Definición DETERMINANTE de una *MATRIZ CUADRADA*

El determinante de una matriz cuadrada es un número. Se representa cambiando los paréntesis de la matriz por barras verticales.

Ejemplo: Matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$

1.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 2 POR SARRUS.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$

2.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 3 POR SARRUS.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}}_{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - \underbrace{\left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}\right)}_{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - (-3 - 1 + 0) = 6 + 4 = 10 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 96 + 84 - (105 + 48 + 0) = 180 - 153 = 27$$

$\boxed{1}$ Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

$\boxed{2}$ Calcula x para que el valor del determinante de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{pmatrix}$ sea -2.

3.- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES. [*Una <u>línea</u> de una matriz es una fila o una columna indistintamente.*]

		Ejemplos	
	Si una matriz tiene una línea de ceros.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Casos en los que el determinante es cero: Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales u opuestas.	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -5 & 5 & 4 \\ 7 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$ $(F_2 = 3F_1)$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & -10 \\ -3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$ $(C_3 = -5C_1)$
Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de otras paralelas.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 0$ $(F_3 = 2F_1 + F_2)$ $\quad$ $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 5 & 8 & -3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $(C_2 = C_1 - C_3)$
Cambiar dos líneas paralelas. Si en una matriz se cambian dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \underset{(F_2 \leftrightarrow F_3)}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -27$
Cambiar una línea por una combinación lineal. Si en una matriz se cambia una línea por una combinación lineal de ella con las restantes, su determinante no varía.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \underset{(F_2{}' = F_2 - 2F_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$
Descomponer en una suma. Un determinante se puede descomponer en la suma de otros dos de forma que tenga todas las líneas iguales menos una, cuya suma sea la del primero.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$
Multiplicación por un número. Para multiplicar un determinante por un número, se multiplica el número por cada elemento de una línea. Por tanto, en una línea se pueden sacar los factores comunes.	$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20 & 25 & 30 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ Se ha multiplicado por 5 la 2ª fila//Se ha sacado factor común el 3 de la 3ª columna
Determinante de la matriz traspuesta. $\lvert A \rvert = \lvert A^t \rvert$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
Determinante del producto de dos matrices. $\lvert A \cdot B \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert$	$48 = \begin{vmatrix} 20 & 31 \\ 52 & 83 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -8 \cdot (-6)$

3 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula sin desarrollar el determinante, y di las propiedades que utilizas:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}.$$

4 Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.- DESARROLLO PRÁCTICO DE UN DETERMINANTE (de una matriz de cualquier orden).

Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos correspondientes.

El **menor complementario** de un elemento a_{ij} de una matriz es el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila y la columna correspondiente al elemento.

Ejemplo: Halla el menor complementario del elemento a_{12} :

a_{ij} . Se representa por M_{ij} .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$$

El **adjunto** de un elemento a_{ij} de una matriz es el menor complementario con un signo positivo o negativo según sea par o impar la suma de la fila y la columna. Se representa por A_{ij} . Se tiene que: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Ejemplo: Halla el adjunto del elemento a_{12} en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-42) = 42$$

a) Si el determinante es de orden 2 o 3 , se puede aplicar Sarrus directamente.
b) Si el determinante es de orden 3 o mayor que 3 , se hacen ceros todos los elementos de una línea mediante el siguiente procedimiento:
   - Se elige la línea más cómoda, la que tenga un 1 , un -1 o un número que sea divisor del resto de los elementos de la línea, y si tiene algunos ceros, mejor.
   - Se hacen ceros el resto de los elementos de la línea, cada vez uno, sumándole o restándole otra línea paralela multiplicada por un número.
   - Se desarrolla el determinante por los elementos de esta línea y será igual al elemento elegido multiplicado por su adjunto.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} -6 & -2 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & -3 & 3 \\ 9 & 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Determinante}\\ \text{de} \\ \text{Vandermonde}}} =$$

5.- MATRIZ INVERSA. La matriz inversa de A es una matriz que se representa por A^{-1} y verifica: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

5.1.- Matriz adjunta.

La matriz adjunta de una matriz es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento por su adjunto.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

5.2.- Cálculo práctico de la matriz inversa.

La matriz inversa de A es la traspuesta de su matriz adjunta dividida por el determinante de la matriz A.

Procedimiento:

¿Existe inversa?

a) A ha de ser una matriz cuadrada (para que se pueda hallar el determinante);

b) $|A| \neq 0$ (para que se pueda dividir entre él);

Cálculo de la matriz inversa de A:

c) $Adj(A)$

d) $(Adj(A))^t$

e) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$

Ejemplos

Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

Halla los valores de k para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ 9 & k \end{pmatrix}$ tenga inversa.

6.- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MATRICIALES DIRECTAMENTE.

Muchas de las ecuaciones matriciales se pueden resolver directamente; para ello se despeja la matriz incógnita y luego se hacen las operaciones.

- ✓ Una matriz que está sumando pasa al otro miembro restando.
- ✓ Una matriz que está multiplicando pasa al otro miembro la inversa, **PERO** multiplicando por el mismo lado que estaba.

Ejemplo:

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2B = C$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$

7.- RANGO DE UNA MATRIZ.

Se llama **rango de una matriz** A al orden mayor de los determinantes distintos de cero que se pueden formar con los elementos de la matriz en sus posiciones relativas.

Halla todos los determinantes que se pueden formar con los elementos, en sus posiciones relativas, de cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

De orden 1. Es cada uno de los elementos de la matriz: -1 ; 0 ; 2 ; 0 ; -2 ; y 3 .

