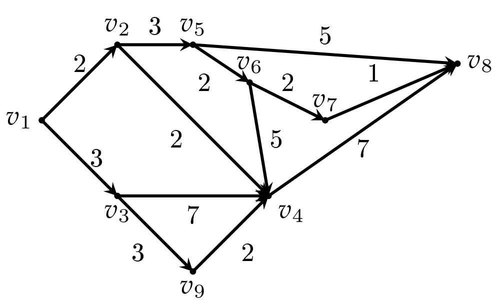
Задание А2

Пункт 1.

В классическом алгоритме Дейкстры на каждом шаге у вершины v, до которой сейчас найден ближайший путь, просматриваем всех соседей u и обновляем расстояния до них как
$dist[u] = \min(dist[u], dist[v] + w(v,u))$.
Пользуясь тем, что уже существует доказательство корректности алгоритма Дейкстры, заметим, что в нём используется то, что веса рёбер неотрицательные и прибавление $w(v,u)$ к $dist[v]$ может уменьшить $dist[u]$, но не сделает его меньше $dist[v]$.
Таким образом, при модификации алгоритма достаточно заменить операцию сложения на умножение и при инициализации расстояние до стартовой вершины сделать равным 1, а не 0, тогда алгоритм будет работать корректно, если веса всех рёбер неотрицательны.
Если в графе есть ребро (u,v) с отрицательным весом, то до вершины u можно дойти по очень длинному пути, а потом пройти по ребру (u,v), дойдя до вершины v по пути с большим отрицательным весом
Рассмотрим пример: пусть в ориентированном графе $G = (V,E)$ необходимо найти кратчайший путь из v_1 в v_8

$\boxed{\text{Граф G:}}$



Изначально $dist = [1, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty]$

После посещения $v_1 : dist = [1, 2, 3, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty,]$

После посещения $v_2 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty,]$

После посещения $v_3 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, +\infty, +\infty, +\infty, 9,]$

После посещения $v_4 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, +\infty, +\infty, 28, 9,]$

После посещения $v_5 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, 12, +\infty, 28, 9,]$

После посещения $v_9 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, 12, +\infty, 28, 9,]$

После посещения $v_6 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, 12, 24, 28, 9,]$

После посещения $v_7 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, 12, 24, 24, 9,]$

После посещения $v_8 : dist = [1, 2, 3, 4, 6, 12, 24, 24, 9,]$

Минимальный путь из v_1 в v_8 - путь $(v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8)$, вес которого равен 24

Пункт 2.

Пусть, если вершина v_j не достижима из вершины $v_i \implies$ между ними нет кратчайшего пути, то положим $dist[v_i][v_j] = \infty$

1. Сначала для всех пар $1 \le i, j, k \le n$, для которых $i \ne j \ne k \ne i$ необходимо проверить выполнение неравенства треугольника:

$$\left(dist[v_i][v_j] \ne \infty \land dist[v_j][v_k] \ne \infty\right) \implies \left(dist[v_i][v_k] \ne \infty \land dist[v_i][v_j] + dist[v_j][v_k] \ge dist[v_i][v_k]\right) \quad (1)$$

Если оно не выполняется, то приходим к противоречию с определением кратчайшего пути $\implies$ по такой матрице $dist[][]$ нельзя восстановить граф.

2. При выполнении неравенства рассмотрим такой алгоритм:

В качестве матрицы весов w восстанавливаемого графа положим данную матрицу $dist[][]$ кратчайших путей

А в качестве восстанавливаемого графа G рассмотрим список смежности, построенный из этой матрицы (вершина u принадлежит списку вершины v, если $dist[u][v] \ne inf$)

Это корректно, т.к. если дан ориентированный взвешенный граф H, и к нему применили алгоритм Флойда-Уоршелла, получив матрицу кратчайших путей $dist_H[][]$, то, применив алгоритм Флойда-Уоршелла уже к этой матрице $dist_H[][]$, проинтерпретировав её как матрицу весов, алгоритм вернёт ту же матрицу $dist_H$ (по факту, ни на одной итерации алгоритма обновление элементов матрицы не произойдёт, т.к. между вершинами уже найдены оптимальные пути в виду выполнения неравенства треугольника)

