con las unidades para la variable independiente x marcadas en el eje horizontal y las de la variable dependiente y en el eje vertical.

Definición 2.1.6. El *grafo* de una función f es el conjunto

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

La representación gráfica es el dibujo de $\mathrm{Gr}(f)$ sobre unos ejes de coordenadas. Muchas veces se llama función a la gráfica, esto no es del todo correcto; en realidad, el dibujo, es sólo el grafo de la función. La función como tal, es un concepto abstracto y no se puede dibujar.

Se pueden dibujar con bastante precisión gráficas de funciones. Este no es nuestro objetivo.

Operaciones de funciones

Dadas dos funciones f y g, podemos hacer varias operaciones básicas con ellas:

- **Suma:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

  El dominio de la función suma es la intersección de los dominios de f y g, ya que tienen que tener sentido $f(x)$ y $g(x)$.

- **Diferencia:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

  El dominio de la función diferencia vuelve a ser la intersección de los dominios.

- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

  De nuevo, el dominio de la función producto es la intersección de los dominios.

  Como caso particular destacamos aquel en el que una de las funciones es constante: si $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$. De esta forma, la función diferencia se puede ver como consecuencia de ésta operación y la operación suma.

- **Cociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

  En este caso, el dominio está formado por los puntos de la intersección de los dominios, que no anulen al denominador:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) : g(x) \neq 0\}.$$

Hay muchas situaciones en que una magnitud viene dada en función de una variable que, a su vez, es función de otra variable. El proceso de evaluar una función de una función da una idea de lo que es la composición de funciones:

Definición 2.1.7. Si f y g son dos funciones podemos definir la función *composición* $f \circ g$, que se lee "g compuesta con f"por la igualdad:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Obviamente, el dominio de $f \circ g$ estará formado por aquellos números x del dominio de g (para poder aplicar $g(x)$), tales que $g(x)$ está en el dominio de f (para poder aplicar $f(g(x))$).

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Hay que señalar que no es lo mismo $f \circ g$ que $g \circ f$, no se cumple la propiedad conmutativa para la composición de funciones.

Ejemplo

Sean $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Es claro que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Dom}(g) = [0, \infty)$, luego $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = [0, \infty)$. Entonces:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 5 + \sqrt{x}$, y $\mathrm{Dom}(f + g) = [0, \infty)$.
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x + 5 - \sqrt{x}$, y $\mathrm{Dom}(f - g) = [0, \infty)$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 5) \cdot \sqrt{x}$, y $\mathrm{Dom}(f - g) = [0, \infty)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{\sqrt{x}}$, y $\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (0, \infty)$, ya que hay que quitar los puntos que anulan al denominador. Como $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tendremos que quitar este punto de la intersección.

Vamos a hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

Se define la función $f \circ g$ como $f(g(x))$, luego

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 5.$$

Se define la función $g \circ f$ como $g(f(x))$, luego

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = \sqrt{3x + 5}.$$

Con este ejemplo vemos que la composición de funciones no es conmutativa.

Definición 2.1.8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función inyectiva. La *función inversa de* f, que denotamos f^{-1}, está definida sobre la imagen de f, $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$, de la siguiente forma:

Dado $y \in f(X)$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $f^{-1}(y) = x$. Dicho de otra forma, f^{-1} asigna al elemento $f(x)$ el elemento x. Se tiene entonces que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Se deduce de la definición que si existe la función inversa, ésta es única.

Transformación de funciones

A veces se puede dibujar la gráfica de una cierta función trasladando la de otra o tomando una simétrica a otra. A las traslaciones y simetrias las llamamos *transformaciones de una función*. Los tipos básicos de transformaciones son los siguientes:

Tomamos $c > 0$ y sea f una función.

- Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $y = f(x) + c$.
- Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $y = f(x) - c$.
- Traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda: $y = f(x + c)$.
- Traslación horizontal de c unidades hacia la derecha: $y = f(x - c)$.
- Reflexión o simetría respecto del eje x: $y = -f(x)$.
- Reflexión o simetría respecto del eje y: $y = f(-x)$.

2.2. Clasificación de funciones

Podemos clasificar a las funciones en grandes grupos con propiedades bien definidas. Un gran número de fenómenos de la vida real pueden representarse mediante modelos matemáticos construidos a partir de una colección de funciones denominadas *funciones elementales*. Las funciones elementales se distribuyen en tres categorías:

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Funciones polinómicas

El tipo más común de función algebraica es una función polinómica. Es aquella de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y los números a_i, que se llaman coeficientes, son números reales. Si $a_n \neq 0$ el entero n se llama grado del polinomio

El dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$.

Las funciones *constantes* $f(x) = c$ son los polinomios de grado cero y son las más sencillas posibles, ya que para todo valor x devuelven el mismo valor c. Su representación gráfica es una recta horizontal de altura c. Evidentemente estas funciones no son inyectivas.

Las funciones *lineales* tienen la forma $f(x) = ax$ donde a es un número real. Si a una función lineal le añadimos una constante, obtenemos una función *afín*, que tendrá la forma: $f(x) = ax + b$ con b un número real. Son los polinomios de grado uno. Su representación gráfica es una linea recta de pendiente a que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(1, a + b)$. La pendiente de la recta es a, por tanto, el ángulo α que forma la recta con el eje horizontal, es aquel cuya tangente es a.

Los polinomios de grado dos son las funciones cuadráticas. La forma general de estas funciones es $f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo a, b y c números reales. También se pueden expresar de forma general del siguiente modo: $f(x) = a(x+\alpha)^2+\beta$, con a, α y β números reales. Siempre se puede pasar de una forma a otra:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x^2 + \alpha^2 + 2x\alpha) + \beta$$

$$\Longrightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta.$$

De aquí deducimos:

$$2a\alpha = b \quad \text{y} \quad a\alpha^2 + \beta = c.$$

Las funciones cúbicas son los polinomios de grado tres, las funciones cuárticas son los polinomios de grado cuatro, etc.

Unos cuantos ejemplos de funciones racionales son los siguientes:

$$f(x) = 5; \quad f(x) = 2x - \sqrt{2}x; \quad f(x) = 3x^2 + 5x - \frac{1}{2}; \quad f(x) = \sqrt{2}x^3 - \pi x.$$

La función identidad, $f(x) = x$, la función cuadrática estándar ,$f(x) = x^2$, y la función cúbica estándar, $f(x) = x^3$, son también ejemplos de funciones polinómicas.

<u>Funciones racionales</u>

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$, $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0.$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q) : q(x) \neq 0\}.$$

Unos ejemplos de funciones racionales son los siguientes:

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-5}; \quad f(x) = x^{-3} + \sqrt{2}x.$$

Funciones potenciales

Si r es un número real distinto de cero, la función $f(x) = x^r$ se llama función potencial de exponente r:

1. Si r es un entero positivo, f es una función potencial entera, y en este caso $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Si r es un entero negativo, f es una función potencial recíproca, y en este caso $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
3. Si r es un número racional, f es una función radical. En este caso el dominio depende del signo de r y de la paridad del radical.

Ejemplos característicos de funciones potenciales son: la función hiperbólica $f(x) = \frac{1}{x}$ o la función raiz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$.

Una función se llama *algebraica* si se puede construir a partir de funciones polinómicas con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o radicación. Cualquier función racional es algebraica.

Las funciones que no son algebraicas se llaman *trascendentes*. Así, las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes.

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas más importantes son el seno, el coseno y la tangente.

El dominio de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es todo $\mathbb{R}$, sin embargo su imagen es sólo el intervalo $[-1, 1]$. Además, son periódicas de periodo 2π; esto es, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Por otra parte, la función $\tan x$ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, y como imagen, todo $\mathbb{R}$. La función $\tan x$ es periódica de periodo π; esto es, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Son también importantes las inversas de las anteriores: la función $arcsenx$, la función $\arccos x$ y la función $\arctan x$. Observemos que como las funciones seno, coseno y tangente no son inyectivas, para definir sus inversas tenemos que quedarnos con sólo una parte del dominio donde sí lo sean.

La función $\operatorname{sen} x$ es inyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y su imagen es $[-1, 1]$. De esta forma, la función $\operatorname{arc\,sen} x$ está definida en $[-1, 1]$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La función $\cos x$ es inyectiva en $[0, \pi]$, y su imagen es $[-1, 1]$. De esta forma, la función $\arccos x$ está definida en $[-1, 1]$ y su imagen es $[0, \pi]$.

La función $\tan x$ es inyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y su imagen es $\mathbb{R}$. Por tanto, la función $\arctan x$ está definida en $\mathbb{R}$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARíTMICAS

Las funciones lineales, cuadráticas, polinómicas y racionales se llaman funciones algebráicas. Las que no son algebráicas se llaman funciones trascendentes. Ejemplos de funciones trascendentes son las trigonométricas que acabamos de estudiar. En este apartado introducimos otras dos, las funciones exponenciales y las logarítmicas.

Una función exponencial, es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ (función exponencial de base a).

Debemos destacar entre todas las funciones exponenciales, la función exponencial de base el número e.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen es $(0, \infty)$. Son además inyectivas, luego tienen inversa.

A la inversa de la función exponencial de base a se le llama función logaritmo en base a, $f(x) = \log_a x$. Se tiene la relación $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

El dominio de la función logaritmo es $(0, \infty)$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

Debemos destacar entre las funciones logaritmo, la función logaritmo neperiano, que es el logaritmo en base e, $\ln x$.

Propiedades de las funciones exponenciales

Sean x, y números reales y a, b números reales positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $a \neq 1$, entonces $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.
2. Si $x > y$ y $a > 1$, entonces $a^x > a^y$.
3. Si $x > y$ y $0 < a < 1$, entonces $a^x < a^y$.
4. $a^x a^y = a^{x+y}$.
5. $\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$.
6. $(a^x)^y = a^{xy}$.

7. $(ab)^x = a^x b^x$.

8. Si $a > 1$, $\lim_{x \to infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$.

Ejemplo: Ecuaciones exponenciales

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $2^{x^2+3} = 16$.

2. $2^x 3^{x+1} = 108$.

1. Para resolver la primera ecuación, realizamos las siguientes operaciones:

$$2^{x^2+3} = 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3} = 2^4 \Leftrightarrow x^3 + 3 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

2. Para resolver la segunda ecuación, realizamos las siguientes operaciones:

$$2^x 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 2^x 3^x 3 = 3 \cdot 36 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^x = 36 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Propiedades de las funciones logarítmicas

Sea $a > 1$ y $b \neq 1$, entonces se verifica:

1. $x = y \Rightarrow \log_a x = \log_a y$.

2. $x > y$ y $a > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a y$.

3. $x > y$ y $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

4. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

6. $\log_a x^p = p \log_a x$, para todo número p.

7. Si $a > 1$ se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to c} \log_a x = \log(\lim_{x\to c} x).$$

Ejemplo: Cálculo de una expresión logarítmica

Calcular $\log_2(\frac{1}{8}) + \log_2 128$.
Podemos usar las propiedades anteriores de la siguiente forma:

$$\log_2(\frac{1}{8}) + \log_2 128 = \log_2(2)^{-3} + \log_2 2^7 = \log_2[2^{-3}(2^7)] = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\log_3(2x+1) - 2\log_3(x-3) = 2$.

Si una ecuación loigarítmica tiene base distinta de e Ó 10, podemos resolverla usando las reglas anteriores. El siguiente resultado suministra una regla útil para pasar de una base a otra.

Cambio de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

(Recuérdese que la definición de logaritmo exige que $a > 0$, $a \neq 1$).

Ejemplo (Cómo resolver una ecuación exponencial por cambio de base):

Resuelva la ecuación $6^{3x+2} = 200$.

Podemos realizar las siguientes operaciones:

$$6^{3x+2} = 200 \Leftrightarrow 3x + 2 = \log_6 200 \Leftrightarrow 3x = \log_6 200 - 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log_6 200 - 2}{3}.$$

Como la base e es la que se usa más a menudo, es útil enunciar algunas de las propiedades de los logaritmos neperianos:

Teorema 2.2.1 (Propiedades básicas de los logaritmos neperianos).

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln e = 1$.

3. *$e^{\ln x} = x$, para todo $x > 0$.*

4. *$\ln e^y = y$, para todo y.*

5. *$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ para todo $a > 0$, $a \neq 1$.*

6. *$a^x = e^{x \ln a}$ para todo $a > 0$, $a \neq 1$.*

2.2.1. Cónicas

Consideremos ahora unas curvas de gran interés, pero que no son en su mayoría gráficas de funciones, porque asignan más de un valor a un mismo número: Se trata de las *cónicas*, que son las secciones que forman un doble cono al cortarlo con un plano. Estas curvas son la *circunferencia*, la *elipse*, la *parábola* y la *hipérbola*.

La *circunferencia* se obtiene cuando el plano es perpendicular al eje del cono, y se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro interior llamado *centro*. La distancia al centro es el radio. su ecuación es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

donde (x_0, y_0) es el centro y r el radio.

La *elipse* aparece cuando el ángulo entre el plano y el eje del cono es menor que $\frac{\pi}{2}$ y mayor que la abertura del cono desde su eje. Se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a un par de puntos dados, los *focos*, es constante. Su *forma canónica*, que es la ecuación que la define cuando está centrada en el origen y con los focos sobre uno de los ejes es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los *semiejes* $(a, b > 0)$, y corresponden a la mitad del ancho y del alto de la elipse; los focos están situados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ si $a > b$ (donde $a^2 + b^2 = c^2$) y en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$ si $a < b$ (donde $b^2 = a^2 + c^2$). La suma de distancias a los focos es igual al doble del semieje mayor. Si trasladamos el centro de la elipse al punto (x_0, y_0), la ecuación correspondiente es:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

La *parábola* es la intersección del doble cono con un plano que forma con el eje un ángulo igual a la abertura del cono, y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto y una recta dados, llamados el *foco* y la recta *directriz* respectivamente. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es el *eje de la parábola* y el punto donde corta a la parábola es el *vértice*.

Cualquier polinomio de grado dos, $f(x) = ax^2+bx+c$, tiene como gráfica una parábola con vértice en la abcisa $x = -\frac{b}{2a}$. Las ramas de la parábola van "hacia arriba"si $a > 0$ y van "hacia abajo"si $a < 0$. También son parábolas las raices cuadradas de polinomios de grado uno, como $y = \sqrt{ax+b}$. En este caso la gráfica corresponde sólo a media parábola; la otra media corresponde a la función $y = -\sqrt{ax+b}$. La parábola completa puede escribirse como $y^2 = ax + b$; es evidente que esto no es una función puesto que a cada punto de su dominio (excepto al punto $x = -\frac{b}{a}$) le asigna dos valores.

La *hipérbola* se obtiene cuando el plano de corte forma un ángulo con el eje del cono más pequeño que la abertura del cono y es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a sus dos focos es constante. Su forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ son las pendientes de las rectas a las que se acerca la hipérbola, que reciben el nombre de *asíntotas*. Los focos están situados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, con $c^2 = a^2 + b^2$. Otra forma canónica de la hipérbola es

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde lo que cambia respecto de la hipérbola anterior es que ahora los focos están en $(0, c)$ y $(0, -c)$. Si las hipérbolas están centradas en el punto (x_0, y_0) en lugar de en el origen, las ecuaciones respectivas son:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

También son hipérbolas las gráficas de las funciones

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

con $ad \neq bc$ y $c \neq 0$, como por ejemplo $y = \frac{1}{x}$. Sus asíntotas son $y = \frac{a}{c}$ (asíntota horizontal) y $x = -\frac{d}{c}$ (asíntota vertical).

Las cónicas pueden verse como funciones si las consideramos a trozos para que estén bien definidas, tal y como hemos visto con el caso de las parábolas .

2.3. Límites de funciones

En esta sección se introduce la noción de *límite*. El desarrollo de este concepto es uno de los mayores descubrimientos en la historia de las matemáticas. Es el concepto más importante, y quizás también el más difícil, del Cálculo infinitesimal y es lo que hace que lo diferencie de otras ramas, como el Álgebra.

Para poder dar una definición rigurosa de límite, y poder introducir después variantes, vemos primero intuitivamente el concepto de límite de una función.

2.3.1. Noción intuitiva de límite

El límite de una función f es una herramienta para estudiar el comportamiento de la función cuando la variable independiente se va aproximando a un cierto valor x_0.

Definición 2.3.1 (Definición informal de límite de una función). Consideremos una función f. Intuitivamente diremos que la función f tiende hacia el límite l cerca de x_0 (donde l y x_0 son números reales) si $f(x)$ está tan cerca como se quiera de l haciendo que x esté suficientemente cerca de x_0.

Dicho de otra forma, si cuando x se va acercando al punto x_0, entonces $f(x)$ se va acercando a l.

Lo representaremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a l cuando x tiende a x_0 por ambos lados, entonces decimos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0. Este límite va a existir, si y sólo si al acercarnos a x_0 por la derecha y por la izquierda, el comportamiento de la función es el mismo. Esto sugiere que se puedan definir los límites laterales. Por tanto, el límite de una función existirá cuando existan los límites por la derecha (cuando x se acerca a x_0 por la derecha) y por la izquierda (cuando x se acerca a x_0 por la izquierda) y son iguales.

Desde luego esta definición es insuficiente para un desarrollo teórico porque no hemos dado un significado preciso a las expresiones:

" se puede aproximar tanto a l como se quiera"
o
"suficientemente cerca de x_0".

Observación

1. No es necesario que el punto x_0 pertenezca al dominio de la función.

2. En general, el límite puede no existir. En caso de que existe, este límite es necesariamente único.

Teniendo en cuenta la definición que acabamos de dar, podemos calcular límites de funciones graficamente (conociendo la gráfica de la función, vemos cómo se comporta cuando nos acercamos a un punto) o numéricamente construyendo una tabla de valores cercanos al punto donde queremos estudiar el límite. Hay que hacer notar que, al usar una tabla de valores de una función para calcular un límite, podemos engañarnos. Lo único que podemos afirmar es que, si el límite existe, entonces se puede calcular mediante una tabla. Para estudiar el límite de una función definida a trozos en el punto que separa las ramas, es necesario recurrir a los límites laterales.

Es importante tener en cuenta que, en cualquier caso, la cercanía de x a x_0, depende de la cercanía que queremos para $f(x)$ a l. Esto nos da la idea de la definición formal de límite. Podemos dar una definición formal de límite por etapas. Debemos tener claro:

1. Hacer $f(x)$ próximo a l, significa hacer $|f(x) - l|$ pequeño (y lo mismo para x y x_0).

2. Hacer $|f(x) - l|$ "tan pequeño como queramos"significa hacer $|f(x) - l| < \varepsilon$ para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ que consideremos.

3. Que x esté "suficientemente cerca de x_0"significa dar condición a x (hacer x próximo a x_0) para que $|f(x) - l|$ sea tan pequeño como queramos. En otras palabras:

   Fijada una cantidad $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Observemos además que decir, $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$, equivale a decir $0 < |x - x_0| < \delta$.

Con estas observaciones ya estamos en condiciones de dar la definición formal de límite:

Definición 2.3.2 (Definición formal de límite). El límite de una función f cuando x tiende a x_0 es l, y escribiremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Observemos que en la definición de límite que hemos dado " x"puede acercarse al punto x_0 de cualquier forma. Sin embargo, podemos restringir este movimiento haciendo que se acerque sólo por la derecha ($x > x_0$) o sólo por la izquierda ($x < x_0$). Este hecho da lugar a definir los límites laterales como sigue:

Definición 2.3.3 (Límites laterales). Decimos que una función f tiene límite por la derecha (respectivamente por la izquierda) un número real l cuando x tiende a x_0 por la derecha (respectivamente por la izquierda) si para todo $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$ (respectivamente $0 < x_0 - x < \delta$) entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Los límites laterales a derecha e izquierda se representan respectivamente por:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Además de para calcular límites de funciones definidas a trozos, o las funciones escalón, los límites laterales son necesarios para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, como veremos en la próxima sección.

Cuando el límite por la derecha no es igual al límite por la izquierda, el límite (bilátero) no existe, como lo explica el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 (Existencia de un límite). *Si f es una función y x_0 y l son números reales, el límite de f cuando x se acerca a x_0 es l si y sólo si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad y \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Límites que no existen

Puede ocurrir que una función f no tenga un límite (finito) cuando $x \to x_0$. En este caso decimos que f *diverge* cuando x tiende a x_0.

Veamos algunos casos en los que el límite no existe.

Caso 1. Una función que crece o decrece de manera no acotada cuando x tiende a x_0 se dice que *diverge a infinito en* x_0. En este caso escribiremos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{si } f \text{ crece de manera no acotada}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{si } f \text{ decrece de manera no acotada}$$

Ejemplo

Calculemos $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Los valores correspondientes a la función crecen arbitrariamente a medida que x se aproxima a cero. Esto quiere decir que, eligiendo un valor de x lo bastante cercano a 0, se puede lograr que $f(x)$ sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de x que esten entre $\frac{1}{10}$ y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \to f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Caso 2. La función se aproxima a números diferentes por la derecha y por la izquierda de x_0.

Ejemplo

Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Evidentemente esta función no está definida en 0. Para valores positivos de x

$$\frac{|x|}{x} = 1, \quad x > 0$$

y para los negativos

$$\frac{|x|}{x} = -1, \quad x < 0.$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime x a 0, existiran tanto valores positivos de x como valores negativos de x que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. De manera específica, si δ es un número positivo, entonces los valores de x que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$ se pueden clasificar en los intervalos $(-\delta, 0)$ y $(0, \delta)$. Los valores de x en el primer intervalo dan $\frac{|x|}{x} = -1$ y los valores de x en el segundo intervalo dan $\frac{|x|}{x} = 1$. Esto implica que el límite no existe.

Caso 3. La función oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a x_0.

Ejemplo

Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Podemos comprobar fácilmente que la función $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ tienen infinitas oscilaciones entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. Por ejemplo, $f(x) = 1$ para $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}, \ldots,$ y $f(x) = -1$ para $x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots$. Como los valores de $f(x)$ no se aproximan a ningún valor l cuando x tiende a 0, el límite no existe.

2.3.2. Cálculo analítico de los límites

Es importante ser capaz de calcular límites fácil y eficazmente, pero los métodos gráficos o de tablas pueden no ser lo uno ni lo otro. Vamos a enunciar algunas reglas sobre límites y veremos cómo usarlas, junto con el álgebra, para calcular límites.

Propiedades de los límites

Damos a continuación una lista de propiedades que se pueden usar para calcular una gran cantidad de límites.
Estas propiedades se usan repetidamente y, además, son útiles para deducir otras.

Sea x_0 un número real tal que las funciones f y g tienen límites l y m respectivamente en x_0. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Regla de la constante: $\lim_{x\to x_0} k = k$ para toda constante k.

2. Regla de la identidad: $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

3. Regla del múltiplo: $\lim_{x\to x_0} sf(x) = s\lim_{x\to x_0} f(x) = sl$ para toda constante s. Es decir, el límite del producto de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.

4. Regla de la suma: $\lim_{x\to x_0}[(f+g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l+m$. Es decir, el límite de la suma es la suma de los límites.

5. Regla de la diferencia: $\lim_{x\to x_0}[(f-g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = l-m$. Es decir, el límite de la diferencia es la diferencia de los límites. (Esta regla se obtiene como consecuencia de las dos anteriores).

6. Regla del producto: $\lim_{x\to x_0}[(f\cdot g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l\cdot m$. Es decir, el límite del producto es el producto de los límites.

7. Regla del cociente: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{g}(x)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$, siempre que $m\neq 0$. Es decir, el límite del cociente es el cociente de los límites siempre que el límite del denominador sea distinto de 0.

8. Regla de la potencia: $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$, donde n es un número racional y existe el límite de la derecha. Es decir, el límite de una potencia es la potencia del límite.

Puede ocurrir que la suma, diferencia, producto o cociente de funciones tenga límite, sin que ninguna o alguna de las funciones tenga límite. Hay que entender bien las reglas aritméticas que hemos dado; en caso de que las dos funciones que intervienen en la operación aritmética tengan límite, dicha operación tiene límite, en otro caso no podemos asegurar nada.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y $g(x) = -\frac{|x|}{x}$ no tienen límite en el punto 0, pero su suma es la función nula, que evidentemente tiene límite en 0.

Damos a continuación otra regla muy importante y de gran utilidad para el cálculo de límites:

Regla del encaje o criterio del sandwich

Si, en un cierto intervalo de centro x_0 se tiene

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

entonces también se tiene

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Lo que quiere decir esto es que si una función está encajada entre otras dos con igual límite, entonces esta función tiene el mismo límite.

Se pueden usar las reglas anteriores para calcular una gran cantidad de límites. No demostraremos ninguna de las reglas, pero algunas de ellas son muy fáciles de probar.

Límite de funciones polinómicas y racionales

- Si P es una función polinómica, entonces

  $$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

- Si R es una función racional definida por $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, entonces

  $$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

  siempre que $Q(x_0) \neq 0$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2}(2x^5 - 9x^3 + 3x^2 - 11), \qquad \lim_{x\to -1}\frac{x^3 - 3x + 7}{5x^2 + 9x + 6}.$$

Claramente, usando las reglas de la suma, diferencia, múltiplo, constante y potencia, se llega a:

$$\lim_{x\to 2}(2x^5 - 9x^3 + 3x^2 - 11) = -7$$

y como el denominador de la función racional tiene límite distinto de cero en el punto donde tomamos límite, podemos usar la regla del cociente para tener:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3 - 3x + 7}{5x^2 + 9x + 6} = \frac{9}{2}.$$

Vemos que el límite de las funciones polinómicas y racionales se calcula por simple sustitución directa (siempre que sea posible). Estas funciones son dos de los tipos básicos de funciones algebraicas. Vemos qué ocurre con el tercer tipo de función algebraica: las que contienen un radical

Límite de una función radical

Si n es un entero positivo, el siguiente resultado es válido para todo x_0 si n es impar, y para todo $x_0 \geq 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}.$$

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 - 3x - 2}$

Usando la regla de la potencia

$$\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 - 3x - 2} = \lim_{x\to -2}(x^2 - 3x - 2)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

El siguiente resultado aumentará notablemente la capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límie de una función compuesta:

Límite de una función compuesta

Si f y g son dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ y $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(l).$$

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2-10}$.

Como $\lim_{x\to 3} 2x^2 - 10 = 8$ y $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$,

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2-10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las tres funciones trigonométricas principales también tienen esta propiedad:

Límite de funciones trigonométricas

Sea x_0 un punto del dominio de la función trigonométrica dada, entonces

- $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$ $\lim_{x\to x_0} \sec x = \sec x_0$.
- $\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ $\lim_{x\to x_0} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} x_0$.
- $\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ $\lim_{x\to x_0} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x_0$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x).$$

usando la regla de la potencia, la regla de la diferencia y la regla de la constante obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = [\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x]^2 = 0^2 = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} \cos x = 1-1 = 0.$$

Uso del álgebra en el cálculo de límites

A veces no se puede calcular un límite de una función f en un punto x_0 por sustitución directa. En este caso, necesitamos una estrategia que permita calcular el límite de una forma fácil. Esta estrategia consiste en buscar una función que coincida con f para todos los valores de x salvo en $x = x_0$, como se desprende del siguiente resultado:

Teorema 2.3.2. *Sea x_0 un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq x_0$ en un intervalo abierto que contiene a x_0. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0, entonces también existe el límite de $f(x)$ y*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Ejemplos

1. Hállese $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Sea $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$. Vemos que tanto numerador como denominador se anulan para $x = 1$, luego no se puede calcular el límite por sustitución. Factorizando y cancelando factores, f se puede escribir como

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 = g(x), \qquad \text{para } x \neq 1.$$

De tal modo que para todos los valores distintos de 1, las funciones f y g coinciden. Como g es una función polinómica, el límite se calcula por sustitución directa, y por tanto f tiene el mismo límite en ese punto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3.$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

De nuevo tanto numerador como denominador se anulan cuando $x = 4$, luego el límite no se puede calcular por sustitución directa. En lugar de esto, racionalizamos el numerador multiplicando y dividiendo por $\sqrt{x}+2$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Límites de funciones definidas a trozos

Para calcular el límite de una función definida a trozos, vemos primero si el punto donde tomamos límite es uno de los valores que separan trozos. Si esto ocurre, no queda más remedio que estudiar los límites laterales separadamente

Ejemplo

Hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Observemos que $f(0)$ no está definido y que es necesario considerar límites a derecha e izquierda.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+5) = 5$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x) = 0$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

2.3.3. Ampliación del cálculo de límites

A continuación damos algunos ejemplos de límites importantes sin demostración.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to x}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m,\ (m\in\mathbf{R}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad (a>1).$$

2.4. Continuidad

Informalmente e intuitivamente hablando, una función continua es aquella cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, no tiene huecos ni saltos. Sin embargo, esta caracterización geométrica es demasiado simple. La continuidad es un concepto importante y complicado, que juega un papel central en el desarrollo ulterior del Cálculo. Para dar una definición más rigurosa, hay que abordar previamente, como hemos hecho, el concepto de límite de una función en un punto, ya que el concepto de continuidad y el de límite están intimamente relacionados.

