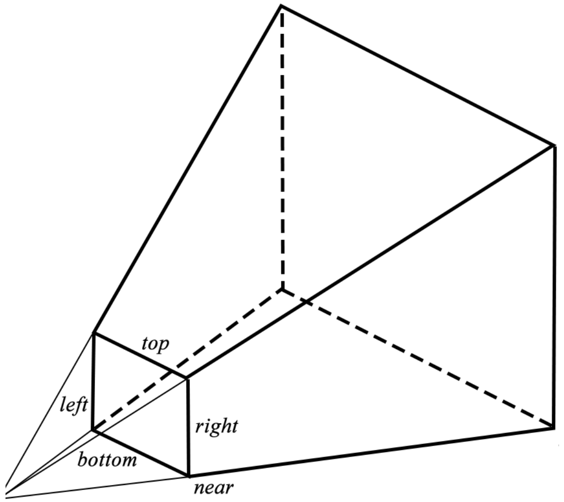
مبانی جبر خطی

هادی عاشری

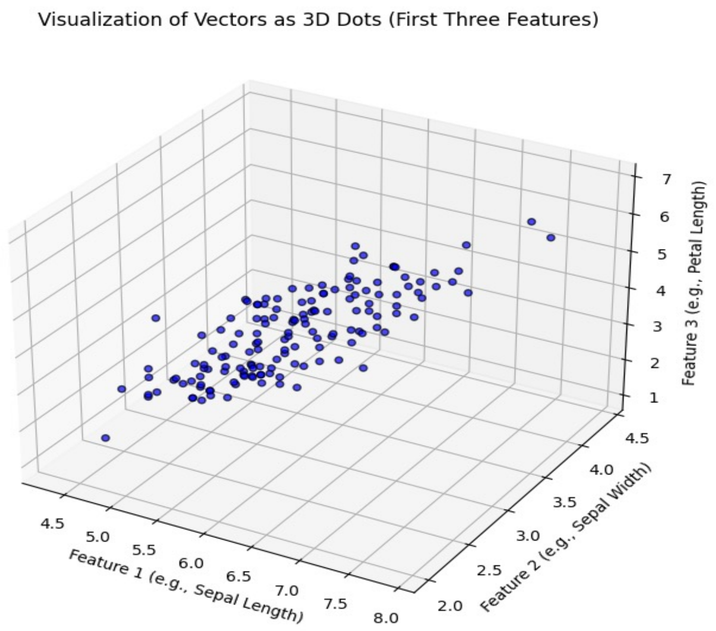


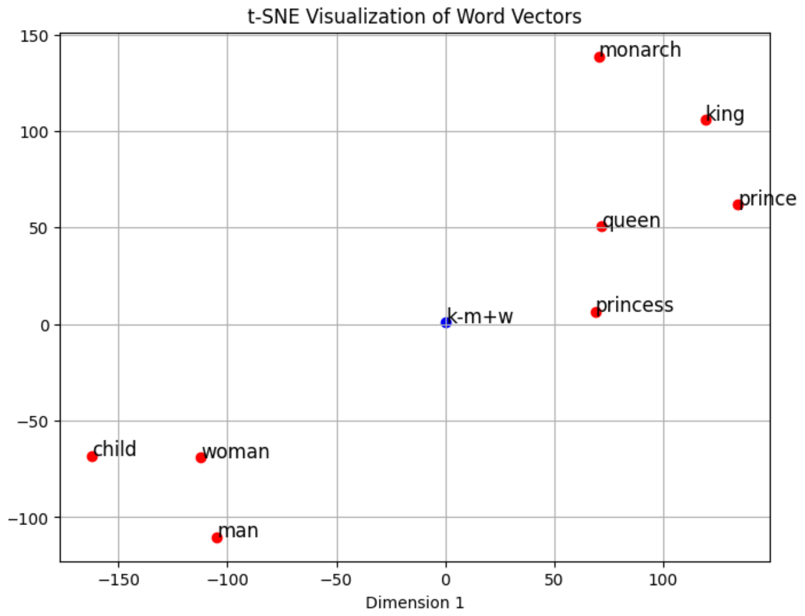
مقدمه

- جبر خطی یکی از پایه‌های اساسی در یادگیری ماشین و یادگیری عمیق است و کاربردهای گسترده‌ای دارد:
  - نمایش داده‌ها به‌صورت بردار، ماتریس، تنسور
  - عملیات شبکه‌های عصبی با استفاده از تبدیل‌های خطی
  - روش‌هایی مانند تجزیه مقادیر منفرد و تجزیه مقادیر ویژه برای کاهش ابعاد داده‌ها و انتخاب ویژگی‌ها بر پایه جبر خطی کار می‌کنند.
  - الگوریتم‌های بهینه‌سازی مانند روش گرادیان نزولی برای تنظیم وزن‌ها از جبر خطی بهره می‌برند.
  - تبدیل‌های ماتریسی مانند تبدیل فوریه برای فشرده‌سازی و تحلیل داده‌های تصویری استفاده می‌شوند.

