Занятие 3

Математический анализ

Решение нелинейных уравнений в Sympy. Solve и solveset.

https://docs.sympy.org/latest/modules/solvers/solveset.html (https://docs.sympy.org/latest/modules/solvers/solveset.html)

In [1]:
```
# Применим такой способ импорта библиотеки:
from sympy import Symbol, symbols, S, solve, solveset, Intersection, Interval, EmptySet, Union, plot
# А для того, чтобы использовать все остальное, сделаем так:
import sympy
# Продолжим использовать магию
%matplotlib inline
```

Для решения нелинейных уравнений вида

$$f(x) = 0$$

можно использовать метод solve, которому передается выражение $f(x)$ и переменная, относительно которой нужно решать уравнение. Возвращает solve список list корней уравнения, он может быть пустым или конечным.

Пример 1

Решим уравнение $x^2 - 1 = 0$ с помощью solve. Поскольку в левой части уравнения только одна переменная, ее можно явно не указывать.

In [2]:
```
x = Symbol('x')
solve(x**2 - 1)
```

Out[2]:
```
[-1, 1]
```

Очевидно, решения уравнений $x^2 - 1 = 0$ и $y^2 - 1 = 0$ должны быть одинаковыми. Проверим:

In [3]:
```
y = Symbol('y')
res1 = solve(x**2 - 1)
res2 = solve(y**2 - 1)
res1 == res2
```

Out[3]:
```
True
```

Пример 2.

Уравнение, не имеющее вещественного решения $x^2 + 1 = 0$, решается solve по умолчанию в комплексных числах

In [4]:
```
solve(x**2 + 1)
```

Out[4]:
```
[-I, I]
```

Для решения уравнения в вещественных числах можно использовать solveset с необязательным параметром domain=S.Reals.

Укажем, что решение ищется только в вещественных числах:

In [5]:
```
solveset(x**2 + 1, domain=S.Reals)
```

Out[5]: $\emptyset$

Solveset возвращает множество set корней уравнения, оно может быть пустым, конечным или даже бесконечным.

Пример 3.

Уравнение, имеющее бесконечно много решений $\sin(x) = 0$.

In [6]:
```
solveset(sympy.sin(x))
```

Out[6]: $\{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n\pi + \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Сравним результат с solve

In [7]:
```
solve(sympy.sin(x))
```

Out[7]:
```
[0, pi]
```

solve находит только корни на интервале $[0, 2\pi)$.

Если нужно отобрать корни уравнения на некотором интервале, то это можно сделать с помощью solveset, Intersection и Interval.

Пример 4.

Найдем решения уравнения $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для того, чтобы обращаться с $\frac{1}{2}$ без округлений, превратим эту дробь в символ с помощью метода S. Достаточно превратить в символ числитель дроби S(1), чтобы действия с ней выполнялись аналитически.

In [8]:
```
Intersection(solveset(sympy.sin(x)**2 - S(1)/2), Interval(-sympy.pi, sympy.pi))
```

Out[8]:

$$\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Пример 5.

Найдем решения уравнения $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ на открытом интервале $(-3\pi/4, 3\pi/4)$.

In [9]:
```
Intersection(solveset(sympy.sin(x)**2 - S(1)/2), Interval.open(-3*sympy.pi/4, 3*sympy.pi/4))
```

Out[9]:

$$\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Сравним с тем, что получится, если не указать, что интервал открытый:

In [10]:
```
Intersection(solveset(sympy.sin(x)**2 - S(1)/2), Interval(-3*sympy.pi/4, 3*sympy.pi/4))
```

Out[10]:

$$\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Пример 6.

Можно найти пересечение множеств решений разных уравнений.

Найдем пересечение решений уравнений $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

In [11]:
```
res1 = solveset(sympy.sin(x) - sympy.sqrt(2)/2)
res2 = solveset(sympy.cos(x) - sympy.sqrt(2)/2)
Intersection(res1, res2)
```

Out[11]:

$$\left\{2n\pi + \frac{\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Пример 7.

Пользуясь solveset() решим аналитически уравнение

$$4\sin^2(x^2 + 2x - 1) - 3 = 0,$$

при условии $x^2 + 2x - 1$ от 0 до 2π.

Попытка решить уравнение сразу к успеху не приводит:

In [12]:
```
solveset(4*sympy.sin(x**2 + 2*x - 1)**2 - 3, domain=S.Reals)
```

Out[12]:

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \sin^2\left(x^2 + 2x - 1\right) - \frac{3}{4} = 0\right\}$$

Будем решать задачу последовательно.

