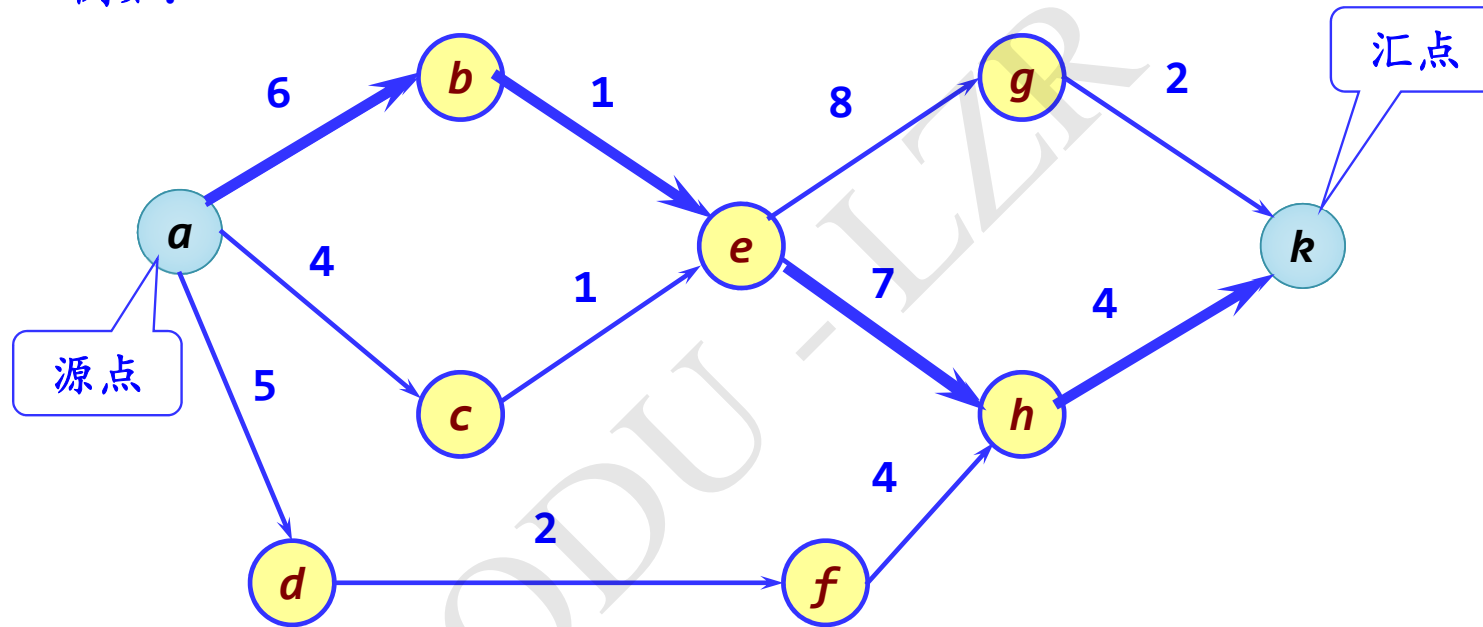


## 7.5.2 AOE网与关键路径

- 用带权有向图（DAG）描述工程的预计进度，以顶点表示事件，有向边表示活动，边弧上的权值 $w(a_i)$ 表示完成活动 $a_i$ 所需的时间（比如天数），或者说活动 $a_i$ 持续时间。
- 图中入度为0的顶点表示工程的开始事件（如开工仪式），称为源点；出度为0的顶点表示工程结束事件，称为汇点。则称这样的有向图为AOE网（Activity On Edge）。