Consideremos qué condiciones debe satisfacer una función, f, para que sea continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

- En primer lugar, $f(x_0)$ debe estar definido.
- En segundo lugar, f no puede tener ningún salto en $x = x_0$.
  Esto significa que si "x está próximo a x_0", entonces "$f(x)$ debe estar próximo a $f(x_0)$". Esta condición se satisface si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y coincide con $f(x_0)$.

Definición 2.4.1. Sea f una función real de variable real. Decimos que f es *continua en un punto* x_0 si:

- $f(x_0)$ está definido.
- Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Una función que no es continua en x_0 se dice que tiene una *discontinuidad* en ese punto.

La primera condición se refiere al dominio de la función e ignora lo que ocurre en puntos $x \neq x_0$, mientras que la segunda se refiere a puntos cercanos a x_0 e ignora lo que ocurre en el punto x_0. La continuidad, por tanto, se refiere a la totalidad (en

$x = x_0$ y en los puntos cercanos) e intenta ver si ambos son similares de alguna manera.

Si f es continua en $x = x_0$, la diferencia entre $f(x)$ y $f(x_0)$ es pequeña siempre que x esté próximo a x_0 porque $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Geométricamente esto significa que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f convergen hacia el punto $(x_0, f(x_0))$ cuando $x \to x_0$, y esto es lo que garantiza que la gráfica no tenga fracturas en $(x_0, f(x_0))$, es decir que sea sin cortes ni huecos.

El *dominio de continuidad* de una función es el conjunto de puntos donde la función es continua.

Ejemplos de funciones continuas

1. Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Es decir, son continuas todas las funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

2. Las funciones racionales (cociente de dos polinomios), son continuas en todo su dominio.

El dominio de una función racional, son todos los números reales que no anulen al denominador.

3. Las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios.

4. La función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. La función signo es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{signo}x = s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Se pueden usar las propiedades de los límites dadas en la seción anterior para probar un teorema de continuidad. Este teorema afirma que se pueden combinar funciones continuas de ciertas formas y seguir teniendo funciones continuas.

Teorema 2.4.1 (Propiedades de las funciones continuas). *Sea s un número real, y f y g dos funciones continuas en un punto $x = x_0$, entonces las siguientes funciones son continuas en $x = x_0$:*

- *Múltiplo escalar: sf.*
- *Suma y diferencia: $f + g$ y $f - g$.*
- *Producto: $f \cdot g$.*
- *Cociente $\frac{f}{g}$, si $g(x_0) \neq 0$.*
- *Composición $f \circ g$, si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$.*
  Esta propiedad se deduce de la propiedad de límites: si f es continua en l y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$, entonces
  $$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(l) = f[\lim_{x\to x_0} g(x)].$$
  Hablando a groso modo, esta regla dice que el límite de una función continua es la función del valor límite. La composición de funciones continuas quiere decir que una función continua de una función continua es continua.

Cuando una función no es continua, es decir, cuando no se verifica alguna de las condiciones en la definición de continuidad, hemos dicho que la función es *discontinua*. Las funciones no son continuas por distintos motivos, es decir, La gráfica de una función se puede “interrumpir ” en un punto x_0 por varias razones. Esto da lugar a distinguir distintos tipos de no ser una función continua y hablar de “tipos de discontinuidad”. Las discontinuidades se clasifican en dos categorias: *evitables o removibles* e *inevitables o no removibles*, y estas últimas pueden ser *de salto finito* o *de salto infinito*. Una discontinuidad es evitable o removible si f se puede hacer continua redefiniendo apropiadamente $f(x_0)$. Nosotros no vamos a profundizar en estas distinciones.

2.4.1. Funciones continuas en un intervalo

Hay que hacer una precisión sobre el concepto de función continua en un intervalo. Tenemos que aprender primero cómo manejar los extremos del intervalo.

La continuidad está definida en términos de límite. De igual forma que se pueden considerar límites laterales, podemos definir también la continuidad lateral:

Definición 2.4.2. Sea f una función real de variable real. Decimos que f es *continua por la derecha* (respectivamente *continua por la izquierda* en un punto x_0 si:

- $f(x_0)$ está definido.
- Existe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (respectivamente $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$).
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (respectivamente $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a ciertos intervalos

Definición 2.4.3. Se dice que una función es *continua en un intervalo abierto* (a, b), si es continua en todos los puntos del intervalo.

Se dice que una función es *continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$, si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Se dice que una función es *continua en un intervalo semiabierto* $[a, b)$, si es continua en (a, b) y continua por la derecha en a.

Se dice que una función es *continua en un intervalo semiabierto* de la forma $(a, b]$, si es continua en (a, b) y continua por la izquierda en b.

A veces es difícil disponer de la gráfica de una función. La tarea de ver si una función es continua se centra en ciertos valores. Lo primero que hay que hacer es identificar esos valores y estudiar el comportamiento de la función en ellos. Por darle nombre a la situación, definamos un *punto sospechoso* como uno donde la definición analítica de la función cambia, o como uno que produce división por cero en la definición de la función.

Ejemplos

1. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad -5 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \leq < 5 \end{cases} .$$

Hallemos los intervalos donde la función es continua.

El dominio de la función es el intervalo $[-5,5)$, así que habrá que analizar si f es continua en los puntos de $(-5,5)$, y si es continua por la derecha en el punto $x = -5$. Entre los ejemplos que hemos visto de funciones continuas, estan las funciones polinómicas. Estudiando f vemos que $f(x) = 3 - x$ en $[-5,2)$, que es una función polinómica, y por tanto continua, así que f es continua en $(-5,2)$ y continua por la derecha en $x = -5$. Usando el mismo argumento vemos que f también es continua en $(2,5)$. El punto sospechoso es aquel en el que la función cambia, luego en este caso $x = 2$. Analizamos la continuidad en este punto:

- $f(2) = 0$, luego f está definida en $x = 2$.
- La segunda condición de continuidad requiere que se pueda calcular el límite de la función en el punto $x = 2$. Para ello, tenemos que calcular los límites laterales, porque la expresión de la función es distinta si nos acercamos a $x = 2$ por la derecha o por la izquierda.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 2 = 0;$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3 - x = 1 \neq 0.$$

  Como los límites laterales son distintos, no existe el límite en el punto $x = 2$.
- La tercera condición no se puede verificar en el punto $x = 2$.

Por tanto f no es continua en $x = 2$. Los intervalos donde la función f es continua son: $[-5,2)$ y $(2,5)$.

2.4.2. Teorema de Bolzano. Teorema de los valores intermedios.

Destacaremos dos resultados fundamentales sobre continuidad: el teorema de Bolzano y el teorema de los valores intermedios.

Teorema 2.4.2 (Teorema de Bolzano). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

<u>**Observaciones**</u>

1. La condición $f(a) \cdot f(b) < 0$ significa que la función toma valores con distinto signo en los extremos del intervalo. Entonces intuitivamente, si la función es continua en algún momento tiene que atravesar el eje de las x, y por tanto habrá un valor donde la función se anulará.
2. El teorema asegura que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. Podemos asegurar que la raiz está en el intervalo abierto (a,b), puesto que ni $f(a)$ ni $f(b)$ son cero.
3. Una utilidad, bastante importante del teorema de Bolzano, es probar la existencia de raices de una función, aunque no nos dice nada sobre el valor de esta raiz. Tampoco dice nada sobre el número de raices que hay en el intervalo.
4. El teorema también se conoce con el nombre de teorema de *localización de raices*.

Ejemplo

Probar que la ecuación $\operatorname{sen} x = x$ posee alguna solución en el intervalo $(-1, 1)$.

La ecuación $\operatorname{sen} x = x$ podemos escribirla $\operatorname{sen} x - x = 0$. (Esta igualdad nos da la idea para definir la función candidata para usar el teorema de Bolzano).
Consideremos la función $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x$.
Esta función es continua por ser diferencia de funciones continuas. Además

$$f(-1) = \operatorname{sen}(-1) - (-1) > -1 + 1 = 0.$$

$$f(1) = \operatorname{sen}(1) - 1 < 1 - 1 = 0.$$

Estamos en las hipótesis del teorema de Bolzano, luego podemos asegurar que existe $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = \operatorname{sen} c - c = 0$, o equivalentemente $\operatorname{sen} c = c$.

Dos consecuencias importantes del teorema de Bolzano son los siguientes teoremas:

Teorema 2.4.3. *Si f es una función continua en un intervalo I y no vale cero en ningún punto, entonces no cambia de signo en todo el intervalo, es decir, es siempre positiva, o siempre negativa.*

Teorema 2.4.4 (Teorema de los valores intermedios). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Si k está entre $f(a)$ y $f(b)$ (esto es, $f(a) \leq k \leq f(b)$ ó $f(b) \leq k \leq f(a)$), entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$.*

Si f es una función continua en un intervalo cerrado, y si x toma todos los valores entre a y b, entonces $f(x)$ tiene que tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Observaciones

1. Hablando intuitivamente, si f es una función continua en un intervalo, se puede dibujar su gáfica en ese intervalo "sin levantar el lápiz del papel". Esto es, si $f(x)$ varia continuamente desde $f(a)$ hasta $f(b)$ cuando x va desde a hasta b, entonces debe alcanzar cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta característica de las funciones continuas se llama la *propiedad del valor intermedio*.
2. Una consecuencia importante del Teorema del Valor Intermedio es que nos permite hallar, aproximadamente, raices de la ecuación $f(x) = 0$, por tanto, el Teorema de Bolzano se puede obtener como consecuencia del teorema de los valores intermedios.
3. Si f no es continua en algún punto del intervalo, la conclusión del teorema no tiene por qué darse.

   Ejemplo

   Consideremos la función
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si } \ -2 \leq x < 0 \end{cases}.$$
   La función es continua en $[-2, 0) \cup (0, 2]$ (que no es un intervalo). Además $f(-2) < 0 < f(2)$. Sin embargo no existe ningún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$.
4. La función f puede tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ sin ser continua en $[a, b]$

   Ejemplo

   Consideremos la función
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } \ 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$
   La función f es continua en $[0, 1) \cup (1, 2]$ y toma todos los valores entre $f(0)$ y $f(2)$.

Los teoremas de Bolzano y de los valores intermedios se llaman *teoremas de existencia*. Esto quiere decir que afirman que existen unos valores pero no nos dan métodos para calcularlos ni hablan del número de puntos que lo cumplen. Existen métodos para aproximar raices. Nosotros no lo estudiaremos.

2.5. EJERCICIOS TEMA 2

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x-1, \quad g(x) = \frac{(2x-1)(x+3)}{x-3}, \quad h(x) = \sqrt{x+2}, \quad i(x) = \frac{4}{5-\cos(1-2x)},$$

$$j(x) = \frac{\ln(1+x)}{x-1}, \quad k(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-4}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad l(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x-4}},$$

$$m(x) = \sqrt{x^2+2x}, \quad p(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}, \quad q(x) = a^{\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}, \quad a > 0.$$

2. Averigüe si las funciones f y g son iguales o pueden ser iguales en algunos casos:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+2}$ y $g(x) = x$.

   b) $f(x) = \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}$ y $g(x) = 3x+1$.

3. Calcular los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 2}(2x^4-9x^3+3x^2-11), \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x+7}{5x^2+9x+6}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x-2},$$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$, $\quad \lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

4. Hallar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x^2-3x-2}, \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}}{x}$, $\quad \lim_{x\to 3} e^{\frac{x^3+8}{x-2}}$, $\quad \lim_{x\to 2}\ln(x^2+1)$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

5. Usando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, determinar los límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}.$$

6. Determinar los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}+x}{1-2x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}.$$

7. Calcular los siguientes límites (si existen) o explicar por qué no existen:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right), \quad \lim_{x\to 3} f(x) \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si} \quad x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x = 3 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}.$$

8. Hallar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{2x^3+x^2-2}, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{-x^4-x}{x^2+x+1}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{2^x+3}{2^x-3},$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-x, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x+\operatorname{sen}^3(x)}{5x+6}, \quad \lim_{x\to \infty} x(1+\operatorname{sen}^2(x)).$$

9. Determinar si las siguientes funciones son continuas en el intervalo dado:
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(0,1)$.
   b) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $(0,2)$.
   c) $h(x) = x^3 - x$ en $(-\infty, \infty)$.

10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x}{x-4}, \quad g(x) = \frac{x^2-25}{x-5}, \quad h(x) = \frac{1}{(x-1)(x-5)}, \quad i(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

11. Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

$$f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \quad h(x) = \frac{1}{x^4-26x^2+25}.$$

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \frac{4}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{4}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}.$$

13. Estudiar el número de raíces de la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$ en el intervalo $[1,2]$.

14. Probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases},$$

es continua por la izquierda en 2, pero no lo es por la derecha.

15. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} (x-5)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-5}\right) & \text{si} \quad x \neq 5 \\ p & \text{si} \quad x = 5 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-5}\right) & \text{si} \quad x \neq 5 \\ q & \text{si} \quad x = 5 \end{cases},$$

hallar, si es posible, los valores de p y q que hacen que f y g sean continuas en $\mathbb{R}$.

16. Para cada una de las funciones siguientes, determinar cuáles son acotadas superior o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles alcanzan sus valores máximos: $f(x) = x^2$ en $(-1,1)$; $f(x) = x^3$ en $(-1,1)$; $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ en $[0,\infty)$; $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(x) + \sqrt{1+a^2})$ en $[0, a^3]$.

17. Probar que $x^4 - 2\sqrt[3]{x} = 1$ para al menos un punto c del intervalo $[-1,1]$.

18. Probar que cada una de las siguientes funciones posee al menos una raíz real:

$$f(x) = x^3 - x + 3, \quad g(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1, \quad h(x) = x^5 + x + 1, \quad i(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

19. En cada caso, demostrar que existe un número x tal que:

    a) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2(x)} = 119.$

    b) $\cos(x) = x.$

20. Probar que la ecuación

$$x + \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, \pi]$.

21. Supongamos que f y g son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y que $f(a) < g(a)$ pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

22. Demostrar que si un niño medía 1'50 m con 13 años y 1,62 m al cumplir 14 años, entonces en algún momento tuvo que medir 1'55 m.

Capítulo 3

Cálculo Diferencial

En este tema centraremos nuestra atención en el concepto de derivada, y daremos reglas para calcularlas.

La derivada es una de las ideas fundamentales del Cálculo y la piedra angular de las matemáticas superiores.

Si conocemos la mecánica de la derivación, podemos pensar que ya conocemos todo lo que va a contener este tema, pero, la idea de derivadas es mucho más que las reglas para calcularlas. Además de calcular derivadas hay que entender el concepto de derivada si se quiere ser capaz de usar las matemáticas para hacer juicios en la investigación científica.

Este capítulo es de fundamental importancia dentro del Cálculo. Vamos a desarrollar las ideas principales del Cálculo Diferencial. El concepto central dentro del Cálculo Diferencial es el concepto de derivada.

3.1. El concepto de derivada. Recta tangente

Los antiguos matemáticos griegos ya construian tangentes a circunferencias y otras curvas sencillas. Sin embargo, antes del siglo XVII, no se tenía un procedimiento para hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Para resolver este problema, Isaac Newton usó un método del matemático francés Pierre de Fermat. Este método conduce a la definición de derivada.

3.1.1. El concepto de derivada

Idea física.

Vamos a hablar de un problema físico en el que aparece la derivada. Es el problema de la velocidad instantanea.

Consideremos un movil que se desplaza sobre una recta (movimiento unidimensional). Sea $s(t)$ la posición del movil en el instante de tiempo t.

Objetivo: determinar la velocidad instantanea del movil en un instante de tiempo particular, t_0.

Sea t un instante de tiempo con $t_0 < t$ y consideremos $s(t_0)$ y $s(t)$. La velocidad media del movil entre los instantes t_0 y t es:

$$\frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado en recorrerlo}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Nos preguntamos si podemos definir la velocidad instantanea en el instante de tiempo t_0.

Si hacemos medias en intervalos de tiempo muy pequeños $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ estará "cerca"de la "velocidad instantanea.en" t_0.

Así, se define la "velocidad instantanea"de la partícula en el instante t_0 como

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Idea geométrica.

Nos planteamos ahora un problema diferente: el cálculo de la recta tangente.

En matemáticas elemental se define la tangente a una circunferencia como una recta del plano que corta a la circunferencia en un único punto. Este punto de vista es demasiado restrictivo para el Cálculo. Vamos a estudiar el concepto general de tangente a una curva (no necesariamente una circunferencia) en un punto dado. Dada la gráfica de una función $y = f(x)$, y dado un punto x_0 del dominio de f, queremos determinar la recta tangente a la gráfica en el punto $P(x_0, f(x_0))$.

Para definir una recta en el plano, necesitamos un punto por el que pasa y la pendiente de dicha recta. En general, no es un asunto sencillo determinar la pendiente de la recta tangente. La razón es que para calcular esta pendiente necesitamos conocer por ejemplo la inclinación de la recta con el eje horizontal, o conocer dos puntos de la misma, luego aparte del punto de tangencia, hay que conocer otro punto. La estrategia consiste en aproximar la recta tangente por otras rectas que pasan por el punto P y cuyas pendientes se puedan calcular fácilmente (porque se conozcan dos puntos). Se tratan de las rectas secantes, que son rectas que cortan a la curva pero no son tangentes, las cuales pasan por P (el de tangencia) y otro punto $Q(x, y)$.

Está claro que una recta secante es una buena aproximación de la recta tangente, siempre que el punto Q esté próximo a P (mientras más próximo mejor aproximación), ya que mientras más próximo esté x de x_0, más próximo está $f(x)$ de $f(x_0)$. Esto da una idea intuitiva de cómo definir la pendiente de la recta tangente.

La pendiente de la recta secante a la gráfica en los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x, f(x))$ es:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para hacer que la recta secante se aproxime a la recta tangente, se mueve Q hacia P sobre la gráfica de f, por el procedimiento de hacer tender x a x_0. Cuando esto ocurre, la pendiente de la recta secante se debe aproximar a la pendiente de la recta tangente en P.

Esto nos lleva a la siguiente definición:

<u>Pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.</u>

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número dado por la fórmula:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

siempre y cuando el límite exista.

Hay otro procedimiento distinto para calcular la recta tangente a una función f en el punto $P(x_0, f(x_0))$; y es, determinando el ángulo α que forma la gráfica $y = f(x)$ en x_0 con el eje de abcisas

Gráficamente podemos comprobar que el ángulo α_x se puede determinar a partir de su tangente del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}(\alpha_x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ejercicios:

1. Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $P(-1, 1)$.
2. Calcula la fórmula de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$.

Todas las ideas que hemos analizado anteriormente, dan pie a la definición formal de derivada:

Definición 3.1.1. Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$.

Se dice que f es *derivable en* x_0 si existe (es un número real) el siguiente límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *la derivada de la función* f *en el punto* x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

Se dice que f es *derivable en* (a, b) si es derivable en todos los puntos de (a, b).

Si consideramos el conjunto $A = \{x \in (a, b) : f \text{ es derivable en } x\}$ y $A \neq \emptyset$, podemos definir la función

$$f' : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x).$$

A esta función se le llama *función derivada de* f. (A veces, por abuso del lenguaje se le llama simplemente la derivada de f).

Observaciones

1. f es derivable en x_0 si y sólo si existe (es un número real) el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(Basta comprobar la igualdad

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.)$$

2. El concepto de derivada es local: si f y g son dos funciones que coinciden en un intervalo que contiene al punto x_0 (es decir, son iguales en ese intervalo), entonces f es derivable en x_0 si y sólo si g es derivable en x_0, y en este caso $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Ejemplos

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, ¿ es f derivable en x_0 ?.

Para todo $x \neq x_0$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Luego f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$. Como esto es válido para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 0.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. (Función identidad).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para todo $x \neq x_0$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Luego f es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 1.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para todo $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Luego f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 2x.$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$.

Esta función va a ser derivable en $\mathbb{R} - 0$. (En los puntos donde aparecen "picos", la función no es derivable).

Sea $x_0 > 0$. Podemos considerar la función $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Debido al caracter local de la derivada, estudiar la derivabilidad en x_0 de la función f equivale a estudiar la derivabilidad en x_0 de la función g.

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \quad \text{para todo } x \neq x_0,$$

luego si $x_0 > 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 1.$$

La función f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 1$.

De igual forma, si $x_0 < 0$, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = -1$.

Estudiemos la derivabilidad en 0. Para todo $x \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Por tanto, f no es derivable en 0.

$$f' : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

DERIVADAS LATERALES .

En la definición de derivada tiene sentido considerar los ímites laterales, dando lugar a los conceptos de derivadas laterales:

Definición 3.1.2. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$.

La función f es *derivable por la derecha en* x_0 si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *derivada de* f *en* x_0 *por la derecha* y lo denotamos $f'_+(x_0)$:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La función f es *derivable por la izquierda en* x_0 si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *derivada de* f *en* x_0 *por la izquierda* y lo denotamos $f'_-(x_0)$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como consecuencia de estas definiciones se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Una función, f, es derivable en un punto x_0 si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0 y la derivada por la derecha y por la izquierda coinciden*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

La función f es derivable por la izquierda y por la derecha en 0 y

$$f'_+(0) = 1, \quad \text{y} \quad f'_-(0) = -1.$$

Sin embargo, puesto que las derivadas laterales no coinciden, f no es derivable en 0.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Si $x_0 > 0$, $f(x) = x$ para todo $x \in \left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$, luego f es derivablle en x_0 y $f'(x_0) = 1$.

Si $x_0 < 0$, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \left(x_0, \frac{|x_0|}{2}\right)$, luego f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 2x_0$.

Veamos si f es derivable en 0. Para ello estudiemos las derivadas laterales

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{luego} \quad f'_+(0) = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0 \quad \text{luego} \quad f'_-(0) = 0.$$

Vemos que f es derivable por la izquierda y por la derecha en 0, pero no es derivable en 0.

Ejercicio.
Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

En general, una función no va a ser derivable en los puntos donde la gráfica tenga un "pico". Tampoco va a ser derivable en los puntos de discontinuidad según el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Si f es derivable en x_0 por la derecha entonces f es continua en x_0 por la derecha.*
2. *Si f es derivable en x_0 por la izquierda entonces f es continua en x_0 por la izquierda.*
3. *Si f es derivable en x_0 por la derecha y por la izquierda entonces f es continua en x_0.*

Observemos que en el tercer apartado del teorema no se pide que f sea derivable en x_0. Las derivadas laterales no tienen que coincidir. Por ejemplo; $f(x) = |x|$, no es derivable en 0, lo es por la izquierda y por la derecha.

Corolario 3.1.3. *Si una función f es derivable en un punto x_0 entonces f es continua en x_0.*

Observación

El recíproco del resultado anterior no es cierto:

1. Una función f puede ser continua en un punto sin ser derivable en ese punto.

   Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

2. Una función f puede ser continua en un punto sin tener derivadas laterales en ese punto.

   Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}.$$

   La función f es claramente continua en 0. Estudiemos la derivabilidad en 0.

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{\sqrt{-x}}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sqrt{-x}}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty.$$

   Vemos que no existen las derivadas laterales en 0.

   Este ejemplo muestra que el tercer apartado del teorema anterior no es una equivalencia.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

La función f no es derivable en 0, porque no es continua en 0. No es derivable ni por la derecha ni por la izquierda en 0, porque no existen los l'ımites $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

2. Consideremos la función $f:(-1,1)\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}.$$

¿Es f derivable en 0 ?.

Lo primero que hay que preguntarse es si f es continua en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0),$$

por tanto f es continua en 0.

Para todo $x\neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como no existe $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, la función f no es derivable en 0.

3. Consideremos la función $f:(-1,1)\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}.$$

¿Es f derivable en 0 ?.

Para todo $x\neq 0$,

$$0\leq \left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq x^2,$$

luego usando la regla de sandwich podemos asegurar que $\lim_{x\to 0}|f(x)|=0$ y en consecuencia $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. Esto dice que f es continua en 0.

Para todo $x\neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Esto dice que f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

4. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Si $x_0 \neq 0$, la función f no es derivable en x_0 por no ser continua en x_0 (no existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$).

La función f sí es continua en 0. ¿Es derivable en 0?.

Para todo $x \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Vemos que no existe el límite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (no existen los límites laterales), luego f no es derivable en 0.

5. Ejercicio

Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}.$$

Notaciones

Se suelen usar otros símbolos distintos de $f'(x)$ para denotar a la derivada. En particular, si se usa la letra y para la función ($y = f(x)$), la derivada se escribe como y' ó $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en lugar de $f'(x)$. Esta última notación se llama *notación de Leibniz*.

Así, si $y = x^2$, su derivada es $y' = 2x$ y, en notación de Leibniz es $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ se lee " derivada de y con respecto a x".

Cuando queremos escribir el valor de la derivada en $x = c$ en notación Leibniz, escribiremos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,|_{x=c}\ .$$

Así, si queremos calcular la derivada de $y = x^2$ en el punto $x = 3$, escribiremos

$$2x\,|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Omitiendo cualquier referencia a y ó a f, podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x,$$

que se lee "la derivada de x^2 con respecto a x es $2x$".

Hay que tener claro que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ es un símbolo, no una fracción. Más adelante introduciremos la definición de diferencial, que dará significado a las expresiones $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}x$ por separado.

Para una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en cada punto $x_0 \in (a, b)$ hemos definido la función derivada de f en la forma:

$$f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x).$$

Si el dominio de la función es un intervalo cerrado o semicerrado, hay que considerar las derivadas laterales. Por ejemplo, decir que una función f es derivable en $[a, b]$, significa que es derivable en (a, b) y que existen (son números reales) $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$. La función derivada es:

$$f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} f'_+(a) & \text{si} \quad x = a \\ f'(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ f'_-(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases}.$$

3.1.2. Recta tangente

La derivada tiene multitud de aplicaciones. Se puede usar la derivada para el estudio de tasas de variación, valores máximos y mínimos de una función, concavidad y convexidad, etc.

Nosotros hemos usado este concepto para definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Estudiemos ahora esta recta.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, la hemos definido en la forma:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

siempre y cuando el límite exista.

Este número, no es más que la derivada de f en el punto x_0: $f'(x_0)$.

Definición 3.1.3. Sea f una función derivable en un punto x_0. Se define la *recta tangente a f en el punto* $(x_0, f(x_0))$, como la recta que pasa por este punto y tiene por pendiente $f'(x_0)$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejercicio:

Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto 2.

Recta normal a la gráfica de una función en un punto

También podemos considerar la *recta normal (perpendicular) a $y = f(x)$ en x_0* teniendo en cuenta que dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1; de este modo, la recta de ecuación:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

es la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0.