В качестве примера рассмотрим матрицу $dist[][]$:

$$dist = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 4 & \infty & 2 \\ -1 & 0 & 3 & \infty & 1 \\ 4 & \infty & 0 & \infty & 6 \\ 2 & \infty & 3 & 0 & 4 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Здесь присутствует путь отрицательного веса между вершинами v_2 и v_1, а также не между любой парой вершин есть путь

Для всех троек элементов данной матриц выполняется неравенство треугольника в форме (1)

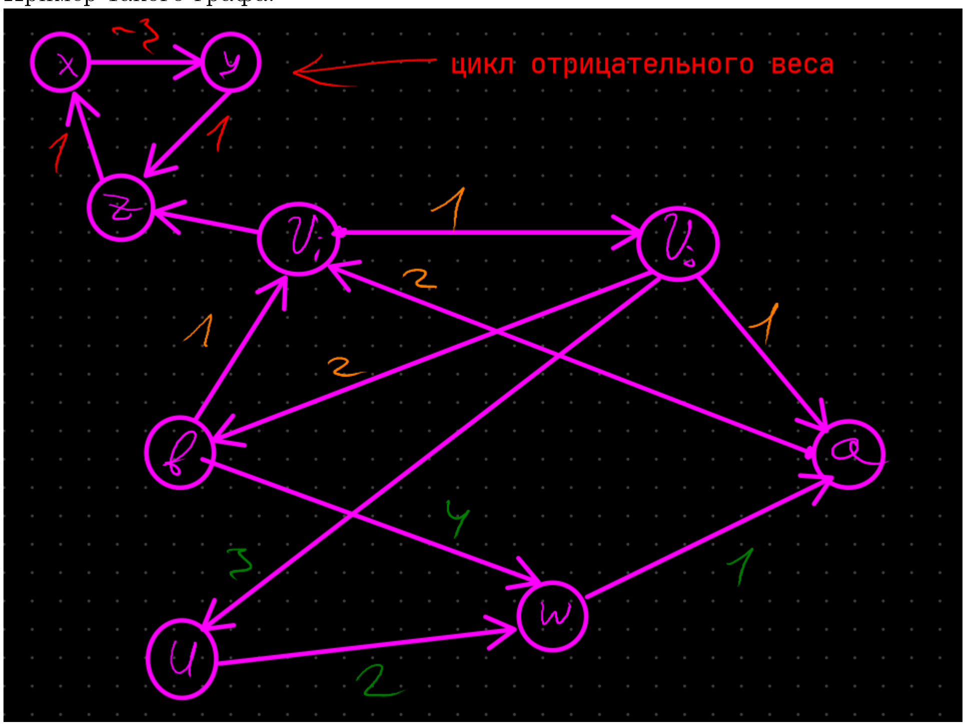
Применив к $dist[][]$ алгоритм Флойда-Уоршелла, получим ту же матрицу $dist[][]$

Тогда для восстанавливаемого графа положим матрицу весов равной $w = dist$ и сформируем список смежности:

$$\begin{aligned} L_G = \{ & \\ & v_1 : \{v_3, v_5\}, \\ & v_2 : \{v_1, v_3, v_5\}, \\ & v_3 : \{v_1, v_5\}, \\ & v_4 : \{v_1, v_3, v_5\} \\ & v_5 : \{v_1, v_3\} \\ \} & \end{aligned}$$

Пункт 4.

