

1. Укажите в таблице, какие вычислительные затраты нужны на каждой строке и сколько итераций они занимают

	Затраты	Итерации
1 <code>int x = 100;</code>	$c_1 = c_{=}$	1
2 <code>int y = 0;</code>	$c_2 = c_{=}$	1
3 <code>for (size_t r = 1; r <= n; r = 2 * r) {</code>	c_3	K
4 <code> x = x + r;</code>	$c_4 = c_{=} + c_{+}$	$K - 1$
5 <code> for (size_t c = 2; c < n; c++) {</code>	c_5	$(K - 1)(n - 1)$
6 <code> if (x > y / c)</code>	c_{6_1}	$(K - 1)(n - 2)$
7 <code> y = y + r / c;</code>	c_{7_1}	
8 <code> else</code>	c_{9_1}	
9 <code> y = y - 1;</code>		

$$\text{где } K = \left(\sum_{r=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 1 \right) + 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$$

количество итераций, когда $r \leq n$ и тело цикла выполняется
 последняя итерация, на которой $r > n$.

Получим:

$$K := (\lfloor \log_2 n \rfloor + 2)$$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 * 1 + c_2 * 1 + c_3 * K + c_4(K - 1) + c_5(K - 1)(n - 1) + c_6(K - 1)(n - 2) = \\ &= (c_1 + c_2 - c_4) + (c_3 + c_4)K + c_5(K - 1)(n - 1) + c_6(K - 1)(n - 2) = \\ &= (c_1 + c_2 - c_4) + (c_3 + c_4)K + c_5(K - 1) + (c_5 + c_6)(K - 1)(n - 2) = \\ &= (c_1 + c_2 - c_4 - c_5) + (c_3 + c_4 + c_5)K + (c_5 + c_6)(K - 1)(n - 2) = \\ &= (c_1 + c_2 - c_4 - c_5) + (c_3 + c_4 + c_5)(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) + (c_5 + c_6)(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)(n - 2) = \\ &= (c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 - c_5 - 2c_6) + (c_3 + c_4 - c_5 - 2c_6)\lfloor \log_2 n \rfloor + (c_5 + c_6)n + \\ &\quad (c_5 + c_6)\lfloor \log_2 n \rfloor n = \\ &= C_1 + C_2\lfloor \log_2 n \rfloor + C_3n + C_4n\lfloor \log_2 n \rfloor, \end{aligned}$$

$$\text{where } C_1 = c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 - c_5 - 2c_6$$

$$C_2 = c_3 + c_4 - c_5 - 2c_6,$$

$$C_3 = c_5 + c_6,$$

$$C_4 = c_5 + c_6$$

$$\text{Итого: } T(n) = C_1 + C_2\lfloor \log_2 n \rfloor + C_3n + C_4n\lfloor \log_2 n \rfloor$$

2. *Induktion, um* $\exists f(n) = n \log_2 n \implies T(n) = \Theta(f(n))$

□ 1) $T(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n)$

$$a. C_3, C_4 > 0 \implies \forall C_1, C_2, C_3, C_4 \quad \exists C_5 = \max(C_1, C_2, C_3, C_4) > 0$$

$$b. \exists n_0 = 4 \quad \forall n \geq n_0 \quad T(n) = C_1 + C_2 \lfloor \log_2 n \rfloor + C_3 n + C_4 n \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \\ \leq C_5(1 + \lfloor \log_2 n \rfloor + n + n \lfloor \log_2 n \rfloor) \leq \\ \leq C_5(n \log_2 n + n \log_2 n + n \log_2 n + n \log_2 n) = 4C_5 n \log_2 n$$

$$c. \exists n_0 = 4 \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists M = 4 \max(C_1, C_2, C_3, C_4) > 0 \implies \\ \implies T(n) \leq M n \log_2 n$$

$$2) T(n) = \Omega(n \log_2 n)$$

$$a. C_3 > 0 \implies \exists n_{0_1} = \max \left(\left\lceil \frac{2|C_1|}{C_3} \right\rceil, \left\lceil 2^{\frac{C_3}{2|C_2|}} \right\rceil \right) \quad \forall n \geq n_{0_1} \implies \\ \implies \left(\frac{C_3}{2} n + C_1 \geq 0 \right) \wedge \left(\frac{C_3}{2} n + C_2 \log_2 n \geq 0 \right)$$

$$b. T(n) \geq C_1 + C_3 n + C_4 n \lfloor \log_2 n \rfloor \implies (\exists n_{0_1} \quad \forall n \geq n_{0_1} \implies T(n) \geq C_4 n \lfloor \log_2 n \rfloor)$$

$$c. \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad \exists! k \in \mathbb{N} \implies 2^k \leq n < 2^{k+1}$$

$$\lfloor \log_2 n \rfloor = k$$

$$\log_2 n < k + 1$$

$$m_1 := \frac{k}{k+1} > 0 \implies m_1 \log_2 n < m_1(k+1) = k = \lfloor \log_2 n \rfloor \implies$$

$$\implies (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad \exists m_1 > 0 \implies \lfloor \log_2 n \rfloor > m_1 \log_2 n) \implies$$

$$\implies (\exists n_0 = \max(n_{0_1}, 2) \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists m_1 > 0 \implies T(n) > m_1 * C_4 * n \log_2 n) \implies$$

$$\implies (\exists n_0 = \max(n_{0_1}, 2) \quad \forall n \geq n_0 \quad \exists m = m_1 C_4 > 0 \implies T(n) > m n \log_2 n)$$

$$3) (T(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n) \wedge T(n) = \Omega(n \log_2 n)) \implies T(n) = \Theta(n \log_2 n)$$



Induktion, um $\exists f(n) = n \log_2 n \implies T(n) = \Theta(f(n))$