Observemos que esto sólo tiene sentido si $f'(x_0) \neq 0$. Si $f'(x_0) = 0$, significa que el ángulo que forma la gráfica de f con el eje de abcisas es cero, por lo que la recta tangente en x_0 será paralela a dicho eje, y su ecuación es $y = f(x_0)$. Por tanto, la recta normal en x_0 será vertical y tendrá de ecuación $x = x_0$ (en este caso se dice que la pendiente en x_0 es infinita).

Ejercicio:

Calcular la recta normal a $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.

Ángulo entre dos curvas

Otra utilidad de la derivada es calcular el ángulo entre dos curvas. Sean f y g dos funciones derivables en x_0 y tales que $f(x_0) = g(x_0)$ (esto es, la gráfica $y = f(x)$ corta en la abcisa x_0 a la gráfica $y = g(x)$). Definimos el *ángulo entre las gráficas de f y de g en el punto x_0*, como el ángulo que forman las correspondientes rectas tangentes en dicho punto. Dicho ángulo puede calcularse usando la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|.$$

3.2. Técnicas de derivación. Regla de la cadena. Derivadas de las funciones inversas.

3.2.1. Técnicas de derivación

El teorema que viene a continuación amplía la clase de funciones que podemos derivar fácilmente, dando reglas para derivar ciertas combinaciones de funciones, como sumas, diferencias, productos y cocientes.

Teorema 3.2.1 (Reglas básicas para combinar derivadas). *Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que f y g son derivables en x_0. Entonces:*

1. *La función suma, $f + g$, es derivable en x_0 y*
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *La función diferencia, $f - g$, es derivable en x_0 y*
$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$
3. *La función producto, $f \cdot g$, es derivable en x_0 y*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$
Caso particular:
Si $c \in \mathbb{R}$, la función $c \cdot f$ es derivable en x_0 y
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$
4. *Si $g'(x_0) \neq 0$, la función cociente, $\frac{f}{g}$, es derivable en x_0 y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
Caso particular:
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Observaciones

1. Las propiedades 1.- y 3.- descritas anteriormente se pueden generalizar a un número finito de funciones:
   Si $f_1,\ f_2, \cdots, f_n$ son funciones derivables en un punto x_0 entonces la función suma, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, y la función producto, $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$, son derivables en x_0 y
   $$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \cdots f_n'(x_0).$$
   $$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(x_0)$$
   $$= f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot f_3(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdots f_n'(x_0).$$
2. Es claro que la derivada es lineal :
   $$(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0).$$
3. La función $f + g$ puede ser derivable en un punto x_0 si que ni f ni g sean derivables en x_0.

   Ejemplo

   Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por
   $$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = -|x|.$$
   Las funciones f y g no son derivables en 0. Sin embargo, la función suma definida por, $(f+g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es derivable en todos los puntos.
4. Si f es derivable en x_0 y g no es derivable en x_0 entonces $f + g$ no es derivable en x_0.
   De suponer que lo es, al escribir g en la forma $g = (f + g) - f$, obtendríamos que es derivable en x_0 por ser diferencia de funciones derivables en ese punto, en contra de lo que estamos suponiendo.

A continuación damos una lista con las derivadas de las funciones más importantes:

- $f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0.$
- $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
- $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f'(x) = -n \cdot \dfrac{1}{x^{n+1}}.$
- $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

- $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$, para $a > 0$ $a \neq 1$.
- $f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.
- $f(x) = \operatorname{tag}(x) \Longrightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tag}^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$.
- $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \operatorname{arctag}(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ejercicio

Demostrar que las derivadas de las funciones anteriores son las dadas.

Ejemplos (Uso de las reglas básicas para calcular derivadas)

Derive las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 - 5x, \quad g(x) = (3x^2 - 1)(7 + 2x^3), \quad h(x) = \frac{4x - 7}{3 - x^2}.$$

Para derivar la función f aplicamos las reglas de linealidad y de la potencia:

$$f'(x) = 2(2x) - 5 = 4x - 5.$$

Para derivar la función g aplicamos la regla del producto, la de linealidad y la de potencia:

$$g'(x) = [3(2x) - 0](7 + 2x^3) + (3x^2 - 1)[0 + 2(3x^2)] = 6x(7 + 2x^3) + (3x^2 - 1)6x^2 = 6x(5x^3 - x + 7).$$

Para derivar la función h aplicamos sucesivamente la regla del cociente, de linealidad y de potencia:

$$h'(x) = \frac{4(3 - x^2) - (4x - 7)(-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{12 - 4x^2 + 8x^2 - 14x}{(3 - x^2)^2} = \frac{4x^2 - 14x + 12}{(3 - x^2)^2}.$$

Derivadas de orden superior.

Supongamos que una función, f, es derivable en un intervalo (a,b) y consideremos su función derivada f'. Puede ocurrir que dicha función sea a su vez derivable en un punto $x_0 \in (a,b)$, es decir, que exista el límite,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso decimos que f tiene segunda derivada en x_0. Al límite anterior se le llama *segunda derivada de f en x_0* y se denota $f''(x_0)$.

Del mismo modo, pueden obtenerse las derivadas tercera, cuarta,...,etc, siempre que se cumplan las condiciones apropiadas de derivabilidad.

En general, la derivada n-ésima de una función f se obtiene derivando la derivada $(n-1)$-ésima:

$$f^{(n)}(x) = (f^{n-1})'(x).$$

Más concretamente, la derivada n-ésima se define por inducción:

Supongamos que existe la derivada $(n-1)$-ésima de una función f en todo punto de (a,b). Si esta función es derivable en un punto $x_0 \in (a,b)$, decimos que f tiene derivada n-ésima en x_0. Al límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x - x_0}$$

se le llama *derivada n-ésima de f en x_0* y se denota $f^{(n)}(x_0)$.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Esta función es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x = f(x)$. La función f' es por tanto también derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$, luego f tiene segunda derivada en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f''(x) = (f')'(x) = e^x = f(x)$. Continuando sucesivamente, se ve que f tiene derivada de orden n, para todo $n \in \mathbb{N}$, en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

2 Sea $a > 0$ y $a \neq 1$ y consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Esta función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = a^x \log(a) = f(x) \cdot \log(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De igual forma, f' es derivable en $\mathbb{R}$ y $f''(x) = \log(a) f'(x) = \log^2(a) \cdot a^x = \log^2(a) \cdot f(x)$.

Por inducción se puede demostrar que f tiene derivada de orden n en todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f^{(n)}(x) = \log^n(a) \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Ejercicio

Estudiar las derivadas de orden superior de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

3.2.2. Regla de la cadena

La regla de la cadena es una de las más importantes del Cálculo. Es una regla para derivar funciones compuestas. En particular, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces y es la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, y se puede escribir la regla de la cadena así:

Teorema 3.2.2. *Sean $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D(f)) \subset D(g)$. (En tal caso podemos considerar la composición $g \circ f$ y $D(g \circ f) = D(f)$).*

Sea $x_0 \in D(f)$. Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

En definitiva, lo que dice la regla de la cadena es, que cuando tengamos una función compuesta y consideremos la función interna y la externa, la derivada se calcula multiplicando la derivada de la función interna por la derivada de la función externa evaluada en la función interna.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Podemos ver esta función como la composición $g \circ u$, donde $g, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ estan definidas por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $u(x) = x^2$.

Las funciones g y u estan en las condiciones anteriores. Además,

- g es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $g'(x) = \cos(x)$.
- u es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $u'(x) = 2x$.

Entonces, usando la regla de la cadena, podemos asegurar que $f = g \circ u$ es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y

$$f'(x) = (g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

2. Ejercicio

Sean $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D(f)) \subset D(g)$ y $g(D(g)) \subset D(h)$. Sea $x_0 \in D(f)$. Si f es derivable en x_0, g es derivable en $f(x_0)$ y h es derivable en $g(f(x_0))$ entonces $h \circ g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(h \circ g \circ f)'(x_0) = h'((g \circ f)(x_0)) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

3. Consideremos la función $F(x) = \text{sen}(\ln(x^2 + 1))$. Claramente F está definida en $\mathbb{R}$.

Sean $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = \text{sen}(x)$. Claramente $F = h \circ g \circ f$.

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$.

La función g es derivable en $(0, \infty)$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$, luego como para todo $x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 1 \in (0, \infty)$, podemos asegurar que g es derivable en $x^2 + 1$, es decir, g es derivable en $f(x)$.

La función h es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $h'(x) = \cos(x)$, luego es derivable en $(g \circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos asegurar que $F = h \circ g \circ f$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$f'(x) = (h \circ g \circ f)'(x) = h'((g \circ f)(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(\ln(x^2 + 1)) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x.$$

4. Ejercicio

Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

3.2.3. Derivadas de las funciones inversas

Teorema 3.2.3. *Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva. Sea $b \in f(I)$ y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(b)$. Entonces:*

1. Si $f'(f^{-1}(b)) = 0$, f^{-1} no es derivable en b.

2. Si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, f^{-1} es derivable en b y $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1.- Consideremos la función $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$, $f(x) = \text{sen}(x)$. Su función inversa es la función arcseno:

$$f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x).$$

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular es derivable en todo punto $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $f'(x) = \cos(x)$.

Para todo $b \in [-1,1]$, $f^{-1}(b) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que f es derivable en $f^{-1}(b)$.

Según el teorema anterior, f^{-1} es derivable en $b \in [-1,1]$ si y sólo si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.

Para todo $b \in [-1,1]$,

$$f'(f^{-1}(b)) = \cos(f^{-1}(b)) = \cos(\text{arcsen}(b)).$$

Como $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que $\cos^2(\text{arcsen}(b)) = 1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}(b)) = 1 - b^2$.

De estas igualdades vemos que

$$f'(f^{-1}(b)) = 0 \Leftrightarrow 1 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ ó } b = -1.$$

Por tanto, si $b = 1$ ó $b = -1$ f^{-1} no es derivable en b. Si $b \in (-1,1)$, f^{-1} es derivable en b y

$$(f^{-1})'(b) = \text{arcsen}'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(b))}.$$

Como $\text{arcsen}(b) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\text{arcsen}(b)) > 0$, por lo que $\cos(\text{arcsen}(b)) = \sqrt{1-b^2}$.

Hemos demostrado que si $b \in (-1,1)$, $\text{arcsen}'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

De forma similar se demuestra:

$$\text{Si } b \in (-1,1), \quad \text{arccos}'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \quad \text{y}$$

$$\text{arctag}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

3.3. Valores extremos de una función continua

Ya hemos usado la derivada para calcular tangentes y tasas de variación. El objetivo principal de esta sección es mostrar otra aplicación de las derivadas: hallar valores máximos y mínimos; es decir, la optimización, que es una de las aplicaciones más importantes del Cálculo

3.3.1. Máximos y mínimos. Teorema de los valores extremos.

Uno de los principales objetivos del Cálculo es investigar el comportamiento de las funciones. Con frecuencia es muy importante saber cuál es el valor máximo o mínimo de una función y dónde se dan esos valores extremos. Vamos a estudiar cómo se puede usar la derivada para hallar esos valores extremos.

Definición 3.3.1. Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$.

Decimos que x_0 es un *máximo relativo o local de* f (respectivamente *mínimo relativo o local de* f) si existe un intervalo $I \subset D$ que contiene a x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in I$. Dicho de otra forma, $f(x_0)$ es el valor máximo (valor mínimo) que alcanza la función f en un entorno del punto x_0.

Los máximos y mínimos relativos se llaman *extremos relativos o locales*.

Decimos que x_0 es un *máximo absoluto o global de* f (respectivamente *mínimo absoluto o global de* f) si $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in D$. Dicho de otra forma, $f(x_0)$ es el valor máximo (valor mínimo) que alcanza la función f en todo su dominio.

Los valores máximo y mínimo absoluto se llaman conjuntamente *valores extremos o extremos absolutos*

Observaciones

1. Se pueden definir los extremos en sentido estricto considerando las desigüaldades estrictas.
2. Una función puede poseer muchos extremos relativos en sentido estricto, pero los máximos y mínimos absolutos en sentido estricto, si existen, son únicos.

No toda función tiene extremos en un intervalo. Por ejemplo, la función continua $g(x) = x$ no tiene máximo ni mínimo en el intervalo $(0, 1)$.

La función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene máximo en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ pero no tiene mínimo. Además, con esta función se prueba que el valor máximo se puede alcanzar en varios puntos. En este caso el valor máximo se alcanza en los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado (es decir, compacto), entonces necesariamente alcanza el máximo absoluto y el mínimo absoluto. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de los valores extremos, y juega un papel importante en nuestra área.

Teorema 3.3.1 (Teorema de los valores extremos). *Una función f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza en el los valores máximo y mínimo absolutos.*

El teorema no se verifica en general si la función no es continua o si el intervalo no es compacto.

Si comparamos una función con su gráfica, vemos que el máximo absoluto es el punto más alto y el mínimo absoluto el más bajo.

Ejemplo

Explicar por qué cada uno de los ejemplos siguientes no contradice el teorema de los valores extremos:

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(b) $g(x) = x^2$ para $0 < x \leq 2$.

(a) La función f no tiene máximo. Toma todos los valores arbitrariamente próximos a 2 (y menores que 2), pero nunca toma el valor 2. No se contradice el Teorema de los valores extremos porque f no es continua en $[0, 2]$ (vemos que no es continua en el punto $x = 1$).

(b) Aunque los valores $g(x)$ (que son positivos) se hacen arbitrariamente pequeños cuando $x \to 0$, el valor 0 no se alcanza, luego g no tiene mínimo. La función g es continua en $(0, 2]$, y no se contradice el Teorema de los valores extremos porque el intervalo no es cerrado.

3.3.2. Extremos relativos

Típicamente, los extremos de una función se alcanzan en los extremos del intervalo o en los puntos donde la gráfica tiene 'una cima.º "un valle", es decir, puntos donde la gráfica es más alta o más baja que en los puntos de un entorno. Las cimas y los valles son los extremos relativos, que hemos definido antes.

Pretendemos ahora diseñar un procedimiento para hallar los extremos relativos. De manera intuitiva, los extremos relativos se alcanzan en puntos de tangente horizontal o donde no existe la derivada (no hay tangente). Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.3.2. Sea f una función y x_0 un punto del dominio.

- Si $f'(x_0) = 0$ decimos que x_0 es un *valor singular de* f.
- Se dice que x_0 es un *valor crítico de* f si es un valor singular o $f'(x_0)$ no existe.

El punto $P(x_0, f(x_0))$ se llama *punto crítico*

Existe una relación entre valor crítico y extremo relativo. Esto queda reflejado en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.2 (Teorema del extremo interior). *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea x_0 un punto interior de I (es decir, $x_0 \in I$ es tal que existe un intervalo abierto I_1 que contiene a x_0 y tal que $I_1 \subset I$). Si x_0 es un extremo relativo o local de f en I entonces x_0 es un valor crítico, es decir, o bien f no es derivable en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$.*

Observaciones

1. Si x_0 no es un punto interior, x_0 no tiene porqué ser valor crítico (en particular, si f es derivable en x_0 (por la derecha o por la izquierda), no tiene porqué ocurrir que la derivada se anule).

   Ejemplo

   Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
   La función f es derivable en 1 por la izquierda y $f'_{-}(1) = 1$. Además, $f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ luego 1 es un máximo (global) y sin embargo 1 no es punto interior de $[0, 1]$.

2. El recíproco del teorema no es cierto, es decir; no tiene porqué ocurrir que en cada valor crítico se deba alcanzar un extremo relativo (en particular, si x_0 es un punto de I, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, x_0 no tiene porqué ser máximo o mínimo local de f en I).

Ejemplo

Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
$x_0 = 0$ es un punto interior de $[-1, 1]$, $f'(x) = 3x^2$ luego $f'(0) = 0$ pero 0 no es máximo ni mínimo local de f en $[-1, 1]$.

3.3.3. Extremos absolutos

Supongamos que buscamos los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Sabemos, por el teorema de los valores extremos, que éstos existen. Además el Teorema del extremo interior nos da posibles candidatos. Esto indica el siguiente procedimiento de actuación:

Procedimiento a seguir para ver si una función tiene extremos (máximos o mínimos)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para los extremos absolutos de f en $[a, b]$ puede ocurrir:

1. Que el máximo o mínimo sea a o b.
2. Que esté en (a, b). En este caso:
   - o bien f no es derivable en ese punto;
   - o bien f es derivable en ese punto, en cuyo caso la derivada en ese punto vale 0.

Por tanto, los pasos a seguir para el cálculo de los extremos son:

Paso 1

Calculamos f' y hallamos los valores críticos de f.

Paso 2

Hallamos el valor de f en a, en b y en cualquier valor crítico.

Paso 3

Comparamos los valores obtenidos en el paso anterior.

Estudiando los valores obtenidos se deciden cuáles son los extremos: el valor mayor es el máximo absoluto de f en $[a, b]$, y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplo

Estudiar los extremos de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.

1.- Calculamos f'.

$$f'(x) = \frac{10}{3}\frac{1-x}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Es claro que f' no existe en $x = 0$ (se podría haber justificado desde el principio).

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Los valores críticos son $x = 1$ y $x = 0$.

2.- $f(-1) = 7$, $f(2) = 2^{\frac{2}{3}}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$.

3.- Se alcanza máximo en -1 y el valor máximo es 7 y un mínimo en 0 y el valor mínimo es 0.

Ejercicios

1.- Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 2]$.

2.- Hallar los extremos de $T(x) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2(x) + \cos(x)) + 2\text{sen}(x) - x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.4. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio

El teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio son resultados fundamentales sobre funciones derivables, y extremadamente importantes en Cálculo, tanto para la teoría como para las aplicaciones prácticas.

3.4.1. Teorema de Rolle

El punto clave para la demostración del Teorema del Valor Medio es el Teorema de Rolle, que es justamente, como veremos, un caso particular del Teorema del Valor Medio.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Rolle). *Supongamos que una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b).*
Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente la interpretación del teorema de Rolle es sencilla: si la función f toma el mismo valor en los extremos entonces debe haber algún punto intermedio donde la tangente a la gráfica $y = f(x)$ sea paralela al eje de abcisa (ya que su pendiente vale cero), o lo que es lo mismo, paralela a la cuerda $y = f(a) = f(b)$, que va desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$.

<u>**Observaciones**</u>

1. El punto c del teorema no tiene porqué ser único. (Basta considerar cualquier función constante).

2. Todas las hipótesis del teorema son suficientes. Si alguna falla no podemos asegurar nada sobre la conclusión del teorema:

   (a) Si $f(a) \neq f(b)$ no tiene porqué existir c con $f'(c) = 0$.

   <u>Ejemplo</u>

   $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

   (b) Si f no es derivable en algún punto de (a, b) no tiene porqué existir c con $f'(c) = 0$.

   <u>Ejemplo</u>

   $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

   (c) Si f no es continua en algún punto de $[a, b]$ no tiene porqué existir $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Consecuencias del teorema de Rolle

Una consecuencia inmediata del teorema de Rolle es que entre dos raices o ceros de la función f siempre hay una raiz de su derivada f'. Para verlo, supongamos que $x_1, x_2 \in [a,b]$ son dos raices de f, es decir; $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, y que $x_1 < x_2$. Consideremos entonces la función restringida $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2), ya que $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. Como $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir; c es una raiz de la derivada que está entre las dos raices de f.

Ejemplo

Probar que existe una única solución de la ecuación $\cos(x) = x$ en el intervalo $(-1,1)$.

Consideremos la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - x$ Hemos de probar que f posee una única raiz en $(-1,1)$.

Por una parte, notemos que f es una función continua en el intervalo $[-1,1]$ por ser diferencia de funciones continuas. Como $f(-1)f(1) < 0$, el teorema de Bolzano asegura que existe algún $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Por otro lado, f es derivable en $(-1,1)$ por ser diferencia de funciones derivables, además, su derivada es $f'(x) = -\text{sen}(x) - 1$. Si f tuviera dos raices en $(-1,1)$, por el teorema de Rolle existiría alguna raiz de la derivada en dicho intervalo. Pero como $f'(x) \neq 0$ en $(-1,1)$, no pueden haber dos raices. Esto prueba la existencia de una única raiz de f en $(-1,1)$, o lo que es lo mismo, una única solución de la ecuación $\cos(x) = x$ en el intervalo $(-1,1)$.

3.4.2. Teorema del Valor Medio

Teorema 3.4.2 (Teorema del valor medio / de los incrementos finitos / de Lagrange). *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *entonces* *existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observemos que el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, ya que si $f(a) = f(b)$ según el teorema del valor medio $f'(c) = 0$.

Al teorema del valor medio podemos darle interpretaciones físicas y geométricas importantes.

Interpretación física.

Si un automovil hace una media de 60 Km/h en un viaje, es razonable pensar que el velocímetro ha marcado 60 Km/h al menos una vez durante el viaje.

Más generalmente, supongamos que un objeto tiene un movimiento rectilineo y dista $s(t)$ del punto de partida en el instante t. La velocidad media del objeto entre los instantes $t = a$ y $t = b$ viene dada por la razón

$$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Lo mismo que en el caso del automovil, es razonable pensar que debe haber un instante entre a y b tal que la velocidad en ese instante, es decir la velocidad instantánea, sea igual a la velocidad media. Es decir, existe t_0 tal que

$$s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Interpretación geométrica

El cociente $\dfrac{fb) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que una los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$.

Ya hemos dicho que el Teorema de Rolle se puede interpretar como que, si $f(a) = f(b)$, existe un punto intermedio c tal que la tangente en $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda $y = f(a) = f(b)$, que va desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$. Es razonable pensar que se verifica lo mismo aun cuando los extremos de la gráfica no están a la misma altura. Pues efectivamente, el Teorema del Valor Medio nos dice que hay un punto c donde la recta tangente a la función $y = f(x)$ es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejemplo

Pruebe que la función $f(x) = x^3 + x^2$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo cerrado $[1, 2]$ y hallar un número c entre 1 y 2 tal que

$$f'(c) = \frac{fb) - f(a)}{b - a}.$$

Como f es una función polinómica, es derivable y por tanto continua en el intervalo $[1, 2]$. Así se satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio.

Derivando f se tiene $f'(x) = 3x^2 + 2x$ para todo x. Por tanto, es $f'(c) = 3c^2 + 2c$ y la ecuación del Teorema del Valor Medio se satisface cuando

$$3c^2 + 2c = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 12 - 2 = 10.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante se tiene que

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{3}.$$

El valor negativo no está en el intervalo $(1, 2)$, pero el positivo

$$c = \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \approx 1,5225$$

satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio.

El teorema del valor medio se puede generalizar.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado). *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Observemos que el teorema del valor medio se puede obtener a partir de este tomando $g(x) = x$.

Observación

Bajo la hipótesis adicional $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ podemos decir que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Necesariamente $g(a) \neq g(b)$ ya que en caso contrario estaríamos en las condiciones del teorema de Rolle en $[a,b]$, sin embargo estamos suponiendo $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

3.4.3. Algunas consecuencias del Teorema del Valor Medio

El teorema del valor medio se puede aplicar a situaciones muy variadas. Se usa en particular para demostrar algunos resultados teóricos claves para el Cálculo. Por ejemplo, usamos el Teorema del Valor Medio para probar que una función cuya derivada es cero en todo un intervalo debe ser constante en ese intervalo. Este resultado, aparentemente tan simple, es crucial en el desarrollo del cálculo integral.

Teorema 3.4.4 (El Teorema de la derivada nula). *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, la función f es constante en $[a,b]$.*

Demostración: Sean x_1, x_2 dos puntos arbitrarios en $[a,b]$ con $x_1 < x_2$. La función f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$. Existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Entonces, como $f'(c) = 0$ se deduce que $f(x_2) = f(x_1)$. Esto dice que f es constante en $[a,b]$.

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que dos funciones con derivadas iguales en un intervalo abierto difieren en él en una constante:

Teorema 3.4.5 (Teorema de la diferencia constante). *Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ existe una constante C tal que*

$$f(x) = g(x) + C, \qquad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Demostración: Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Entonces por el teorema anterior podemos asegurar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$, es decir; $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

$\square$

Dos funciones con derivadas iguales en un intervalo abierto difieren en una constante.

Ejemplo

Sean $f, g : [-2, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \text{arctag}(x)$ y $g(x) = -\text{arctag}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Las funciones f y g son continuas en $[-2, -1]$.

Las funciones f y g son derivables en $(-2, -1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{y}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Vemos que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (-2, -1)$. Podemos asegurar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{para todo } x \in (-2, -1).$$

¿Cómo podemos determinar el valor de la constante C?

La igualdad se cumple para todo $x \in (-2, -1)$ en particular para $x = -1$. Por tanto;

$$f(-1) = \text{arctag}(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ y } g(-1) = -\text{arctag}(-1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$f(-1) = g(-1) + C \Longrightarrow C = f(-1) - g(-1) \Longrightarrow C = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$.

El Teorema del Valor Medio también se puede usar para demostrar cierto tipo de desigualdades.

Teorema 3.4.6. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos que existe $M > 0$ tal que*

$$|f'(x)| \leq M \quad \textit{para todo } x \in (a, b).$$

Entonces existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \textit{para todo } x, y \in [a, b].$$

Demostración: Sean $x, y \in [a, b]$.

Si $x = y$ el resultado es obvio. Supongamos $x \neq y$, por ejemplo $x < y$. Consideremos la función $f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta función es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y). Por el teorema del valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{x - y} \Longleftrightarrow f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Entonces

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)(y - x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|.$$

$\square$

Ejercicios

1.- Probar que $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2.- Demostrar que $|\text{arctag}(x) - \text{arctag}(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in [0, 2\pi]$.

3.5. Crecimiento de funciones en intervalos

Otra aplicación del teorema del valor medio es estudiar la monotonía de las funciones.

Se puede usar el signo de la derivada de una función para determinar si la función es creciente o decreciente en un intervalo dado. Usaremos esta información para desarrollar un procedimiento llamado el test de la derivada primera para decidir si un punto crítico dado es máximo, mínimo o ninguno de los dos.

Definición 3.5.1 (**Funciones crecientes y decredientes).** Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo.

La función f es *creciente* (respectivamente *estrictamente creciente*) en I, si dados $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) < f(x_2)$).

La función f es *decreciente* (respectivamente *estrictamente decreciente*) en I, si dados $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).

Dado $x_0 \in I$ decimos que f es creciente en x_0 si existe un intervalo $J \subset I$ con $x_0 \in J$ tal que f es creciente en J.

Dado $x_0 \in I$ decimos que f es decreciente en x_0 si existe un intervalo $J \subset I$ con $x_0 \in J$ tal que f es decreciente en J.

Definición 3.5.2. Una función se llama *monótona* (respectivamente *estrictamente monótona*) si es creciente o decreciente (respectivamente estríctamente creciente o decreciente).

El ser monótona está relacionado con el signo de la derivada. En particular, si la gráfica de una función sólo tiene rectas tangentes con pendientes positivas en un intervalo, la gráfica se elevará y la función será creciente en el intervalo. Como la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica se calcula con la derivada, estudiando el signo de la función derivada conoceremos la monotonía de la función.

Supongamos que f es derivable en I y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Haciendo uso del teorema del valor medio podemos asegurar que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \iff f(x_2) \geq f(x_1).$$

Esto demuestra que f es creciente en I. De forma análoga se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 3.5.1. *Supongamos que f es derivable en un intervalo abierto (a, b). Entonces*

1. *Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en (a, b).*
2. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente en (a, b).*
3. *Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en (a, b).*
4. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).*

Para determinar cuándo una función f es creciente o decreciente, comenzamos hallando los valores críticos (son los puntos donde la derivada es cero o no existe). Estos valores dividen al eje de abcisa en intervalos. Basta comprobar el signo de la derivada en cada intervalo y aplicar el teorema anterior.

Se sabe que todo extremo relativo es un valor crítico. Sin embargo, no todo valor crítico es un extremo relativo. ¿ Cómo podemos saber si un valor crítico es un extremo relativo ?.

Si la derivada es positiva a la izquierda del valor crítico y negativa a la derecha, la gráfica cambia de creciente a decreciente y el valor crítico debe ser un máximo relativo. Si la derivada es negativa a izquierda y positiva a derecha del valor crítico, la gráfica cambia de creciente a decreciente y el valor crítico debe ser un mínimo relativo. Si el signo se conserva, el valor crítico no es ni máximo ni mínimo.

