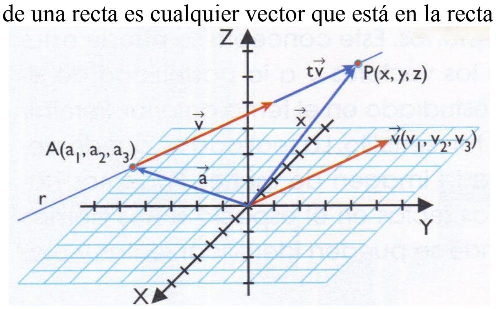
1.-ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO.

Conocido un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y un vector director $v=(v_1,v_2,v_3)$

(Un vector director de una recta es cualquier vector que está en la recta o es paralelo a ella)

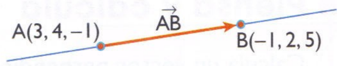


ECUACIÓN DE LA RECTA		EJEMPLO $A(5,-2,4)$ $v=(-3,4,1)$
Ecuación vectorial	$x=a+tv$ con $t\in \mathbb{R}$ $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(v_1,v_2,v_3)$	$(x,y,z)=(5,-2,4)+t(-3,4,1)$ con $t\in \mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x=a_1+tv_1 \\ y=a_2+tv_2; \text{ con } t\in \mathbb{R} \\ z=a_3+tv_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5-3t \\ y=-2+4t; \text{ con } t\in \mathbb{R} \\ z=4+t \end{cases}$
Ecuación continua	$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$	$\frac{x-5}{-3}=\frac{y+2}{4}=z-4$
Ecuaciones implícitas	$\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y=14 \\ x+3z=17 \end{cases}$

Conocidos dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$

"Dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$ determinan una recta y sólo una que los contiene"

Se toma uno de los puntos A o B, y, como vector director, el vector $\overrightarrow{AB}$.



1.1.-Paso de una ecuación a otra.

Para pasar de una ecuación a otra hay que hallar un punto y un vector director. Si nos dan las ecuaciones implícitas, se resuelve el sistema y se hallan dos soluciones particulares.

1.2.-Incidencia entre punto y recta.

Un punto está en una recta si verifica su ecuación.

1 Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,0)$ y un vector director es $v=(1,-1,2)$.

2 Halla la ecuación de la recta, de todas las formas posibles, que pasa por los puntos $A(3,4,-1)$ y $B(-1,2,5)$.

3 Escribe la ecuación continua de la siguiente recta: $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$

4 Comprueba si el punto $A(5,1,7)$ está en la recta $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{4}$

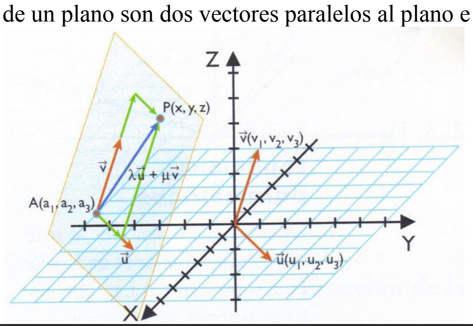
5 Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ Halla la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

6 En el espacio se da la recta definida por los dos puntos $(1,2,3)$ y $(-1,6,2)$. Halla el valor del parámetro k para que el punto $(k,2k,3k)$ pertenezca a dicha recta.

2.-ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO.

Conocido un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y dos vectores directores $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$

(Dos vectores directores de un plano son dos vectores paralelos al plano e independientes entre sí)

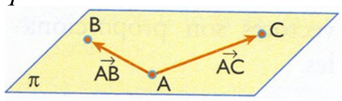


	ECUACIÓN DEL PLANO	EJEMPLO $A(3,-4,2)$, $u=(1,2,-1)$ y $v=(4,3,5)$
Ecuación vectorial	$x=a+\lambda u+\mu v$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$	$(x,y,z)=(3,-4,2)+\lambda(1,2,-1)+\mu(4,3,5)$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2; \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3+\lambda+4\mu \\ y=-4+2\lambda+3\mu; \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R} \\ z=2-\lambda+5\mu \end{cases}$
Ecuación general o implícita	$Ax+By+Cz+D=0$	$13x-9y-5z-65=0$

Conocidos tres puntos no alineados $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$

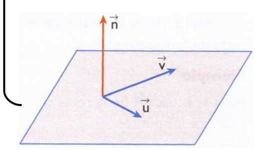
"Tres puntos no alineados de $\mathbb{R}^3$ determinan un plano y sólo uno que los contiene"

Se toman un punto A, B o C y dos vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



Conocido un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y un vector normal al plano $n=(A,B,C)$

Un vector normal a un plano es un vector perpendicular a dicho plano



Realizando el producto vectorial de los vectores directores obtenemos un vector normal al plano.

