Вы планируете разработать алгоритм ***MULT***, предназначенный для умножения двух квадратных матриц ***A*** и ***B*** размера ***N × N*** и асимптотически более эффективный, чем алгоритм Штрассена. Разрабатываемый алгоритм будет также использовать стратегию «Разделяй-и-властвуй».

1. Исходные матрицы ***A*** и ***B*** разделяются на фрагменты размера ***N/4 × N/4*** для дальнейшей рекурсивной обработки.
2. Временные затраты на выполнение шагов **DIVIDE** и **COMBINE** вместе составляют ***θ(N²)***.

Таким образом, временная сложность алгоритма будет описываться следующим рекуррентным соотношением: ***T(N) = a · T(N/4) + θ(N²)***, где коэффициент ***a*** отвечает за количество решаемых подзадач. Например, для алгоритма Штрассена в соответствии с рекуррентным соотношением ***T(N) = 7 · T(N/2) + θ(N²)*** известно, что для каждой задачи решается ***7*** подзадач вдвое меньшего размера.

*В каком диапазоне должен находиться параметр **a** разрабатываемого вами алгоритма **MULT**, для того, чтобы он был асимптотически более эффективным по времени в сравнении с алгоритмом Штрассена? Обоснуйте свой ответ.*

1. Найдём асимптотическую точную оценку для функции временной сложности алгоритма Штрассена:
$T(N) = 7 \cdot T\left(\frac{N}{2}\right) + \Theta(N^2)$
Обозначим $a = 7, b = 2, c = 2$, тогда $T(N) = a \cdot T\left(\frac{N}{b}\right) + \Theta(N^c)$
a, b и c не зависят от $N \implies$ можно применить master-теорему
$c = 2 = \log_2 4 < \log_2 7 = \log_b a \implies$ по второй формулировке master-теоремы
$T(N) = \Theta(N^{\log_b a}) = \Theta(N^{\log_2 7})$

2. Для алгоритма MULT $T(n) = a * T(\frac{n}{4}) + \Theta(n^2)$
a - количество решаемых подзадач $\implies a \in \mathbb{N}$
Для данного алгоритма $b = 4, c = 2$. Они не зависят от $N \implies$ можно применить master-теорему
$c = 2 = \log_4 16$
$\log_b a = \log_4 a$

$I.$ $a > 16 \implies \log_b a > c \implies$ по master-теореме $T(N) = \Theta(N^{\log_b a}) = \Theta(N^{\log_4 a})$
Чтобы алгоритм MULT был асимптотически более эффективным в сравнении с алгоритмом Штрассена, необходимо, чтобы начиная с какого-то номера выполнялось неравенство
$N^{\log_2 7} > N^{\log_4 a} \iff \log_2 7 > \log_4 a \iff 49 > a$

$II.$ $a = 16 \implies \log_b a = c \implies$ по master-теореме $T(N) = \Theta(N^c \log N) = \Theta(N^2 \log N)$
Чтобы алгоритм MULT был асимптотически более эффективным в сравнении с алгоритмом Штрассена, необходимо, чтобы с какого-то номера выполнялось неравенство
$N^{\log_2 7} > N^2 \log_q N \iff N^{\log_2 1.75} > \log_q N$, где $q > 0 \wedge q \neq 1$
$\log_2 1.75 > 0 \implies \forall q((q > 0 \wedge q \neq 1) \implies \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall N \geq N_0 : N^{\log_2 1.75} > \log_q N)$
(менее формально, показательная функция с любым показателем > 0 и основанием N > 1 растёт быстрее, чем логарифм от N по любому основанию)

$III.$ $a < 16 \implies \log_b a < c \implies$ по master-теореме $T(N) = \Theta(N^c) = \Theta(N^2)$
$c = 2 = \log_2 4 < \log_2 7 \implies N^c < N^{\log_2 7} \implies$ при $a < 16$ алгоритм MULT всегда асимптотически более эффективен в сравнении с алгоритмом Штрассена

Ответ: $a \in [1; 48] \cap \mathbb{N}$