Thema unserer Präsentation - Lineare Gleichungen (LG), Systemen und deren Lösung. In dieser Präsentation werden wir versuchen, alles zu erklären: von den Grundlagen bis zu komplexen Konzepten. Dabei könnten Fragen auftauchen. Haben Sie bitte Geduld und warten Sie das Ende der Präsentation ab. Wir werden diese gerne am Ende beantworten.

Bevor wir Ihnen von den Arten der LG, der Darstellung von Gleichungssystemen und vor allem ihrer Lösung erzählen, möchten wir uns der Bedeutung der LG und ihrem Anwendungsbereich widmen.

**Wofür sind LG notwendig?**

In der Mathematik werden LG hauptsächlich in der linearen Algebra und analytischen Geometrie verwendet. Dies klingt nicht besonders spannend, es sei denn, man ist Mathematiker.

Jedoch haben Systeme von LG viele praktische Anwendungen in anderen Bereichen. Beispielsweise verwenden Ökonomen sie zur Modellierung von Marktprozessen; Ingenieure nutzen sie für das Design und die Analyse komplexer Systeme; Physiker verwenden sie zur Berechnung von Bewegungstrajektorien. Selbst in einem nicht-technischen Bereich wie der Soziologie werden LG zur Analyse verschiedener sozialer Interaktionen eingesetzt. Insgesamt ermöglichen Gleichungssysteme die Modellierung komplexer Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Parametern eines Systems, sodass Ergebnisse basierend auf den vorhandenen Eingabedaten vorhergesagt werden können.

**Geschichte der LG.**

Das idee, Ergebnisse basierend auf Eingabedaten vorherzusagen, hat die Menschheit schon lange beschäftigt. Bereits im alten Ägypten und Babylon wurde daran gearbeitet. Die ersten Beispiele für die Nutzung linearer Gleichungen wurden im „Rhind-Papyrus“ (um 1650 v. Chr.) und in babylonischen Keilschrifttafeln gefunden. Damals wurden LG erstmals zur Lösung praktischer Probleme wie der Verteilung von Getreide verwendet.

Seitdem sind LG und später ihre Systeme ständige Begleiter des menschlichen Fortschritts geworden.

* In der Antike untersuchte Diophant von Alexandria (3. Jh. n. Chr.) in seiner Arbeit „Arithmetica“ Gleichungen und entwickelte Methoden zu deren Lösung.
* Im Mittelalter systematisierte Al-Chwarizmi (780–850 n. Chr.) die Lösungen linearer und quadratischer Gleichungen in seinem Buch „Das Kompendium der Berechnung durch Ergänzen und Ausgleichen“, das die Grundlage der modernen Algebra bildet.
* In der Renaissance führte François Viète (16. Jh.) die symbolische Darstellung von Gleichungen ein, was deren Aufzeichnung und Lösung erleichterte.
* Im 17. Jahrhundert führte René Descartes das Koordinatensystem ein, was es ermöglichte, Gleichungen grafisch darzustellen.
* Im 19. Jahrhundert verbesserte Carl Friedrich Gauß die Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen.

**Was ist eine lineare Gleichung?**

Eine Gleichung ist eines der grundlegenden mathematischen Konzepte, die wir seit der Grundschule kennen. Eine Gleichung ist eine Gleichheit, die einen unbekannten Wert, die sogenannte Variable, enthält. x + 2 = 4 ist ein Beispiel für eine einfache Gleichung. Ein weiteres Beispiel ist 2x - y = z. Was haben diese Gleichungen gemeinsam, abgesehen davon, dass jede von ihnen aus einzelnen Teilen - Termen - besteht (x, 2, 4 sind die Terme der ersten Gleichung und 2x, y, z sind die Terme der zweiten)?

* Alle Variable haben Exponent nicht höher als 1.
* Zweitens gibt es zwei Variablen.
* Variable werden nicht miteinander multipliziert.

Diese drei Eigenschaften machen eine Gleichung zweidimensional und linear.

**Definition**

Mathematisch ausgedrückt können wir folgende Definition geben: Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung ersten Grades, bei der alle Variablen linear in die Gleichung eingehen. Eine Gleichung ersten Grades bedeutet, dass alle Variablen Exponenten nicht höher als 1 haben. Die Variablen linear eingehen bedeutet, dass Variablen nicht miteinander multipliziert werden.

Die allgemeine Form einer zweidimensionalen linearen Gleichung sieht folgendermaßen aus:

ax + by = c

Beachten Sie, dass wir bisher nur von linearen Gleichungen im zweidimensionalen Raum (in der Ebene) sprechen. Diese allgemeine Form der linearen Gleichung ist für den zweidimensionalen Raum charakteristisch.