Se toma el punto A y se eligen dos vectores perpendiculares al vector normal e independientes entre sí, de esta forma, esos vectores serán vectores directores del plano.

Ejemplos:

a) Calcula un vector normal al plano de ecuación: $\begin{cases} x = 3 + \lambda + 4\mu \\ y = -4 + 2\lambda + 3\mu; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 2 - \lambda + 5\mu \end{cases}$

b) Calcula un vector normal al plano de ecuación: $2x - 5y + 3z = 4$

c) Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(2,-3,5)$ y un vector normal es $n = (6,-1,-4)$.

d) Escribe conclusiones.

7 Halla el plano que pasa por los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,0,5)$ y $C(3,-1,6)$.

8 Comprueba si el punto $A(3,1,-2)$ está en el plano $x - 3y - 2z = 4$.

9 Halla la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en puntos situados a distancia a del origen. Halla el valor de a para que el plano sea $x + y + z - 7 = 0$

10 Averigua las ecuaciones paramétricas del plano cuya ecuación general es $x + y - z - 3 = 0$.

11 Halla la ecuación general del plano paralelo a las rectas: $r: x = y + 1 = z$ y $s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ y que pase por el origen de coordenadas.

3.-POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO.

3.1.-Posición relativa de dos rectas en el espacio.

Conocido un punto y un vector director de cada una de las rectas:

$r:$ Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ un punto de esta recta; Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vector director

$s:$ Sea $B(b_1, b_2, b_3)$ un punto de esta recta; Sea $v = (v_1, v_2, v_3)$ un vector director

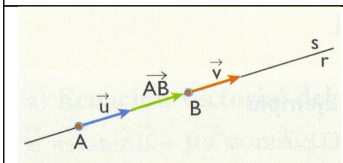
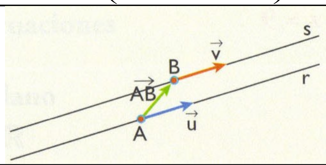
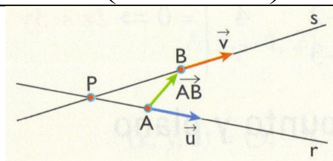
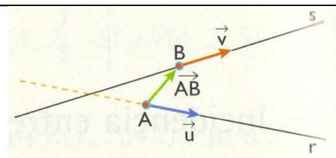
para estudiar la posición relativa de las dos rectas r y s, se estudia la dependencia lineal de los vectores:

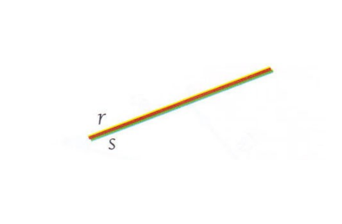
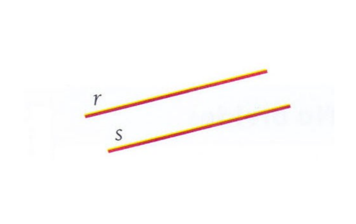
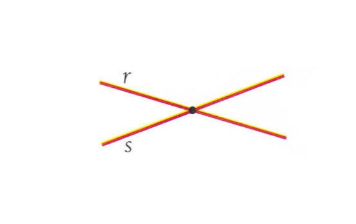
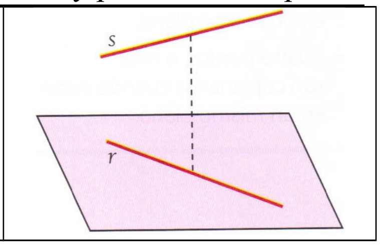
$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \quad u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{y} \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

que es lo mismo que estudiar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Pueden darse los siguientes casos:

El rango de M es 1	*El rango de M es 2. Pueden darse dos casos:*		*El rango de M es 3*
Las coordenadas de los tres vectores son proporcionales.	Las coordenadas de los vectores directores son proporcionales. Rango $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$	Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales. Rango $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$	Los tres vectores son independientes y, por lo tanto, las rectas no están en el mismo plano.
			