- ◆ 整个工程完成的时间为：从有向图的源点到汇点的最长路径，具有最大长度的路径叫**关键路径**。

例如：



“关键活动”指的是：该边上的权值增加将使有向图上的最长路径的长度增加。

**注意：**在一个AOE网中，可以有不止一条的关键路径。

关键路径是由关键活动构成的。

求关键路径  求关键活动

下面介绍求关键活动的步骤。

## 事件的最早开始和最迟开始时间

(1) 事件 $v$ 的最早开始时间：规定源点事件的最早开始时间为0。

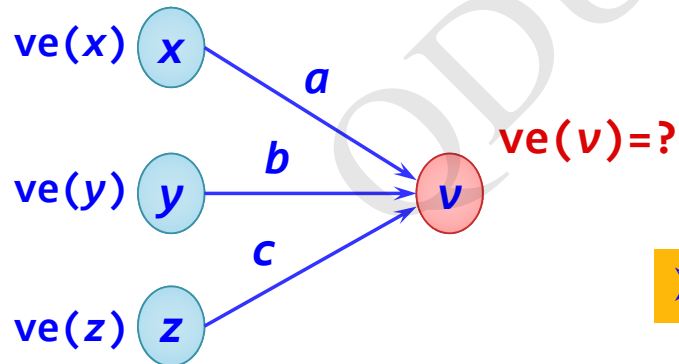
定义图中任一事件 $v$ 的最早开始时间 (early)  $ve(v)$  等于 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 到 $v$ 所有路径长度的最大值，即：它是从源点 $v_0$ 到顶点 $v$ 的最长路径长度。

$$ve(v)=0$$

当 $v$ 为源点时

$$ve(v)=\text{MAX}\{ve(x)+a, ve(y)+b, ve(z)+c\}$$

否则



➤ 从左向右推进计算

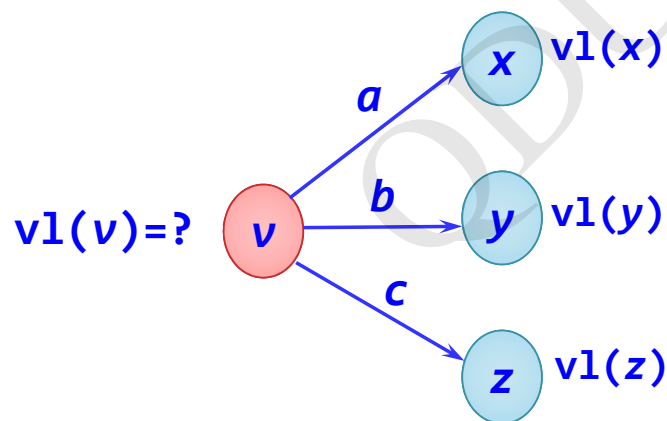
(2) 事件 $v$ 的最迟开始时间：定义在保证汇点 $v_{n-1}$ 在 $ve(n-1)$ 时刻完成的前提下，事件 $v$ 的允许的最迟开始时间，记作 $vl(v)$ 。 $vl(v)$ 的求解应从 $vl(n-1)=ve(n-1)$ 开始，反向递推。

$$vl(v)=ve(v)$$

当 $v$ 为汇点时

$$vl(v)=\text{MIN}\{vl(x)-a, vl(y)-b, vl(z)-c\}$$

否则

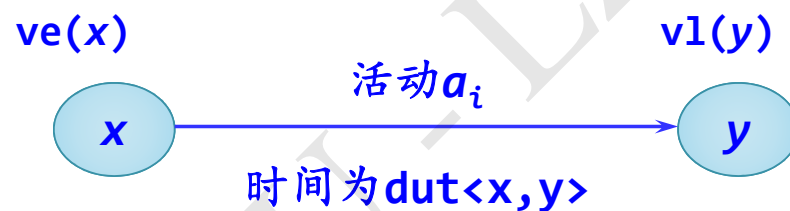


✓ 从右向左推进计算

## 活动的最早开始时间和最迟开始时间

(3) 活动 $a_i$ 的最早开始时间 $e(i)$ : 指该活动起点 $x$ 事件的最早开始时间, 即:

$$e(i) = ve(x)$$



(4) 活动 $a_i$ 的最迟开始时间 $l(i)$ : 指该活动终点 $y$ 事件的最迟开始时间与该活动所需时间之差, 即:

