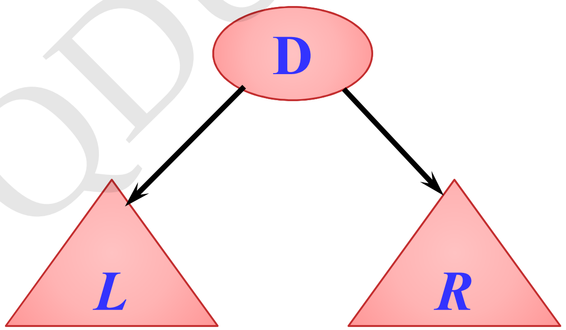
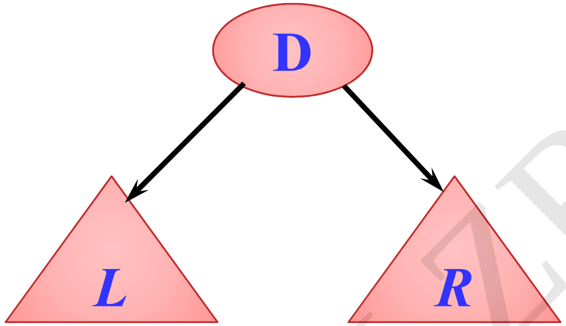
6.2 二叉树

二叉树的**递归定义**：

- 二叉树或者是一棵空树。
- 或者是一棵由一个根结点和两棵互不相交的分别称做根结点的左子树和右子树所组成的非空树；
- 左子树和右子树又同样都是一棵二叉树。

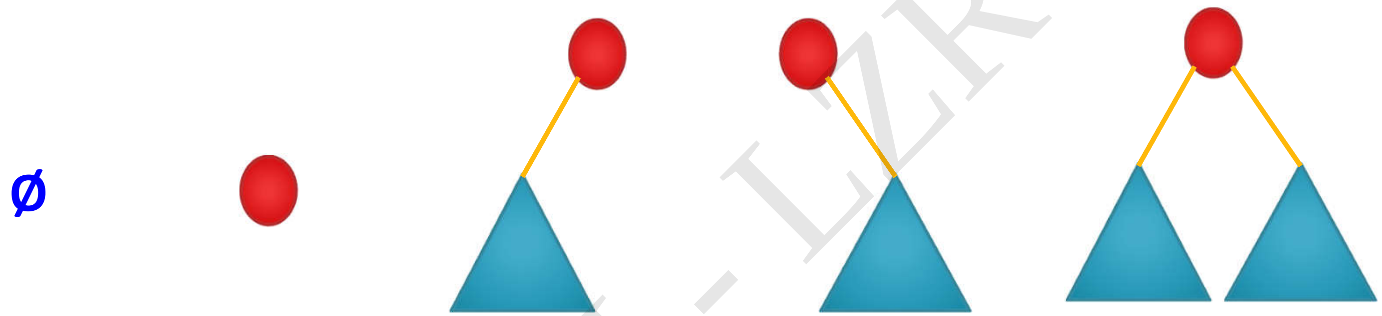




注意：二叉树与度为2的树是不同的。

- 度为2的树至少有3个结点，而二叉树的结点数可以为0。
- 度为2的树不区分子树的次序，而二叉树中的每个结点最多有两个孩子结点，且必须要区分左右子树，即使在结点只有一棵子树的情况下也要明确指出该子树是左子树还是右子树。