Las dos rectas son **coincidentes**.	Las rectas son **paralelas** (las dos rectas no tienen puntos comunes pero están contenidas en el mismo plano).	Las rectas son **secantes** (las dos rectas se cortan en un solo punto).	Las rectas **se cruzan** (las dos rectas no tienen puntos comunes, ni están contenidas en el mismo plano).

12 Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r:\ x-2=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ $\qquad s:\ \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z-1}{-3}$

b) $r:\ (x,y,z)=(1,-1,0)+t(1,1,2)$ $\qquad s:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

c) $r:\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ $\qquad s:\begin{cases} -x+2y-2z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

13 Considera las rectas $r:\ x-3=y-4=\dfrac{z-5}{2}$ y $s:\ \dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-m}{2}$ donde $m\in$ IR . Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas.

14 Considera las rectas: $r:\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=2 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} y=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$. Demuestra que las rectas se cortan en un único punto.

15 Halla la ecuación de la recta paralela a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{-1}$ y que pase por el origen de coordenadas.

3.2.-Posición relativa de una recta y un plano en el espacio.

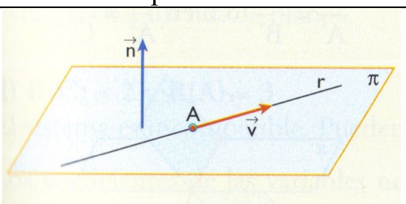
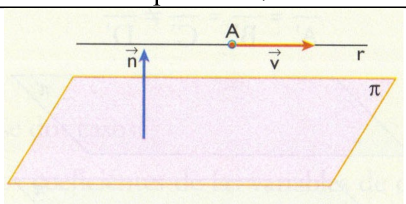
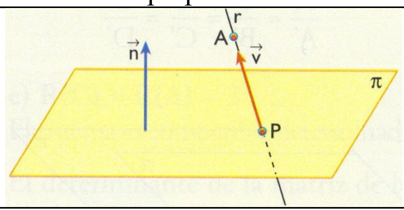
Supuesto conocido los siguientes datos de la recta r y del plano π:

$r:$ Sea $A(a_1,a_2,a_3)$ un punto de esta recta; Sea $v=(v_1,v_2,v_3)$ un vector director

$\pi:\ Ax+By+Cz=D$ Sea $n=(A,B,C)$ un vector normal

para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se calcula el producto escalar $v\cdot n$.

<u>Pueden darse los siguientes casos:</u>

$v\cdot n=0 \Rightarrow v\perp n$; se pueden dar dos casos:		$v\cdot n\neq 0$
Si el punto $A\in\pi$	Si el punto $A\notin\pi$	v no es perpendicular a n
		
La recta está contenida en el plano.	La recta es paralela al plano.	La recta y el plano son secantes.

16 Halla la posición relativa de la recta y el plano siguientes. Si se cortan, averigua el punto de corte.

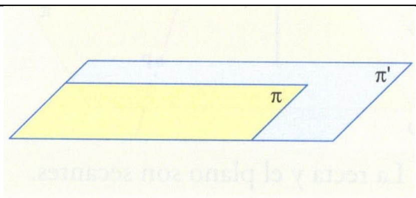
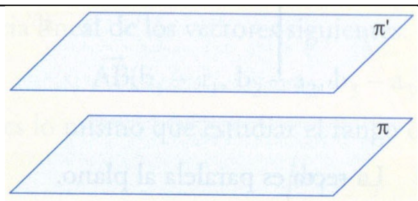
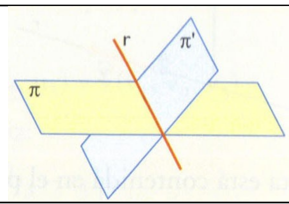
$$r:\ \frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z-1}{-4} \qquad \pi:\ x+2y-3z=11$$

17 Determina la posición relativa de la recta y el plano. $r: \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ $\pi: \ x+y-z+3=0$

18 Halla el valor de a para el que la recta $r: \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ y el plano $\pi: \ ax-y+z+1=0$ sean paralelos.