$$l(i) = vl(y) - dut<x,y>$$

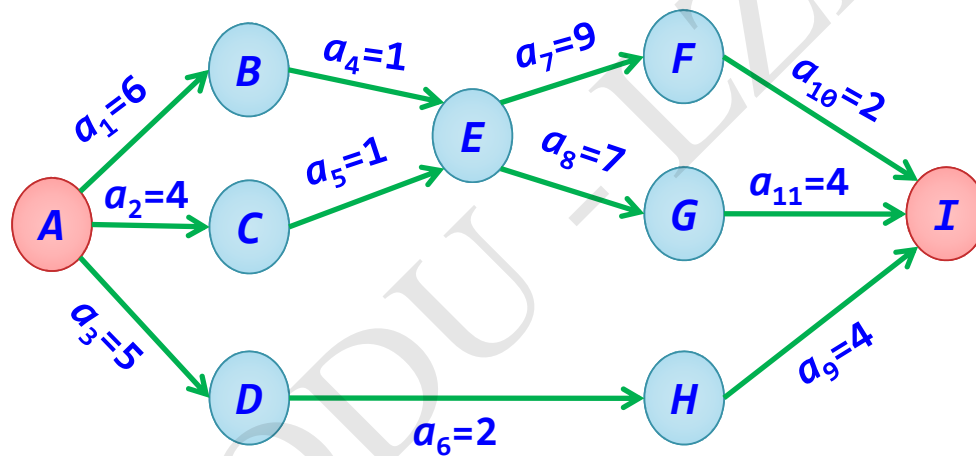
(5) 关键活动：对于每个活动 $a_i$ ，求出：

$$d(i)=l(i)-e(i)$$

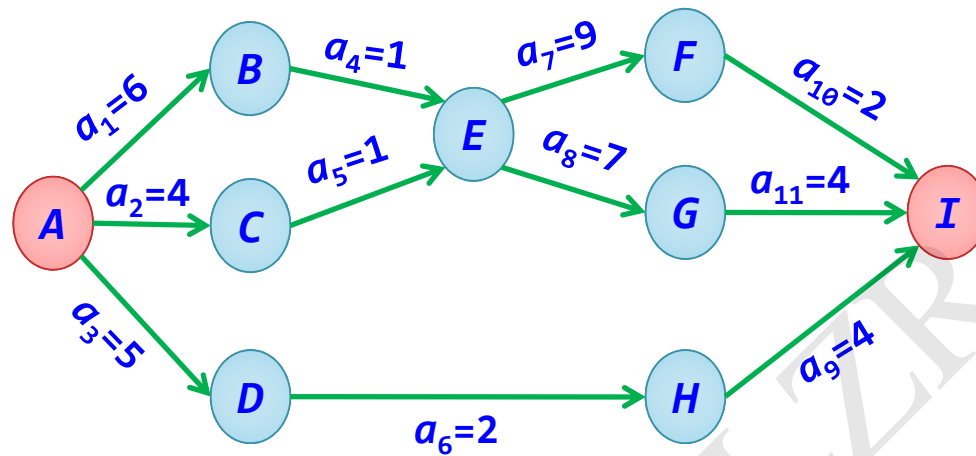
若 $d(i)$ 为0，则称活动 $a_i$ 为关键活动。

- 对关键活动来说，不存在富余时间。显然，关键路径上的活动都是关键活动。
- 找出关键活动的意义在于，可以适当地增加对关键活动的投资（人力、物力等），相应地减少对非关键活动的投资，从而减少关键活动的持续时间，缩短整个工程的工期。