De orden 2. Es el determinante de todas las combinaciones posibles entre dos filas y dos columnas de la matriz:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4$

De orden 3. No hay, pues necesitaríamos como mínimo tres filas en A .

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7.1.- Determinación del rango de una matriz. (Método que nos evita tener que calcular todos los determinantes asociados a la matriz)

Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>1^er paso:</u> Si $A=O\rightarrow Rango(A)=0$

$$\text{Si } A\neq O \text{ y } \begin{cases} \text{todos los det de orden 2 son nulos} \rightarrow Rango(A)=1 \\ \text{existe un det de orden 2 distinto de cero} \rightarrow Rango(A)\geq 2 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow Rango(A)\geq 2$$

<u>2º paso:</u> $Rango(A)\geq 2$ y $\begin{cases} \text{todos los det de orden 3 son nulos} \rightarrow Rango(A)=2 \\ \uparrow \\ \text{existe un det de orden 3 distinto de cero} \rightarrow Rango(A)\geq 3 \end{cases}$

(definimos determinantes de orden 3 añadiendo al determinante encontrado las siguientes filas de la matriz, una a una, y las columnas que no figuran en él, también una a una)

3ª columna ↓ 4ª columna ↓ 5ª columna ↓

3ª fila ⟶

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

4ª fila ⟶

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0\rightarrow Rango(A)\geq 3$$

<u>3^er paso:</u> $Rango(A)\geq 3$ y $\begin{cases} \text{todos los det de orden 4 son nulos} \rightarrow Rango(A)=3 \\ \uparrow \\ \text{existe un det de orden 4 distinto de cero} \rightarrow Rango(A)\geq 4 \end{cases}$

(definimos determinantes de orden 4 de la misma manera que en el paso anterior)

3ª columna ↓ 5ª columna ↓

3ª fila ⟶

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow Rango(A)=3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Fin del proceso:</u> cuando todos los determinantes son nulos o cuando llegamos al determinante de mayor orden que se pueda definir en la matriz.

Ejemplos:

a) Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Halla el rango de B según los valores de a. $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ *Matriz cuadrada*

c) Calcula el rango de C según los valores del parámetro k. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz NO cuadrada

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

$\boxed{5}$ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcular $\left(A^t \cdot A^{-1}\right)^2 \cdot A$ *Sol.:* $\begin{pmatrix} 1'5 & 5'5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$ Calcular la potencia n-ésima de: a) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Sol.: a)* $\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ *, b)* $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real: (Selectividad Junio 2006)

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t.

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? *Sol.:a)* $a = \pm 4$ *b)* $-4a^2$ *y* $-a^2$ *c) No*

$\boxed{8}$ Calcular el valor del determinante de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *Sol.: a) 0 , b) 23 ,c) -11*

$\boxed{9}$ Comprobar que son nulos, utilizando las propiedades, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 14 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \\ a+b & c & 1 \end{vmatrix}$

$\boxed{10}$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$ (Selectividad) *Sol.: a) 30 ; b) -2*

11 Calcula el rango de las matrices, sacando consecuencias respecto de la dependencia o independencia de las filas o columnas que las componen:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ *Sol.: a) 3 ; b) 3*

12 Analizar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ *Sol.: a)* $\begin{matrix} si & a=-2 & ó & a=-4 & \Rightarrow & rg=2 \\ si & a\neq -2 & y & a\neq -4 & \Rightarrow & rg=3 \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} si & m=3 & \Rightarrow & rg=2 \\ si & m\neq 3 & \Rightarrow & rg=3 \end{matrix}$

13 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo.
b) Halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.
(Selectividad septiembre 2002) *Sol.: a)* $-1<t<4$ *;b)* $t=1'5$

14 Calcular el valor de los parámetros a y b para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ tenga rango igual a 2. *Sol.:* $a=b=-3$

15 Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas 1ª, 2ª y 3ª respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices: (Selectividad Junio 2003) *Sol.: a)* 125 *; b)* $1/5$ *; c)* 40 *; d)* -30

a) El determinante de A^3 b) El determinante de A^{-1} c) El determinante de $2A$

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas 1ª, 2ª y 3ª son, respectivamente, $3C_1-C_3$, $2C_3$ y C_2.

16 Calcular la matriz inversa de: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ *Sol.: a)* $\begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ 2/8 & 2/8 \end{pmatrix}$ *; b)* $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

17 Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores del parámetro b existe A^{-1}.
b) Calcula A^{-1} para $b=2$.
Selectividad *Sol.: a)* $b\neq 1$ *y* $b\neq 3$ *;b)*

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

18 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Selectividad Junio 2007

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} *para* $\lambda = 1$.

Sol.: a) $\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$ *;b)* $\lambda \neq -1$ *y* $\lambda \neq 3$ *; c)*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2/4 & 0 \\ 0 & -2/4 \end{pmatrix}$$

19 Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Sol.: a)* $m \neq 0$ *b)*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $AX + 2B = 3C$

b) Resuelve la ecuación matricial para $m = 1$ (Selectividad)

20 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve matricialmente la siguiente ecuación $ABX - CX = 2C$. *Sol.:*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

21 Resolver la ecuación matricial: $AX - B + C = O$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Sol.:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

22 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que la matriz A tiene inversa.

b) Siendo $x = 3$ halla la matriz Y de orden 3 solución de la ecuación matricial

$A \cdot Y + B = I$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Sol.: a)* $x \neq 0$ *y* $x \neq 2$ *; b)*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$