3.3.-Posición relativa de dos planos en el espacio.

Dados los planos $\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi': \ A'x+B'y+C'z+D'=0$ pueden darse tres casos:

$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'}$
		
Los planos son coincidentes	Los planos son paralelos	Los planos son secantes. Se cortan en una recta. *Las ecuaciones implícitas de una recta representan la intersección de dos planos.*

19 Estudia la posición relativa de los planos $\pi: \ x+y+5z=3$ y $\pi': \ 2x-y+3z=1$.

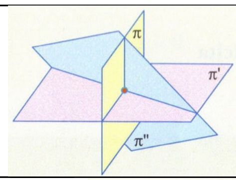
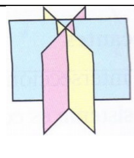
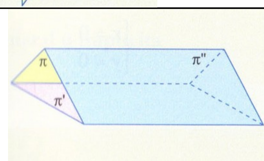
20 Se considera el plano $\pi: \ x+ay+2az=4$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$

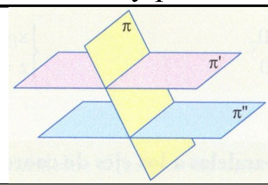
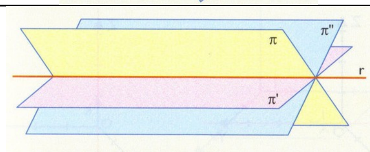
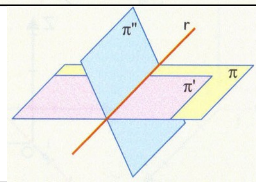
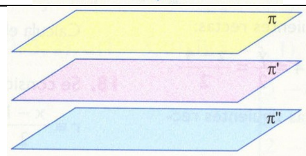
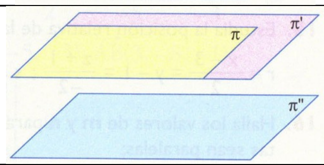
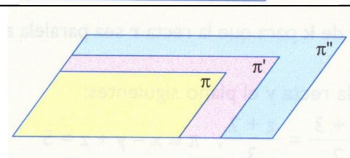
a) Determina los valores de a para los cuales la recta y el plano son paralelos.
b) Para $a=2$, calcula la recta que pasa por $P(1,0,-1)$, es paralela al plano π y se apoya en la recta r.

3.4.-Posición relativa de tres planos en el espacio.

Para determinar la posición relativa de tres planos en el espacio estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\begin{aligned} \pi: &\quad Ax + By + Cz = D \\ \pi': &\quad A'x + B'y + C'z = D' \\ &\rightarrow \\ \pi'': &\quad A''x + B''y + C''z = D'' \end{aligned} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array}\right)$$

Rango $M=3$	Rango $M^*=3$	S.C.D.	Los tres planos **se cortan en un punto**.	
Rango $M=2$	Rango $M^*=3$	S.I.	Ninguno de los planos es paralelo a otro. Los tres planos **se cortan dos a dos** formando una superficie prismática.	 → 

			Dos planos son paralelos y el otro los corta.	
	Rango $M^*=2$	S.C.I.	Los tres planos **no son coincidentes y se cortan en una recta**. Pertenecen a un haz de planos.	
			Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.	
Rango $M=1$	Rango $M^*=2$	S.I.	**Los tres planos son paralelos y distintos dos a dos.** Pertenecen a un haz de planos.	
			Dos planos son coincidentes y el otro es paralelo a ellos y distinto.	
	Rango $M^*=1$	S.C.I.	**Los tres planos son coincidentes.**	

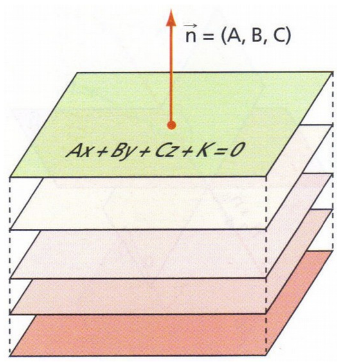
21 Determina la posición relativa de los planos: $\pi:\ x+y-z+2=0$, $\pi':\ 2x+2y-2z+5=0$, $\pi'':\ -x+y+z=0$

22 Determina el valor de k para que los planos $\pi:\ x+2y-z=-3$, $\pi':\ x+ky-6z=-10$, $\pi'':\ 2x-y+3z=1$, se corten en una recta.