【示例】求下图的关键路径。



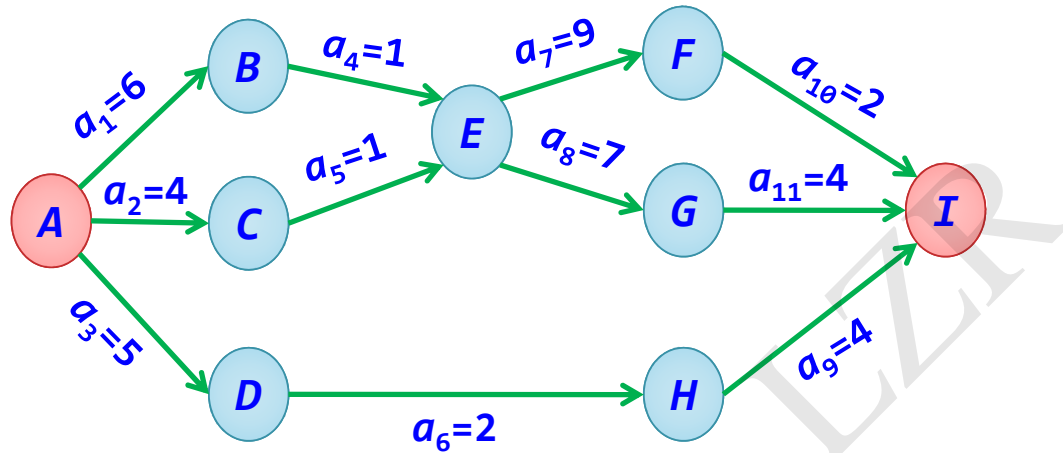




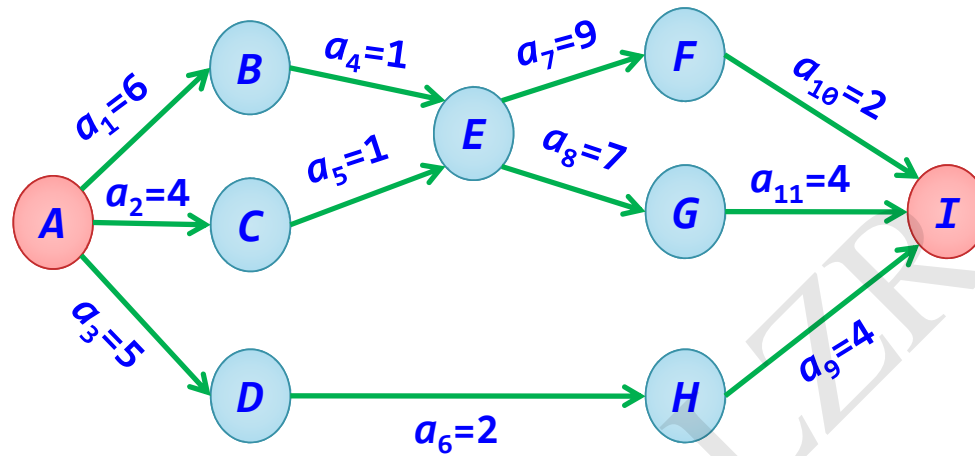
解：产生一个拓扑序列：**ABCDEFghi**。

按拓扑序列计算各事件的 $ve(v)$ 如下：

- $ve(A)=0$
- $ve(B)=ve(A)+w(a_1)=6$
- $ve(C)=ve(A)+w(a_2)=4$
- $ve(D)=ve(A)+w(a_3)=5$
- $ve(E)=\text{MAX}(ve(B)+w(a_4), ve(C)+w(a_5))=\text{MAX}\{7, 5\}=7$

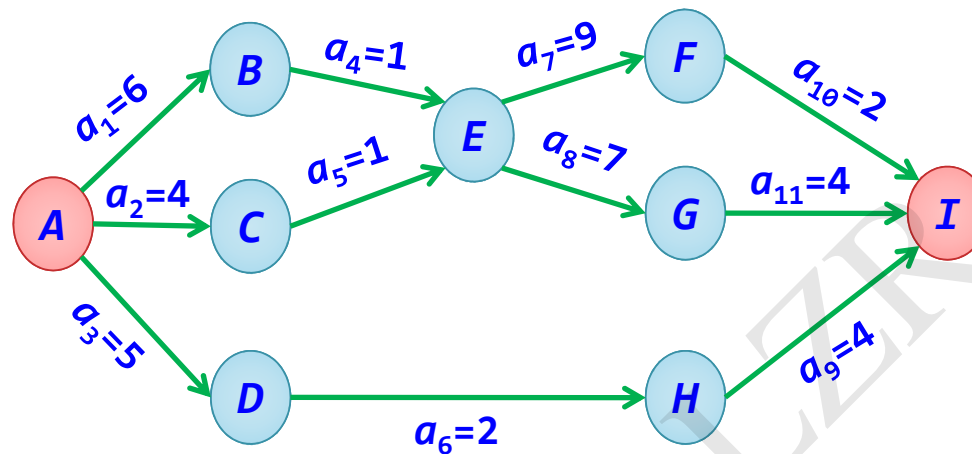


- $ve(F) = ve(E) + w(a_7) = 16$
- $ve(G) = ve(E) + w(a_8) = 14$
- $ve(H) = ve(D) + w(a_6) = 7$
- $ve(I) = \text{MAX}\{ve(F) + w(a_{10}), ve(G) + w(a_{11}), ve(H) + w(a_9)\}$   
 $= \text{MAX}(18, 18, 11) = 18$