Вначале решим уравнение $4y^2 - 3 = 0$

In [13]:
```
x, y, z = symbols('x y z')
sol1 = solveset(4*y**2 - 3, domain=S.Reals)
display(*sol1)
```

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отдельно для каждого корня решим уравнение $\sin z = a$, $a = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

In [14]:
```
sol2 = {solveset(sympy.sin(z) - s, domain=S.Reals) for s in sol1}
display(*sol2)
```

$$\left\{2n\pi + \frac{4\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{5\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\left\{2n\pi + \frac{2\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Объединим решения в одно множество с помощью метода Union. В качестве аргумента передадим распакованное множество *sol2.

In [15]:
```
sol3 = Union(*sol2)
display(sol3)
```

$$\left\{2n\pi + \frac{4\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{5\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{2\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2n\pi + \frac{\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Выберем корни из интервала $[0, 2\pi]$

In [16]:
```
sol4 = Intersection(sol3, Interval(0, 2*sympy.pi))
display(sol4)
```

$$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Для каждого элемента $item$ множества sol4 решим уравнение $x^2 + 2x - 1 - item = 0$.

В распакованном виде решения красиво изображаются с помощью display.

In [17]:
```
sol5 = {solveset(x**2 + 2*x - 1 - item, domain=S.Reals) for item in sol4}
display(*sol5)
```

$$\left\{-1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{6+5\pi}}{3}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6+5\pi}}{3} - 1\right\}$$

$$\left\{-1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+2\pi}}{3}, -\frac{\sqrt{6}\sqrt{3+2\pi}}{3} - 1\right\}$$

$$\left\{-1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\pi}}{3}, -\frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\pi}}{3} - 1\right\}$$

$$\left\{-1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{\pi+6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{\pi+6}}{3} - 1\right\}$$

Объединим полученные решения, получим ответ к задаче.

In [18]:
```
sol6 = Union(*sol5)
sol6
```

Out[18]:

$$\left\{-1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{6+5\pi}}{3}, -1 + \frac{\sqrt{3}\sqrt{\pi+6}}{3}, -1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\pi}}{3}, -1 + \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+2\pi}}{3}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6+5\pi}}{3} - 1, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{\pi+6}}{3} - 1, -\frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\pi}}{3} -$$

Пример 8.

Найти точки пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 3x - 1$. Построить графики так, чтобы на график попали обе точки пересечения.

Вначале найдем решение уравнения $x^2 = 3x - 1$

In [19]:
```
res = solveset(x**2 - 3*x + 1)
res
```

Out[19]:

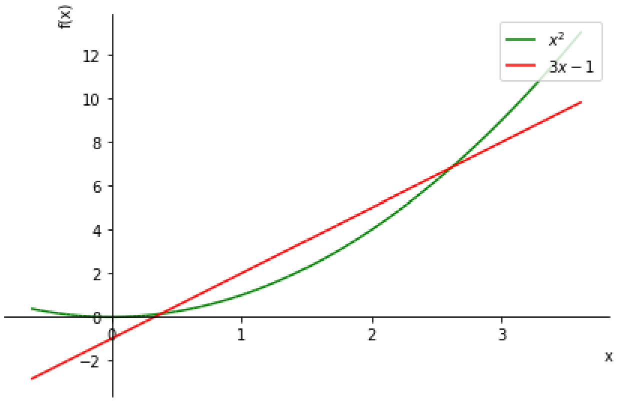
$$\left\{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\right\}$$

Построим графики функций на интервале, содержащем точки пересечения. Для красоты отступим на 1 влево и вправо от левой и правой точек пересечения.

Для того, чтобы вычислить пределы по горизонтальной оси, воспользуемся встроенными функциями min и max, с их помощью можно найти минимальный и максимальный корень уравнения.

In [20]:

```
x_limits = (x, min(res) - 1, max(res) + 1)
point1, point2 = [(x0, 3*x0 - 1) for x0 in res]
p = plot(x**2, x_limits, line_color='green', legend=True, label='$x^2$', show=False)
p.append(plot(3*x - 1, x_limits, line_color='red', legend=True, label='$3x - 1$', show=False)[0])
p.show()
display('p1', *point1, 'p2', *point2)
```



'p1'

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

'p2'

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{7}{2}$$