归纳起来，二叉树的5种形态：



（a） 空二叉树

（b） 只有一个根结点的二叉树

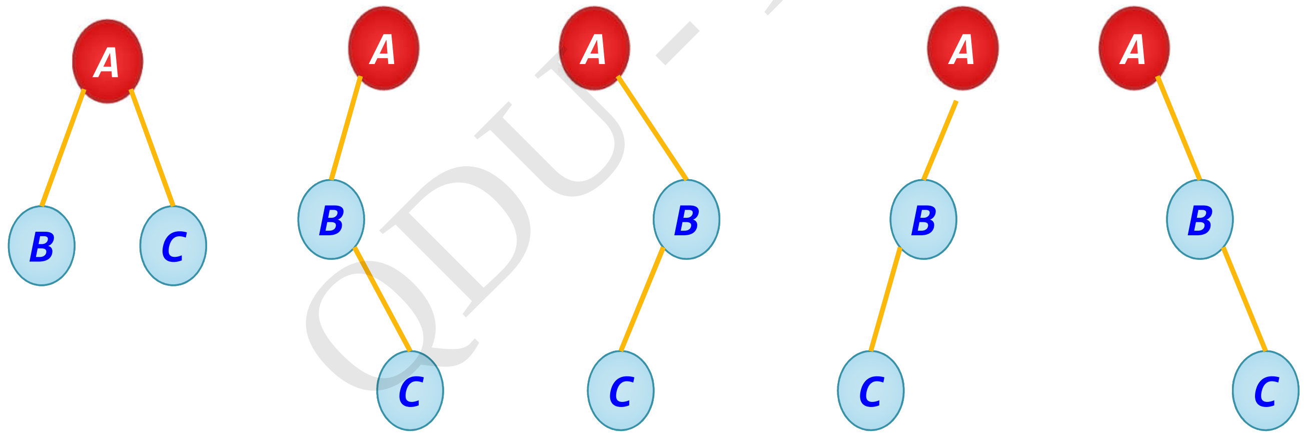
（c） 右子树为空的二叉树

（d） 左子树为空的二叉树

（e） 左、右子树非空的二叉树

【示例-1】给出由3个结点A、B和C构成的所有形态的二叉树（不考察结点值的差异）。

解：含有3个结点A、B和C的所有形态的二叉树：



6.2.2 二叉树性质

性质1

若二叉树的层次从 1 开始，则在二叉树的第 i 层最多有 2^{i-1} 个结点。(i≥1)

[证明用数学归纳法]

- $i = 1$时，根结点只有1个，$2^{1-1} = 2^0 = 1$；
- 若设 $i = k$ 时性质成立，即该层最多有 2^{k-1} 个结点，则当 $i = k+1$ 时，由于第 k 层每个结点最多可有 2 个子女，第 $k+1$ 层最多结点个数可有 $2*2^{k-1} = 2^k$ 个，故性质成立。

性质2

高度为 k 的二叉树最多有 2^k-1个结点。(h≥1)

[证明用求等比级数前k项和的公式]

高度为 k 的二叉树有 k 层，各层最多结点个数相加，得到等比级数，求和得：

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$$

- 空树的高度为 0，只有根结点的树的高度为 1。

性质3

对任何一棵二叉树, 如果其叶结点有 n_0 个, 度为2的非叶结点有 n_2 个，则有

$$n_0 = n_2 + 1$$

证明：

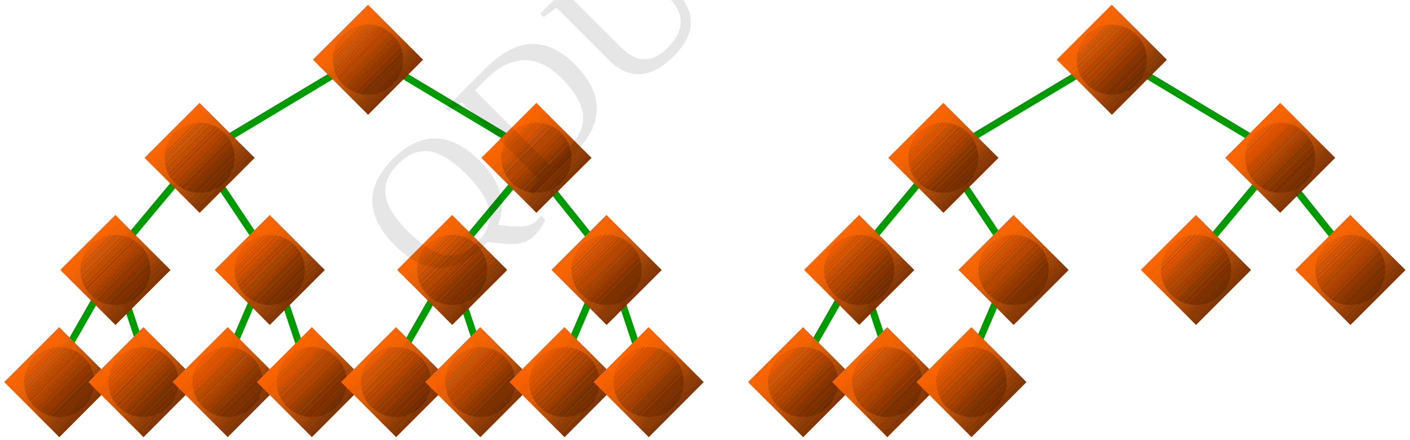
若设度为 1 的结点有 n_1 个，总结点个数为 n，总边数为 e，则根据二叉树的定义，

$$n = n_0+n_1+n_2 \qquad e = 2n_2+n_1 = n-1$$

因此，有 $2n_2+n_1 = n_0+n_1+n_2-1$

$$n_2 = n_0-1 \qquad n_0 = n_2+1$$

- **定义1** 满二叉树 (Full Binary Tree)
- **定义2** 完全二叉树 (Complete Binary Tree)
  - 若设二叉树的高度为 k，则共有 k 层。除第 k 层外，其它各层 (1～k-1) 的结点数都达到最大个数，第 k 层从右向左连续缺若干结点，这就是完全二叉树。



性质4

具有 n $(n \geqslant 0)$ 个结点的完全二叉树的高度为

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil$$

证明：设完全二叉树的高度为 h，则有

$$\underbrace{2^{h-1}-1}_{\text{上面}h-1\text{层结点数}} < n \leqslant \underbrace{2^{h}-1}_{\text{包括第}h\text{层的最大结点数}}$$

