

Пункт 1.

Рассмотрим алгоритм, который ищет множество вершин, убрав которые из графа G вершина t перестанет быть достижимой из вершины s :

Докажем простую лемму (быть может, можно было просто сказать "очевидно, что")

Лемма Лемма 1

Пусть дан ориентированный граф $G = (V, E), t \in V, s \in V, s \neq t$

Тогда вершина t не достижима из вершины $s \iff$ в графе G нет простых путей из s в t

Proof:

" \implies "

Т.к. вершина t не достижима из вершины s , то в G нет путей из s в $t \implies$ нет простых путей из s в t

" \impliedby "

Предположим от противного, т.е. в графе G нет простых путей из s в t , но вершина t достижима из вершины s

Тогда существует путь P из s в t , который не является простым. Это значит, что в нём какая-то вершина встречается более 1 раза, т.е. путь имеет вид $P = (s, v_1, \dots, v_i, q_1, q_2, \dots, q_k, v_i, \dots, t)$

Удалим цикл $(v_i, q_1, q_2, \dots, q_k, v_i)$ из пути P , получив новый путь P' из s в t

Если в нём всё ещё есть циклы, будем аналогично удалять их

(их число конечно, т.к. длина пути конечна)

В итоге получим путь из s в t , в котором нет циклов, т.е. простой путь,

но по предположению их нет $\implies \perp$

Следовательно, предположение не верно и t не достижима из s

■

Назовём множество вершин $M \subseteq V$ "хорошим", если это минимальное по мощности множество вершин, которые достаточно удалить, чтобы t перестала быть достижимой из s

Докажем простую лемму (быть может, можно было просто сказать "очевидно, что")

Lemma Лемма 2

Пусть M - "хорошее" множество

1. Любой простой путь из s в t содержит хотя бы 1 вершину из M 2. Любая вершина из M содержится хотя бы в 1 простом пути из s в t

Proof:

1. Предположим от противного, т.е. \exists простой путь P из s в t , который не проходит ни через одну вершину из M

Удалим из графа G все вершины множества M . По определению множества M после этого вершина t должна перестать быть достижимой из s

Но т.к. ни одна вершина из M не принадлежит пути P , то этот путь останется в графе и вершина t всё ещё будет достижима из $s \implies$ противоречие с определением множества $M \implies \implies$ предположение о существовании такого пути неверно

1. Предположим от противного, т.е. \exists вершина $v \in M$, т.ч. она не принадлежит ни одному простому пути.

Тогда эта вершина не принадлежит ни одному пути из s в t . Но тогда её наличие / отсутствие в графе G не влияет на достижимость t из s . Удалим эту вершину из M , получив M'

Множество M' удовлетворяет определению "хорошего" множества, но $|M'| = |M| - 1 \implies \implies$ множество M не является "хорошим" $\implies \perp \implies$ предположение о существовании такой вершины v неверно

■

Из лемм 1 и 2 следует, что необходимым и достаточным условием "разрыва" достижимости t из s будет: каким-либо образом удалить все простые пути из s в t

Тогда для данного графа G выпишем все его простые пути из s в t :

$(s, v_1, v_2, \dots, v_k, t)$
 $(s, w_1, w_2, \dots, w_n, t)$
 $(s, q_1, q_2, \dots, q_m, t)$
 $(s, p_1, p_2, \dots, p_l, t)$
...

Посчитаем для каждой вершины, в каком количестве путей она встречается, обозначим этот массив $count[]$ (вершина - число от 0 до $|V| - 1$)

И на каждой итерации алгоритма:

Удалим пути, которые содержат вершину с самой высокой частотой встречаемости (т.е. с наибольшим $count[v_i]$)

При этом, при удалении каждого пути, пройдемся по нему и обновим (уменьшим значения в $count[]$) для каждой вершины из пути

Удалённую вершину добавим в множество M

Когда не останется простых путей, вернём $|M|$

Асимптотика работы алгоритма - $O(|V| \cdot 2^{|V|})$, т.к. для поиска простых путей будем использовать bfs , поддерживая для каждого пути, какие вершины в нём уже есть (массива $visited[]$ нет, bfs не добавляет вершину, только если она есть во всех путях или длина текущего пути $\geq |V|$)