Estas observaciones se resumen en un procedimiento que se llama el **test de la derivada primera para extremos relativos**.

Sea f una función continua.

Paso 1. Se hallan todos los valores críticos de f, es decir, los números c tales que está definido $f(c)$ y sea $f'(c) = 0$ no exista $f'(c)$.

Paso 2. Para cada valor crítico se tiene

1. El punto $(c, f(c))$ es un máximo relativo si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo abierto (a, c) a la izquierda de c y $f'(c) < 0$ para todo x de intervalo abierto (c, b) a la derecha de c.
2. El punto $(c, f(c))$ es un míximo relativo si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo abierto (a, c) a la izquierda de c y $f'(c) > 0$ para todo x de intervalo abierto (c, b) a la derecha de c.
3. El punto $(c, f(c))$ no es extremo relativo si $f'(x)$ tiene el mismo signo en intervalos abiertos (a, c) y (c, b) a ambos lados de c.

Ejemplo

Determine el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, así como los extremos relativos.

Primero calculamos la derivada $f'(x)$ y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Tenemos $3x^2 - 6x - 9 = 0$, lo que da como raices $x = -1$ y $x = 3$. Estos valores críticos dividen al eje x en tres partes $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$. Estudiamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo. Como $g'(x)$ es continua,éste es constante en cada intervalo, basta tomar en cada parte un número arbitrario y estudiamos el signo de la derivada en esos valores. Tomamos, por ejemplo, -2, 0 y 4. Como $f'(-2) = 15 > 0$, $f'(0) = -9 < 0$ y $f'(4) = 15 > 0$, podemos asegurar:

La función f es creciente (y además estríctamente) en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$, y es decreciente (estríctamente) en $(-1, 3)$. Por tanto, el test de la primera derivada nos dice que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un míximo relativo en $x = 3$.

Otra forma de determinar si un valor singular (es decir, aquel donde la derivada vale 0) es extremo relativo consiste en recurrir a la segunda derivada (suponiendo que exista).

Teorema 3.5.2 (Test de la derivada segunda para extremos relativos). *Sea f una función y sea c tal que $f'(c) = 0$. Supongamos que existe $f''(c)$. Entonces:*

1. *Si $f''(c) > 0$, la función f tiene un mínimo local en c.*
2. *Si $f''(c) < 0$, la función f tiene un máximo local en c.*
3. *Si $f''(c) = 0$, no podemos asegurar nada.*

Demostración: Por definición

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Supongamos $f''(c) > 0$.

Si $x > c$ necesariamente $f'(x) > 0$ y si $x < c$ necesariamente $f'(x) < 0$. Por tanto, f decrece a la izquierda de c y crece a la derecha. Necesariamente c es un mínimo local.

El segundo apartado se justifica de la misma forma.

$\square$

En el caso en que $f^{''}(c) = 0$, recurrimos a las derivadas siguientes.

Sea n el primer natural tal que $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$ entonces c es un máximo relativo.
- Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$ entonces c es un mínimo relativo.
- Si n es impar c no es un extremo.

Ejemplo

Use el test de la derivada segunda para determinar si cada valor crítico de la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ corresponde a un máximo relativo, mínimo relativo, o ninguno de los dos.

Calculamos las derivadas primera y segunda

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$$

$$f^{''}(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$$

Para aplicar el test de la derivada segunda, hallamos el valor de la derivada segunda para los valores críticos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

$$f''(0) = 0; \quad \text{el test falla } enx = 0.$$

$$f^{''}(1) = 30 > 0; \quad \text{el test da un mínimo relativo en } x = 1.$$

$$f^{''}(-1) = -30 < 0; \quad \text{el test da un máximo relativo en } x = -1.$$

Cuando falla el test de la derivada segunda (en este caso en $x = 0$), hay que volver al de la derivada primera:

La derivada primera es negativa a la derecha e izquierda de 0, luego no puede haber extremos.

3.6. Funciones convexas y funciones cóncavas

El saber si una curva es creciente o decreciente da sólo una visión parcial de la misma. Esto no es suficiente para distinguir cuál es la gráfica correspondiente a la función. Tenemos que saber además, de qué forma crece o decrece.

Nuestro centro de atención va a ser una característica de las gráficas, llamado convexidad (introducimos los conceptos de concavidad y convexidad), que nos permitirá distinguir a las funciones.

Empecemos dando las definiciones geométricas de concavidad y convexidad para una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.6.1. Diremos que f es *convexa en* I si para cada $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica $y = f(x)$.

Diremos que f es *cóncava en* I si para cada $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica $y = f(x)$.

Ejemplo

La función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ es convexa.

Obsevemos que f no es derivable en el punto 0.

En caso de que una función sea derivable, podemos dar una definición analítica de concavidad y convexidad:

Definición 3.6.2. La función f es *convexa en* I si en cada punto de I, la recta tangente a la función en ese punto queda por debajo de la gráfica de la función.

La función f es *cóncava en* I si en cada punto de I, la recta tangente a la función en ese punto queda por encima de la gráfica de la función.

Definición 3.6.3. Diremos que un punto $x_0 \in D(f)$ es un *punto de inflexión de* f si en él, la función pasa de ser convexa a cóncava o al revés.

En general, la convexidad de la gráfica variará sólo en los puntos donde $f'' = 0$ o no existe f'', es decir, en los puntos críticos de la primera derivada. Se llamará *valor crítico de segundo orden* a un número x_0 tal que $f''(x_0) = 0$ o no existe $f''(x_0)$. En este contexto, un valor crítico "ordinario"se llamará *valor crítico de primer orden*. Los puntos de inflexión corresponden a los valores críticos de segundo orden, y deben ser puntos de la gráfica de f. Más concretamente, un número x_0 tal que

$f''(x_0)$ no está definida y la convexidad de f cambia en x_0 corresponderá a un punto de inflexión sólo si $f(x_0)$ está definida.

Una función continua no tiene por qué tener un punto de inflexión donde $f'' = 0$. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, tenemos que $f''(x) = 12x^2$, luego $f''(0) = 0$, pero la gráfica de f es convexa en su totalidad

Observemos que si f' es creciente, necesariamente la función f ha de ser convexa, y si es decreciente, la función tiene que ser cóncava. De este modo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.6.1. *Para una función f definida en un intervalo I se tiene:*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es cóncava en I.*

Ejemplo

Halle dónde es convexa o cóncava la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x + 1$, así como sus puntos de inflexión.

Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 3$ y $f''(x) = 6x$. Ambas derivadas están definidas en todo $\mathbb{R}$ y $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$, así que sólo puede haber punto de inflexión en $x = 0$. Tenemos que $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, luego la gráfica de f es cóncava para $x < 0$ y convexa para $x > 0$. El punto de inflexión se alcanza en $(0, 1)$.

Ejercicio

Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \mathrm{sen}(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y hallar los puntos de inflexión de f.

3.7. Límites infinitos y Asíntotas

Para terminar nuestro estudio sobre el dibujo de curvas, necesitamos introducir dos conceptos: asíntotas y límites con infinito.

Nuestro objetivo es estudiar otra clase de límites infinitos, distintos de los estudiados en el tema 1.

Sea f una función y x_0 un punto de su dominio. Supongamos que cuando x tiende a x_0 por cualquier lado, los valores de la función crecen (en valor absuluto) de forma no acotada, y la gráfica se acerca a la recta vertical $x = x_0$. Geométricamente este comportamiento se describe diciendo que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

Supongamos ahora que, cuando x crece o decrece de forma no acotada (esto es, cuando se desplaza a la derecha o la izquierda sobre el eje x), la gráfica de f sigue la recta $y = mx + n$. En este caso decimos que la recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una *asíntota oblicua*.

Por último, si la función f se acerca a la recta $y = y_0$ cuando x crece o decrece de manera no acotada, decimos que la recta $y = y_0$ es una *asíntota horizontal*.

Concretamente, una *asíntota* es una recta que tiene la propiedad de que la distancia desde un punto P de la curva a la recta tiende a cero cuando P se aleja del origen de manera no acotada, y P está en una parte adecuada de la curva. Hay tres tipos de asíntotas que aparecen cuando dibujamos curvas: verticales, horizontales y oblícuas.

Definiremos formalmente esztos conceptos más adelante en esta sección. Sin embargo, tenemos que estudiar primero límites infinitos.

3.7.1. Límites infinitos

Si los valores de la función f se aproximan más y más al número L cuando x crece de manera no acotada, decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a infinito y se escribe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x decrece de manera no acotada escribimos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Se pueden definir formalmente estos conceptos de la manera siguiente:

Definición 3.7.1 (Límites en el infinito). La notación $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número N_1 tal que, para todo $x > N_1$ del dominio de f, es $|f(x) - L| < \varepsilon$. Análogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número N_2 tal que, para todo $x < N_2$ del dominio de f, es $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por abuso del lenguaje, cuando estemos tomando límite cuando $x \to +\infty$, así como cuando el resultado de un límite sea $+\infty$ como veremos más adelante, usaremos la notación ∞, entendiéndola como $+\infty$.

Con esta definición formal se puede comprobar que todas las reglas de límites vistas en el tema 1 son válidas para $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Enunciamos estas reglas para $x \to \infty$:

Reglas para límites:

Sean f y g funciones tales que existen y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$. Entonces se tiene:

- **Regla de la potencia:** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to\infty} f(x)]^n$.
- **Regla de linealidad:** $\lim\limits_{x\to\infty}[af(x)+bg(x)] = a\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + b\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, donde a y b son constantes.
- **Regla del producto:** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right]$.
- **Regla del cociente:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\neq 0$.

Las mismas reglas son válidas para $x\to-\infty$.

El teorema siguiente nos permitirá calcular con facilidad ciertos límites en el infinito.

Teorema 3.7.1 **(Límites en el infinito).** *Si n es un número racional positivo y A es un número real npo nulo, entonces*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A}{x^n} = 0.$$

Más aún, si x^n está definido cuando $x<0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{A}{x^n} = 0.$$

Ejemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x-5}{x-2}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-5}{x-2}\right)^3$.

Observemos que, para $x\neq 0$,

$$\frac{3x-5}{x-2} = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right.}{1-\frac{2}{x}}.$$

Por el teorema anterior sabemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

Calculamos los límites usando la regla del cociente, la regla de la potencia y el teorema anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x-5}{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{\lim_{x\to\infty} 3x-5}{\lim_{x\to\infty} x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3-0}{1-0}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Cuando se calcula límites de la forma

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, es útil dividir numerador y denominador por la máxima potencia de x. Así se puede hallar el límite por el teorema anterior.

Ejercicio

Hallar los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+57x+30}{x^5-1000}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x-1}$.

En matemáticas se usa el símolo ∞, entre otras cosas, para indicar, bien el proceso de crecimiento no acotado, bien el resultado final de este crecimiento. Entendiendo esto podemos hablar de límites infinitos, es decir, límites que crecen o decrecen de manera no acotada. La notación $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ se puede definir formalmente así:

Definición 3.7.2 (Límite infinito). Se escribe $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si, para todo número $N > 0$ (arbitrariamente grande), existe un número $\delta > 0$ tal que, para todo x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ se verifica $f(x) > N$.

Ejemplo

Calcular $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x-5}{x-2}$ y $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-5}{x-2}$.

Observemos que $\frac{1}{x-2}$ crece de forma no acotada cuando x tiende a 2 por la derecha y decrece de forma no acotada cuando x tiende a 2 por la izquierda. Es decir,

$$\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2} = \infty.$$

Por otra parte, $\lim_{x\to2} 3x-5 = 1$, luego

$$\lim_{x\to2^-}\frac{3x-5}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+}\frac{3x-5}{x-2} = \infty.$$

3.7.2. Asíntotas

Ya se pueden definir formalmente las asíntotas de una función. Los límites infinitos que acabamos de estudiar, junto con las técnicas de dibujo que hemos visto hasta ahora, se usan para obtener gráficas con asíntotas.

Definición 3.7.3 (Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas). La recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f si es infinito ($\pm\infty$) uno de sus límites laterales:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

La recta $y = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de la gráfica de f si f es una función racional tal que el numerador y el denominador no tinen factores comunes y

$$f(x) = \frac{p(x)}{d(x)} = mx + n + \frac{r}{d(x)}$$

donde $\lim_{x\to\infty} \frac{r}{d(x)} = 0$.

3.8. Teorema de Taylor y regla de L' Höpital

Si consideramos una función n veces derivable en un intervalo I, nuestro primer objetivo va a ser hallar una función polinómica que aproxime a f en un entorno de un número x_0 de su dominio. Esta función polinómica será el *polinimio de Taylor de f*.

Podemos usar los teoremas sobre límites de sumas, diferencias, productos y cocientes siempre y cuando aparezcan ciertas expresiones que no significan nada. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ da la forma $\frac{0}{0}$ cuando se aplica la regla de límite de un cociente, y esta expresión no tiene significado. En tales casos hay que usar otros métodos para calcular el límite. Johann Bernoulli desarrolló un método más fácil usando derivadas. Vamos a ver este método llamado la *regla de L'Hôpital*.

3.8.1. Teorema de Taylor

Si $p(x)$ es un polinomio, es "fácil" calcular $p(a)$ para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

Hay funciones elementales, como por ejemplo sen(x), cos (x), e^x, ln(x),..., para las que no son fáciles dar con exactitud el valor de la función en un punto del dominio. Sin embargo, podemos dar una aproximación.

Este tipo de funciones son muy buenas, ya que son continuas en su dominio y tienen derivadas de cualquier orden. El teorema de Taylor es una buena solución al problema de aproximar funciones mediante funciones polinómicas, incluso nos da el error que se comete en la aproximación.

El teorema de Taylor es realmente una generalización del teorema del valor medio. En este, tenemos valores de la función f relacionados con los valores de su derivada. El teorema de Taylor lo que hace es relacionar los valores de la función con las derivadas n-ésimas.

Teorema 3.8.1 (Teorema de Taylor). *Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in I$. Supongamos que f tiene derivadas continuas hasta el orden n en I y derivada de orden $n+1$ en el interior de I, es decir, existen $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, las funciones f', f'',..., $f^{(n)}$, son continuas en I y existe $f^{(n+1)}(x)$ para todo x del interior de I. Sea $R_{n,x_0,f}(x)$ definido por*

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n,x_0,f}(x).$$

Entonces existe c en el intervalo abierto de extremos x_0 y x tal que

$$R_{n,x_0,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

El polinomio $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se denomina *polinomio de Taylor de orden n en x_0* y se representa por $T_{n,x_0,f}(x)$.

<u>Observaciónes</u>

1. El polinomio de Taylor de orden n en x_0 es el polinomio que mejor aproxima a la función en un entorno del punto x_0. Por otro lado, el punto c que aparece en el resto depende del punto x y no puede, en general, determinarse. Para $x_0 = 0$, la expresión anterior se denomina *fórmula de Maclaurin.*

2. En las calculadoras, las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc, suelen implementarse usando un polinomio de Taylor de grado adecuado según el número de cifras decimales disponibles.

Ejemplo

Calcular una aproximación de $\cos(0,1)$ usando el polinomio de Taylor de orden 6 en $x_0 = 0$.

Calculemos primero el polinomio de Taylor de orden 6 en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = \cos(x)$. Las primeras seis derivadas de f son:

$$f'(x) = -\mathrm{sen}(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \mathrm{sen}(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x), \quad f^{(5)}(x) = -\mathrm{sen}(x), \quad f^{(6)}(x) = -\cos(x).$$

Evaluemos en $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0, \quad f^{(6)}(0) = -1.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor será:

$$\begin{aligned} T_{6,0,f}(x) &= f(0) + + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. \end{aligned}$$

Aproximamos $\cos(0,1) = f(0,1)$ por $T_{6,0,f}(0,1) \approx 0,995004165$.

3.8.2. Regla de L'Hôpital

En trazado de curvas, optimización y otras aplicaciones es necesario a menudo calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde x_0 es un número. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, se puede usar la regla del cociente. Sin embargo, si numerador y denominador tienden a cero, el límite puede ser cualquier número real o bien $\pm\infty$. Por esta razón, un límite de este tipo se llama una *forma indeterminada* $\frac{0}{0}$. De manera análoga, si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$ son ambos infinitos, el límite del cociente se llama una *forma indeterminada* $\frac{\infty}{\infty}$.

Afortunadamente hay un procedimiento, que se llama la regla de L'Hôpital que nos permite relacionar una forma indeterminada

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con el límite del cociente de derivadas

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Enunciamos formalmente la regla:

Teorema 3.8.2 (Regla de L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en un entorno de x_0, con $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno. Supongamos que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

o bien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, *entonces también*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Observaciones

1. El teorema de L'Hôpital es también válido si consideramos los límites laterales o los límites en el infinito (que no vemos).
2. El teorema de L'Hôpital nos permite resolver aquellas indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Más aún, se puede usar la regla de L'Hôpital sucesivamente en una expresión racional reducida mientras se obtenga una de las formas siguientes:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{\infty}{-\infty} \quad \frac{-\infty}{\infty} \quad \frac{-\infty}{-\infty}$$

   en $x = x_0$. Como la regla de L'Hôpital se puede aplicar repetidas veces, se puede continuar aplicando hasta que se obtenga algo distinto de una de esas formas (para el numerador o el denominador).
3. El recíproco del teorema no es cierto.

Ejemplo

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(x) = x.$$

Claramente $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$.

Por otro lado, $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ya hemos visto que f es derivable en $\mathbb{R}$ y haciendo uso de la regla de la cadena podemos ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Estudiemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} f'(x).$$

Para todo $x \neq 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x).$$

Como no existe el límite $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, tampoco existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ (no es un número real, ni $+\infty$, ni $-\infty$).

Sin embargo, es claro que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ejemplos

1. Calculemos $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

Vemos que presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. La resolvemos usando la regla de L'Hôpital (en este caso se puede):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

2. Calculemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Vemos que presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La resolvemos usando la regla de L'Hôpital dos veces (en este caso se puede):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Ejercicio

Calcular, usando la regla de L'Hôpital los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sen}^2(x)}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x).$$

3.9. Estudio y representación gráfica de funciones

Para dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ debemos estudiar los puntos que se enumeran a continuación. Para ilustrar el proceso, escribiremos un ejemplo con la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

<u>Dominio y continuidad de la función.</u>

Debemos estudiar los puntos donde la función no está definida o es discontinua. También debemos estudiar el tipo de discontinuidad que aparezca.

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$. Por tratarse de una función racional,hemos de estudiar en qué puntos se anula el denominador: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. El dominio de continuidad es entonces $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. ¿ Qué tipo de discontinuidad es ?. Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, se trata de una discontinuidad de salto infinito, y por tanto inevitable. Conviene recordar esto a la hora de estudiar las asíntotas más adelante.

<u>Cortes con los ejes y signo de la función.</u>

Hemos de resolver (si es posible) la ecuación $f(x) = 0$ (cortes con el eje x) y calcular $f(0)$ (corte con el eje y; notemos que el eje y sólo puede ser cortado una vez). A continuación consideramos los intervalos cuyos extremos son los puntos de corte con el eje x, así como los puntos que no pertenecen al dominio. En cada uno de estos intervalos el signo de la función no cambia, debido al teorema de Bolzano. Por tanto, para conocer el signo de f en cada intervalo basta tomar un punto arbitrario y mirar su signo.

En nuestro caso particular tenemos: por un lado, $f(0) = \frac{2}{3}$, luego la gráfica $y = f(x)$ corta al eje y en el punto $(0, \frac{2}{3})$. Por otro lado,

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2.$$

Los puntos de corte con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$. Teniendo en cuenta además que $3 \notin D(f)$, consideramos los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada intervalo la función no cambia (si lo hiciera, por el teorema de Bolzano existiría otra raiz dentro del intervalo, lo cual no es posible). Basta tomar un punto en cada intervalo y estudiar su signo:

- Tomemos $-2 \in (-\infty, -1)$; entonces $f(-2) = -\frac{4}{5} < 0$. Por tanto, $f < 0$ en $(-\infty, -1)$.
- Tomemos $0 \in (-1, 2)$; $f(0) = \frac{2}{3} > 0$. De este modo, $f > 0$ en $(-1, 2)$.
- Tomemos $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \in (2, 3)$, $f(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{2} < 0$. Entonces $f < 0$ en $(2, 3)$.
- $4 \in (3, \infty)$, $f(4) = 10 > 0$. Por tanto, $f > 0$ en $(3, \infty)$.

Asíntotas.

Calculamos las posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. En particular, para estudiar las asíntotas verticales deberíamos tener en cuenta los puntos de discontinuidad estudiados al principio.

- Asíntotas verticales. Teniendo en cuenta el dominio de discontinuidad de la función, el único punto donde puede haber una asíntota vertical es $x = 3$. Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = -\infty.$$

  Por tanto, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Además, f se va a infinito por la derecha de $x = 3$ y a menos infinito por la izquierda. Conviene recordar esto a la hora de estudiar los extremos globales.
- Asíntotas horizontales. Notemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Por tanto, no hay asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas. En este caso,

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x} = 1, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 2}{x - 3} = 2.$$

  Por tanto, la recta $y = mx + n = x + 2$ es una asíntota oblicua, tanto en ∞ como en $-\infty$.

Crecimiento y extremos.

Para estudiar el crecimiento de f hemos de recurrir a la primera derivada f'. Primero calculamos los valores singulares. A continuación construimos los intervalos cuyos extremos vienen dados por los valores críticos y los puntos que no pertenecen al dominio de f. Ahora, al igual que hicimos para estudiar el signo, tomamos un punto arbitrario en cada intervalo y miramos el signo de la derivada, que no cambiará debido al teorema de Bolzano.

Para determinar los extremos relativos, es importante tener en cuenta que estos pueden ser tres tipos de puntos:

- Puntos donde f no es derivable.
- Valores singulares: $f'(x) = 0$. Podemos usar el anterior estudio sobre crecimiento para determinar si se tratan de máximos, mínimos o puntos de inflexión. También puede hacerse recurriendo a la segunda derivada o, en caso necesario, a las derivadas de orden superior.
- En el caso de un dominio cerrado, $D(f) = [a, b]$, habría que estudiar además los extremos del intervalo.

Por último, los extremos absolutos es conveniente estudiarlos una vez que se ha dibujado la gráfica, teniendo en cuenta que si hay asíntotas verticales u oblicuas es posible que no hayan máximos o mínimos absolutos.

La primera derivada de f es: $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Para calcular los valores críticos resolvemos la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1$, $x = 5$. Además hemos de tener en cuenta que f no está definida en $x = 3$. Consideramos entonces los siguientes intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 5)$ y $(5, \infty)$, y estudiamos el signo de f' en cada una de ellos:

- Tomemos $0 \in (-\infty, 1)$, $f'(0) = \frac{5}{9} > 0$. Por tanto, $f' > 0$ en $(-\infty, 1)$. Esto significa que f es creciente en $(-\infty, 1)$.
- Tomemos $2 \in (1, 3)$, $f'(2) = -3 < 0$. Entonces $f' < 0$ en $(1, 3)$, y por tanto, f es decreciente en $(1, 3)$.
- Tomemos $4 \in (3, 5)$, $f'(4) = -3 < 0$. De este modo, $f' < 0$ en $(3, 5)$, y por tanto f es decreciente en $(3, 5)$.
- Tomemos $6 \in (5, \infty)$, $f'(6) = \frac{5}{9}$. Entonces $f' > 0$ en $(5, \infty)$, y por tanto f es creciente en $(5, \infty)$.

Vemos entonces que el valor crítico $x = 1$ es un máximo relativo y que $x = 5$ es un mínimo relativo.

Por otra parte, como $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$, no hay máximos absolutos. De igual forma, tampoco existen mínimos absolutos, ya que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.

<u>Concavidad y convexidad</u>.

Calculamos la segunda derivada f'' y estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad teniendo en cuenta las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, los puntos donde no existe f'' y los puntos que no pertenecen al dominio de f.

En nuestro ejemplo, $f''(x) = \frac{8}{(x-3)^3}$. Es claro que la ecuación $f''(x) = 0$ no tiene soluciones, por lo que sólo hemos de considerar el punto $x = 3 \notin D(f)$. Se forman así dos intervalos: $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$:

- Tomemos $2 \in (-\infty, 3)$, $f''(2) = -8 < 0$. Por tanto, $f'' < 0$ en $(-\infty, 3)$ y esto significa que f es cóncava en $(-\infty, 3)$.
- Tomemos $4 \in (3, \infty)$, $f''(4) = 8 > 0$. De este modo, $f'' > 0$ en $(3, \infty)$, y por tanto, f es convexa en dicho intervalo.

En este caso, $x = 3$ no sería un punto de inflexión, porque no pertenece al dominio de f.

3.10. Cálculo aproximado de raices de ecuaciones

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a)f(b) < 0$. El teorema de Bolzano nos dice que existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Dicho de otra forma c es una raiz o solución de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$. Pero en determinados problemas es importante no sólo conocer que existe solución, sino también determinar dicha solución. En general, no podremos resolver exactamente la ecuación $f(x) = 0$, pero sí podremos aproximar dichas soluciones tanto como queramos, es decir, podremos calcular raices o soluciones aproximadas de la ecuación.

En esta sección presentaremos cuatro métodos clásicos para aproximar soluciones. En todos ellos supondremos que f es continua en $[a, b]$ y que cambia de signo en los extremos, lo que nos asegura la existencia de alguna raiz. También supondremos que hay una única raiz en $[a, b]$ (en el caso en que f sea derivable, esta unicidad puede demostrarse usando el teorema de Rolle).

Método de la bisección

Este método se basa directamente en el teorema de Bolzano. Como $f(a)f(b) < 0$, existe una raiz $c \in (a, b)$ que supondremos única. Tomemos el punto medio $x_0 = \frac{a+b}{2}$ del intervalo y calculemos $f(x_0)$. Pueden ocurrir tres cosas:

- Si $f(x_0) = 0$ hemos acabado, ya que x_0 es la raiz buscada.
- Si $f(a)f(x_0) < 0$, consideramos el intervalo $[a, x_0]$ donde, según el teorema de Bolzano, estará la raiz buscada.
- Si $f(x_0)f(b) < 0$, consideramos el intervalo $[x_0, b]$. Ahora la raiz está en este intervalo, de nuevo por el teorema de Bolzano.

Hemos localizado la raiz en un intervalo cuya longitud es la mitad de la longitud del intervalo inicial. De este modo, tendremos que la distancia entre x_0 y c es menor que $\frac{b-a}{2}$.

Repitamos el proceso anterior partiendo del intervalo $[a, x_0]$ o $[x_0, b]$, según el caso. Obtendremos así un nuevo punto x_1 cuya distancia a la raiz c será menor que $\frac{b-a}{4}$.

Continuando este proceso, obtendremos una sucesión x_0, x_1, x_2,... de raices aproximadas de la ecuación $f(x) = 0$. Como en cada paso la longitud se reduce a la mitad, en el paso n tendremos que

$$\operatorname{dist}(x_n, c) = |x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n+1}} = 0$, deducimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, lo que demuestra que las raices aproximadas x_n se acercan cada vez más a la raiz c.

Método de Newton o de las tangentes

Supondremos ahora que f es derivable en (a, b). Tomemos un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ y consideremos la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en dicho punto: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta recta corta al eje de abcisas en un cierto punto x_1 que se puede calcular fácilmente:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Por supuesto, esto podremos hacerlo siempre que $f'(x_0) \neq 0$. A este procedimiento se le llama *aproximación por la tangente* .

Observación

Si $f'(x_0) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica en x_0 es paralela al eje de abcisas, por lo que nunca lo cortará, salvo en el caso en que $f(x_0) = 0$. Pero entonces x_0 sería la raiz buscada y habríamos terminado.