23 Estudia si existe algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos siguientes. Calcula los puntos en común (si existe). $\pi:\ x-y+z=0$ $\quad \pi':\ z=2y$ $\quad \pi'':\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda+\mu \\ z=2+2\lambda-\mu \end{cases}$

4.-HAZ DE PLANOS.

4.1.-Haz de planos paralelos.



Si nos dan un plano de ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ los planos paralelos al mismo son de la forma: $Ax+By+Cz+k=0$, $k\in$ IR ya que todos ellos tienen el mismo vector normal $n=(A,B,C)$.

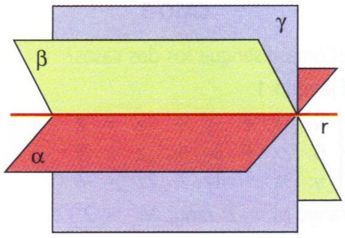
Se llama **haz de planos paralelos** al conjunto de planos paralelos a uno dado.

El haz de planos queda determinado por un plano cualquiera del mismo.

Su ecuación es: $Ax+By+Cz+k=0$, $k\in$ IR.

24 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralelo al plano $3x-5y+z-5=0$.

4.2.-Haz de planos secantes.

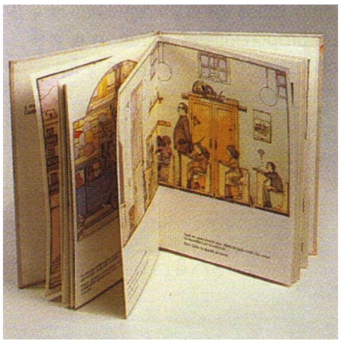


Si dos planos dados por sus ecuaciones se cortan en una recta r y un tercer plano pasa por esa misma recta, entonces las soluciones comunes de los dos primeros planos lo son también del tercero, luego éste es combinación lineal de ellos y se puede escribir que:

$$A''x+B''y+C''z+D''=t(Ax+By+Cz+D)+s(A'x+B'y+C'z+D')=0$$

(para $s=0$ se obtiene el primer plano y para $t=0$, el segundo)

Análogamente, la ecuación de cualquier plano que pase por la recta intersección tiene las mismas soluciones.



Se llama **haz de planos secantes** al conjunto de planos que pasan por una recta que se llama <u>*arista del haz*</u>.

El haz queda determinado por dos planos distintos del mismo.

Su ecuación es: $t(Ax+By+Cz+D)+s(A'x+B'y+C'z+D')=0$, $t,s\in \mathbb{R}$.

Dividiendo la ecuación entre t obtenemos otra expresión de la ecuación:

$$(Ax+By+Cz+D)+k(A'x+B'y+C'z+D')=0 \text{ siendo } k=\frac{s}{t}.$$

25 Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta determinada por los planos

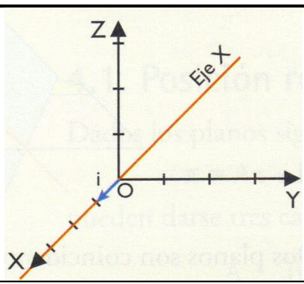
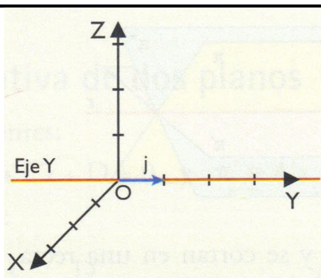
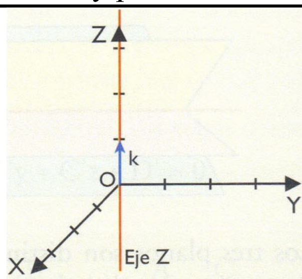
$$\begin{cases}\alpha: x+y+z-1=0\\ \beta: x-y \quad -2=0\end{cases}$$