Iran Annual AI Award

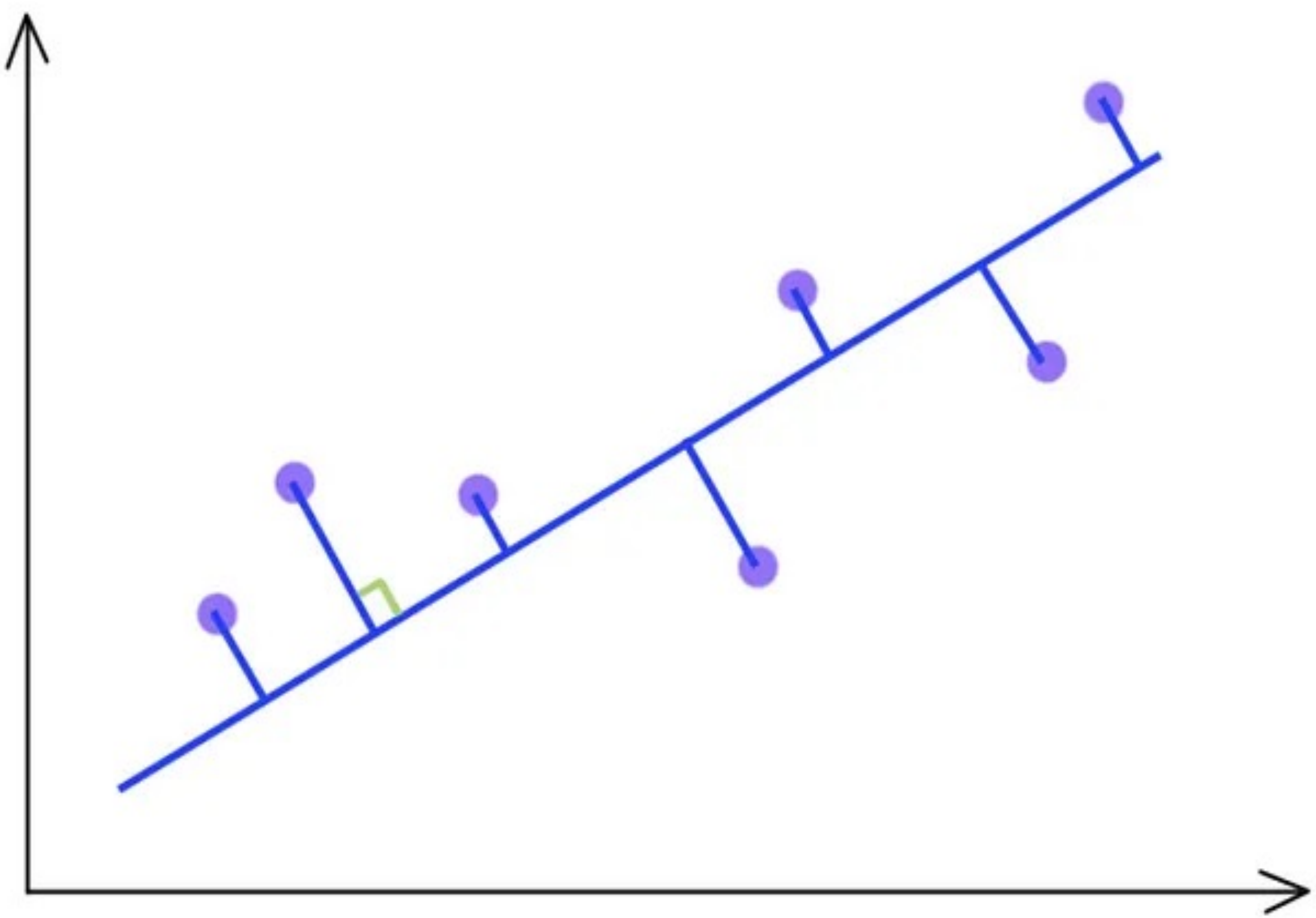
جبر خطی: نمایش داده‌ها به‌صورت بردار





Iran Annual AI Award

تجزیه مقادیر ویژه برای کاهش بعد

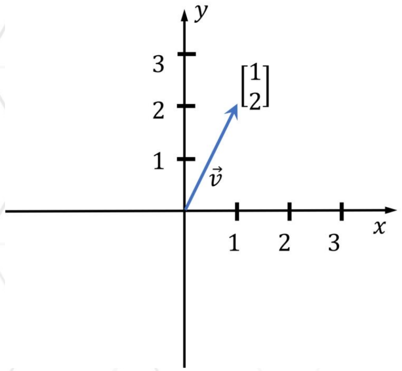


Iran Annual AI Award

بردارها

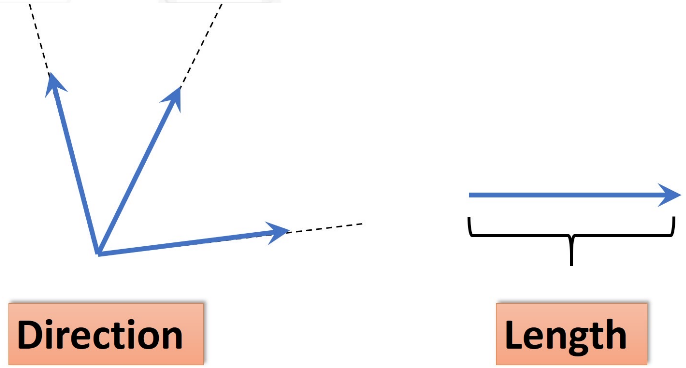
