第7章 图

QDU-LZR

7.1 图的定义和术语

7.1.1 图的定义

- 在图形结构中，结点之间的关系可以是任意的，图中任意个数据元素之间都可能相关。
- 任何复杂的图都是由顶点和边（弧）构成的。
- 采用形式化的定义，图G（Graph）由两个集合V（Vertex）和E（Edge）组成，记为**G=(V,E)**，其中V是顶点的有限集合，记为V(G)，E是连接V中两个不同顶点的边（弧）的有限集合，记为E(G)。

QDU LZR

- 对于含有n个顶点的图，通常用字母或自然数来唯一标识图中顶点（顶点的编号）。

✓ 如在所给的图中，顶点可以使用字符v_i表示，也可用数字i（$0 \le i \le n-1$）表示第i个顶点v_i的编号。

QDU-LZR

【示例-1】 一个图$G_1=(V_1, E_1)$，其中：

$V_1=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$E_1=\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (2,4), (0,3)\}$。

另一个图$G_2=(V_2, E_2)$，其中：

$V_2=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$E_2=\{<0,1>, <1,2>, <1,3>, <2,4>, <0,4>, <4,3>, <3,2>\}$

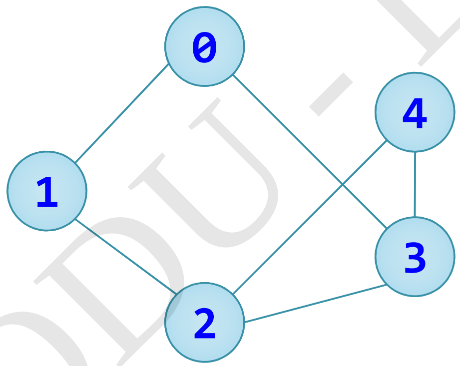
试画出这两个图的逻辑结构。

QDU - LZR

解：它们的逻辑结构如下图所示。

V_1={0， 1， 2， 3， 4}

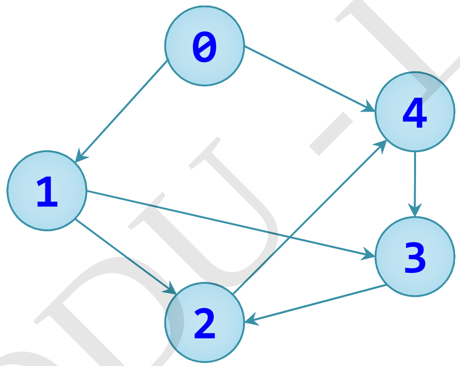
E_1={(0,1)， (1,2)， (2,3)， (3,4)， (2,4)， (0,3)}