Una vez obtenido el punto x_1, trazamos la tangente en x_1 y calculamos el punto x_2 de corte con en eje de abcisas:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

válido siempre que $f'(x_1) \neq 0$. Este proceso se repite y obtenemos así una sucesión x_1, x_2,.... de raices aproximadas, definidas de forma recursiva por la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

En general, no podemos asegurar que la sucesión generada por el método de Newton converga a la raiz; de hecho, puede incluso que algún x_n caiga fuera del intervalo (a, b). Pueden darse condiciones suficientes para asegurar la convergencia, pero este tipo de cuestiones está fuera del alcance de este curso.

Método de la secante o de las cuerdas

Llamemos $x_0 = a$ y $x_1 = b$. Consideremos la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y calculemos el punto de corte x_2 con en eje de abcisas. La ecuación de dicha cuerda es:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de donde, haciendo $y = 0$, obtenemos:

$$x_2 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Ahora repetimos el proceso a partir de los puntos x_1 y x_2. Así obtenemos una sucesión x_0, x_1, x_2,..... de aproximaciones, cuya fórmula general puede escribirse así:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este método tiene varios inconvenientes. Por un lado, puede ser que algún x_n esté fuera del intervalo (a, b) y que no pertenezca al dominio de f. Por otro lado, puede ser que $f(x_n) = f(x_{n-1})$, con lo que no podríamos construir el término x_{n+1}. Finalmente, aunque la sucesión de aproximaciones x_n pueda construirse, no podemos asegurar que converja hacia la raiz. Sin embargo, podemos modificar ligeramente el método de la secante para que todo funcione bien. Esto será el próximo método que estudiaremos.

Método de "regula falsi "

El método de "regula falsi " es una modificación del método de la secante, en el que en cada paso elegimos el subintervalo que contiene a la raiz.

Consideramos la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y calculamos el punto de corte x_1 con el eje de abcisas. Al igual que en el método de la secante, este punto será :

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Tenemos ahora tres posibilidades:

- Si $f(x_1) = 0$ hemos terminado, ya que x_1 es la raiz buscada.
- Si $f(a)f(x_1) < 0$, la raiz estará en el intervalo (a, x_1). Construimos entonces la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x_1, f(x_1))$, y calculamos el punto de corte x_2 de la cuerda con el eje de abcisas.
- Si $f(x_1)f(b) < 0$, la raiz estará en el intervalo (x_1, b). Hacemos entonces lo mismo que en caso anterior pero considerando los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(b, f(b))$.

Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión x_1, x_2,..... de raices aproximadas. Puede demostrarse que esta sucesión siempre converge a la raiz.

3.11. EJERCICIOS TEMA 3

1. Calcular, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$.

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x_0 = 2$.

   c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ en $x_0 = 0$.

2. Calcular las rectas tangente y normal a las gráficas de las siguientes funciones o curvas en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ en $x_0 = 1$.

   b) $f(x) = \text{sen}(x) - 5x$ en $x_0 = 0$.

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$	(f) $y = (2x^3 + 5)^4$
(b) $y = x^2 e^x$	(g) $y = \text{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right)$
(c) $y = x^3 \text{arctg}\,(x)$	(h) $y = \text{tg}[\ln(x)]$
(d) $y = x\sqrt{x}(3\ln(x) - 2)$	(i) $y = \ln[\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)]$
(e) $y = \dfrac{\text{arc sen}(x)}{x}$	(j) $y = x^{x^2}$

4. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, denominadas *funciones hiperbólicas*:

   a) $\text{senh}\,(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico).

   b) $\cosh\,(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico).

   c) $\text{tgh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (tangente hiperbólica).

5. Probar que la función $y = (x^2+1)(e^x+C)$ (donde C es una constante) convierte en identidad la ecuación $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = e^x(x^2 + 1)$.

6. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta tangente a la gráfica de la función $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, trazada en el punto de abscisa $x = 1$?

7. Hallar el ángulo comprendido entre las parábolas $y = 8 - x^2$, $y = x^2$.

8. Hallar las derivadas de orden n de las siguientes funciones:

   a) $y = 2^x$

   b) $y = \ln(x)$

c) $y = \frac{1}{x}$

9. ¿Se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 6x + 100$ en el intervalo $[1,5]$? ¿Con qué valor de x_0?
10. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = x$ se cortan en un único punto.
11. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = 0$ tiene una única raiz real.
12. Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ en el intervalo $[0,16]$. Comprobar que $f(0) = f(16) = 4$. Hallar la derivada de f y probar que no se anula en el intervalo $(0,16)$. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?
13. Probar que la derivada del polinomio $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ tiene una raíz real en el intervalo $(-1,1)$.
14. Sobre el arco AB de la gráfica de la función $y = 2x - x^2$ hallar un punto M en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda AB si $A = (1,1)$ y $B = (3,-3)$.
15. Usando la regla de L'Hôpital, calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{e^x - e}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln(x))$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^x$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

16. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x(1+\sqrt{x})$.
17. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$.
18. Hallar los extremos de la funciones $f(x) = (x-5)e^x$ y $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
19. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = 3x - x^3$ sobre el intervalo $[-2,3]$. ¿Cómo sabemos de antemano que dichos valores extremos existen?
20. Hallar los intervalos de convexidad y concavidad de la función $f(x) = x^5 + 5x - 6$.
21. Hallar los extremos de la función $f(x) = (x+1)^2(x-2)$, así como sus puntos de inflexión.
22. Hallar las asíntotas horizontales y verticales de la función $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.
23. Hallar las asíntotas de la función $y = x^2e^{-x}$.

24. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$

    b) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

    c) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$

25. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

    b) $f(x) = \ln(1 + 3x)$

    c) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

26. Calcular el polinomio de Taylor de orden n en $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = e^x$

    b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

    c) $f(x) = \cos(x)$

    d) $f(x) = \ln(1 + x)$

27. Representar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en forma de polinomio de quinto grado con respecto al polinomio $x - 1$

28. Hallar aproximadamente una raíz de las siguientes ecuaciones, usando los métodos de bisección, tangente, secante y "regula falsi" con cuatro pasos:

    a) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$.

    b) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos(x) + x = 0$.

    Comparar, en cada caso, los resultados obtenidos con cada método.

Capítulo 4

Cálculo de Primitivas

El concepto clave del Cálculo Integral es la integración. Nuestro objetivo en este tema es estudiar este proceso.

El cálculo de integrales es un proceso extraordinariamente importante en Cálculo.

Estudiaremos el concepto de integral indefinida, así como distintas técnicas de integración

4.1. Calculo integral

Hay dos conceptos fundamentales en Cálculo, a saber, la idea de derivada y la integral. La integración es el problema inverso de la derivación. A veces se presenta el caso en que se conoce la derivada de una función y el problema es determinar esa función.

4.1.1. Primitiva de funciones. Integral indefinida. Integración inmediata

Definición 4.1.1. Dada una función f, se denomina una *primitiva* de f a una función F que verifica $F' = f$.

Sea $C \in \mathbb{R}$ una constante. Si F es una primitiva de f entonces $F + C$ también lo es ya que:

$$(F + C)' = F' + C' = F' = f.$$

De este modo, si una función posee una primitiva entonces tiene infinitas primitivas.

Si F y G son primitivas de f entonces:

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

De esto se deduce que $G = F + C$. Esto prueba que dos primitivas de una función se diferencian en una constante. Dicho de otra forma, todas las primitivas de f son de la forma $F + C$ siendo F una primitiva particular de f y C una constante.

Ejemplo

Hallar primitivas generales de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^5$.
2. $g(x) = \operatorname{sen} x$.

Si $F(x) = x^6$, entonces $F'(x) = 6x^5$, luego vemos que una primitiva particular de f es $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$ porque así $F'(x) = 6\dfrac{x^5}{6} = x^5$, luego la primitiva general de f es $G(x) = \frac{x^6}{6} + C$.

Si $S(x) = -\cos x$, entonces $G'(x) = \operatorname{sen} x$, luego la primitiva general de la función g es $G(x) = \operatorname{sen} x + C$.

Definición 4.1.2. Definimos la *integral indefinida* de f como el conjunto de sus primitivas. Se denota

$$\int f(x)dx.$$

Por tanto,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

siendo F una primitiva particular de f.

La gráfica de $F(x) + C$, para valores distintos de C, representa una familia de funciones. Como cada miembro de la familia tiene la misma derivada en x, la pendiente en x de cada gráfica es la misma. Así, las gráficas de las funciones de la forma $y = F(x) + C$ forman una colección de curvas.

Hay que tener presente que $\int f(x)dx$ representa una familia de funciones.

El proceso de hallar las integrales indefinidas se llama *integración indefinida*. Observemos que este proceso significa hallar una primitiva de f y sumarle una constante arbitraria, que se llama *constante e integración*

Propiedades básicas

Tenemos las siguientes propiedades elementales:

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Hemos dicho que la integración es el proceso inverso de la derivación. Ésto nos anima a dar fórmulas para el cálculo de primitivas. Podemos enunciar propiedades fundamentales del cálculo integral, que se obtienen a partir de la tabla de derivadas inmediatas.

Reglas básicas de integración: Tabla de *integrales inmediatas*:

- Múltiplo constante: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.
- Suma: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- Diferencia: $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.
- Linealidad: $\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$.
- $\int 0dx = C$.
- $\int dx = x + C$.
- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, para $\alpha \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x}dx \equiv \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
- $\int e^x dx = e^x + C$.
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$, para $a > 0$, $a \neq 1$.
- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$.
- $\int \sec^2(x)dx = \tan x + C$.

- $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\operatorname{cotan} x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$
- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C.$

Con estas reglas básicas, se puede calcular infinidad de integrales indefinidas.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (x^5 - 3x^2 - 7)dx.$
2. $\int (5\sqrt{x} + 4\operatorname{sen} x)dx.$

$$\int (x^5-3x^2-7)dx = \int x^5dx - 3\int x^2dx - 7\int dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} - 3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 7x + C = \frac{1}{6}x^6 - x^3 - 7x + C.$$

$$\int (5\sqrt{x}+4\operatorname{sen} x)dx = 5\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int \operatorname{sen} x dx = 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4(-\cos x) + C = \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4\cos x + C.$$

Se usará abundantemente el concepto de primitiva en teoría de integración. Además, en el próximo tema se verá su relación con un resultado llamado *Teorema Fundamental del Cálculo*.

4.2. Métodos de integración

Las fórmulas que aparecen en la tabla de las reglas de integración o tabla de integrales inmediatas no son suficientes por si sólas para calcular muchas integrales que tenemos que estudiar.

Para calcular la integral de una función que no aparezca en la tabla de integrales inmediatas, debemos recurrir a un *método de integración*. Los dos más importantes son el *cambio de variable* y la *integración por partes*.

Hay ciertos tipos de funciones que se pueden integrar siguiendo métodos específicos para cada caso. Veremos cómo se integran algunos de estos tipos de funciones.

4.2.1. Integración por cambio de variable

El método del cambio de variable es el más importante y fundamental de los métodos de integración. Es la versión en integrales de la regla de la cadena.

Recordemos que por la regla de la cadena si $g(x) = (x^2 + 3x + 5)^9$ entonces su derivada es

$$g'(x) = 9(x^2 + 3x + 5)^8(2x + 3).$$

Por tanto,

$$\int 9(x^2 + 3x + 5)^8(2x + 3)dx = (x^2 + 3x + 5)^9 + C.$$

Observemos que el integrando es de la forma

$$f(u(x))u'(x)$$

donde $f(x) = 9x^8$ y $u(x) = x^2 + 3x + 5$.

Se puede integrar muchos productos de la forma $f(u(x))u'(x)$ aplicando a la inversa la regla de la cadena, como indica el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 (Integración por cambio de variable (o sustitución)). *Sean g, f y u funciones de x derivables tales que*

$$g(x) = f(u(x))u'(x).$$

Entonces

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C,$$

donde F es una primitiva de f. Más claramente, si F es una primitiva de f entonces $F \circ u$ es una primitiva de $(f \circ u) \cdot u'$.

El problema es $\int f(u(x))u'(x)dx$, según el teorema del cambio de variable todo se reduce a calcular $F(t) = \int f(t)dt$, porque entonces $F \circ u$ es solución del problema inicial.

En la práctica este teorema se usa de la siguiente forma:

1. El problema es $\int f(u(x)u'(x)dx$.
2. Sustituimos $u(x)$ por t y $u'(x)dx$ por dt.
3. Tras el cambio el problema queda: $\int f(t)dt$.

4. Resolvemos $\int f(t)dt$.
5. Si $F(t)$ es solución del problema anterior, entonces "deshaciendo.[el] cambio, $F(u(x)$ es solución del problema inicial.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int e^x \text{sen}(e^x)dx$.

Sean $f(x) = \text{sen}\, x$ y $u(x) = e^x$. Como $u'(x) = e^x$, el problema que tenemos que resolver es $\int f(u(x))u'(x)dx$. De esta forma, haciendo el cambio $t = e^x$, $dt = e^x dx$, se tiene

$$\int e^x \text{sen}(e^x)dx = \int \text{sen}(t)dt = -\cos\,(t) + C = -\cos(e^x) + C.$$

2. $\displaystyle\int (1-x)e^{-x^2+2x}dx$.

Sean $f(x) = e^x$ y $u(x) = -x^2 + 2x$. Entonces, haciendo el cambio $t = -x^2 + 2x$, $dt = -2x + 2$, se tiene

$$\int (1-x)e^{-x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int 2(1-x)e^{-x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

El integrando nos hace pensar en la derivada del arcoseno. Podemos escribir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx.$$

de esta forma, considerando las funciones $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $u(x) = x^2 = t$ se tiene $dt = 2xdx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2}\text{arcsen}(t) + C = \frac{1}{2}\text{arcsen}(x^2) + C.$$

El arte del cambio de variable es muy importante, porque muchos de los métodos de integración que se desarrollan en este tema irán combinados con él. Veamos otros ejemplos que ilustran otras formas de cambio de variable en problemas de integración.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \sec x dx.$

Se comienza multiplicando y dividiendo el integrando por $(\sec x + \tan x)$:

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx.$$

La ventaja de esto es que ahora el numerador es la derivada del denominador. Así, el cambio de variable $t = \sec x + \tan x$, $dt = (\sec^2 x + \sec x \tan x)dx$ da:

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}.$

El cambio de variable obvio $t = 1 + e^x$ no funciona. En efecto, como $dt = e^x dx$, se tiene

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{\frac{dt}{e^x}}{t} = \int \frac{dt}{e^x t} = \int \frac{dt}{(t-1)t}$$

y ésta no es una forma adecuada porque todavía no sabemos cómo calcular integrales de funciones racionales. En lugar de eso, se multiplica y divide el integrando por e^{-x}, obteniéndose:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}.$$

Ahora se efectúa el cambio de variable $t = e^{-x} + 1$, de donde $dt = -e^{-x}dx$ y así:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln(e^{-x}+1) + C.$$

Observamos que como $e^{-x} + 1 > 0$ para todo x, es $|e^{-x} + 1| = e^{-x} + 1$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}.$

Como 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3, se pone $x = t^6$ y así $dx = 6t^5dt$. Entonces se tiene

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6t^5dt}{(t^6)^{\frac{1}{3}} + (t^6)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6t^5dt}{t^2 + t^3} = \int \frac{6t^5dt}{t^2(1+t)} = \int \frac{6t^3dt}{1+t}$$

Estamos ante un cambio de variable que no lleva a una forma directamente integrable. Cuando el integrando es un cociente de polinomios y el grado del numerador es mayor que el del denominador, suele ser una buena idea el dividir los polinomios (todo esto lo veremos más adelante). La división da $6t^3 = (6t^2 - 6t + 6)(t+1) - 6$, luego

$$\begin{aligned}\int \frac{6t^3dt}{1+t} = \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\right) dt &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C \\ &= 2(x^{\frac{1}{6}})^3 - 3(x^{\frac{1}{6}})^2 + 6(x^{\frac{1}{6}}) - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}t + 1| + C \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}} + 1| + C.\end{aligned}$$

En principio, se puede aplicar cualquier cambio de variable que tenga sentido (por ejemplo, $x = \log(-t^2)$ no tiene sentido, ya que $-t^2 \leq 0$). A continuación vamos a ver unas clases de funciones para las que se conocen cambios de variable que suelen simplificar considerablemente las integrales.

A. Para calcular la integral de una función en la que aparece e^x, se puede hacer el cambio de variable $t = e^x$, ya que entonces $x = \ln t$ y $dx = \frac{dt}{t}$.

B. Para calcular la integral de una función en $(a+bx)^{\frac{1}{p_1}}, (a+bx)^{\frac{1}{p_2}}, \ldots, (a+bx)^{\frac{1}{p_m}}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, se puede hacer el cambio de variable $a + bx = t^n$, con $n = \text{m.c.m.}\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, ya que entonces $(a+bx)^{\frac{1}{p_j}} = t^{\frac{n}{p_j}}$ y $\frac{n}{p_j} \in \mathbb{N}$.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

$$\int e^{2x}dx, \qquad \int \tan x dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x^3-2)^5}dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

4.2.2. Integración por partes

La integración por partes es una técnica importante de integración que se puede aplicar a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan productos de funciones algebraicas y trascendentes. Es un método que se obtiene de la regla del producto para la derivación.

La regla de derivación de un producto es:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrando ambos miembros de la igualdad se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv' \Longleftrightarrow uv = \int u'v + \int uv'.$$

Si pasamos un término a otro lado, obtenemos la fórmula de integración por partes, contenida en el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *Sean u y v funciones derivables, entonces:*

$$\int uv' = uv - \int u'v \Longleftrightarrow \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

La fórmula de integración por partes se puede escribir así:

$$\int udv = uv - \int duv.$$

Observación

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original.

A la hora de aplicar la fórmula de integración por partes debemos seguir las siguientes pautas:

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x \ln x dx.$

Como no sabemos integrar $\ln x$, definamos $u(x) = \ln(x)$ y $v'(x) = x$.

Claramente $v(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Por tanto, según la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. $\int x e^x dx.$

Sean $u(x) = x$ y $v'(x) = e^x$. Entonces $v(x) = e^x$ y $u'(x) = 1$. Por tanto,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x-1).$$

Se puede preguntar por qué no se incluye una constante de integración cuando se integra dv (o v'). La razón es que, en integración por partes, sólo necesitamos una función cuya diferencial sea dv, luego tomamos la más sencilla (que es la que tiene constante cero). Puede ser instructivo ver que tomando v con una constante K arbitraria, se obtiene el mismo resultado.

La integración por partes suele ser difícil cuando se empieza, porque no hay reglas infalibles para elegir u y dv. Lo que si hay tener en cuenta es que, la integral que se obtenga al aplicar integración por partes sea más fácil que la original.

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un sólo factor. En estos casos hay que tomar $v'(x) = dx$ ó $dv = dx$.

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{arc\,sen} x dx$.

Sea $v'(x) = dx$, y $u(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Entonces $v(x) = x$ y $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La integración por partes produce ahora

$$\int \operatorname{arc\,sen} x dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Observemos que hemos aplicado integración por cambio de variable en el último paso.

Ejercicio

Calcular $\int \ln x dx$.

Algunas integrales requieren aplicar integración por partes más de una vez.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Los factores x^2 y $\operatorname{sen} x$ son igualmente fáciles de integrar. Sin embargo la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de $\operatorname{sen} x$ no lo es. Así que se debe elegir la opción $u(x) = x^2$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $u'(x) = 2x$ y $v(x) = -\cos x$. Ahora la integración por partes produce:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.$$

Este primer uso de la integración por partes, ha simplificado la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esta integral volvemos a aplicar integración por partes. Esta vez sea $u(x) = 2x$ y $v'(x) = \cos x$. Ahora la integración por partes produce

$$\int 2x \cos x dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Combinando estos resultados podemos escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Al aplicar repetidas veces la integración por partes, debemos también percatarnos de la aparición de un múltiplo constante de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x dx$. En este ejemplo hacemos $u(x) = \cos 2x$ y $v'(x) = e^x$ en la primera sustitución y $u(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $v'(x) = e^x$. Una vez realizada la integración por partes, basta despejar $\int e^x \cos 2x dx$. Veámoslo:

Sea $I = \displaystyle\int e^x \cos 2x dx$. Se toma $u(x) = \cos 2x$ y $v'(x) = e^x$, de donde $u'(x) = -2\operatorname{sen} 2x$ y $v(x) = e^x$. Así se tiene:

$$I = \int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x - \int e^x(-2\operatorname{sen} 2x) dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \operatorname{sen} 2x dx.$$

Tomamos ahora $u(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $v'(x) = e^x$, de donde $u'(x) = 2\cos 2x$ y $v(x) = e^x$. Así se tiene:

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x dx = e^x \operatorname{sen} 2x - \int e^x(2\cos 2x) dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x \cos 2x dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2I.$$

combinando ambas integrales, obtenemos:

$$I = e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x - 4I = e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) - 4I.$$

Despejamos I:

$$5I = e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) \Rightarrow I = \frac{e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x)}{5} + C.$$

La integración por partes está especialmente recomendada para integrales de la forma que vemos a continuación. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $p(x)$ un polinomio:

- $\displaystyle\int p(x)e^{ax}dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = e^{ax}$.
- $\displaystyle\int p(x) \operatorname{sen}(ax)dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = \operatorname{sen}(ax)$.
- $\displaystyle\int p(x) \cos(ax)dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = \cos(ax)$.
- $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)dx$. Aquí puede tomarse $u(x) = e^{ax}$ o $u(x) = \operatorname{sen}(bx)$, ya que ambas son fáciles de integrar.
- $\displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)dx$. Aquí puede tomarse $u(x) = e^{ax}$ o $u(x) = \cos(bx)$, ya que ambas son fáciles de integrar.
- $\displaystyle\int p(x) \ln(x)dx$, tomando $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\text{arcsen}(ax)dx$, tomando $u(x) = \text{arcsen }(ax)$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\arccos(ax)dx$, tomando $u(x) = \arccos\,(ax)$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\arctan(ax)dx$, tomando $u(x) = \arctan\,(ax)$ y $v'(x) = p(x)$.

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales:

$$\int \text{arctan}x dx, \quad \int x^\alpha \log(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1.$$

Hay ocasiones en las que el problema es

$$\int f(u(x))dx.$$

Supongamos que u es derivable y tiene inversa derivable, u^{-1}.

Consideremos la función $h(t) = f(t)(u^{-1})'(t)$.

Si conseguimos calcular una primitiva F de h entonces $F \circ u$ es primitiva de $f \circ u$.

En la práctica hacemos lo siguiente:

- El problema es $\int f(u(x))dx$.
- Se sustituye $u(x)$ por t (o x por $u^{-1}(t)$) y dx por $(u^{-1})'(t)dt$.
- Tras el cambio el problema se transforma en $\int f(t)(u^{-1})'(t)dt$.
- Se resuelve el problema anterior.
- Si $F(t)$ es solución del problema anterior, "deshaciendo.el cambio $F(u(x))$ es solución del problema inicial.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$.

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $u(x) = \sqrt{x}$. El problema es entonces calcular $\displaystyle\int f(u(x))dx$.

Hacemos el cambio $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x$, entonces $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2tdt = dx$. Así se tiene:

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = \int \operatorname{sen} t2tdt = 2\int t \operatorname{sen} tdt.$$

Aplicamos integración por partes para resolver la última integral. Sean $u(t) = t$ y $v'(t) = \operatorname{sen} t$, entonces $u'(t) = 1$ y $v(t) = -\cos t$. Entonces:

$$\int t \operatorname{sen} tdt = -t\cos t + \int \cos tdt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + C = -\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \operatorname{sen}\sqrt{x} + C.$$

Entonces

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

4.2.3. Integración de funciones racionales

Una función racional es la de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinómicas. La descomposición en fracciones simples es un magnífico método de integración.

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

La descomposición en fracciones simples es un procedimiento de descomponer una función racional reducida en suma de otras.

Se puede descomponer la expresión racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples si P y Q no tienen factores comunes y si el grado de P es menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, se divide primero para obtener un polinomio mas una fracción que verifique la condición anterior (que se llama *fracción propia*), y cuya integración se simplifica por descomposición en fracciones simples.

En álgebra se demuestra que se puede escribir una fracción propia como una suma de fracciones de una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{ó} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

donde a, p, q son constantes y el polinomio x^2+px+q es irreducible (es decir, no tiene raices reales o, lo que es lo mismo, no se puede descomponer en producto de factores lineales). Comenzamos con la primera fracción:

Descomposición en fracciones simples: un solo factor

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Ejemplo

Descomponer $\dfrac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}$ en suma de fracciones simples.

El numerador y el denominador son polinomios que no tienen factores comunes y el grado del numerador es menor que el del denominador, por lo tanto, se puede descomponer la función racional en fracciones simples. El denominador es un polinomio con una sóla raiz, ya factorizado. La descomposición en fracciones simples es, en este caso:

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}.$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x-2)^3$ se obtiene

$$x^2-6x+3 = A_1(x-2)^2 + A_2(x-2) + A_3.$$

Haciendo $x = 2$ se obtiene

$$2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3 \Rightarrow A_3 = -5.$$

Se sustituye ahora A_3 por -5 y se desarrolla el miembro de la derecha

$$x^2 - 6x + 3 = A_1 x^2 + (-4A_1 + A_2)x + (4A_1 - 2A_2 - 5).$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo exponente se tiene:

$$1 = A_1, \quad -6 = -4A_1 + A_2, \quad 3 = 4A_1 - 2A_2 - 5.$$

Este es un sistema compatible determinado que da como solución $A_1 = 1$ y $A_2 = -2$. Así pues, la descomposición es

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-5}{(x-2)^3}.$$

Si hay dos o mas factores lineales en el denominador, hay que descomponer la fracción en las fracciones correspondientes a cada factor. Por ejemplo,

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$$

se descompone en

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

(El grado del denominador es el mismo número que el de constantes arbitrarias que hay que poner en los numeradores. Comprobar rutinariamente que esto es siempre así, para evitar errores de bulto).

Ejemplo

Descomponer en fracciones simples $\dfrac{8x-1}{x^2-x-2}$.

Vemos que el grado del denominador es mayor que el del numerador. Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador en factores y comprobar que no hay factores comunes con el numerador. Después se descompone la fracción en suma de fracciones simples, cada una con un factor lineal en el denominador y numeradores indeterminados y se suman estas fracciones. Tenemos, pues,

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{8x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Ahora se multiplican ambos miembros por el mínimo común denominador $(x-2)(x+1)$, obteniéndose:

$$8x - 1 = A_1(x+1) + A_2(x-2).$$

Ahora se dan a x, sucesivamente, valores que anulen cada uno de los sumandos del miembro de la derecha. Para $x = -1$ se tiene $3 = A_2$ y para $x = 2$ se tiene $5 = A_1$.

Así

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1}.$$

Si hay factores lineales múltiples y distintos se combinan los métodos vistos anteriormente. Por ejemplo, una descomposición sería:

$$\frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

En este caso, el grado del denominador es 3, luego hay que poner 3 constantes arbitrarias. En cambio, hay que poner 4 constantes arbitrarias en el siguiente caso:

$$\frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^3(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{x-3}.$$

Ahora se procede como en los casos anteriores para averiguar el valor de las constantes.

Si alguno de los factores del denominador es un polinomio irreducible de segundo grado, entonces el numerador correspondiente deberá tener la forma $Mx+N$, como indicamos a continuación:

Descomposición en fracciones simples: un sólo factor cuadrático irreducible

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Como el grado del denominador es $2m$, tenemos $2m$ constantes arbitrarias $M_1, M_2, \dots M_m$ y $N_1, N_2, \dots N_m$.

Ejemplo

Descomponer $\dfrac{-3x^3-x}{(x^2+1)^2}$.