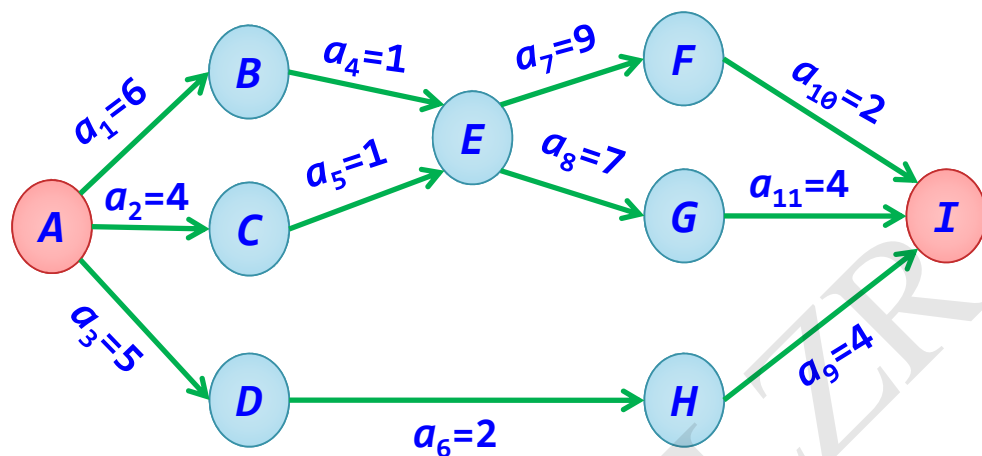


按拓扑序列 $ABCDEFGHI$ 的反序 $IHG FEDCBA$ 计算各事件的 $vl(v)$ 如下:

- $vl(I) = ve(I) = 18$
- $vl(F) = vl(I) - w(a_{10}) = 16$
- $vl(G) = vl(I) - w(a_{11}) = 14$
- $vl(H) = vl(I) - w(a_9) = 14$

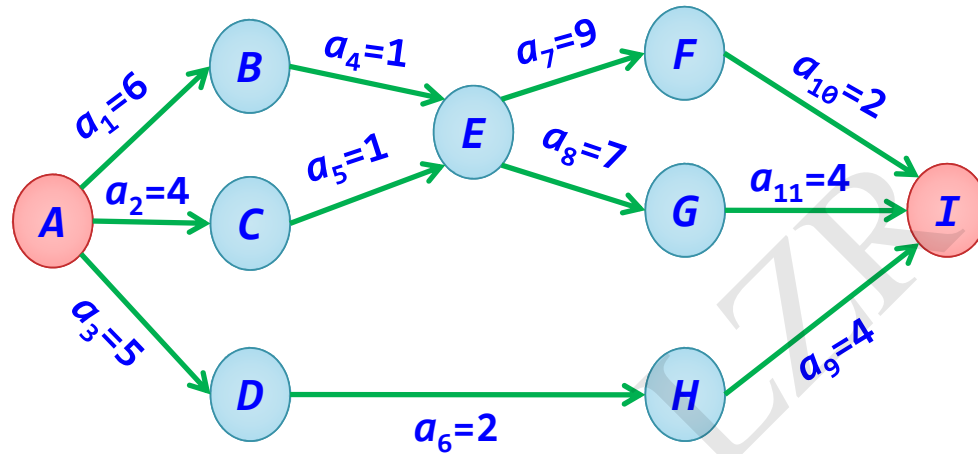


- $v_l(E) = \text{MIN}(v_l(F) - w(a_7), v_l(G) - w(a_8)) = \text{MIN}\{7, 7\} = 7$
- $v_l(D) = v_l(H) - w(a_6) = 12$
- $v_l(C) = v_l(E) - w(a_5) = 6$
- $v_l(B) = v_l(E) - w(a_4) = 6$
- $v_l(A) = \text{MIN}(v_l(B) - w(a_1), v_l(C) - w(a_2), v_l(D) - w(a_3))$   
 $= \text{MIN}\{0, 2, 7\} = 0$

