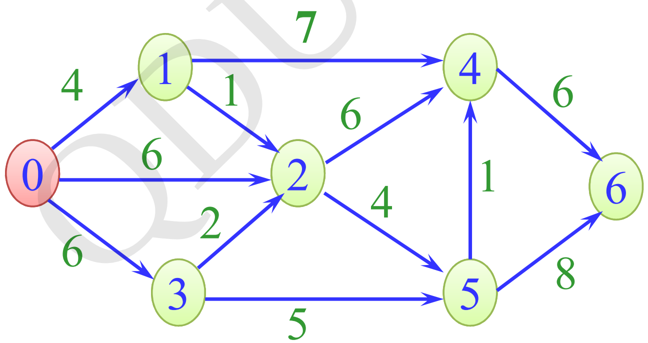
7.6 最短路径

最短路径问题：如果从图中某一顶点(称为**源点**)到达另一顶点(称为**终点**)的路径可能不止一条，如何找到一条路径使得沿此路径上各边上的权值总和达到最小。



7.6 最短路径

求带权有向图最短路径问题分为两种情况：

- 求从一个顶点到其他各顶点的最短路径，称之为单源最短路径问题；
- 求每对顶点之间的最短路径，称之为多源最短路径问题。

单源最短路径问题

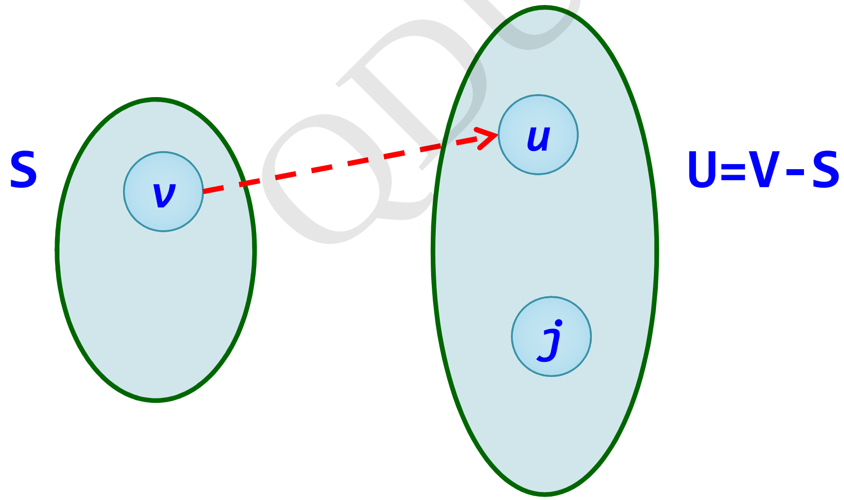
- **问题的提法：**给定一个带权有向图 G 与源点 *v*，求从 *v* 到 G 中其它顶点的最短路径。限定各边上的权值大于或等于0。
- 为求得这些最短路径，迪杰斯特拉(Dijkstra) 提出按路径长度的递增次序，逐步产生最短路径的算法。

> 首先求出长度最短的一条最短路径；
> 再参照它求出长度次短的一条最短路径；
> 依次类推，直到从顶点*v*到其它各顶点的最短路径全部求出为止。

Dijkstra算法的具体步骤如下：

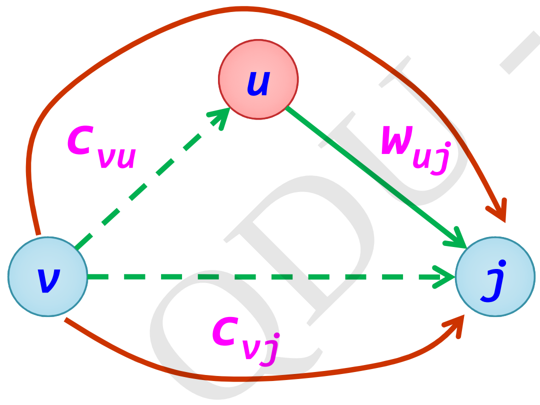
①初始时，顶点集S只包含源点v，即S={v}，顶点v到自已的距离为0。顶点集U=V-S包含除v外的其他顶点，源点v到U中顶点i的距离为边（弧）上的权（若v与i有边<v,i>）或∞（若顶点i不是v的出边相邻点）。