La descomposición es:

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2+1)^2} + \frac{A_2x + B_2}{x^2+1}.$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x^2+1)^2$ y se desarrolla, se tiene:

$$-3x^3 - x = (A_1x + B_1) + (A_2x + B_2)(x^2+1) = A_2x^3 + B_2x^2 + (A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2).$$

Ahora se igualan los coeficientes de las mismas potencias en cada miembro, y se resuelve el sistema correspondiente, obteniéndose $A_1 = 2$, $A_2 = -3$, $B_1 = 0$ y $B_2 = 0$. Esto significa que

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{-3x}{x^2+1}.$$

En muchos casos habrá factores lineales y cuadráticos; por ejemplo, en la siguiente descomposición:

$$\frac{x^2 + 4x - 23}{(x^2+4)(x+3)^2} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+4} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{(x+3)^2}.$$

El grado del denominador es 4 y hay 4 constantes desconocidas.

El álgebra nos dice que cualquier polinomio con coeficientes reales se puede descomponer en producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, alguno de los cuales pueden estar repetidos. Se puede usar este resultado para justificar el siguiente procedimiento general de obtener una descomposición en fracciones simples de una función racional:

Descomposición en fracciones simples de una función racional

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, con $Q(x) \neq 0$ y los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sin factores comunes.

Paso 1. Comprobamos que el grado de P sea menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor que el grado de Q, tendríamos que dividir P entre Q para poder escribir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el cociente de la división y R es el resto, que es cero o de grado menor que Q. Supongamos ya que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia.

Paso 2. Se factoriza el denominador en producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.

Paso 3. Se expresa $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples de las formas

$$\frac{A_i}{(x-a)^n} \quad \text{ó} \quad \frac{M_j x + N_j}{(x^2+px+q)^m}.$$

Hay que comprobar siempre que el número de constantes arbitrarias que se utilizan es igual al grado del denominador.

Para estudiar la integración de funciones racionales, empezamos estudiando la integración de las fracciones simples.

Consideremos las fracciones simples

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{ó} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

donde $A, M, N, a, p, q \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}$ y $p^2 - 4q < 0$ (esta condición significa que el polinomio $x^2 + px + q$ no posee raices reales).

Podemos calcular una primitiva de cualquier facción simple:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$$

y si $n \neq 1$,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Este tipo de integrales da lugar a logaritmos y arcotangentes. Explicaremos el procedimiento para calcularlas mediante un ejemplo:

Calculemos la integral $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx$.

- Primero buscamos en el numerador la derivada del denominador ($= 2x + 2$):

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^2+2x+3}dx\right)$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

- La primera integral es el logaritmo del denominador, ya que el numerador es precisamente la derivada del denominador:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \ln|x^2+2x+3| + C.$$

- La segunda integral da lugar a una arcotangente. Para verlo, completamos cuadrados en el denominador, es decir, lo escribimos en la forma $(x+\alpha)^2+\beta$:

$$x^2+2x+3 = (x+\alpha)^2+\beta = x^2+2\alpha x+(\alpha^2+\beta) \Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Por tanto,

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right] = 2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$$

y de este modo,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

- Finalmente, obtenemos

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^+px+q)^m}dx.$$

Este caso es más complicado y no lo consideraremos. Estas integrales se calculan usando la *fórmula de Hermite*.

Con todo esto, ya tenemos las herramientas para integrar funciones racionales usando la descomposición en fracciones simples. Ilustremos todo lo anterior con un ejemplo:

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx$.

Como el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador pasamos al siguiente paso.

Calculamos las raices de Q,

$$x^2+3x+2=0 \Longrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array} \right. .$$

La factorización que buscábamos es $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Como hemos obtenido dos raices reales distintas, podemos seguir con el siguiente paso.

Descomponemos en fracciones simples, para ello tenemos que introducir dos incógnitas A y B

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

Para averiguar los valores de las constantes A y B pasamos la igualdad anterior a común denominador y eliminamos los denominadores, con lo cual queda:

$$2x-1=A(x+2)+B(x+1)$$

$$2x-1=(A+B)x+2A+B$$

Tenemos una igualdad de polinomios, con lo cual formamos un sistema de ecuaciones y resolvemos

$$2=A+B$$

$$-1=2A+B$$

La solución del sistema es $A=-1$ y $B=5$.

La integral de partida la podemos descomponer como suma de dos integrales más fáciles de resolver

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}dx=\int \frac{-1}{x+1}dx+\int \frac{5}{x+2}dx=-\ln|x+1|+5\ln|x+2|+C,$$

donde C es la constante de integración.

El último paso consiste en simplificar el resultado utilizando las propiedades de los logaritmos, aunque la integral ya quedo resuelta en el paso anterior

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}dx=-\ln|x+1|+5\ln|x+2|+C=\ln\left(\frac{|x+2|^5}{|x+1|}\right)+C.$$

Observación

Las únicas funciones racionales que no hemos visto cómo descomponer en fracciones simples son aquellas cuyo denominador contiene polinomios de segundo grado sin raices reales, elevados a potencias mayores que uno, como $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. La descomposición es similar, pero dado que este tipo de funciones tiene una descomposición algo más complicada y que no suele aparecer mucho en la práctica, no vamos a tratarlas. La integración de esas fracciones simples requiere métodos que no hemos visto, como el método de Hermite.

4.2.4. Integración de funciones trigonométricas

Nos ocuparemos en esta sección de cierto tipo de integrales en las que aparecen funciones trigonométricas. Estudiaremos varios casos:

Caso 1. Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)dx, \quad \int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)dx, \quad \int \cos(ax)\cos(bx)dx.$$

En este caso, usaremos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

para transformar los productos en sumas, que son sencillas de integrar.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx$.

Según la primera igualdad

$$\operatorname{sen}(2x)\cos(5x) = \frac{\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(-3x)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(7x)-\operatorname{sen}(3x)}{2}$$

y por tanto,

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx = \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen}(7x)dx - \int \operatorname{sen}(3x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(7x)}{7}+\frac{\cos(3x)}{3}\right)+C.$$

Finalmente, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx = -\frac{1}{14}\cos(7x) + \frac{1}{6}\cos(3x) + C.$$

Caso 2. Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx \quad (m, n \in \mathbf{N}).$$

Hemos de considerar varios casos:

- Si m es impar, hacemos el cambio $t = \cos(x)$. De este modo, $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - t^2$.
- Si n es impar, hacemos el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$. De este modo, $\cos^2(x) = 1 - t^2$.
- Si m y n son pares, usamos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{sen(2x)}{2}.$$

Observación

Si n y m son ambos impares, se pueden usar los dos primeros cambios. Si $n < m$, es preferible usar el cambio $t = \operatorname{sen} x$. Si $n > m$, es preferible usar el cambio $t = \cos x$.

Ejemplo

Calcular las integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)dx$
2. $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$

En el primer caso, la integral es inmediata, ya que la derivada del seno es el coseno:

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)dx = \frac{\operatorname{sen}^6(x)}{6} + C.$$

Aquí no es necesario aplicar las reglas anteriores.

En el segundo caso, como $m = 3$ es impar, hacemos el cambio $t = \cos(x)$, de donde $dt = -\operatorname{sen}(x)dx$. Escribiremos entonces

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = -\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)(-\operatorname{sen}(x))dx$$

$$= -\int (1-t^2)t^4dt = -\int (t^4 - t^6)dt = \int (t^6 - t^4)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C.$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C.$$

Ejercicio.

Calcular $\int \cos^4(x)dx$.

Observación

Hemos dado los cambios en el caso en que m y n sean enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia funciona siempre que m o n sean impares y positivos.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx.$

Como la potencia del coseno es impar, hacemos el cambio $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x dx$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx = \int \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)dt = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = 2\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x + C.$$

Caso 3. Integrales de la forma $\int R(sen(x), \cos(x))dx$, donde R es una función racional.

En primer lugar conviene destacar que cualquier función racional en las razones trigonométricas puede expresarse como una función racional en seno y coseno, como ilustra el siguiente ejemplo:

$$\frac{\sec x \tan^2 x - 5\operatorname{cosec}^3 x}{\cos x + 3^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\operatorname{sen}^3 x}}{\cos x + 3\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}^5 x - 5\cos^3 x}{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}}{\frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^5 x - 5\cos^3 x}{\cos^4 x \operatorname{sen}^3 x + 3\cos^5 x \operatorname{sen} x}.$$

Veamos ahora cómo se resuelven las integrales. Tenemos varios casos en los que se usan cambios especiales:

- Si R es impar en $\operatorname{sen}(x)$ (esto es, $R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \cos(x)$.
- Si R es impar en $\cos(x)$ (esto es, $R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$.

- Si R es par en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ (esto es, $R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \tan x$.

En cualquier caso, es posible hacer el cambio universal $t = \tan(\frac{x}{2})$, que implica

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

El inconveniente de este cambio es que los cálculos pueden resultar complicados. Debe considerarse como último recurso.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$.

En este caso $R(sen(x), \cos(x)) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, que es impar en $\operatorname{sen}(x)$. Por tanto, hacemos el cambio $t = \cos(x)$ de donde $x = \arccos(x)$, $dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ y $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \int \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1}.$$

Esta última integral es racional; si factorizamos el denominador, obtenemos

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Deshaciendo el cambio, resulta

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

Ejercicio.

Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{4\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) + 5},$$

usando el cambio universal $t = \tan(\frac{x}{2})$.

4.2.5. Integración de funciones irracionales

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usaremos sutituciones trigonométricas para evaluar integrales que contienen radicales.

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar el radical del integrando y reducir la función irracional a integrar a una función trigonométrica.

1. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a-b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\operatorname{sen} t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a-b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\cos t$ y $dx = \sqrt{a}\cos t\frac{dt}{\sqrt{b}}$.
2. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a+b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\tan t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a+b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\sec t$ y $dx = \sqrt{a}\sec^2 t\frac{dt}{\sqrt{b}}$.
3. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{b(x-\alpha)^2-a}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\sec t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{b(x-\alpha)^2-a} = \sqrt{a}\tan t$ y $dx = \sqrt{a}\sec t\tan t\frac{dt}{\sqrt{b}}$.
4. Para calcular la integral de una función en la que aparece alguna de las raices de los tres apartados anteriores, se puede hacer el cambio de variable t igual a la raíz, si aparece $(x-\alpha)^n$, con n impar, multiplicando (o dividiendo) en el integrando. Si n es impar, este cambio es mucho más conveniente que cualquiera de los indicados en los tres últimos apartados.

Como caso particular, destacaremos los siguientes, donde R es una función racional:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$; cambio $x = a\operatorname{sen}(t)$ ó $x = a\cos(t)$.
2. $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$; cambio $x = a\tan(t)$ ó $x = a\cot(t)$.
3. $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$; cambio $x = a\sec(t)$ ó $x = a\csc(t)$.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx$.

Es fácil comprobar que $x^2-6x+8 = (x-3)^2-1$. Por tanto, estamos en el tercer caso general, donde $a = 1$, $b = 1$ y $\alpha = 3$. El cambio de variable que hay que considerar es $\sec t = x-3$, entonces $\sqrt{x^2-6x+8} = \tan t$ y $dx = \sec t\tan t dt$. Así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2-1}}dx = \int \frac{1}{\tan t}\sec t\tan t dt = \int \sec t dt.$$

La integral $\int \sec t dt$ ya sabemos cómo hacerla (**Ejercicio**).

2. Calcular $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}dx$ mediante el cambio $x = \tan(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2(t)}$.

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2(t)+1}}{\cos^2(t)}dt = \int \sqrt{\frac{\tan^2(t)+1}{\cos^4(t)}}dt = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^6(t)}}dt = \int \frac{1}{\cos^3(t)}dt$$

donde hemos usado que $\tan^2(t) + 1 = \dfrac{sen^2(t)}{\cos^2(t)} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.

La integral *displaystyle* $\int \frac{1}{\cos^3(t)}dt$ ya sabemos cómo hacerla. (**Ejercicio**).

4.2.6. Estrategias de integración

Esta sección pretende servir de resumen de los métodos de integración anteriormente estudiados, así como de guia a la hora de atacar una determinada integral.

1. Mirar si se trata de una integral inmediata. Reescribir el integrando si es necesario: simplificar, descomponer en sumandos, utilizar identidades trigonométricas, etc.

2. Ver si se puede hacer un cambio de variables adecuado, para transformas la integral en una integral elemental.

3. Clasificar en uno de los siguientes tipos:

(a) Integración por partes. Para poder aplicar la fórmula de integración por partes ha de haber un producto en el que uno de los factores sea fácil de integrar y el otro sea fácil de derivar. La integral resultante ha de ser más sencilla que la original.

(b) Funciones racionales.

(c) Funciones trigonométricas.

(d) Funciones irracionales.

4. Si no ha salido por alguno de los métodos anteriores, intentarlo de otra forma (multiplicar por 1, racionalizar, usar otras fórmulas trigonométricas, etc).

4.3. EJERCICIOS TEMA 4

1. Calcula una primitiva de cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x - 1 \qquad f_2(x) = x^3 - x + 1 \qquad f_3(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f_4(x) = (x-1)(x+1) \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x - \cos x \qquad f_6(x) = \operatorname{sen}(2\,x)$$

$$f_7(x) = x - \frac{1}{x} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad f_9(x) = \frac{x+1}{x}$$

2. Resuelve las siguientes integrales indefinidas (utilizando si es necersario un cambio de variable adecuado) :

a) $\displaystyle\int x\, e^{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\, dx$ c) $\displaystyle\int x\, \operatorname{sen}(1-x^2)\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3\,x+2}}\, dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2\,x+3)^2}}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{2\,x+3}{\sqrt{1-(2\,x+3)^2}}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{2\,x}{1+x^4}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

3. Resuelve las siguientes integrales por partes:

a) $\displaystyle\int x\, e^{2\,x+1}\, dx$ b) $\displaystyle\int x^2 e^{2\,x}\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx$

d) $\displaystyle\int (\ln x)^2\, dx$ e) $\displaystyle\int x\, \operatorname{arctg} x\, dx$ f) $\displaystyle\int x^2\, \operatorname{sen} x\, dx$

4. Halla las siguientes integrales racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+x+1}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2\,x}{x^2+2\,x+2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6\,x+9}\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-6\,x+9}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{x^2+x-2}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{-44+29\,x+9\,x^2-6\,x^3}{6-7\,x-3\,x^2+3\,x^3+x^4}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{-4+2\,x-2\,x^2+x^3}\, dx$

5. Calcula el valor de las siguientes integrales de tipo trigonométrico:

a) $\displaystyle\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \cos^3 x\, \operatorname{sen}^2 x\, dx$ e) $\displaystyle\int \frac{5\, \operatorname{sen} x - 3\, \operatorname{sen} x\, \cos x}{3 - 4\, \cos x + \cos^2 x}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

6. Obtén las siguientes integrales con radical cuadrático:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2 - 4\,x + 4\,x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9\,x^2 + 12\,x + 5}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{25\,x^2 - 10\,x}\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6\,x + 8}}\, dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{3 + 6\,x - x^2}\, dx$ f) $\displaystyle\int x\,\sqrt{1 - x - x^2}\, dx$

7. Utiliza el método adecuado para resolver las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1 + x}{\sqrt{2 + x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int e^{-x}(1 + e^{-2x})\, dx$ d) $\displaystyle\int x^3\, \cos(x^2)\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{4 - 3\,x + x^2}{-1 + x - x^2 + x^3}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2 - \cos x}}\, dx$ h) $\displaystyle\int \left(x\, \operatorname{sen} x - x^2 \cos x\right)\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{-1 + 7\,x - 3\,x^2 + x^4}{-1 + x}\, dx$ j) $\displaystyle\int \ln\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\, dx$ l) $\displaystyle\int \frac{1 + e^x}{2 - 3\,e^x + e^{2\,x}}\, dx$

8. Más integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x^2 \cos(2x) dx$

b) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x}) dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(\frac{x + 1}{x - 1}) dx$

$d)$ $\int \text{sen}(\ln(x))dx$

$e)$ $\int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}dx$

$f)$ $\int \frac{2dx}{2+x-x^2}$

$g)$ $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

$h)$ $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$

$i)$ $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x-\cos^2 x}$

$j)$ $\int \frac{4dx}{\text{sen}x-\text{tg}x}$

$k)$ $\int \text{th}^3 x dx$

$l)$ $\int \text{sen}^5(2x)dx$

$m)$ $\int e^{2x}\sqrt{1-e^x}dx$

$n)$ $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$

$\tilde{n})$ $\int \frac{dx}{x^{3/2}+x^{1/2}}$

$o)$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

$p)$ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

Capítulo 5

Integral Definida

5.1. Introducción

En la escuela elemental se estudia el concepto de área y se calculan las áreas de unas ciertas figuras planas con bordes rectos. También se da la fórmula del área del círculo, pero no se enseña, en general, a calcular áreas de regiones planas limitadas por curvas. El proceso de hallar el área de una tal región se llama cuadratura. El área bajo una curva juega un papel central en Cálculo. Es razonable definir el área como el límite de una suma. Veamos la idea superficialmente.

Dada una función f, continua y no negativa definida en un intervalo $[a, b]$, el esquema general de aproximación del área bajo la curva $y = f(x)$, es el siguiente:

Primeramente construimos una partición de $[a, b]$ (esto es, una serie de puntos ordenados, empezando en a y terminando en b) en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. En cada subintervalo consideramos el rectángulo de base ese subintervalo y altura el valor de la función en el extremo derecho del subintervalo, y calculamos el área de ese rectángulo. Está claro que la suma de estas áreas, da una estimación del área que queremos calcular.

$$S_n = f(a + \Delta x)\Delta x + f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a + n\Delta x)\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Está claro que mientras más puntos tenga la partición, mejor será la aproximación. Esto se consigue haciendo que $\Delta x \to 0$. En Cálculo avanzado se prueba que la continuidad de f implica la existencia de $\lim_{\Delta x \to 0} S_n$ y se usa este límite para definir el área, como se indica a continuación:

<u>Área como límite de una suma:</u>

Supongamos que f es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a,b]$. El área de la región bajo la curva $y = f(x)$ por encima de ese intervalo es

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x)\Delta x + f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a + n\Delta x)\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La definición de área como límite de una suma es coherente con el concepto de área introducido en geometría plana. Por ejemplo, no es difícil usar esta fórmula para demostrar que el área de un rectángulo es $A = bh$, o que la de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. Hay que hacer notar, no obstante que, aunque decimos que la fórmula $A = bh$ es la definición del área de un rectángulo, en el caso del área bajo una curva lo propio es definirla como el límite de la suma.

5.2. Concepto de integral definida

No sólo el área, sino también otras magnitudes como la distancia, el volumen, la masa y el trabajo se pueden aproximar primero por sumas, y luego se puede obtener exactamente tomando límites de esas sumas. La clase especial de límites que aparece en este contexto se llama *la integral definida*, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann, que fue el inventor del proceso. Vamos a describir la integración como una generalización del método de cálculo de áreas que hemos introducido anteriormente. Después introduciremos un instrumento clave para la integración, el Teorema Fundamental del Cálculo.

Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$. Nos planteamos el problema de calcular el área R delimitada bajo la curva $y = f(x)$ (concretamente, el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abcisas).

Usaremos un método de aproximación basado en rectángulos, cuyas áreas son fáciles de calcular. Consideremos una partición del intervalo $[a,b]$, esto es, una serie de puntos ordenados (pero no necesariamente aquiespaciados):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, llamemos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) y tomemos un punto arbitrario $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Para cada k, construimos el rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(\lambda_k)$. El área de dicho rectángulo será $f(\lambda_k)\Delta x_k$. Sumando ahora el área de los rectángulos, obtenemos una aproximación al área R, denominada *suma de Riemann*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k.$$

Esto es una generalización de los cálculos de áreas que hemos tratado antes. Siempre que escribamos

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k$$

se le llamará una *suma de Riemann*. Se usan las sumas de Riemann para hallar la integral correcta para una aplicación correcta.

Integral Definida

Comparando la suma de Riemann con la S_n que usábamos en la sección anterior para el cálculo del área, vemos que ésta última es un tipo especial de aquella con

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad \lambda_k = a + k\Delta x, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Como cada intervalo de la partición P asociada con S_n tiene longitud Δx, la norma de la partición (es decir, lo que mide cada subintervalo de la partición) es $\|P\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este tipo de partición se llama *partición regular*.

Cuando escribimos que el área bajo la curva $y = f(x)$ es $A = \lim_{\Delta x \to 0} S_n$, estamos diciendo que se puede aproximar A con la precisión que se desee hallando una suma de Riemann de la forma S_n con norma $\|P\| = \frac{b-a}{n}$ lo suficientemente pequeña, o lo que es lo mismo, hacer n lo suficientemente grande. Es lógico pensar que, haciendo un paso al límite (esto es, $\|P\| \to 0$, o lo que es equivalente $n \to \infty$), las sumas de Riemann tenderán al área buscada R. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 5.2.1. Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Decimos que f es *integrable* en $[a, b]$ si existe (es un número real) el límite

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k, \quad \text{(ó equivalentemente)} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k.$$

En tal caso, a dicho límite se le llama *integral definida* de f entre a y b, y se representa

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Si existe el límite de una suma de Riemann de f cuando $\|P\| \to 0$ y es finito, decimos que f es integrable. Esto significa, en particular, que se puede aproximar el número I hasta el grado de precisión que se quiera mediante cualquier suma de Riemann de f con norma suficientemente pequeña.

Observemos que en la definición anterior, f no necesita ser continua ni tomar valores positivos. Cuando esto sucede, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$:

Área como integral

Supongamos que f es continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es la integral definida de f en $[a, b]$, es decir

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx.$$

Normalmente usamos las integrales para calcular áreas, pero a veces podemos usar las áreas para calcular integrales. En el punto en que estamos, no es fácil calcular sumas de Riemann. Por tanto, si se ve que una integral representa el área de una figura geométrica conocida, se puede usar la fórmula del área para hallar la integral.

Observación

Puede probarse que la definición de integral definida que hemos dado no depende de la partición que tomemos ni de los puntos λ_k que elijamos.

Podemos definir como límites de sumas otras magnitudes distintas del área. Una de ellas es la distancia. Lo enunciamos sin entrar en detalle:

Distancia:

La *distancia recorrida por un móvil* con velocidad continua $v(t)$ a lo largo de una recta desde el instante $t = a$ al instante $t = b$ es

$$S = \int_a^b |v(t)|dt.$$

Al definir $\int_a^b f(x)dx$ hemos supuesto $a < b$. Podemos ampliar la definición al resto de casos como sigue:

Definición 5.2.2 (Definiciones de dos integrales definidas especiales)**.**

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Se tienen los siguientes resultados importantes:

Teorema 5.2.1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Podemos generalizar este resultado:

Teorema 5.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, salvo quizás en un número finito de puntos en los que hay discontinuidades evitables o de salto finito, entonces f es integrable. Además, si los puntos de discontinuidad son $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

Propiedades de la integral definida

En los cálculos con integrales son a menudo útiles las siguientes propiedades elementales que se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema 5.2.3. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$:*

- *Regla de linealidad: La función $rf + sg$ es también integrable en $[a, b]$ para todo par de constantes r y s y*

$$\int_a^b [rf(x) + sg(x)]dx = r\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx.$$

- *Regla de subdivisión : Si $a \leq c \leq b$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

suponiendo que existan todas las integrales.

- *Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- *Regla de dominación: Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- *Si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

La interpretación geométrica de esta propiedad es sencilla: el área bajo la curva $y = f(x)$ está comprendida entre las áreas de dos rectángulos, uno pequeño y otro grande.

5.3. El Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

En el Tema 2 dimos una herramienta matemática muy útil, llamada el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, que dice que, bajo hipótesis razonables, hay al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que el valor de la derivada en $x = c$ es igual a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

El teorema del valor medio del cálculo integral es similar y, en el caso especial en que $f(x) \geq 0$, tiene una interpretación geométrica que facilita su comprensión. En particular, el teorema dice que se puede hallar al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que el área del rectángulo de altura $f(c)$ y base $b - a$ es la misma que la de la región bajo la curva en $[a, b]$.

Teorema 5.3.1 (Teorema del valor medio del cálculo integral). *Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, existe al menos un número c entre a y b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Este teorema no dice cómo hallar c: simplemente afirma su existencia.

Hay muchas situaciones prácticas en las que interesa hallar el valor medio de una función continua en un intervalo. Ejemplos de estas situaciones son el hallar el valor medio del nivel de contaminación atmosférica en un día, la productividad media de un trabajador en un proceso de fabricación, etc. Se pueden calcular las medias de este tipo por la fórmula que damos en la definición siguiente:

Definición 5.3.1 (Valor Medio). Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, el *valor medio* de f en ese intervalo es el número

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Como vemos, el valor medio de una función continua f en un intervalo $[a, b]$, no es más que el valor $f(c)$ del teorema del valor medio del cálculo integral.. En otras palabras, podemos decir que, una función debe tomar su valor medio al menos una vez en un intervalo $[a, b]$ en el que la función es continua.

Esta afirmación es muy razonable porque el teorema del valor intermedio para funciones continuas nos dice que una función continua toma todos los valores entre su máximo M y su mínimo m, y es de esperar que el valor medio esté entre esos dos.

Ejemplo

Supongamos que x horas después de medianoche, la temperatura en una cierta ciudad de Europa Central obedece aproximadamente a la fórmula

$$T(x) = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2.$$

Hallar la temperatura mediaentre las 2:00 y las 14:00, y la hora a la que se alcanza dicha temperatura media.

Queremos hallar la temperatura media en el intervalo $[2,14]$. Este valor medio es

$$T = \frac{1}{14-2}\int_2^{14}\left[2 - \frac{1}{7}(x-13)^2\right]dx = \frac{1}{12}\left[2x - \frac{1}{7}\frac{1}{3}(x-13)^3\right]_2^{14}$$

$$\frac{1}{12}\left[\frac{587}{21} - \frac{1415}{21}\right] \approx -3,2857143.$$

Esto significa que la temperatura media en ese intervalo horario es de, aproximadamente, 3,2857143 grados bajo cero. Para hallar cuándo se alcanza dicha temperatura, se resuelve la ecuación:

$$\text{TEMP. MEDIA} = \text{TEMP. EN EL INSTANTE } x \leftrightarrow -3,2857143 = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2$$

$$37 = (x-13)^2 \leftrightarrow x = 13 \pm \sqrt{37} \approx 19,082763 \text{ ó } 6,9172375.$$

El primer valor no es admisible porque se pasa de las 14:00 horas, luego la temperatura media se alcanza 6,917 horas después de medianoche, o sea, a las 06:55, aproximadamente.

5.4. Resultados fundamentales: Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

Se han visto ya dos de las principales ramas del Cálculo: el Cálculo Diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el Cálculo Integral (el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fué descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Hemos visto que se puede aproximar numéricamente el valor de una integral definida y que, usando fórmulas sumatorias, se pueden calcular algebraicamente algunas integrales. Estos métodos son complicados y es dudoso que la integración fuera una herramienta tan potente si ésas fueran las únicas maneras de calcular una integral.

Por otro lado, a simple vista, parece que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ (que es un número) no tiene nada que ver con la integral indefinida $\int f(x)dx$ (que es un conjunto de funciones) estudiado en el tema anterior. Entonces ? 'por qué usamos el mismo símbolo $\int$ para ambos conceptos?. Dicho de otro modo ¿qué relación hay entre las integrales definida e indefinida?.

Presentaremos en esta sección resultados que enuncian la conexión entre los problemas del Cálculo arriba mencionado y que relacionan las integrales definidas e indefinidas, además de darnos un medio para poder calcular las integrales definidas.

Teorema 5.4.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Definamos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces F es continua en $[a, b]$. Además, si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F' = f$, dicho de otro modo, F es una primitiva de f.

Este teorema dice simplemente, que toda función continua tiene primitiva, que puede escribirse además como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Es muy importante notar que la variable x aparece en el símbolo de la integral, por lo que variamos el intervalo de integración: para cada x integramos f en el intervalo $[a, x]$.

Ejemplo (Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo)

Calcular la derivada de $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$.

Observemos que $f(t) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$ es continua en toda la recta real. Aplicando, por tanto, el Teorema Fundamental del Cálculo que acabamos de ver se obtiene

$$\left(\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

Este ejemplo constituye una aplicación directa del Teorema Fundamental del Cálculo.

