5.3.1 特殊矩阵的压缩存储

- 特殊矩阵是指非零元素或零元素的分布有一定规律的矩阵。

✓ 特殊矩阵的压缩存储主要是针对阶数很高的特殊矩阵，为节省存储空间，对可以不存储的元素，如零元素或对称元素，不再存储。

- 有三种特殊矩阵：
  - 对称矩阵
  - 三对角矩阵
  - *w* 对角矩阵

5.3.1.1 对称矩阵的压缩存储

- 设有一个 n×n 的矩阵 A。如果在矩阵中，$a_{ij} = a_{ji}$，则此矩阵是对称矩阵。
- 若只保存对称矩阵的对角线和对角线以上 (下) 的元素，则称此为对称矩阵的压缩存储。

$$A=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

- 若只存对角线及对角线以上的元素，称为上三角矩阵；
  若只存对角线或对角线以下的元素，称之为下三角矩阵。

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1}
\end{bmatrix}
$$

下三角矩阵

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n-1} \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1}
\end{bmatrix}
$$

上三角矩阵

- 把它们按行存放于一个一维数组 sa 中，称之为对称矩阵 A 的压缩存储方式。
- 数组 sa 共有 n+(n-1)+⋯+1 = n*(n+1)/2 个元素。

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,0} & a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵

	0	1	2	3	4	5	6	7	8		$n(n+1)/2-1$
sa	a_{00}	a_{10}	a_{11}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	……	$a_{n\text{-}1\,n\text{-}1}$

- 若 i≥j, 数组元素*a*[i][j]在数组sa中的存放位置为:

$$\underbrace{1+2+\cdots+i}_{\text{前i行元素总数}}+\underbrace{j}_{\text{第i行第j个元素前元素个数}}=(i+1)*i/2+j$$

前i 行元素总数 第 i 行第 j 个元素前元素个数

- 若 $i<j$，数组元素 A[i][j] 在矩阵的上三角部分，在数组 sa 中没有存放，可找它的对称元素 $A[j][i] = j*(j+1)/2+i$；
- 反过来，若已知某矩阵元素位于数组 sa 的第 k 个位置，可寻找满足

$$i(i+1)/2 \leqslant k < (i+1)*(i+2)/2$$

的 i, 此即为该元素的行号。

$$j = k - i*(i+1)/2$$

此即为该元素的列号。

- 例，当 $k=8$，$3*4/2 = 6 \leq k < 4*5/2 = 10$，取 $i=3$。则 $j = 8 - 3*4/2 = 2$。

➢ P95 (5-3)公式

三对角矩阵的压缩存储

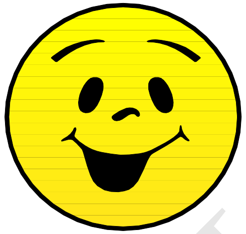
$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2n-3} & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	…		3(n-1)
sa	a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{n-1n-2}	a_{n-1n-1}

- 三对角矩阵中除主对角线及在主对角线上下最临近的两条对角线上的元素外，所有其它元素均为0。总共有$3n-2$个非零元素。
- 将三对角矩阵A中三条对角线上的元素按行存放在一维数组 sa 中，且a_{00}存放于sa[0]。
- 在三条对角线上的元素a_{ij}满足

$$0 \le i \le n-1,\quad i-1 \le j \le i+1$$

- 在一维数组 sa 中 A[*i*][*j*] 在第 *i* 行，它前面有 3**i*-1 个非零元素，在本行中第 *j* 列前面有 *j*-*i*+1 个，所以元素 A[*i*][*j*] 在 sa 中位置为 $k = 2*i + j$。



END