**Visualisierung einer LG**

Wie sieht diese Gleichung aus? Glücklicherweise können wir sie leicht visualisieren. Eine lineare Gleichung beschreibt eine gerade Linie in einer zweidimensionalen Ebene. Übrigens wird sie deshalb als linear bezeichnet. In unserer Darstellung sind a, b und c Koeffizienten; x und y sind Variablen.

* Die Koeffizienten a, b, c bestimmen die Neigung und Verschiebung der durch die lineare Gleichung beschriebenen Linie.
* Die Variablen x und y sind Paare unbekannter Werte, die wir im Lösungsprozess der Gleichung finden.

**Systeme linearer Gleichungen**

Jetzt, da wir verstanden haben, was lineare Gleichungen sind, ist es an der Zeit, über Systeme linearer Gleichungen zu sprechen. Im Wesentlichen ist ein System linearer Gleichungen nichts anderes als eine Menge von zwei oder mehr linearen Gleichungen, die nur gemeinsame Variablen enthalten. Eine Lösung des Systems linearer Gleichungen bedeutet, die Werte der Variablen zu finden, die alle in das System einbezogenen Gleichungen erfüllen. Ein und dasselbe System kann unterschiedlich aussehen:

* Normale Form
* Matrixschreibweise
* Vektorformschreibweise

Die Darstellungsform hat keinen Einfluss auf den Inhalt - es ist immer noch dasselbe System linearer Gleichungen.

Nehmen wir als Beispiel dieses System linearer Gleichungen. Es hat nur eine Variable und kann einfach durch Ausprobieren verschiedener Werte gelöst werden. Was ist mit diesem System? Es sieht schon schwieriger aus und kann nicht einfach durch Ausprobieren gelöst werden. In der Mathematik gibt es mehrere Methoden zur Lösung solcher Systeme linearer Gleichungen:

* Eliminationsmethode
* Einsetzungsverfahren
* Graphisches Verfahren
* Gaußsches Eliminationsverfahren

**Methoden zur Lösung von LG-Systemen**

Lassen Sie uns jede Methode der Reihe nach durchgehen:

**Eliminationsmethode**

Die Idee dieser Methode besteht darin, durch Addition oder Subtraktion von Gleichungen des Systems eine Variable zu eliminieren, um das System linearer Gleichungen zu vereinfachen. Lassen Sie uns dies in der Praxis versuchen:

**Einsetzungsverfahren**

Bei dieser Methode wird eine der Gleichungen des Systems nach einer Variablen aufgelöst und der erhaltene Wert in die andere Gleichung eingesetzt. Versuchen wir, unser System linearer Gleichungen auf diese Weise zu lösen:

**Graphisches Verfahren**

Die Methode besteht darin, die Graphen aller Gleichungen des Systems in einem Koordinatensystem zu zeichnen. Die Lösung des Systems linearer Gleichungen ist der Schnittpunkt dieser Graphen. Es ist wichtig zu beachten, dass die grafische Darstellung des Systems linearer Gleichungen zwei besondere Fälle anschaulich zeigt:

* Parallele Graphen: In diesem Fall hat das System linearer Gleichungen keine Lösung.
* Identische Graphen: In diesem Fall hat das System linearer Gleichungen unendlich viele Lösungen.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Diese Methode besteht darin, das System linearer Gleichungen in eine Stufenform zu bringen - eine Matrix, deren linker unterer Teil Nullen enthält. Dies wird durch elementare Operationen erreicht. Klingt verwirrend? Keine Sorge - ich werde es erklären. Tatsächlich erfordert diese Methode im Gegensatz zu der vorherigen Kenntnis der grundlegenden Konzepte der linearen Algebra, die in den höheren Klassen der Schule gelenrt werden. Diese Methode eignet sich besonders gut zur Lösung von dreidimensionalen und mehrdimensionalen Systemen linearer Gleichungen. Schauen wir uns die Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit dieser Methode an. Dabei werde ich alle notwendigen Begriffe und Operationen erklären.

Erstens müssen wir die „erweiterte Matrix“ des Systems aufstellen. Diese Matrix ist eigentlich eine Tabelle, die alle Koeffizienten des Gleichungssystems enthält. Dann bringen wir diese Matrix durch drei elementare Operationen in Stufenform:

* Zeilenvertauschung: Zwei Zeilen in der Matrix tauschen.
* Zeilenmultiplikation mit einer Zahl: Alle Elemente einer Zeile mit einer Zahl multiplizieren (diese Zahl heißt Skalar).
* Zeilenaddition.

Dadurch bringen wir die Matrix in Stufenform.