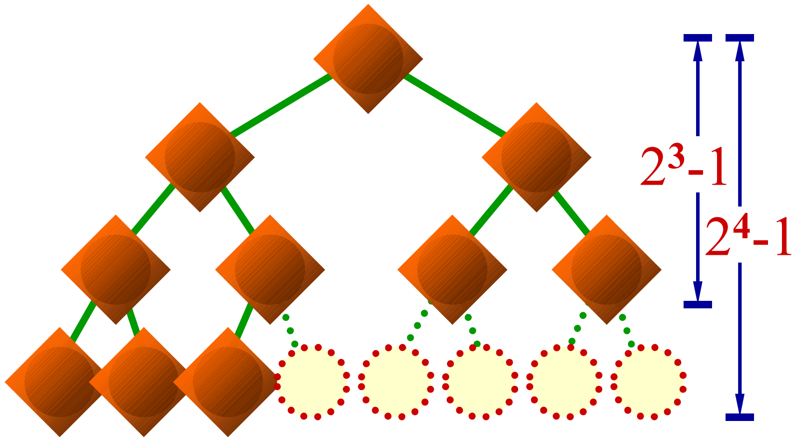
上面h-1层结点数　包括第h层的最大结点数

变形　$2^{h-1} < n+1 \leqslant 2^h$

取对数

$$h-1 < \log_2(n+1) \leqslant h$$

有　$h = \lceil \log_2(n+1) \rceil$



关于符号的说明

- $\lceil x \rceil$表示不小于x的最小整数；
- $\lfloor x \rfloor$表示不大于x的最大整数。

- 例如：
- $\lceil 3.1 \rceil = 4$、$\lceil 3.9 \rceil = 4$
- $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$、$\lfloor 3.9 \rfloor = 3$

- 求高度的另一公式为$\lfloor \log_2 n \rfloor+1$, 它的推导如下：

  由 $2^{h-1}-1<n \leqslant 2^h-1$

  得 $2^{h-1}-1 \leqslant n-1<2^h-1$

  即 $2^{h-1} \leqslant n<2^h$ 取对数，有 $h-1 \leqslant \log_2 n<h$

  最后得$h=\lfloor \log_2 n \rfloor+1$。

- 注意，此式对于 $n = 0$ 不适用。

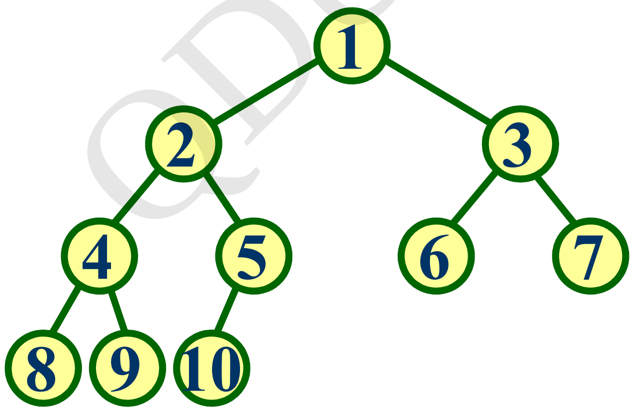
- 若设完全二叉树中叶结点有 n_0 个，则该二叉树总的结点数为 $n = 2n_0$，或 $n = 2n_0 - 1$。

- 若完全二叉树的结点数为奇数，没有度为1 的结点；为偶数，有一个度为1的结点。

性质5

如将一棵有 n 个结点的完全二叉树自顶向下，同一层自左向右连续给结点编号：1, 2, …, n，则有以下关系：

- 若 $i = 1$, 则 i 为树的根结点，无双亲；
  若 $i > 1$, 则 i 的双亲为 $\lfloor i/2 \rfloor$。
- 若 $2*i <= n$, 则 i 的左孩子为 $2*i$；否则没有左孩子。
- 若 $2*i+1 <= n$, 则 i 的右孩子为 $2*i+1$；否则没有右孩子。



【示例-2】 一棵二叉树中总结点个数为200，其中单分支结点个数为19，求其叶子结点个数。

解：n=200，n_1=19。又$n=n_0+n_1+n_2$，由性质3得，$n_2=n_0-1$，所以有：

$n=2n_0-1+n_1$，即$n_0=(n-n_1+1)/2=91$。所以这样的二叉树中叶子结点个数为91。

【示例-3】 一棵完全二叉树中总结点个数为200，求其叶子结点个数。

解：n=200，由于n为偶数，所以n_1=1。

又$n=n_0+n_1+n_2$，由性质1得，$n_2=n_0-1$，所以有：$n=2n_0-1+n_1$，$n_0=(n-n_1+1)/2=100$。这样的完全二叉树中叶子结点个数为100。

——END——