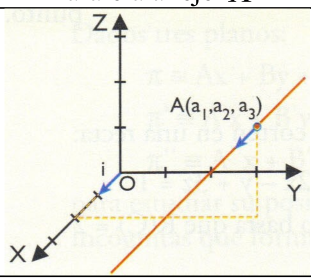
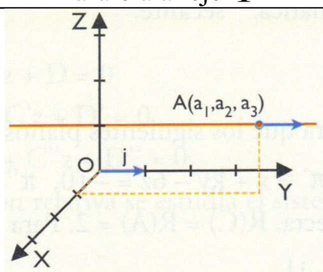
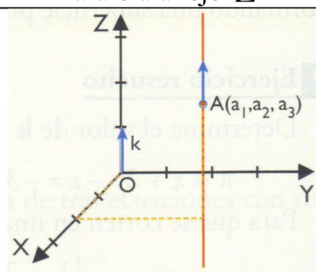
26 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,0,3)$ y por la recta dada por la ecuación $\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z-2}{3}$.

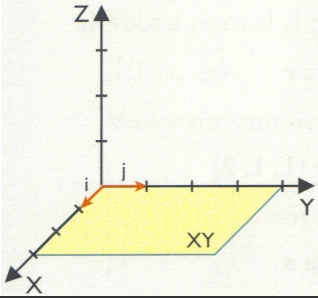
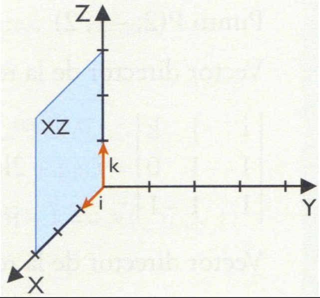
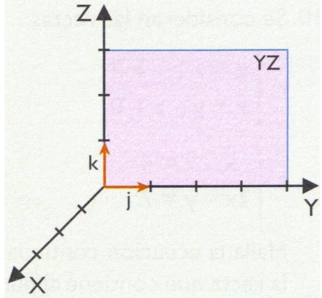
27 Calcula el plano que contiene a la recta $r:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-3z+4=0\end{cases}$ y es paralelo a la recta $s: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-4$.

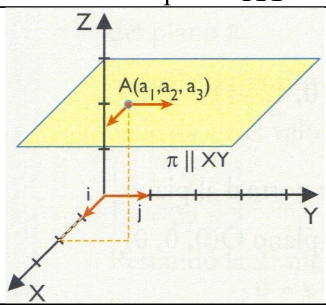
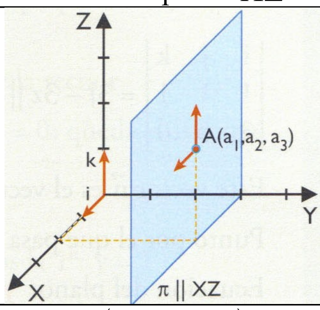
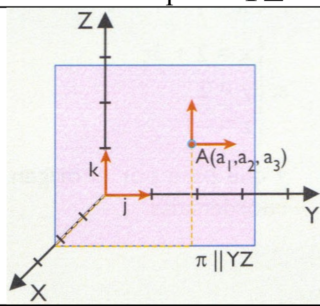
E C U A C I O N E S   P A R T I C U L A R E S   Q U E   S E   D E B E N   C O N O C E R

E J E S	Eje X	Eje Y	Eje Z

DE COORDENADAS			
Punto	$O(0,0,0)$	$O(0,0,0)$	$O(0,0,0)$
Vector director	$i=(1,0,0)$	$j=(0,1,0)$	$k=(0,0,1)$
Ecuaciones de los ejes de coordenadas			
Vectorial	$(x,y,z)=t(1,0,0)$	$(x,y,z)=t(0,1,0)$	$(x,y,z)=t(0,0,1)$
Paramétricas	$\begin{cases} x=t \\ y=0; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=t; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$
Implícita	$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

RECTAS PARALELAS A LOS EJES DE COORDENADAS	Paralela al eje X	Paralela al eje Y	Paralela al eje Z
			
Punto	$A(a_1,a_2,a_3)$	$A(a_1,a_2,a_3)$	$A(a_1,a_2,a_3)$
Vector director	$i=(1,0,0)$	$j=(0,1,0)$	$k=(0,0,1)$
Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes de coordenadas			
Vectorial	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(1,0,0)$	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(0,1,0)$	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(0,0,1)$
Paramétricas	$\begin{cases} x=a_1+t \\ y=a_2 \quad ; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=a_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=a_1 \\ y=a_2+t; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=a_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=a_1 \\ y=a_2 \quad ; \quad t\in \mathbb{R} \\ z=a_3+t \end{cases}$
Implícita	$\begin{cases} y=a_2 \\ z=a_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=a_1 \\ z=a_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=a_1 \\ y=a_2 \end{cases}$