QDU-LZR

V_2={0， 1， 2， 3， 4}

E_2={<0,1>， <1,2>， <1,3>， <2,4>， <0,4>， <4,3>， <3,2>}



QDU-LZR

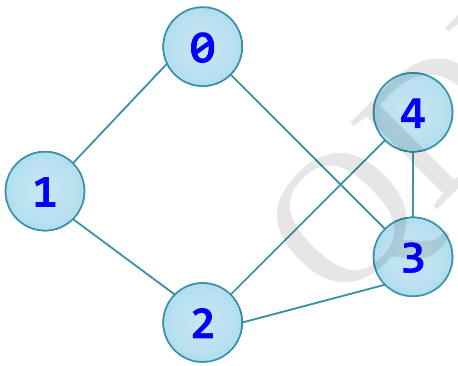
✓ 从中看到图G_1是无向图，图G_2是有向图。

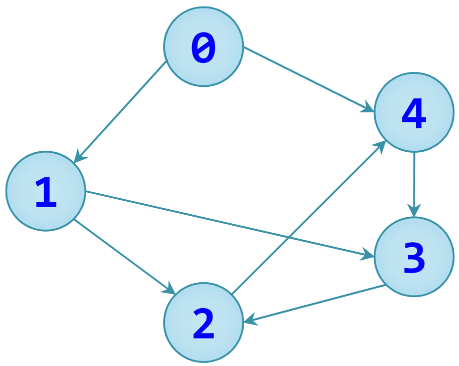
7.1.2 图的基本术语

（1）无向图和有向图

对于一个图G，若边集E(G)为无向边的集合，则称该图为无向图。例如，下图(左)的图就是一个无向图。

对于一个图G，若边集E(G)为有向边的集合，则称该图为有向图。例如，下图(右)的图就是一个有向图。

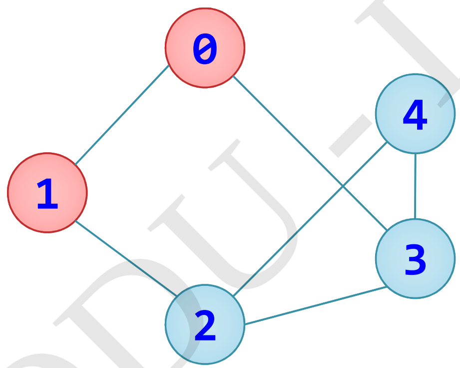




ODU - LZP

（2）邻接点

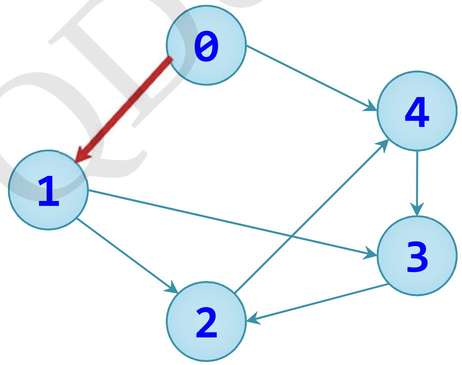
在一个无向图中，若存在一条边(i,j)，则称顶点i、j为该边的两个端点，并称它们互为邻接点（或者相邻点）。



✓ 注意：端点和邻接点是相对一条边的

QDU-LZR

- 在一个有向图中，若存在一条边（弧）<i,j>，则称此边（弧）是顶点（弧尾）i的一条出边，同时也是顶点（弧头）j的一条入边，称顶点i和j分别为此边的起始顶点（简称为起点）和终止顶点（简称终点）。例如，下图中，对于边<0,1>，该边是顶点0的出边，顶点1的入边，同时，顶点0称为起点，顶点1称为终点。
- 对于边<0,1>，则称顶点0“邻接到”顶点1，顶点1“邻接自”顶点0 ，弧<0,1>与顶点0和1“相关联”。



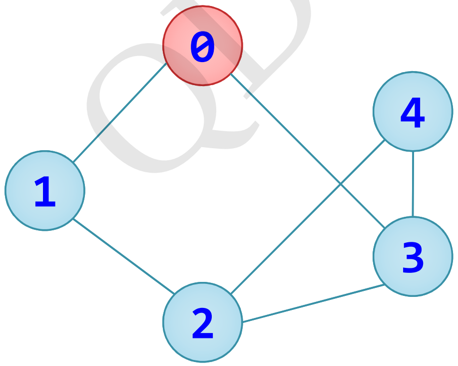
QDU-LZR

(3) 度、入度和出度

顶点v的度记为D(v)。

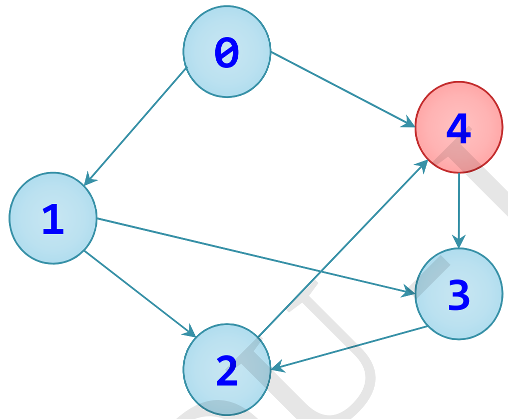
- 对于无向图，每个顶点v的度定义为和v顶点相关联的边的数目。
- 对于有向图，顶点v的度分为入度和出度，入度是以该顶点为弧头（终点）的入边数目；出度是以该顶点为弧尾（起点）的出边数目，该顶点的度等于其入度和出度之和。

