Будем считать, что индексация массива длины N начинается с 0 и заканчивается N−1

1. До начала работы цикла переменная minId инициализируется значением переменной i – индексом начала подмассива $a[i \dots n-1]$, который будет рассматриваться далее. После инициализации minId, в цикле последовательно перебираются элементы с индексами $\{i+1, i+2, \dots, n-1\}$, на k-ой итерации индекс $j = i+k$, при этом, если встречается элемент $a[j]$ такой, что $a[j] < a[minId]$, то minId становится равной j. Таким образом, внутренний цикл алгоритма имеет инвариант P_1, условие которого можно сформулировать так: на каждом шаге работы внутреннего цикла по j в переменной minId лежит индекс минимального элемента на подмассиве $a[i \dots j-1]$, $j \in \{i+1, \dots, n\}$ ($j = n$ при выходе из цикла)

2. На каждой итерации цикла после работы внутреннего цикла в переменной minId лежит индекс минимального элемента на подмассиве a[i...n-1] (инвариант P_1 выполняется и при выходе из цикла, когда $j=n$), после этого этот минимальный элемент меняется местами с элементом с индексом i — первым элементом в рассматриваемом подмассиве (если $i=$ minId, то a[i] поменяется с a[i], минимальный элемент был и останется в начале)

Тогда инвариант внешнего цикла алгоритма — условие, которое можно сформулировать так:

на каждой итерации внешнего цикла на i подмассив a[0...i-1] ($i=n$ при выходе из цикла) отсортирован по неубыванию (могут быть равные в смысле линейного порядка элементы)

3. a) Для инварианта P_1

До начала работы цикла значение переменной minId равно i

На этапе инициализации (INIT)

$j = i+1$, минимальный элемент на массиве $a[i..j-1] = a[i..i]$ имеет индекс i, и $minId = i \Rightarrow P_1$ выполняется на этапе инициализации.

Далее в теле цикла сравнивается $a[j] = a[i+1]$ и $a[minId]$, и, если $a[j] < a[minId]$, то minId становится равной j, т.е. $minId := i+1$. После этого значение j увеличивается на 1, т.е. $j := i+2$. В этот момент в minId хранится индекс минимального элемента из двух: $a[i]$ и $a[i+1]$, т.е. в minId хранится минимум на подмассиве $a[i..i+1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ инвариант P_1 выполняется при $j = i+2$

(first CONT)

Пусть инвариант P_1 выполняется в начале итерации внутреннего цикла при $j=i+k$, $k \geq 1$

(if $k=1$, then it is INIT, otherwise it is $(k-1)$-th CONT)

Докажем, что из этого следует, что P_1 выполняется и на начале следующей итерации, на которой $j=i+k+1$ (при условии, что на итерации, на которой $j=i+k$, тело цикла выполнилось, т.е. $i+k \leq n-1$):

$\square$ P_1 выполняется на начале итерации, на которой $j=i+k$ $\Rightarrow$ во время начала исполнения цикла этой итерации в minId лежит индекс минимального элемента подмассива $a[i..i+k-1]$.

В теле цикла этой итерации сравниваются элементы $a[i+k]$ и $a[minId]$, и, если $a[i+k] < a[minId]$, то значение minId становится равным $i+k$, иначе значение minId не меняется. Таким образом, в minId хранится индекс элемента в массиве, равного минимуму двух элементов: минимума в подмассиве $a[i..i+k-1]$ и элемента $a[i+k]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в minId хранится индекс минимального элемента в подмассиве $a[i..i+k] \Rightarrow$
$\Rightarrow P_1$ выполняется на начале итерации, на которой $j = i+k+1$. $\blacksquare$

Обозначим $\varphi(k) = P_1$ выполняется на начале итерации внутреннего цикла по j, на которой $j = i+k$

Получили: $\varphi(1) \wedge (\forall k \in \{1, 2, .., n-1-i\} \Rightarrow (\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1))) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по принципу математической индукции