PLANOS COORDENADOS	Plano XY	Plano XZ	Plano YZ
			
Punto	$O(0,0,0)$	$O(0,0,0)$	$O(0,0,0)$
Vectores directores	$i=(1,0,0);\quad j=(0,1,0)$	$i=(1,0,0);\quad k=(0,0,1)$	$j=(0,1,0);\quad k=(0,0,1)$
Ecuaciones de los planos coordenados			
Vectorial	$(x,y,z)=\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$	$(x,y,z)=\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$	$(x,y,z)=\lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1)$
Paramétricas	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu; \quad \lambda,\ \mu\in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0; \quad \lambda,\ \mu\in \mathbb{R} \\ z=\mu \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda; \quad \lambda,\ \mu\in \mathbb{R} \\ z=\mu \end{cases}$
Implícita	$z=0$	$y=0$	$x=0$

PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS	Paralelo al plano XY	Paralelo al plano XZ	Paralelo al plano YZ
			
Punto	$A(a_1,a_2,a_3)$	$A(a_1,a_2,a_3)$	$A(a_1,a_2,a_3)$
Vectores directores	$i=(1,0,0);\quad j=(0,1,0$	$i=(1,0,0);\quad k=(0,0$	$j=(0,1,0);\quad k=(0,0$
Ecuaciones de planos paralelos a los planos coordenados			
Vectorial	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+$ $+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+$ $+\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$	$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+$ $+\lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1)$
Paramétricas	$\begin{cases} x=a_1+\lambda \\ y=a_2+\mu; \quad \lambda,\ \mu\in \\ z=a_3 \end{cases}$ $\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=a_1+\lambda \\ y=a_2 \quad ; \quad \lambda,\ \mu\in \\ z=a_3+\mu \end{cases}$ $\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=a_1 \\ y=a_2+\lambda; \quad \lambda,\ \mu\in \\ z=a_3+\mu \end{cases}$ $\mathbb{R}$
Implícita	$z=a_3$	$y=a_2$	$x=a_1$

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

28 Halla las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta que pasa por $A=(-1,\ 2,\ 1)$ y $B=(3,\ 7,\ 0)$.

Sol.: paramétrica : $\left.\begin{array}{r} x=-1+4\lambda \\ y=2+5\lambda \\ z=1-\lambda \end{array}\right\}$ *; continua :* $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ *; implícita :* $\left.\begin{array}{r} 5x-4y+13=0 \\ -x-4z+3=0 \end{array}\right\}$

29 Sea $r\equiv\begin{cases}2x+y+z=0\\ x-y-2z=0\end{cases}$, expresarla en forma paramétrica y continua. *Sol.: paramétrica:* $\left.\begin{array}{r} x=-t \\ y=5t \\ z=-3t \end{array}\right\}$ *; continua:* $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-3}$

30 Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por $A(-1,\ 2,\ 3)$ y $B(3,\ 1,\ 4)$ y contiene al vector $u(0,\ 0,\ 1)$. *Sol.: paramétrica:* $\left.\begin{array}{r} x=-1+4t \\ y=2-t \\ z=3+t+s \end{array}\right\}$ *; implícita:* $x+4y-7=0$

31 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z-2=0\end{cases}$ y es paralelo a la recta $s\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.
Sol.: en forma implícita: $x-5y+3z-7=0$

32 Halla la ecuación del plano que pasa por $A(2,\ 0,\ 1)$ y contiene a la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}$. *Sol.:* $4x-3y+5z-13=0$

33 Halla la ecuación del plano que pasa por $A(3,\ -2,\ 4)$ y es paralelo al plano $\alpha\equiv\begin{cases}x=1+t+s\\ y=-3+2t-3s\\ z=2+s\end{cases}$. *Sol.:* $2x-y-5z+12=0$