例如下图中，D(0)=2, D(2)=3 等。



QDU-LZR

在下图中，顶点4的入度为2，出度为1，所以D(4)=3。



QDU LZR

◆ 若一个图（无论有向图或无向图）中有n个顶点和e条边，每个顶点的度为d_i（$0 \le i \le n-1$），则有：

$$e=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} d_i$$

➢ 也就是说，一个图中所有顶点的度之和等于边数的两倍。因为图中每条边分别作为两个相邻点的度各计一次。

QDU- LZR

【示例-2】一个无向图中有16条边，度为4的顶点有3个，度为3的顶点有4个，其余顶点的度均小于3，则该图至少有（ ）个顶点。

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

解：

- ✓ 设该图有n个顶点，图中度为i的顶点数为n_i（$0 \le i \le 4$），$n_4=3$，$n_3=4$。
- ✓ 要使顶点数最少，该图应是连通的，即$n_0=0$，$n=n_4+n_3+n_2+n_1+n_0=7+n_2+n_1$，即$n_2+n_1=n-7$。
- ✓ 度之和$=4\times3+3\times4+2\times n_2+n_1=24+2n_2+n_1 \le 24+2(n_2+n_1)=24+2\times(n-7)=10+2n$。
- ✓ 而度之和$=2e=32$，所以有$10+2n \ge 32$，即$n \ge 11$。选择B。

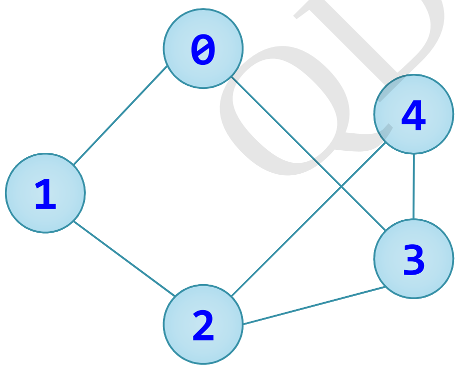
QDU-LZR

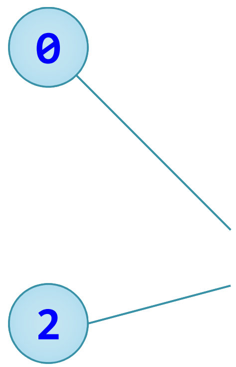
（4）子图

设有两个图G=(V,E)和G'=(V',E')，若V'是V的子集，即V' $\subseteq$V，且E'是E的子集，即E' $\subseteq$E，则称G'是G的子图。

注意：对于一个图G=(V,E)，V'是V的子集，即V' $\subseteq$V，E'是E的子集，即E' $\subseteq$E。而(V', E')可能不是一个图，所以由V的子集和E的子集并非一定构成G的子图。