$\forall k \in \{1, 2, .., n-i\} \Rightarrow \varphi(k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall j \in \{i+1, i+2, .., n\} \Rightarrow \varphi(j-i)$, т.е. P_1 выполняется при $j = i+1$ (INIT), при $j \in \{i+2, .., n-1\}$ (CONT) и при $j = n$ (EXIT)

b) Для инварианта P_2:

При инициализации внешнего цикла $i = 0 \Rightarrow a[0..i-1] = a[0..-1]$, подмассив $a[0..-1]$ отсортирован — это верно, т.к. $a[0..-1] = \varnothing$ — пустой массив, он всегда отсортирован. (INIT)

Далее, при выполнении тела внешнего цикла по i, объявляется и инициализируется переменная minId и после выполнения внутреннего цикла по j её значение равно индексу минимального элемента в подмассиве a[i...n-1] (P_1 выполняется при j=n). $i=0 \Rightarrow a[i...n-1] = a[0...n-1] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ в minId лежит индекс минимального элемента во всём массиве.
После этого, при выполнении операции swap(a[minId], a[i]), минимальный элемент во всём массиве окажется на позиции i=0
и массив a[0...0] будет отсортирован (массив из одного элемента всегда отсортирован)
Далее значение i будет увеличено на 1, т.е. значение переменной i станет равным 1
и, т.к. a[0...0] отсортирован по неубыванию, то P_2 будет выполняться при i=1 (first CONT)

Пусть инвариант P_2 выполняется в начале итерации внешнего цикла по i при $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, $m \geqslant 0$. Докажем, что тогда инвариант P_2 выполняется в начале итерации внешнего цикла по i при $i = m+1$ (при условии, что тело цикла выполняется при $i = m$, т.е. $m \leq n-1$):

$\square$ Т.к. инвариант P_2 выполняется в начале каждой итерации внешнего цикла по i при $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, то т.к. тело внешнего цикла по i было выполнено при $\forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, причём каждый раз минимальный элемент подмассива $a[i..n-1]$ оказывался на позиции с индексом i, то в начале итерации внешнего цикла по i при $i = m$ любой элемент из подмассива $a[0..m-1]$ не превосходит любой элемент подмассива $a[m...n-1]$, т.е.

$\max(a[0..m-1]) \leq \min(a[m...n-1])$

$(\forall a, b \in S \Rightarrow (a \leq b \Longleftrightarrow \neg(a > b))$, если порядок линейный$)$

В теле внешнего цикла по i при $i = m$ внутренний цикл по j находит минимальный элемент подмассива $a[i \dots n-1] \Rightarrow$ при $i=m$ значение переменной minId будет равно индексу минимального элемента в подмассиве $a[m \dots n-1]$: $\min(a[m \dots n-1])$

После этого выполнится операция swap(a[minId], a[i]), после которой $\min(a[m \dots n-1])$ окажется на позиции $i=m$, т.е. $a[m] := \min(a[m \dots n-1])$

Т.к. P_2 выполняется на начале итерации внешнего цикла по i при $i=m$, то $a[0 \dots m-1]$ — отсортированный по неубыванию массив $\Rightarrow$ т.к. $\max(a[0 \dots m-1]) \le \min(a[m \dots n-1])$ и сейчас $a[m] = \min(a[m \dots n-1])$, то подмассив $a[0 \dots m]$ также отсортирован по неубыванию $\Rightarrow P_2$ выполняется на начале итерации при $i=m$ $\blacksquare$

Обозначим $\varphi(m) = P_2$ выполняется на начале итерации внешнего цикла по i при $i=m$

Получили: $\varphi(0) \wedge \left(\forall m \in \{0 .. n-1\} \Rightarrow \left(\left(\forall i \leq m \ \varphi(i)\right) \Rightarrow \varphi(m+1)\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по принципу полной математической индукции

$\forall m \in \{0, .., n\} \Rightarrow \varphi(m)$, т.е. P_1 выполняется

при $i=0$ (INIT), $\forall i \in \{1, .., n-1\}$ (CONT) и при $i=n$ (EXIT)