②从U中选取一个顶点u，它是源点v到U中距离最小的一个顶点，然后把顶点u加入S中（该选定的距离就是源点v到顶点u的最短路径长度）。



③以顶点u为新考虑的中间点，修改源点v到U中各顶点j（j∈U）的距离。

④重复步骤②和③直到S包含所有的顶点，即U为空。

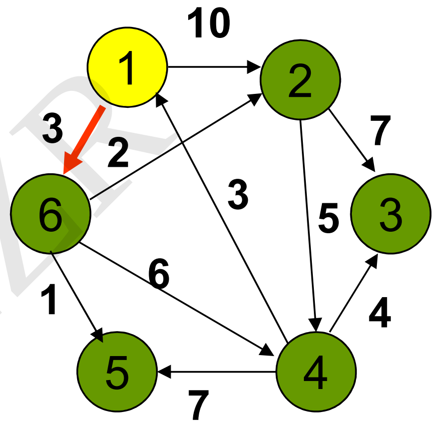


两条路径中选最小者

【示 例】

输入：G=（V，E），源点 1

V={1, 2, 3, 4, 5, 6}

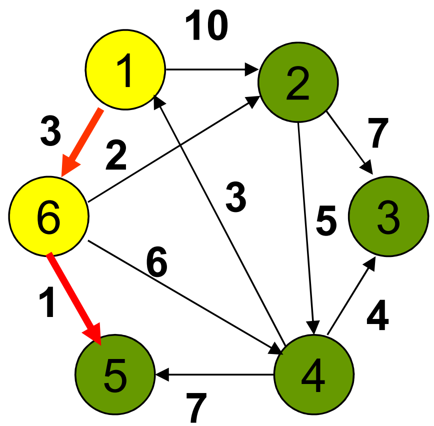


S={1},

$dist$[1]=0

$dist$[2]=10, $dist$[6]=3

$dist$[3]=$dist$[4]=$dist$[5]=∞



S={1,6},

$dist$[1]=0, $dist$[6]=3

$dist$[2]=5, $dist$[4]=9, $dist$[5]=4

$dist$[3]=∞

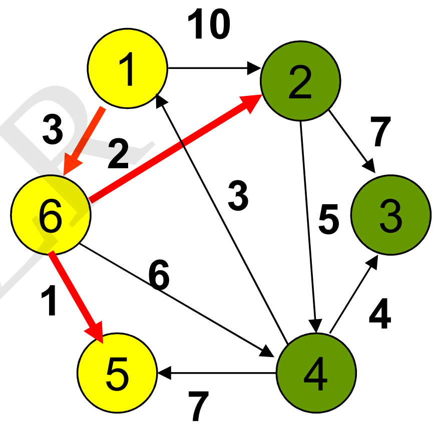
【示 例】

S={1,6,5},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9,

dist[3]=∞



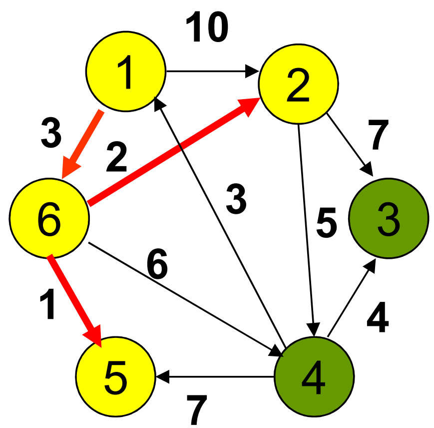
S={1,6,5,2},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5

dist[3]=12

dist[4]=9



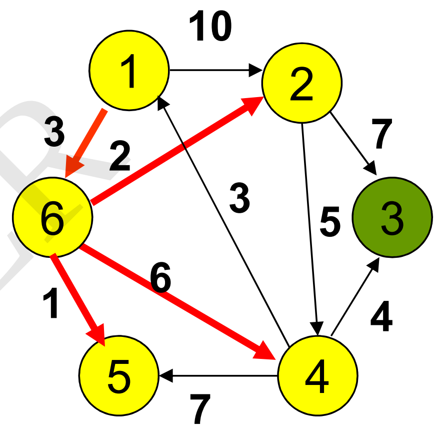
【示 例】

S={1,6,5,2,4},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9,

dist[3]=12

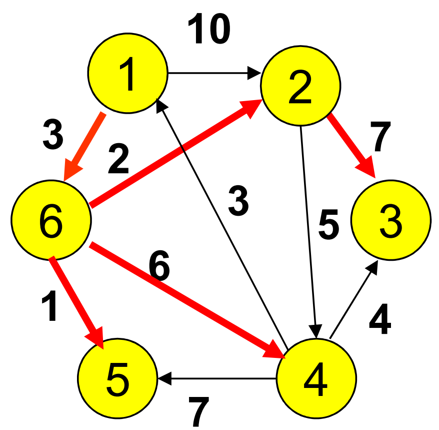


S={1,6,5,2,4,3},

dist[1]=0, *dist*[6]=3, *dist*[5]=4

dist[2]=5, *dist*[4]=9

dist[3]=12



解：

short[1]=0, short[2]=5,

short[3]=12, short[4]=9,

short[5]=4, short[6]=3.

41.（10分）带权图（权值非负，表示边连接的两顶点间的距离）的最短路径问题是找出从初始顶点到目标顶点之间的一条最短路径。假设从初始顶点到目标顶点之间存在路径，现有一种解决该问题的方法，具体的解题步骤如下：

（1） 设最短路径初始时仅包含初始顶点，令当前顶点u为初始顶点。

（2） 选择离u最近且尚未在最短路径中的一个顶点v，加入到最短路径中，修改当前顶点u=v。

（3） 重复步骤（2）直到u是目标顶点时为止。

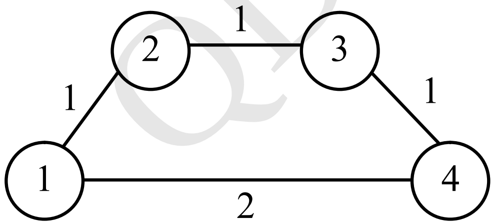
请问上述方法能否求得最短路径？若该方法可行，请证明之；否则，请举例说明。

说明：本题为2009年全国考研题。

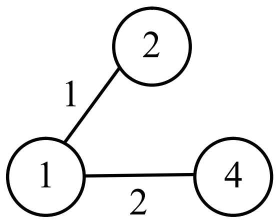
解：该方法不一定能（或不能）求得最短路径。

如图（a）中，设初始顶点为1，目标顶点为4，欲求从顶点1到顶点4之间的最短路径。显然这两顶点之间的最短路径长度为2。但利用给定的方法求得的路径长度为3，这条路径并不是这两个顶点之间的最短路径。

如图（b）中，设初始顶点为1，目标顶点为4，欲求从顶点1到顶点4之间的最短路径。利用给定的方法，无法求出顶点1到顶点4的路径。



（a）



（b）

【评分说明】

①若考生回答“能求得最短路径”，无论给出何种证明，均不给分。

②考生只要举出类似上述的一个反例说明“不能求得最短路径”或答案中体现了“局部最优不等于全局最优”的思想，均可给 6 分；若举例说明不完全正确，可酌情给分。

END