如：V'={0,2}，E'={(0,3)，(2,3)}并不是其子图，因为(V'，E')本身不是一个图。





QDU LZR

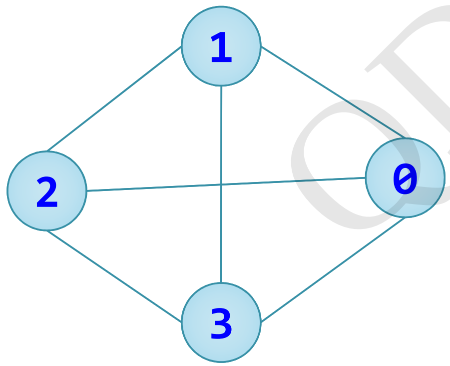
（5）完全无向图和完全有向图

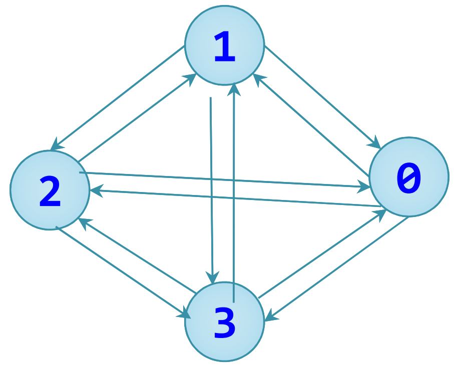
- 对于无向图，若具有$n(n-1)/2$条边，则称之为完全无向图。

  例如下图（左）是完全无向图G_3，这里$n=4$，边数为6。

- 对于有向图，若具有$n(n-1)$条边，则称之为完全有向图。

  例如下图（右）是完全有向图G_4，这里$n=4$，边数为12。





QDU - LZR

（6）稀疏图和稠密图

边数较少（边数$e<<n\log_2 n$，其中n为顶点数）的图称为稀疏图。边数较多的图称为稠密图。

（7）路径和路径长度

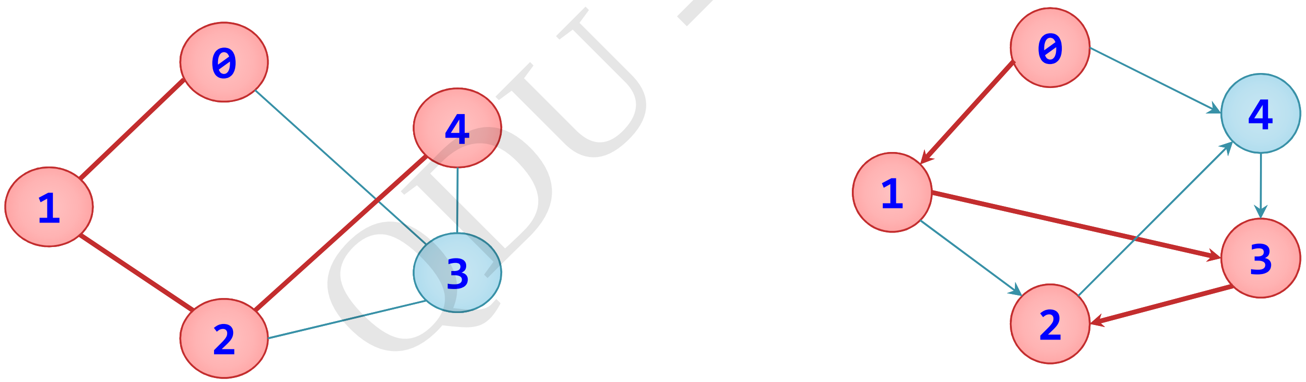
- ✓ 在一个图G中，从顶点i到顶点j的一条路径是一个顶点序列$i=i_0$、i_1、…、$i_m=j$。若是无向图，则$(i_{k-1},i_k)\in E(G)$，（$1\le k\le m$）；若该图是有向图，则$<i_{k-1},i_k>\in E(G)$，（$1\le k\le m$），其中顶点i称为该路径的开始点，顶点j称为该路径的结束点。
- ✓ 路径长度是指一条路径上经过的边（弧）的数目。