A veces es necesario derivar una integral en la que uno de los límites de integración es una función. Concretamente, supongamos que $u(x)$ es una función de x, derivable, y que F es la función definida por

$$F(u) = \int_a^{u(x)} f(t)dt,$$

donde f es una función continua. Entonces F es una función de u y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que

$$F'(u) = \left(\int_a^u f(t)dt \right)' = f(u).$$

Sin embargo, se puede considerar a F como la composición de dos funciones, la función $u(x)$, y la función $G(y) = \int_a^y f(t)dt$. Es claro que $F(x) = (G \circ u)(x)$, Así que, aplicando la regla de la cadena, tenemos que la derivada de la función F es

$$F'(x) = G'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Por tanto

$$F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

<u>**Ejemplo**</u>

Hallar la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3} \cos t dt.$

Haciendo $u(x) = x^3$, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena.

$$F'(x) = F'(u(x))u'(x) = \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3} \cos t dt \right)' = (\cos u(x)) \cdot (3x^2) = \cos x^3 \cdot 3x^2.$$

Más generalmente, se puede derivar una integral cuyos límites de integración sean ambos funciones derivables aplicando el siguiente resultado:

Teorema 5.4.2 (Regla de Leibniz). *Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones de x derivables, entonces*

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \right)' = f(u(x)) \cdot u'(x) - f(v(x)) \cdot v'(x).$$

<u>**Ejemplo**</u> (Aplicación de la Regla de Leibniz)

Derivar la función $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} \tan t dt.$

Aplicaremos la regla de Leibniz con $f(t) = \tan t$, $u(x) = x^2 - 3x$ y $v(x) = \sqrt{x}$. Así,

$$u'(x) = 2x - 3 \quad \text{y} \quad v'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

luego

$$F'(x) = (2x-3)\tan(x^2-3x) - \tan\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (2x-3)\tan(x^2-3x) - \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Observación

Una cosa es decir que f posee primitiva y otra muy distinta calcularla. Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función continua $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ posee primitiva, que puede calcularse como $\int_a^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ (aquí a es arbitraria). Sin embargo, puede demostrarse que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no posee primitiva expresable en términos elementales, es decir, como combinación y composición de funciones racionales, logaritmos, exponenciales, radicales y funciones trigonométricas.

Según el comentario anterior, el Teorema Fundamental del Cálculo tiene interés teórico, pero no nos sirve para el cálculo de primitivas. El siguiente resultado será fundamental para el cálculo efectivo de integrales definidas a partir del cálculo de primitivas:

Teorema 5.4.3 (Regla de Barrow (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, o sea, que verifique que $F'(x) = f(x)$ en ese intervalo, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b.$$

La Regla de Barrow (también llamada Segundo Teorema Fundamental del Cálculo), nos permite calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ del siguiente modo:

- Primero calculamos una primitiva F de f, usando alguno de los métodos de integración que hemos estudiado.

- Después, basta evaluar F en los extremos del intervalo, a y b, y restar.

La cuestión de la existencia de una primitiva es importante y hemos dicho que siempre existe en el caso de que f sea continua en $[a,b]$. De hecho, la existencia de una primitiva es una cuestión tan importante como el cálculo de la integral definida. Por eso estos resultados son los Teoremas Fundamentales del Cálculo. De hecho, en algunos textos, la Regla de Barrow (o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) aparece como Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema Fundamental del Cálculo que hemos enunciado, aparece como Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Ejemplo

Calculemos $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)dx$.

La función $\cos(2x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$ (es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$), así que podemos usar la Regla de Barrow para calcular la integral $\int_0^\pi \cos(2x)dx$, por tanto, primero calculamos una primitiva de $\cos(2x)$:

$$\int \cos(2x)dx = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}.$$

A continuación evaluamos esa primitiva en los límites de integración y restamos:

$$\int_0^\pi \cos(2x)dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2} = 0.$$

Ejemplo (Empleo de la Regla de Barrow para encontrar un área)

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Observemos que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx$$

La función $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ es continua por ser una función polinómica, entonces podemos usar la Regla de Barrow para calcular la integral definida, para ello hallamos una primitiva de la función, evaluamos en los extremos del intervalo y restamos:

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

5.5. Métodos de Integración para integrales definidas

Alguno de los métodos de integración que hemos estudiado en el tema anterior se pueden adaptar a la integral definida.

CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 5.5.1 (Cambio de variable en una integral definida). *Supongamos que f es continua en el conjunto de valores que toma g. Si g' es continua en $[a, b]$, y si f tiene una primitiva F en ese intervalo, entonces*

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \quad \text{donde} \quad u = g(x) \text{ y } du = g'(x)dx$$

siempre y cuando esas integrales existan.

Ejemplo

Calcule $\int_1^2 (4x-5)^3 dx$.

Esta integral se puede hacer de dos formas distintas:

1. Calculamos la integral indefinida mediante el cambio de variable $u = 4x - 5$, $du = 4dx$; de este modo

$$\int (4x-5)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} + C.$$

Deshacemos el cambio

$$\int (4x-5)^3 dx = \frac{1}{4}\frac{(4x-5)^4}{4} + C.$$

Por último usamos la regla de Barrow; consideramos la primitiva para $C = 0$, evaluamos en los extremos del intervalo de integración y restamos:

$$\int_1^2 (4x-5)^3 dx = \left[\frac{1}{4}\frac{(4x-5)^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{16}[3^4 - (-1)^4] = \frac{1}{16}(81-1) = 5.$$

2. Aplicamos el teorema del cambio de variable para integrales definidas, con el mismo cambio de variable que antes; en este caso, si $x = 2$, entonces $u = 4\cdot 2 - 5 = 3$, y si $x = 1$, entonces $u = 4 \cdot 1 - 5 = -1$. Por tanto,

$$\int_1^2 (4x-5)^3 dx = \int_{-1}^3 u^3 \frac{du}{4} = \left[\frac{1}{4}\frac{u^4}{4}\right]_{-1}^3 = \frac{1}{16}(81-1) = 5.$$

Observemos que en este caso no se requiere volver a la integral de partida.

INTEGRACIÓN POR PARTES EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Esta fórmula es la misma que la de las integrales indefinidas, salvo que el primer sumando de la derecha está evaluado en los límites de integración.

Ejemplo

Calcule $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

Esta integral la podemos hacer de dos formas distintas:

1. Primero calculamos $\int_0^1 xe^{-x}dx$ por partes. Hacemos $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$, de donde

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Ahora aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. Aplicamos la fórmula de integración por partes para integrales definidas. Elegimos los mismos u y v:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

5.6. Integrales impropias

Hemos estudiado la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ en un intervalo cerrado y acotado, donde el integrando $f(x)$ es una función acotada. En esta sección extendemos la definición al caso en que el intervalo no está acotado y también al caso en que f no está acotado en dicho intervalo. Ambos casos se llaman *integrales impropias*.

5.6.1. Integrales con límites infinito

En física, economía, estadística y otras áreas aplicadas se necesitan integrales sobre toda la recta real o sobre una de sus semirrectas del tipo $x \geq a$ o $x \leq a$. Si $f(x) \geq 0$, la integral de f en la semirrecta $x \geq a$ se puede imaginar como el área bajo la curva $y = f(x)$ en ese intervalo no acotado. Una estrategia razonable para calcular este área es hallar primero el área desde $x = a$ hasta un número $x = N$ y luego tomar el límite en la expresión anterior cuando $N \to \infty$. Así damos la siguiente definición:

Definición 5.6.1 (Integrales impropias: primera clase (intervalo de integración no acotado)). Sea a un número fijo y supongamos que existe $\displaystyle\int_a^N f(x)dx$ para todo $N \geq a$.

Definimos la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)dx$ como

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe (es un número real), y en caso contrario, que *diverge*.

Ejemplo (Integral impropia convergente)
Calcular $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.
Es fácil ver la gráfica d la función. La región no es acotada, luego parece razonable pensar que su área es infinita. Fijemos $N > 1$ y calculemos primero la integral desde 1 hasta N:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^N = -\frac{1}{N} + 1.$$

Ahora tomamos límite cuando $N \to \infty$. Así,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N} + 1 = 1.$$

Vemos que, en este caso, la integral impropia es convergente y vale 1.

Ejemplo(Integral impropia divergente)
Calcular $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.
La función que estamos considerando para integral tiene una gráfica parecida a la del ejemplo anterior. Procedemos como en el ejemplo anterior para calcular la integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} [\ln|x|]_1^N = \lim_{N\to\infty} \ln N = \infty.$$

Vemos que, en este caso, el límite no es un número, luego la integral impropia es divergente.

Hemos demostrado que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge y $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. En lenguaje geométrico esto significa que el área a la derecha de $x = 1$ bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ es finita, mientras que la que hay bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ es infinita. La razón de esta diferencia es que, cuando $N \to \infty$, $\frac{1}{x^2}$ tiende a cero más rápidamente que $\frac{1}{x}$.

Ejercicio

Demuestre que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge solamente si $p > 1$.

Podemos definir también las integrales impropias para intervalos no acotados por la izquierda o para toda la recta real de manera similar a las anteriores.

Definición 5.6.2 (Integrales impropias: primera clase generalizada). Sea b un número fijo y supongamos que existe $\displaystyle\int_N^b f(x)dx$ para todo $N \leq b$.

Definimos la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ como

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_N^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe (es un número real), y en caso contrario, que *diverge*.

Definimos la integral impropia de f en toda la recta real así:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx,$$

donde a es un número real cualquiera. La integral impropia del miembro de la izquierda *converge* si las dos integrales del miembro de la derecha convergen, y *diverge* si alguna de estas dos integrales diverge.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^0 e^x dx = \lim_{N\to-\infty} [1 - e^N] = 1.$$

En este caso la integral impropia es convergente y su valor es 1.

5.6.2. Integrales con integrando no acotado

Si una función es no acotada en un intervalo $[a, b]$, la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ no está ni siquiera definida porque sólo las funciones acotadas son integrables Riemann. Sin embargo, es posible definir la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ en ciertos casos.

Vamos a entender como *función no acotada en un punto c* aquella que toma valores arbitrariamente grandes en un entorno de c. La versión geométrica de este hecho es que la recta $x = c$, sea asíntota vertical a la gráfica de la función.

Vamos a estudiar un problema concreto. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $0 < x \leq 1$. La función f no está acotada en ese intervalo (los valores de la función crecen arbitrariamente cuando nos acercamos a cero, luego lo que estamos diciendo es que la función no está acotada en cero) y, por tanto, la integral $\int_0^1 f(x)dx$ no está definida. En cambio, f es continua en cualquier intervalo $[N, 1]$ con $0 < N \leq 1$. Para estos intevalos se tiene:

$$\int_N^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_N^1 = 2 - 2\sqrt{N}.$$

Si hacemos tender N a 0 tomando valores positivos (es decir, consideramos el límite por la derecha en cero), se ve que

$$\lim_{N \to 0^+} \int_N^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N \to 0^+} (2 - 2\sqrt{N}) = 2.$$

También a ésta se le llama una integral impropia, y toma el valor 2 porque parece razonable definir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N \to 0^+} \int_N^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

En el ejemplo anterior, f es no acotada en el extremo izquierdo del intervalo de integración, pero se aplicaría un razonamiento semejante si lo fuera en el extremo derecho, o en cualquier punto interior. Damos una definición de integral impropia de este tipo:

Definición 5.6.3 (**Integrales impropias: segunda clase**). Si f es no acotada en a y existe la integral $\displaystyle\int_N^b f(x)dx$ para todo N tal que $a < N \leq b$, entonces definimos la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to a^+} \int_N^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe, y , en caso contrario, que *diverge*. De manera análoga, si f es no acotada en b y existe la integral $\displaystyle\int_a^N f(x)dx$ para todo N tal que $a \leq N < b$, entonces definimos la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to b^-} \int_a^N f(x)dx.$$

Si f es no acotada en c, donde $a < c < b$ y son convergentes las integrales $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia del miembro de la izquierda *diverge* si diverge cualquiera de las dos de la derecha.

Observación

De la definición anterior se desprende que, si una función continua en un intervalo semiabierto es no acotada en uno de los dos extremos, sustituimos ese extremo por N, integramos, y luego tomamos límite lateral cuando N tiende a ese extremo. Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ salvo en un cierto punto interior c donde tiene una discontinuidad infnita, se escribe la integral en la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

y se calculan las dos integrales de la derecha (si existen) tomando los límites correspondientes.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

Sea $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. Esta función es no acotada en el extremo derecho del intervalo de integración y es continua en $[0, N]$ para todo N tal que $0 \leq N < 1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{N\to 1^-} \int_0^N \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{N\to 1^-} [3(x-1)^{\frac{1}{3}}]_0^N \\ &= 3 \lim_{N\to 1^-} [(N-1)^{\frac{1}{3}} - (-1)] = 3.\end{aligned}$$

Es decir, la integral impropia converge y vale 3.

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec x dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2} dx$.

Observación

En este caso, se divide el intervalo de integración y expresamos la integral como suma de dos integrales de tal modo que pueda resolverse cada una según los casos que hemos estudiado.

Si f es una función integrable en cada intervalo cerrado y acotado (o dicho de otra forma, *localmente integrable*) tal que $f(x) \geq 0$ si $x \geq M$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f$ converge o es infinito. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.6.1. *Sean f y g funciones localmente integrables tales que $f(x) \leq g(x)$ si $x \geq M$, para cierto $M \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ también es convergente, y si $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ también es divergente.*

Teorema 5.6.2. *Sean f y g funciones localmente integrables tales que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $f(x), g(x) \geq 0$ si $x \geq M$, para cierto $M \in \mathbb{R}$.*

- *Si $l \in (0, \infty)$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si y sólo si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge.*
- *Si $l = 0$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$.*
- *Si $l = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.*

Los dos teoremas anteriores son válidos también cuando $x \to -\infty$ ó cuando $x \to \alpha \in \mathbb{R}$, si se modifican las hipótesis de manera evidente.

Teorema 5.6.3. *Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente y existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dicho de otra forma, si existe el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y es distinto de cero, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente .*

El recíproco del teorema anterior no es cierto.

5.7. Integración numérica: Métodos de los trapecios y método de Simpson

Se puede usar la Regla de Barrow para hallar una integral definida si se conoce una primitiva del integrando. Sin embargo, algunas funciones no tienen primitivas sencillas. Para calcular integrales definidas de estas funciones hay que recurrir a aproximaciones numéricas.

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es igual al área bajo la gráfica de f en $[a, b]$. Ya hemos visto que una manera de aproximar este área es usar n rectángulos.

En particular, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; designemos por x_k^* al extremo derecho del subintervalo k-ésimo. La base del rectángulo k-ésimo es el subintervalo k-ésimo, y su altura es $f(x_k^*)$. Por tanto, el área del rectángulo k-ésimo es $f(x_k^*)\Delta x$. La suma de las áreas de esos n rectángulos es una aproximación del área bajo la curva y, por tanto, una aproximación de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

Esta aproximación mejora cuando aumenta el número de rectángulos, y podemos aproximar la integral hasta la precisión que queramos con tal de tomar n lo bastante grande. Sin embargo este método se usa poco en la práctica, porque normalmente se requiere un número elevado de rectángulos para conseguir una aproximación razonable.

En esta sección estudiaremos aproximaciones por trapecios y por arcos de parábola (regla de Simpson).

5.7.1. Polinomio de interpolación

Supongamos conocidos $n+1$ valores y_0, y_1,...,y_n correspondientes a $n+1$ puntos distintos x_0, x_1,...,x_n. Estos valores pueden ser los que toma una cierta función f en los puntos x_i (esto es, $y_i = f(x_i)$), o bien valores observados experimentalmente correspondientes a los puntos x_i. El polinomio de interpolación es un polinomio $p(x)$ de grado mínimo que tome en cada x_i el valor y_i:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

El polinomio de interpolación permite:

- Obtener nuevos valores aproximados de la función desconocida f en otros puntos x^* distintos de los x_i : aproximamos $f(x^*)$ por $p(x^*)$.
- Dar una expresión analítica polinomial que represente al conjunto de los puntos (x_i, y_i).

El polinomio de interpolación existe y es único.

Nuestro objetivo principal es dar métodos que permitan aproximar el valor de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ cuando no podemos determinarla mediante un cálculo directo. La idea básica consiste en aproximar la función $f(x)$ por el polinomio de interpolación $p(x)$ en ciertos puntos x_0, x_1,...., x_N (dependiendo de los puntos de interpolación que elijamos, obtendremos distintos métodos), con ordenadas $f(x_0)$, $f(x_1)$,..... $f(x_N)$, hacer:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$$

donde cada A_i es una constante.

A la expresión final se le conoce como *fórmula de integración numérica.*

Observación

Expliquemos un poco la expresión anterior. Simplememte estamos diciendo que estamos tomando $\int_a^b p(x)dx$ como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$. Al ser $p(x)$ un polinomio, su integral es sencilla de calcular y dará como resultado una expresión de la forma $\sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$, donde cada A_i es una constante.

La eficacia de la fórmula de integración numérica se mide por el grado n del espacio de polinomios para los que la fórmula es exacta, es decir, integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual que n. Dicho de otra forma, la fórmula de integración numérica $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$ tiene grado n si:

$$\int_a^b q(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i q(x_i), \quad \forall q \in \mathcal{P}\backslash$$

donde $\mathcal{P}\backslash$ es el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n y existe algún polinomio $\tilde{q}(x)$ de grado $n+1$ de modo que:

$$\int_a^b \tilde{q}(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i \tilde{q}(x_i).$$

Mientras mayor sea el grado de exactitud, más precisa será la fórmula de integración numérica.

Para calcular el grado de exactitud de una fórmula de integración recurrimos al siguiente resultado:

Teorema 5.7.1. *Una fórmula de integración numérica tiene grado n si y sólo si integra exactamente los polinoimios* $1, x, x^2, \cdots, x^n$ *y no integra exactamente el polinomio* x^{n+1}.

5.7.2. Métodos simples de integración numérica

A continuación vamos a estudiar dos fórmulas de integración muy usuales. En lo que sigue supondremos que f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Denotaremos por $x_0, x_1, \cdots, x_N$ a los puntos donde interpolamos, cuyas correspondientes ordenadas son $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_N)$.

Método de los trapecios

Consideremos un polinomio de interpolación de grado uno, concretamente el polinomio que interpola a los extremos a y b (recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$p(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{x-b}{a-b} f(a).$$

Su integral se calcula fácilmente:

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b + \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Obtenemos así el *método de los trapecios*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Geométricamente, aproximamos el área bajo la curva $y = f(x)$ por el área del trapecio que define la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

El grado de exactitud de la método de los trapecios es uno.

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx$ mediante el método de los trapecios.

Tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx \approx \frac{\pi}{4}(\operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 07854.$$

Método de Simpson

Usaremos un polinomio de interpolación de grado dos asociado a los puntos a, $\frac{a+b}{2}$ y b; para no complicar la notación, llamaremos $m = \frac{a+b}{2}$. El polinomio de interpolación es:

$$p(x) = \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)}f(m) + \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}f(b).$$

Integrando, obtenemos el *método de Simpson o de las parábolas*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Geométricamente, aproximamos el área bajo la curva $y = f(x)$ por el área bajo la parábola $y = p(x)$

El grado de exactitud del método de Simpson es tres.

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx$ mediante el método de Simpson.

En este caso,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx \approx \frac{\pi}{12}(\operatorname{sen}(0) + 4\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{12}(1 + 2\sqrt{2}) \approx 1,0022.$$

5.7.3. Métodos compuestos de integración numérica

Para aproximar con precisión la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se procede del siguiente modo:

1. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n partes: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Generalmente se tomarán las partes iguales.
2. Se aplica en cada subintervalo alguna de las fórmulas de integración simple vistas anteriormente. Aunque no es necesario aplicar el mismo método en cada subintervalo, lo haremos así por simplicidad.

En general, mientras más subintervalos tomemos mejor será la aproximación. Este procedimiento da lugar a los llamados *métodos compuestas*.

Método de los trapecios compuesto

Sean $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Aplicando el método de los trapecios simple en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Por tanto, sumando:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Simplificando obtenemos el *método de los trapecios compuesto*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ mediante el método de los trapecios compuesto con paso $h = 0,25$.

En este caso obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{8}[f(0) + f(1) + 2(f(0,25) + f(0,5) + f(0,75))] \approx 0,697.$$

Método de Simpson compuesto

En este caso dividiremos el intervalo $[a, b]$ en un número par de subintervalos; así, escribiremos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx,$$

donde n es par. Aplicamos el método de Simpson simple en cada trozo, teniendo en cuenta que la longitud de los subintervalos es $2h$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{2h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+2}+x_i}{2}\right) + f(x_{i+2})\right].$$

Por construcción, se tiene que $\frac{x_{i+2}+x_i}{2} = x_{i+1}$; por tanto:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})].$$

Sumando, obtenemos el *método de Simpson compuesto*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{b-a}{3n}(f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})]).$$

Ejemplo

Aproximar $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ mediante el método de Simpson compuesto con paso $h = 0,25$. Podemos aplicar el método de Simpson, ya que $n = 4$ es par. Obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{12}[f(0) + f(1) + 2f(0,5) + 4(f(0,25) + f(0,75))] \approx 0,6932.$$

5.7.4. Estimación del error

La diferencia entre el valor de la integral y su valor estimado se llama el *error*. Como el error depende de n, lo designaremos por E_n.

Teorema 5.7.2 (Error en las reglas del trapecio y de Simpson)**.** *Si f tiene derivada segunda continua en $[a,b]$, entonces el error de aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ por la regla del trapecio verifica*

Error del trapecio:

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

donde M es el máximo de $|f''(x)|$ en $[a,b]$.

Más aún, si f tiene derivada cuarta continua en $[a,b]$, entonces el error E_n (con n par) de aproximar $\int_a^b f(x)dx$ por la regla de Simpson verifica

Error de Simpson

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}K$$

donde K es el máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[a,b]$.

Ejemplo

Hallar la precisión de la aproximación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ por la regla de Simpson cuando $n = 10$.

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, tenemos que $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$. El máximo de esta función se alcanza en un valor crítico (no hay ninguno en $[1,2]$) o en un extremo. Así se ve que el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[1,2]$ es $|f^{(4)}(1)| = 24$. Apliquemos la fórmula del error con $K = 24$, $a = 1$, $b = 2$ y

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}K = \frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} \approx 0,0000133.$$

Esto quiere decir que el error cometido en la estimación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ por la regla de Simpson cuando $n = 10$ es menor o igual que 0,0000133.

En virtud de las acotaciones del error, se puede decidir de antemano cuántos subintervalos se deben usar para lograr una precisión fija.

Ejemplo

Hallar cuántos subintervalos necesitaremos para lograr un error menor que 0,00005 en la aproximación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, usando la regla del trapecio.

Como $f(x) = x^{-1}$, se tiene que $f''(x) = 2x^{-3}$. El máximo de $|f''(x)|$ en $[1,2]$ es $|f''(1)| = 2$, luego $M = 2$, $a = 1$, $b = 2$ y

$$|E_n| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Hay que hallar el menor entero n que verifica que $\frac{1}{6n^2} < 0,00005$, o sea, multiplicando por $60000n^2$, tal que $10000 < 3n^2$. Así se tiene

$$10000 - 3n^2 < 0 \Rightarrow (100 - \sqrt{3}n)(100 + \sqrt{3}n) < 0$$

lo que implica que

$$n < -\frac{100}{\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad n > \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,735027.$$

El menor entero positivo que verifica la condición es $n = 58$. Se necesitan, por tanto, 58 subintervalos para llegar a la precisión requerida.

5.8. EJERCICIOS TEMA 5

1. Calcula las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2\,x+3}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx$

   e) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{(x-2)^2}dx$

   f) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\ln(\operatorname{sen} x)dx$

   g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$

   h) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$

   i) $\displaystyle\int_0^{\pi\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x^2+2}dx$

   j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+5}$

   k) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(x)}$

   l) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}dx$

   m) $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

   n) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\ \operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

   ñ) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2\operatorname{arc\,sen}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

2. Estimar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2(x)}$.

3. Halle un valor de c como en el enunciado del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para $f(x)=\operatorname{sen} x$ en $[0,\pi]$.

4. Supongamos que un estudio indica que, entre las 13:00 horas y las 16:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en Km/h) del tráfico de una cierta salida de autopista viene dada por la fórmula $v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20$, donde t es el número de horas después de mediodía. Halle la velocidad media del tráfico entre las 13:00 y las 16:00
5. Si $v(t)$ es la velocidad de un cuerpo en un instante t, qué representa $\int_1^5 v(t)\,dt$? Calcúlese dicha integral si $v(t) = 5\,t - t^2$.
6. Hallar el valor $\nu \in \mathbb{R}$ que cumpla $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 2\nu$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases} .$$

   Existe algún punto c del intervalo $[1, 3]$ tal que $f(c) = \nu$?

   Contradice esto el Teorema del Valor Medio Integral?.
7. Halle las derivadas de $F(x) = \displaystyle\int_7^x (2t-3)dt$ y $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} \tan t dt$.
8. Calcular la derivada de las siguientes funciones
   a) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2 dt$
   b) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3} dt$
   c) $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} x \operatorname{sen} t^2 dt$
   d) $K(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2} dt$
   e) $M(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{t} dt$
   f) $N(x) = \displaystyle\int_0^x x^2 f(t)dt$, donde f es continua en $\mathbb{R}$
9. Calcula la recta tangente a la curva $f(x) = \int_{x^2}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \tan t^2 dt$ en el punto $x_0 = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$.
10. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcularlas cuando sean convergentes:
   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x)\,dx$
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\, e^{-x^2} dx$

f) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(\ln x)^{1/3}}$

g) $\displaystyle\int_{0}^{e} \ln x dx$

h) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} (1-x)e^{-x} dx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

j) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{xdx}{(2-x)^{1/3}}$

k) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+8}$

l) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

n) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-1}}$

ñ) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2dx}{x+\sqrt{x}}$

o) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

p) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{2dx}{e^x+2}$

11. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ (con $a > 0$ y $p > 0$)

b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$

Capítulo 6

Aplicaciones de la integral

6.1. Área como integral

En el tema anterior hemos usado la noción de área como modelo para la definición de integral definida. No es sorprendente descubrir que se puede expresar el área bajo una curva como una integral definida. Sin embargo, las integrales pueden ser positivas, cero o negativas y no es admisible que el área bajo una curva sea una cantidad negativa. La relación entre áreas bajo curvas e integrales se describe en el siguiente enunciado, que se deduce del hecho de que toda función continua en un intervalo es integrable y de la definición de área como límite de una suma.

Área como integral

Supongamos que f es continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es la integral definida de f en $[a, b]$, es decir

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx.$$

Supongamos que f es continua y que $f(x) \leq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no necesariamente positiva. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Supongamos que f es continua y corta al eje de abcisas en un punto $c \in (a, b)$. Entonces el área puede calcularse:

$$\text{Área} = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|dx.$$

En general, si hay varios puntos de corte $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ con el eje de abcisas, primero integramos en cada subintervalo $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots [c_n, b]$ y después sumamos los valores absolutos de todas las integrales.

6.2. Área comprendida entre dos curvas

Hemos visto cómo se puede hallar el área comprendida bajo una curva $y = f(x)$ y el eje x, en un intervalo $[a, b]$ donde $f(x) \geq 0$, calculando la integral $\int_a^b f(x)dx$, y más generalmente sin pedir que $f(x) \geq 0$, teniendo corte con el eje x. En esta sección veremos cómo usar la integración para hallar áreas de regiones más generales, comprendidas entre curvas.