Т.к. в графе $G = (V, E)$ есть путь из a в b, проходящий через ребро (v_i, v_j), то из вершины a есть путь P_{a,v_i} до вершины v_i и из вершины v_j есть путь $P_{v_j,b}$ до вершины b. Аналогично, т.к. в графе G есть путь из b в a, проходящий через ребро (v_i, v_j), то из вершины b есть путь P_{b,v_i} до вершины v_i и из вершины v_j есть путь $P_{v_j,a}$ до вершины a.
Следовательно, в графе G есть циклы $P_{a,v_i} \cup \{(v_i, v_j)\} \cup P_{v_j,a}$ и $P_{b,v_i} \cup \{(v_i, v_j)\} \cup P_{v_j,b}$.
При этом, кратчайшие пути по условию существуют, то есть из этих циклов не достижимы циклы отрицательного веса, если они есть в графе G (точнее, если и есть ребро из данных циклов в цикл с отрицательным весом, то обратно из этого цикла с отрицательным весом в данные циклы вернуться нельзя), и сами циклы неотрцательного веса (иначе бы из a в a можно было прийти со сколько угодно малым весом пути)
Пример такого графа:



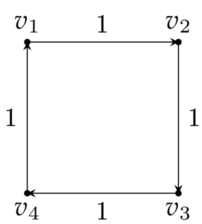
Данные ограничения на граф не гарантируют отсутствие цикла отрицательного веса, но и не накладвают дополнительные ограничения на структуру графа кроме наличия указанных выше циклов (которые, как показано, неотрицательного веса), а алгоритм Дейкстры, A*, Форда-Беллмана и Флойда-Уоршелла корректно работают при наличии циклов, если их вес ≥ 0.

Пункт 3.

Рассмотрим граф $G = (V, E, w)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
Матрица весов графа:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Граф G:



Инициализация матрицы $dist[][]$

$$dist = w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$$

Опишем 64 итераций алгоритма в таблице ниже
(латех смещает таблицу в конец документа, вставить её между последующим выводом о получившейся матрице $dist[][]$ и фразой "Опишем 64 итераций..." не получилось)
Получившаяся матрица расстояний:
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Однако корректный алгоритм Флойда-Уоршелла завершает работу, найдя такую матрицу расстояний:
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
Таким образом, некорректный вариант алгоритма не смог найти путь из v_2 в v_1

	for cycle values			dist values		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k] + dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	1	1	0	0	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	1	2	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	1	3	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	1	4	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	2	1	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	2	2	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	2	3	1	$+\infty$	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	2	4	1	$+\infty$	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	3	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	3	2	$+\infty$	2	2

	for cycle values			dist values		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k] + dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	3	3	2	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	3	4	2	$+\infty$	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	4	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	4	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & +\infty \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	4	3	$+\infty$	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	1	4	4	3	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	1	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	1	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	1	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	1	4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

	for cycle values			**dist values**		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k]+dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	2	1	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	2	3	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	2	4	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	3	1	1	$+\infty$	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	3	2	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	3	3	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	3	4	1	$+\infty$	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	4	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	4	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

	for cycle values			dist values		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k]+dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	4	3	$+\infty$	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	2	4	4	2	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	1	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	1	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	1	3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ +\infty & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	1	4	$+\infty$	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & +\infty & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	2	1	$+\infty$	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	2	2	3	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	2	3	3	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	2	4	3	$+\infty$	3

	for cycle values			dist values		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k] + dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	3	1	0	4	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	3	2	0	4	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	3	3	0	0	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	3	4	0	$+\infty$	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	4	1	1	5	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	4	2	1	5	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	4	3	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	3	4	4	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	1	1	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	1	2	1	$+\infty$	1

	for cycle values			**dist values**		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k] + dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	1	3	1	$+\infty$	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	1	4	1	1	1
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	2	1	$+\infty$	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	2	2	2	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	2	3	2	$+\infty$	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	2	4	2	2	2
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & +\infty & 0 \end{bmatrix}$	4	3	1	$+\infty$	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	3	2	3	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	3	3	3	3	3
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	3	4	3	3	3

	for cycle values			dist values		
$dist[][]$ before update	i	j	k	$dist[i][j]$ before update	$dist[i][k] + dist[k][j]$	$dist[i][j]$ after update
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	4	1	0	4	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	4	2	0	4	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	4	3	0	4	0
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ +\infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	4	4	4	0	0	0