QDU LZR

（8）简单路径

若一条路径的顶点序列中顶点不重复出现，称该路径为简单路径。

- 如下图（左）中，路径0→1→2→4是一条简单路径，其长度为3。
- 如下图(右)中，路径0→1→3→2是一条简单路径，其长度也为3。

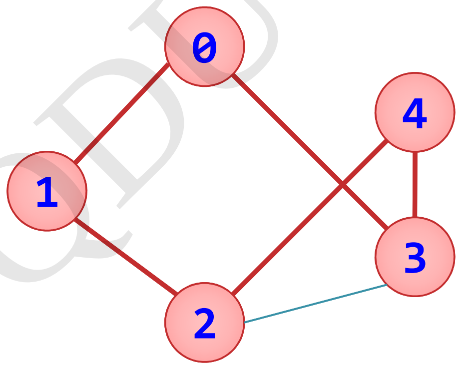


QDU - LZR

（9）回路（环）

若一条路径上的开始点和结束点为同一个顶点，则称该路径为回路（环）。除开始点与结束点相同外，其余顶点不重复出现的回路称为简单回路（简单环）。

如下图中，路径0→1→2→4→3→0是一条回路（环），也是一条简单回路（简单环）。

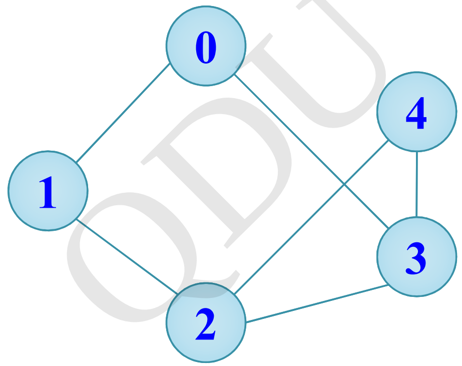


QDU - LZR

（10）连通、连通图和连通分量

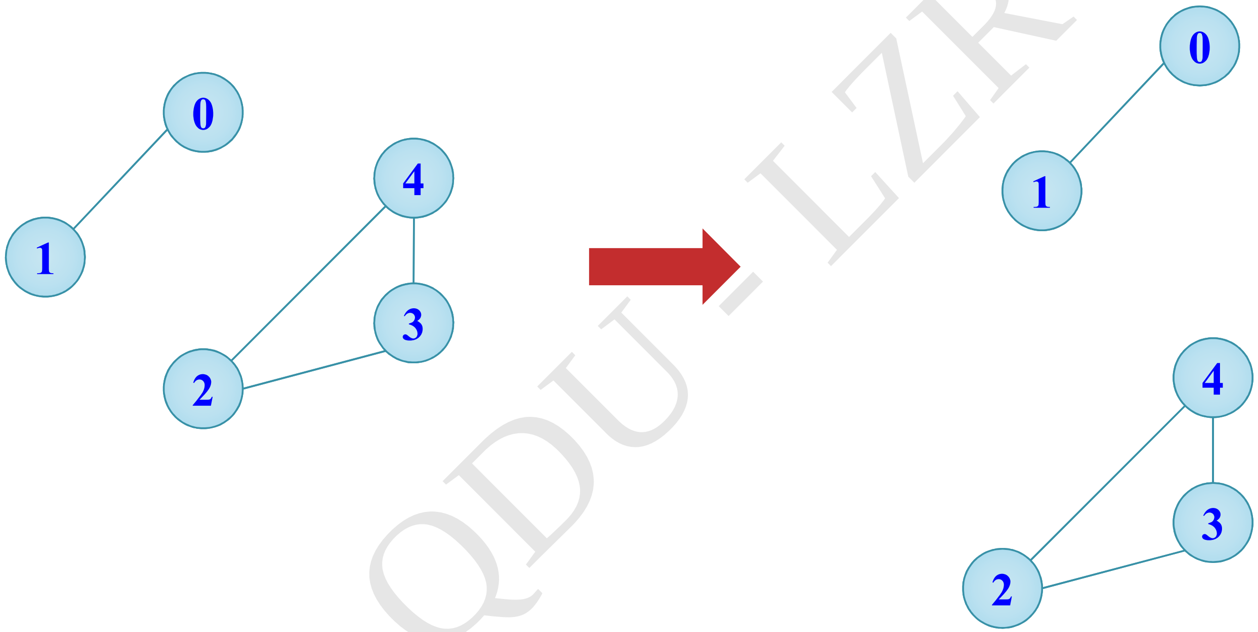
在无向图G中，若从顶点i到顶点j有路径，则称顶点i和j是连通的。若图G中任意两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则为非连通图。无向图G中极大连通子图称为G的连通分量。