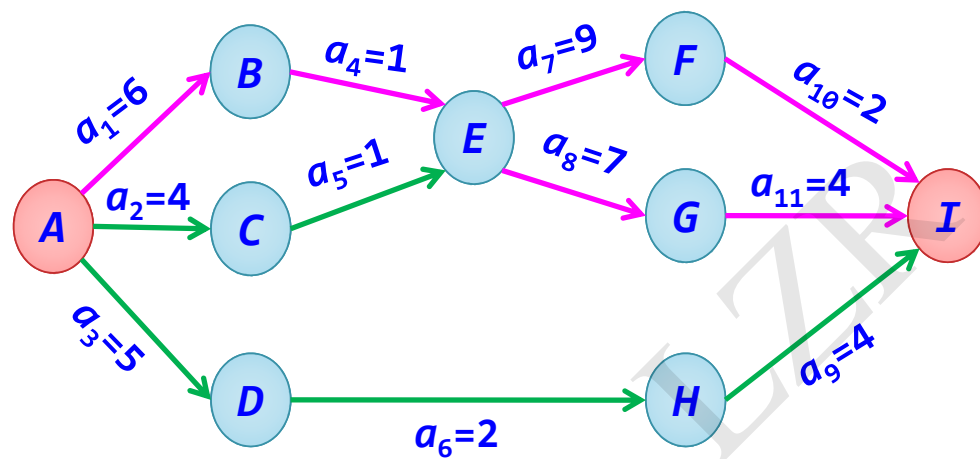


计算各活动的 $e(a)$ 、 $l(a)$ 和 $d(a)$ 如下：

- 活动 $a_1$ :  $e(a_1)=ve(A)=0$ ,  $l(a_1)=vl(B)-6=0$ ,  $d(a_1)=0$
- 活动 $a_2$ :  $e(a_2)=ve(A)=0$ ,  $l(a_2)=vl(C)-4=2$ ,  $d(a_2)=2$
- 活动 $a_3$ :  $e(a_3)=ve(A)=0$ ,  $l(a_3)=vl(D)-5=7$ ,  $d(a_3)=7$
- 活动 $a_4$ :  $e(a_4)=ve(B)=6$ ,  $l(a_4)=vl(E)-1=6$ ,  $d(a_4)=0$
- 活动 $a_5$ :  $e(a_5)=ve(C)=4$ ,  $l(a_5)=vl(E)-1=6$ ,  $d(a_5)=2$



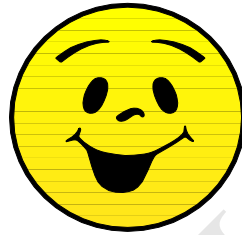
- 活动 $a_6$ :  $e(a_6)=ve(D)=5$ ,  $l(a_6)=vl(H)-2=12$ ,  $d(a_6)=7$
- 活动 $a_7$ :  $e(a_7)=ve(E)=7$ ,  $l(a_7)=vl(F)-9=7$ ,  $d(a_7)=0$
- 活动 $a_8$ :  $e(a_8)=ve(E)=7$ ,  $l(a_8)=vl(G)-7=7$ ,  $d(a_8)=0$
- 活动 $a_9$ :  $e(a_9)=ve(H)=7$ ,  $l(a_9)=vl(I)-4=10$ ,  $d(a_9)=3$
- 活动 $a_{10}$ :  $e(a_{10})=ve(F)=16$ ,  $l(a_{10})=vl(I)-2=16$ ,  $d(a_{10})=0$
- 活动 $a_{11}$ :  $e(a_{11})=ve(G)=14$ ,  $l(a_{11})=vl(I)-4=14$ ,  $d(a_{11})=0$



由此可知，关键活动有 $a_{11}$ 、 $a_{10}$ 、 $a_8$ 、 $a_7$ 、 $a_4$ 、 $a_1$ ，因此关键路径有两条：

**A—B—E—F—I**

**A—B—E—G—I**



— END —