34 Halla el plano que pasa por $A=(1,\ -1\ \ 3)$ y es paralelo a $\alpha\equiv -2x-y+3z+2=0$ *Sol.:* $2x+y-3z+8=0$

35 Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi\equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s\equiv\dfrac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralela a la recta $r\equiv\begin{cases}3x+y-4=0\\ 4x-3y+z-1=0\end{cases}$ (*Selectividad Junio 2002*) *Sol.:* $\dfrac{x+9}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+4}{-13}$

36 Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,1,2)$, $B(1,0,-1)$ y $C(1,-3,2)$ (Selectividad Junio 2002)
Sol.: Área=6

37 Halla el valor de a para que las rectas r y s determinen un plano: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$; $s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-7}{4}$

Sol.: $a = 0'8$

38 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección del plano $2x+3y-2z-6=0$ con los ejes X y Y.

Sol.: $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$

39 Calcula α para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x-y+3z-3=0 \end{cases}$ *y* $s \equiv \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ -x+y-z+\alpha=0 \end{cases}$ sean coplanarias. *Sol.:* $\alpha = 0$

40 Contesta a los siguientes apartados:

a) Determina α para que los puntos siguientes sean coplanarios: $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(-2,\ 1,\ 3)$, $C(0,\ 1,\ 2)$ *y* $D(\alpha,\ \alpha+1,\ 2)$

b)¿Cuál es la ecuación del plano correspondiente? *Sol.: a)* $\alpha = 0$, *b)* $x-2y+2z-2=0$

41 Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x,4,3)$ tiene ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ *Sol.: a)* $x = \pm\sqrt{5}$, *b)* $13x-7y+9z-38=0$ *(Selectividad Junio 2007)*

42 Realiza los siguientes apartados:

a) Halla los dos puntos que dividen el segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales.

b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Sol.: a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ *y* $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$, *b)* $x+y-z+1=0$ *(Selectividad Septiembre 2007)*

43 Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$ *(Selectividad Junio 2008)*

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

Sol.: a) $7x-3y-5z=0$; *b)* $2x+3y+z=0$

44 Estudia la posición relativa de la recta y el plano:

a) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $\alpha \equiv x-2y+3z+1=0$

b) $r \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$, $\alpha \equiv -x+3y+2z+5=0$

Sol.: *a) Se cortan en un punto, son secantes* *b) La recta está contenida en el plano*

45 Estudia la posición relativa de las dos rectas:

a) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

b) $r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

Sol.: *a) Se cruzan* *b) Se cortan en un punto, son secantes*

46 Estudia la posición relativa de los dos planos:

a) $\begin{matrix} \alpha \equiv 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ \beta \equiv -x - y + 3z - 2 = 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} \alpha \equiv 3x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ \beta \equiv -3x + 2y - 3z + 3 = 0 \end{matrix}$

Sol.: a) Se cortan en una recta, son secantes b) Son paralelos

47 Estudia la posición relativa de los tres planos:

a) $\begin{matrix} \alpha \equiv x + y - z + 3 = 0 \\ \beta \equiv -4x + y + 4z - 7 = 0 \\ \gamma \equiv -2x + 3y + 2z - 2 = 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} \alpha \equiv 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ \beta \equiv x - y - z + 1 = 0 \\ \gamma \equiv -x + 2y - z + 2 = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} \alpha \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ \beta \equiv -4x + 2y - 4z - 2 = 0 \\ \gamma \equiv 6x - 3y + 6z + 1 = 0 \end{matrix}$

Sol.: a) Los tres planos se cortan dos a dos b) Se cortan en un punto c) Son paralelos, dos son el mismo

48 Encuentra el valor de a y de b para que la recta $r \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ esté contenida en el plano $\alpha \equiv 2x - 3y + z + b = 0$.

Sol.: a=1, b=1

49 Contesta razonadamente a los siguientes apartados:

a) Calcula a y b para que los planos $\alpha \equiv x + by + z + 1 = 0$, $\beta \equiv 2x + ay - z + b = 0$ y $\gamma \equiv x - y + z + a = 0$ se corten en una recta.

b) Encuentra la ecuación de dicha recta.

c) Determina un plano que pase por dicha recta y por el punto $A(1, \quad 0, \quad 1)$.

Sol.: a) $a = 1,\ b = -1$ *b)* $x = 0,\ y = 1 - t,\ z = -t$ *c)* $2x + y - z - 1 = 0$