如下图的连通分量就是自身，因为该图是连通图。



QDU - LZP

如下图G的连通分量有两个，即｛0，1｝｛2，3，4｝。



两个连通分量

QDU-LZR

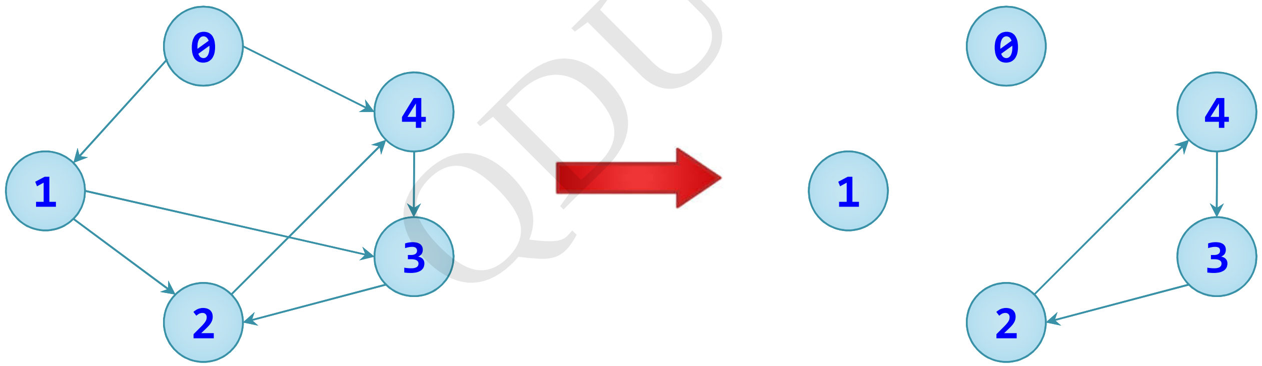
（11）强连通图和强连通分量

在有向图G中，若任意两个顶点i和j都是连通的，即从顶点i到j和从顶点j到i都存在路径，则称该图是强连通图。

有向图G中极大强连通子图称为G的强连通分量。

QDU LZR

- 对于下图的有向图，顶点0的入度为0，也就是说其余顶点都没有到达顶点0的路径，所以单个顶点0是一个强连通分量；
- 顶点1只有一条从顶点0到它的入边，除顶点0外其余顶点没有到达顶点1的路径，所以单个顶点1也是一个强连通分量；
- 点2、3、4构成一个有向环，这些顶点之间都有路径，该图的强连通分量。



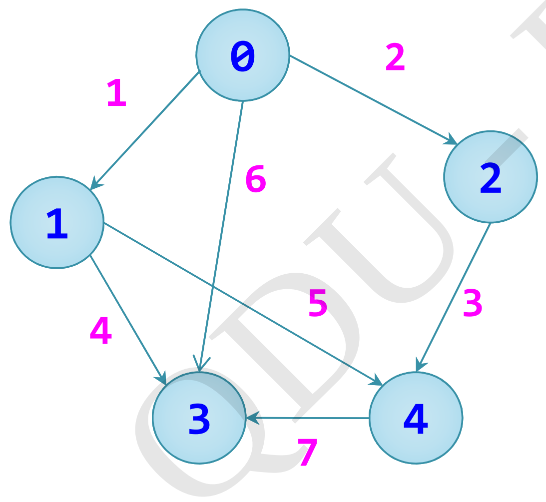
强连通分量

QDU - LZP

（12）权和网

在一个图中，每条边可以标上具有某种含义的数值，该数值称为该边的**权**。边上带权的图称为带权图，也称为**网**。

下图就是一个带权图。一般规定所有边的权均为非负数。



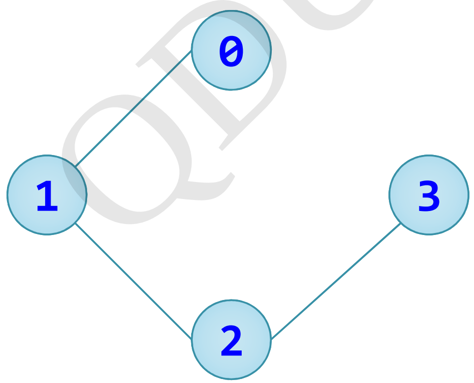
QDU LZP

【示例-3】 如果图G是一个具有n个顶点的连通无向图，那么G最多有多少条边？G最少有多少条边？

如果图G'是一个具有n个顶点的强连通有向图，那么G'最多有多少条边？G'最少有多少条边？

解：图G为连通无向图：

- ✓ 图G为完全无向图时边最多，即图G最多有$n(n-1)/2$条边；
- ✓ 图G为一棵树时边最少，即G最少有$n-1$条边。

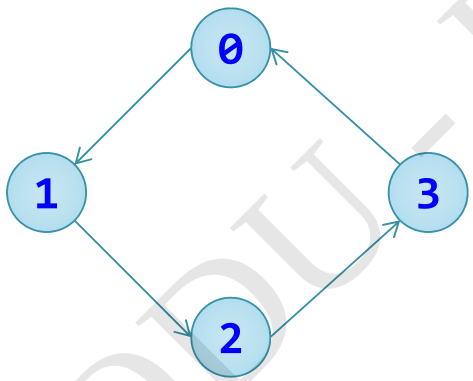


$n=4$

QDU-LZR

图G为强连通有向图：

- 图G为完全有向图时边最多，即图G最多有$n(n-1)$条边；
- 图G为一棵树时边最少，即G最少有n条边。



n=4

QDU-LZR

END

QDU-LZR