6.2.1. Área comprendida entre dos curvas

En la práctica hay que calcular a veces el área comprendida entre dos curvas. A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área bajo una curva al área de una región entre dos curvas. Supongamos que f y g son funciones tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Para hallar el área de la región entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$, restamos el área bajo la curva de abajo del área bajo la curva de arriba. En otras palabras:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Esta fórmula parece obvia cuando $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$. Sin embargo, la siguiente deducción exige sólo que f y g sean continuas y que satisfagan $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

Queremos hallar el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en ese intervalo. Se toma una partición $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ y se elige un representante x_k^* en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se construye un rectángulo de anchura $\lambda x_k = x_k - x_{k-1}$ y altura $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, que es igual a la distancia entre las dos curvas en la vertical $x = x_k^*$. El área del rectángulo es $[f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k$ y se puede estimar el área total entre las dos curvas por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k.$$

Es razonable pensar que esta aproximación mejorará si aumentamos el número de puntos de subdivisión de la partición P, de tal forma que la norma $\|P\|$ tienda a cero. Así, el área de la región entre las dos curvas será

$$\text{Área} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k$$

que coincide con la integral de la función $f(x)-g(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Se pueden usar estas observaciones para definir el área entre dos curvas:

Área entre dos curvas

si f y g son continuas y verifican $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, entonces el área entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ es

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Esto quiere decir que para hallar el área entre dos curvas en un intervalo cerrado $[a,b]$, usemos la fórmula

$$\text{Área} = \int_a^b [\text{Curva superior} - \text{Curva inferior}]dx$$

No es necesario que cada curva esté por encima del eje x. De hecho, veremos más adelante que las curvas se pueden cruzar en el dominio, luego una está arriba en parte del intervalo y la otra lo está en lo que resta.

Ejemplo

Hállese el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2 - x$ en el intervalo $[0,1]$.

Tenemos que averiguar qué curva es la de arriba en el intervalo $[0,1]$. Resolviendo la ecuación $x^3 = x^2 - x$, o sea, $x(x^2 - x + 1) = 0$, se obtiene $x = 0$ como única raiz real, puesto que $x^2 - x + 1 = 0$ no tiene raices reales. Así, una de las dos curvas permanece en la posición de arriba en todo el intervalo. Para ver cuál es esa curva, se toma un valor cualquiera del intervalo, por ejemplo, $x = 0,5$. Como $0,5^3 > 0,5^2 - 0,5$, la curva $y = x^3$ debe estar por encima de $y = x^2 - x$. Entonces el área pedida es

$$A = \int_0^1 [x^3 - (x^2 - x)]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

En la sección anterior, empezamos definiendo el área para una función continua f con la restricción de que $f(x) \geq 0$, y después la definimos en otros casos. El ejemplo que acabamos de ver nos muestra que, cuando se trata del área entre dos curvas, no nos importa la restricción de no negatividad, y sólo importa el que $f(x) \geq g(x)$. Esta idea se puede usar para hallar el área de una región delimitada por una función negativa $y = g(x)$ y el eje x. Para ello, hallamos primero los puntos de corte de la función g con el eje x. Llamemos a estos puntos a y b. Tomamos como curva superior, al eje x, de ecuación $y = 0$, y la curva $y = g(x)$ como curva inferior. Entonces, el área será:

$$A = \int_a^b [0 - g(x)]dx = \int_a^b (-g(x))dx.$$

Observemos que, en este caso,

$$\int_a^b (-g(x))dx = \int_a^b |g(x)|dx,$$

tal y como habíamos determinado que se calcula el área en este caso.

6.2.2. El área por bandas verticales

La única manera matemáticamente correcta de deducir una fórmula integral es formar las sumas de Riemann y tomar límite, según la definición de integral definida. No obstante, podemos simular este procedimiento mediante bandas aproximantes. Esta simplificación es especialmente útil para hallar el área de una región complicada, constituida por dos curvas que se cortan una o más veces.

Observemos que una banda vertical tendrá altura $f(x) - g(x)$ si $y = f(x)$ está por encima de $y = g(x)$, y tiene altura $g(x) - f(x)$ si $y = g(x)$ está por encima de $y = f(x)$. En cualquier caso la altura es $|f(x) - g(x)|$ y el área de la banda vertical es

$$\Delta A = |f(x) - g(x)|\Delta x = |f(x) - g(x)|dx.$$

De esta manera tenemos una nueva fórmula integral para el área, a saber:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Ejemplo

Hállese el área de la región limitada por la recta $y = 3x$ y la curva $y = x^3 + 2x^2$.

Una parte del proceso de dibujar esas curvas es ver cuál está arriba y cuál abajo. Para ver esto necesitamos primero hallar dónde se cortan:

$$x^3 + 2x^2 = 3x \Rightarrow x(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, -3, 1.$$

Los puntos de intersección son $x = -3$, 0 y 1, luego tenemos dos subintervalos: $[-3, 0]$ y $[0, 1]$. Tomamos un punto en cada uno y comparamos el valor de las funciones en esos puntos para saber cuál es la que está por encima y cuál la que está por debajo. En este caso, sobre el subintervalo $[-3, 0]$ la curva $y = x^3 + 2x^2$ está arriba. Sobre el subintervalo $[0, 1]$ la curva $y = 3x$ está arriba. Así, el área entre la parábola y la recta está dada por la suma:

$$A = \int_{-3}^{0} [(x^3 + 2x^2) - 3x]dx + \int_{0}^{1} [3x - (x^3 + 2x^2)]dx = \frac{71}{6}.$$

Observemos que no se puede usar directamente la fórmula $\int [f - g]dx$ en este ejemplo porque no se satisface la hipótesis $f \geq g$. Para poder usar la fórmula $\int |f - g|dx$ sobre el intervalo entero, hay que darse cuenta de que $|f - g|$ puede ser igual a $f - g$ en parte del intervalo e igual a $g - f$ en otra parte. Hay pues que asegurarse de cuál es la curva de arriba. Como las curvas del ejemplo se cortan, hay que subdividir adecuadamente el intervalo.

6.2.3. El área por bandas horizontales

En muchos casos es más apropiado formar bandas horizontales que verticales. El procedimiento para aquéllas es análogo al de éstas. Supongamos que queremos hallar el área entre las dos curvas de la forma $x = F(y)$ y $x = G(y)$ en el intervalo $[c, d]$. Independientemente de qué curva esté delante o detrás, la base de una banda horizontal es $|F(y) - G(y)|$ y su área es $\Delta A = |F(y) - G(y)|\Delta y$. En la práctica hay que asegurarse de hallar los puntos de corte de las curvas, y dividir los intervalos de integración de tal manera que en uno de ellos haya una sóla curva a la derecha ("la curva de cabeza") y otra a la izquierda ("la curva de cola"). Supongamos que las curvas se cortan para $y = b$, donde b pertenece al intervalo $[c, d]$, que G está en cabeza en el subintervalo $[c, b]$ y que F está en cabeza en el subintervalo $[b, d]$. Entonces

$$A = \int_{c}^{b} [G(y) - F(y)]dy + \int_{b}^{d} [F(y) - G(y)]dy.$$

Ejemplo

Hállese el área de la región entre la parábola $x = 4y - y^2$ y la recta $x = 2y - 3$.

Para hallar dónde se cortan la recta y la parábola se resuelve la ecuación $4y - y^2 = 2y - 3$, lo que da como raices $y = -1$ e $y = 3$. En el intervalo $[-1, 3]$, la parábola está a la derecha de la recta (se comprueba tomando un punto, por ejemplo $y = 0$). Así, la banda horizontal tiene área

$$\Delta A = [(4y - y^2) - (2y - 3)]\Delta y$$

y el área entre la parábola y la recta viene dada por

$$A = \int_{-1}^{3} [(4y - y^2) - (2y - 3)]dy = \int_{-1}^{3} (3 + 2y - y^2)dy = \frac{20}{3}.$$

El área de este ejemplo se podría hallar también usando bandas verticales, pero es más complicado. par

Una aplicación importante de las integrales definidas se da en economía para estudiar beneficios netos generados con el tiempo, así como una cierta magnitud económica llamada plus del consumidor. Nosotros evidentemente no la estudiaremos.

Una vez que hemos visto cómo el área se puede expresar como un integral definida, el objetivo es ahora estudiar otras aplicaciones de la integración, como cálculo de volúmenes, longitudes de arcos de curvas, áreas de superficies, aplicaciones físicas como trabajo, fuerza hidrostática y centros de gravedad , etc.

6.3. Volúmenes: Discos, arandelas y láminas

Puesto que ya hemos visto cómo calcular áreas por integrales, nuestro primer objetivo en esta sección es calcular volúmenes.

6.3.1. El método de las secciones

El volumen es un número que describe "a extensión espacial" de un sólido. Se mide en unidades cúbicas, definiendo una unidad cúbica como el volumen de un cubo de arista unidad.

Se puede considerar a un cilindro circular recto compuesto de un cierto número de discos iguales (por ejemplo monedas), apilados unos encima de otros. El volumen es, entonces, el producto del área A de la sección común por la altura h. Por ejemplo, un cilindro circular recto de radio de la base r y altura h tiene un área de la base $A = \pi r^2$ y un volumen $V = \pi r^2 h$.

Se puede usar un método análogo para hallar el volumen de otros sólidos cuyas secciones trasversales se conocen. Sin embargo, cuando estas secciones no tienen el mismo área hay que usar Cálculo para resolver el problema.

Sea S un sólido y supongamos que, para $a \leq x \leq b$, la sección S perpendicular al eje x en x tiene un área $A(x)$. Imaginemos que el sólido está cortado en rodajas muy finas, de área $A(x)$ y grosor Δx.

Para hallar el volumen de S tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y elegimos un número representante x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Ahora consideramos una partición del sólido de altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y área de la sección constante, igual a $A(x_k^*)$. Esta porción tiene un volumen igual a $\Delta V_k = A(X_k^*)\Delta x_k^*$, y sumando los volúmenes de todas ellas obtenemos una aproximación del volumen del sólido:

$$\Delta V = \sum_{k=1}^{n} A(X_k^*)\Delta x_k^*.$$

La aproximación mejora conforme crece el número de puntos de la partición. Así es razonable definir el volumen del sólido S como el límite de V cuando la norma de la partición tiende a cero, es decir:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(X_k^*)\Delta x_k^*.$$

Esto es igual a la integral definida $\int_a^b A(x)dx$. En resumen:

Volumen de un sólido con área de sección trasversal conocida

El volumen de un sólido S tal que el área de una sección perpendicular al eje x es $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual a

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Ejemplo

La base de un sólido es la región del plano xy limitada por el eje y y las rectas $y = 1 - x$, $y = 2x + 5$ y $x = 3$. Cada sección perpendicular al eje x es un cuadrado. Halle el volumen del sólido.

Podemos imaginar al sólido formado por rodajas finas, que son las secciones trasversales cuadradas. Dibujemos la base en el plano bidimensional y luego hallamos el volumen de la rodaja k-ésima.Hacemos esta construcción tomando una rodaja cuadrada sobre cada subintervalo. Si tomamos una rodaja de anchura Δx y altura L, su volumen será

$$\Delta V = L^2\Delta x = L^2(x)\Delta x = [(2x + 5) - (1 - x)]^2\Delta x = (3x + 4)^2\delta x.$$

Se obtiene el volumen del sólido entero integrando, “para sumar” todos los volúmenes ΔV. Así se tiene que el volumen del sólido es

$$V = \int_0^3 (3x + 4)^2 dx = \int_0^3 (9x^2 + 24x + 16)dx = [3x^3 + 12x^2 + 16x]_0^3 = 237.$$

6.3.2. Volúmenes de sólidos de revolución: discos y arandelas

Un *sólido de revolución* es el que se obtiene haciendo girar una región R del plano xy alrededor de una recta l llamada *eje de revolución*. Se puede imaginar a un sólido de revolución compuesto por secciones circulares en la dirección perpendicular a l.

Supongamos que f es una función continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Queremos hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene haciendo girar la región bajo la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje x. El eje de revolución es horizontal y está en la frontera de la región R. La estrategia será tomar bandas verticales y hacerlas girar alrededor del eje x, de tal manera que formen discos (esto es, cilindros circulares rectos y delgados) que aproximen pequeñas porciones del volumen deseado.

Podemos calcular el volumen total de S usando integración para sumar los volúmenes de todos los discos aproximantes. Recuerdese que la fórmula del volumen de un cilindro es Ah donde A es el área de la base y h es la altura. Se puede imaginar que el sólido de revolución está formado por secciones perpendiculares al eje de rotación, que son discos circulares de volumen

$$\Delta V = \pi |f(x_k^*)|^2 \Delta x_k,$$

donde $f(x_k^*)$ es la altura de una banda vertical genérica y Δx_k es la anchura de dicha banda.

El volumen total se halla por integración:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi |f(x)|^2 dx$$

donde $A(x)$ es el área de la base y dx es el grosor.

Se puede resumir este proceso así:

El método del disco

El *método del disco* se usa para hallar el volumen generado por una región R que gira alrededor de una recta L perpendicular a una banda aproximante genérica. En particular, si se trata de una región R limitada por una curva $y = f(x)$, el eje x (que es el eje de giro) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, entonces el volumen es

$$V = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi |f(x)|^2 dx.$$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido S que se forma al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$V = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^2 = \frac{206}{15}\pi.$$

Con una pequeña modificación del método del disco podemos hallar el volumen de un sólido generado haciendo girar alrededor del eje x la región comprendida entre dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Tomando una pequeña banda vertical genérica y haciéndola girar, se obtiene lo que se llama una *arandela*, cuyo área es $\pi[f(x)^2 - g(x)^2]$. El volumen del sólido de revolución se define por la fórmula que damos a continuación:

El método de la arandela

Sean f y g funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea R la región limitada por arriba por $y = f(x)$, por abajo por $y = g(x)$, y por los lados por $x = a$ e $y = b$. El *método de la arandela* dice que el volumen generado haciendo girar esa región alrededor del eje x es igual a

$$V = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

donde $f(x)$ es el radio exterior y $g(x)$ es el radio interior.

Los métodos del disco y de la arandela se pueden aplicar también cuando el eje de revolución no es el eje x. Vamos a estudiar con un ejemplo lo que pasa cuando una región gira no sólo alrededor del eje x, sino también de otros ejes.

Ejemplo

Sea R la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Halle el volumen del sólido que se genera cuando R gira alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y **c.** de la recta $y = 2$.

Se hallan primero los puntos de intersección de la recta y la parábola. Resolviendo la ecuación $x^2 = x$ hallamos las soluciones $x = 0, 1$, que son las abcisas de esos puntos.

a. Se considera el sólido que forma la región R girando alrededor del eje x. Nótese que la recta está siempre por encima de la parábola en el intervalo $[0, 1]$. Para aproximar un elemento del volumen de revolución se forma una arandela de radio exterior $y = x$ y radio interior $y = x^2$. Así el volumen buscado es

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

b. Como ahora gira R alrededor del eje y, tomamos bandas horizontales para aproximar el sólido de revolución. Nótese que la parábola $x = \sqrt{y}$ está a la derecha de la recta $x = y$ en el intervalo $[0, 1]$, luego la arandela aproximante tiene radio exterior $\sqrt{y}$ y radio interior y. Por tanto,

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - (y)^2]dy = \pi \int_0^1 (y - y^2)dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

c. El radio exterior es $R(x) = 2 - x^2$ y el interior es $r(x) = 2 - x$. El volumen es

$$V = \pi \int_0^1 [(2-x^2)^2-(2-x)^2]dx = \pi \int_0^1 (x^4-5x^2+4x)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}.$$

En los métodos del disco y de la arandela hay que asegurarse de que las bandas aproximantes sean perpendiculares al eje de revolución.

6.3.3. El método de las láminas cilíndricas

A veces es más fácil (o incluso necesario) para calcular un volumen tomar las bandas aproximantes paralelas al eje de rotación, en lugar de perpendiculares como en los métodos del disco y de la arandela. Sea R la región bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y consideremos una banda vertical. Cuando se gira esta banda alrededor del eje y forma lo que se llama una *lámina cilíndrica*.

Cuando se gira la banda aproximante alrededor del eje y genera una lámina cilíndrica de altura $f(x)$ y grosor Δx. Como la banda vertical está a x unidades del eje de rotación y se supone que es muy delgada, la sección perpendicular al eje y será una circunferencia de radio x y longitud $2\pi x$. Si imaginamos que se corta y aplana la lámina, nos da un objeto rectangular de volumen

$$\Delta V = 2\pi f(x) \cdot \Delta x,$$

donde $2\pi f(x)$ es el área de la sección y Δx es el grosor.

Por tanto, el volumen del sólido vendrá dado por la integral

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

Método de las láminas cilíndricas

El método de las láminas sirve para hallar el volumen de una región formada girando una región plana R alrededor de una recta que es paralela a una banda aproximante genérica. En particular, si R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ donde $0 \leq a \leq b$, entonces el volumen del sólido correspondiente es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando la región limitada por las gráficas de $y = x^3 + x^2 + 1$, $x = 1$ y $x = 3$ alrededor del eje y.

Éste es un buen ejemplo para ilustrar el método de las láminas. Una lámina vertical genérica tiene altura $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, luego su volumen, por el método de las láminas, es

$$V = 2\pi \int_1^3 x(x^3+x^2+1)dx = 2\pi \int_1^3 (x^4+x^3+x)dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 144,8\pi.$$

6.4. Longitudes y áreas

Si se pide medir manualmente la longitud de un arco de curva, se adapta un hilo a su forma y luego se mide con una regla. En esta sección vamos a ver cómo se puede realizar matemáticamente esa medida con la integración. También daremos un procedimiento general para calcular el área de ciertos sólidos.

6.4.1. Longitud de un arco de curva

Una función *continuamente derivable* en un intervalo es una función f que tiene derivada continua en él. El trozo de la gráfica que está entre las abcisas $x = a$ y $x = b$ se llama el *arco* en el intervalo $[a, b]$. Para hallar la longitud de este arco tomamos una partición del intervalo $[a, b]$ por los puntos $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$. Designemos por P_k al punto (x_k, y_k) de la gráfica, donde $y_k = f(x_k)$. Uniendo los puntos $P_0, P_1, \ldots P_n$ obtenemos una poligonal cuya longitud aproxima a la del arco de curva. La longitud de la poligonal es la suma de las longitudes s_k de los segmentos $\overline{P_{k-1}P_k}$. Si aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, poniendo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\delta y_k = y_k - y_{k-1}$ obtenemos que:

$$L_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}{(\Delta X_k)^2}}\Delta x_k = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}}\Delta x_k.$$

Es razonable pensar que haya una relación entre la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Se puede demostrar que $L_k = \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$ para un cierto número x_k^* entre x_{k-1} y x_k. Por tanto, la longitud del arco de la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ se puede aproximar por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k.$$

Se puede mejorar la aproximación aumentando el número de puntos de la partición P del intervalo $[a, b]$ de tal forma que las longitudes de todos los subintervalos tienden a cero. Así es razonable definir el arco de curva como el límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k.$$

Nótese que, si $f'(x)$ es continua en $[a, b]$, también lo es $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Así, cumpliéndose esta hipótesis, ese límite existe y es igual a la integral de $\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}$ con respecto a x en el intervalo $[a, b]$. Estas observaciones se plasman en la definición siguiente

Longitud de un arco de curva

Sea f una función con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud s del arco de la gráfica de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es, por definición, la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

De manera análoga, si $x = g(y)$ es una función con derivada continua en el intervalo $[c, d]$, la longitud s del arco entre $y = c$ e $y = d$ es, por definición, la integral

$$\int_c^d \sqrt{1 + [g'(x)]^2}dx$$

Hemos utilizado la integración para lograr una definición con sentido de longitud de un arco de curva para una función f con derivada continua en un intervalo. Se puede generalizar la definición a otros tipos de curvas, pero no trataremos ese tema aquí. Quizás sea sorprendente saber que hay curvas planas cuya longitud no se puede definir. Las curvas cuya longitud se puede definir se llaman *rectificables* y aquellas que no, se llaman *no rectificables*.

Ejemplo

Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 4]$.

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{frac12}\right]^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^4 \approx 9,073415$$

6.4.2. Área de una superficie de revolución

Cuando se hace rotar un arco de curva alrededor de una recta L se forma una superficie que llamamos *superficie de revolución*. Consideremos un arco y un segmento aproximante genérico. Cuando se hace rotar todo esto alrededor del eje , el segmento genera la superficie de un tronco de cono.

Vamos a razonar intuitivamente, en lugar de hacerlo con sumas de Riemann. Se prueba en los libros elementales que el área lateral del tronco de cono es igual a

$$\pi(r_1 + r_2)l,$$

donde r_1, r_2 son los radios de las bases y l es la longitud de la generatriz.

Sea Δs la longitud de un segmento aproximante, situado a h unidades de distancia del eje de revolución L.

Haciendo rotar el segmento alrededor del eje se obtiene un tronco de cono de generatriz Δs y tan fino que se puede suponer que ambas bases tienen radio h. Así se puede aproximar el área lateral ΔS del tronco de cono por la fórmula

$$\Delta S = \pi(h + h)\Delta s = 2\pi h \Delta s = 2\pi f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\Delta x.$$

Se puede calcular el área de la superficie integraldo esta expresión en el intervalo $[a, b]$. Estas observaciones justifican intuitivamente la siguiente definición formal:

Área de una superficie

Sea f una función continuamente derivable en el intervalo $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje x el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es igual a

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx.$$

Ejemplo

Hallar el área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje x el arco de curva $y = x^3$ en $[0, 1]$.

La función que debemos considerar es $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, que es derivable y su derivada $f'(x) = 3x^2$ es continua en $[0,1]$. El área buscada es

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 + 9x^4$, luego $du = 36x^3$. Si $x = 1$ entonces $u = 10$ y si $x = 0$, entonces $u = 1$. Por tanto:

$$2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \int_1^{10} u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{36} \right) = \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{27}{2} [10\sqrt{10} - 1].$$

Se puede generalizar esta fórmula para hacerla válida tanto si la curva gira alrededor del eje horizontal, como si lo hace alrededor del eje vertical. Supongamos que el eje de revolución dista $R(x)$ unidades de un elemento de arco genérico en la gráfica de $y = f(x)$. Entonces $2\pi R(x)$ es la longitud de una circunferencia de radio $R(x)$, y se puede demostrar que un elemento de área de la superficie es

$$\Delta S = 2\pi R(x) \Delta s = 2\pi R(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Delta x.$$

Así, la superficie de revolución tiene área igual a

$$S = 2\pi \int_a^b R(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

En particular, si la gráfica de $y = f(x)$ gira alrededor del eje y, un elemento de arco está a $R(x) = x$ unidades del eje y, y el área resultante es

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

6.5. Otras aplicaciones: Centro de gravedad y momento de una región plana

La integración juega un papel importante en muchas áreas de la Física. La mecánica es la rama de la física que trata el efecto de las fuerzas en los objetos. Se puede usar la integración para calcular el trabajo y la fuerza ejercida por un líquido. Nosotros no entraremos en este estudio.

Usaremos la integración para calcular centros de gravedad de regiones planas.

En mecánica es a menudo importante determinar el punto en el que hay que apoyar una región plana de forma irregular para que se mantenga en equilibrio. El *momento* de una fuerza mide su tendencia a hacer rotar un objeto y depende de la magnitud de la fuerza y de su punto de aplicación en el objeto. Se sabe desde los tiempos de Arquímedes que el punto de equilibrio de un objeto es aquel en que todos sus momentos se anulan (luego no hay rotación).

La *masa* de un objeto es una medida de su *inercia*, esto es, de su propensión a conservar su estado de reposo o movimiento. Una lámina delgada uniforme (es decir, con densidad constante ρ, interpretando esta vez la densidad como masa por unidad de área) se llama *lámina homogénea*. El punto de equilibrio de una lámina homogénea se llama su *centro de gravedad*, que es algo así como su centro geométrico. Veremos cómo se calculan los centros de gravedad usando integrales, y abundaremos sobre el tema más adelante.

Consideremos una lámina homogénea que es una región R limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y consideremos una banda vertical en R, muy estrecha. La masa de la banda es

$$\Delta m = \rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x,$$

donde $[f(x) - g(x)]\Delta x$ es el área.

Se puede calcular la masa total integrando:

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

El centro geométrico de la banda es $(\hat{x}, \hat{y})$, donde $\hat{x} = x$ y $\hat{y} = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]$. El momento de la banda respecto del eje y es, por definición, el producto

$$\Delta M_y = \hat{x} \cdot \Delta m = \hat{x}\{\rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x\}$$

donde $\hat{x}$ se interpreta como la distancia de la banda al eje y. Este producto da una medida de la tendencia de la banda a rotar alrededor del eje y. De manera análoga se define el momento de la banda respecto del eje x por la relación

$$\Delta M_x = \hat{y} \cdot \Delta m = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]\{\rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x\} = \frac{1}{2}\rho\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\Delta x.$$

Este producto da una medida de la tendencia de la banda a rotar alrededor del eje x.

Integrando tenemos los momentos totales de la lámina respecto de ambos ejes:

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx, \qquad M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx.$$

Vamos a calcular un punto tal que, si en el se concentrara toda la masa de la lámina, los momentos respecto de los dos ejes coincidirían con los correspondientes de la lámina. Si toda la masa de la lámina estuviese localizada en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, sus momentos respecto de los dos ejes serían $m\overline{y}$ y $m\overline{x}$, respectivamente. Así se tiene que $m\overline{x} = M_y$ y $m\overline{y} = M_x$, luego

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}.$$

Podemos resumir ahora estos resultados en el enunciado siguiente:

Masa y centro de gravedad

Sean f y g funciones continuas y tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y consideremos un lámina R plana, de densidad constante ρ, limitada por esas dos curvas en el intervalo $[a, b]$. Por definición,

- la *masa* de R es
$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$
- el *centro de gravedad* de R es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que
$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}.$$

Ejemplo

Una lámina homogénea tiene densidad constante $\rho = 1$ y está limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Halle la masa y el centro de gravedad de R.

Vemos que la recta y la parábola se cortan en el origen y en el punto $(1, 1)$. Como $\rho = 1$, la masa es la misma que el área de la región R, es decir

$$m = A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Los momentos M_y y M_x son

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+x^2)(x-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{15}.$$

Por tanto, el centro de gravedad de la región R es el punto de coordenadas

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}.$$

6.6. EJERCICIOS TEMA 6

1. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas.
2. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = (x-1)^2$ y la hipérbola $x^2 - y^2/2 = 1$.
3. Hallar la longitud del arco de curva $y^2 = x^3$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ $(y \geq 0)$.
4. Hallar la longitud del arco de curva $y = x^3/3 + x^{-1}/4$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$.
5. Hallar el volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la figura limitada por la curva $y^2 = (x-1)^3$ y la recta $x = 2$.
6. Hallar el volumen del cuerpo generado por la revolución alrededor del eje de abscisas de la figura limitada por las curvas $y = \sqrt{x}\, e^x$, $x = 1$, $y = 0$.
7. Hallar el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de abscisas la región bajo la curva $y = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.
8. Sea R la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Hallar el volumen del sólido que se genera cuando R gira alrededor de: el eje x; la recta $y = 2$.
9. Deducir la fórmula para el volumen de una esfera de radio r.
10. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del arco de sinusoide $y = \operatorname{sen}(2x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.
11. Hallar el área de la superficie generada por la revolución alrededor del eje de abscisas del arco de curva $y = 2\cosh(x/2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.
12. Hallar el área de la superficie que se genera al girar alrededor del eje de abscisas el arco de curva $y = x^3$ en $[0, 1]$.
13. Hallar el área de la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje de abscisas del arco $y = x^3$ desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$.
14. Deducir la fórmula del área de una esfera de radio r.
15. Consideremos el sólido que se forma al girar alrededor del eje x la región bajo la curva
$y = 1/x$ para $x \geq 1$. Probar que este sólido tiene volumen finito, pero su área es infinita.
16. Una lámina homogénea tiene densidad constante $\rho = 1$ y está limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Halle la masa y el centro de gravrdad de dicha lámina.
17. Encontrar el centro de masa de una lámina de densidad uniforme ρ acotada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

18. Encontrar el centroide de la región limitada por las gráficas de $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$.