تعریف:

- بردار یک موجودیت ریاضی است.
- معمولاً به صورت آرایه‌ای از اعداد به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

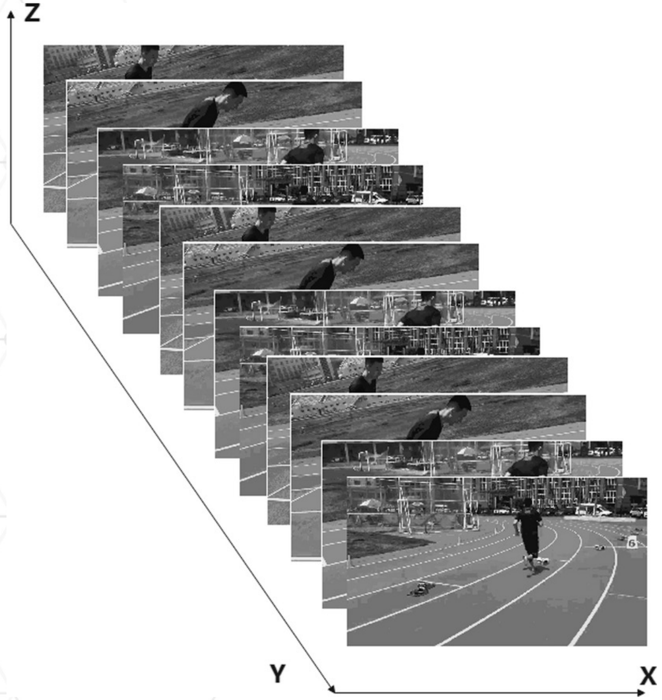


$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- بردار دارای جهت و اندازه است.



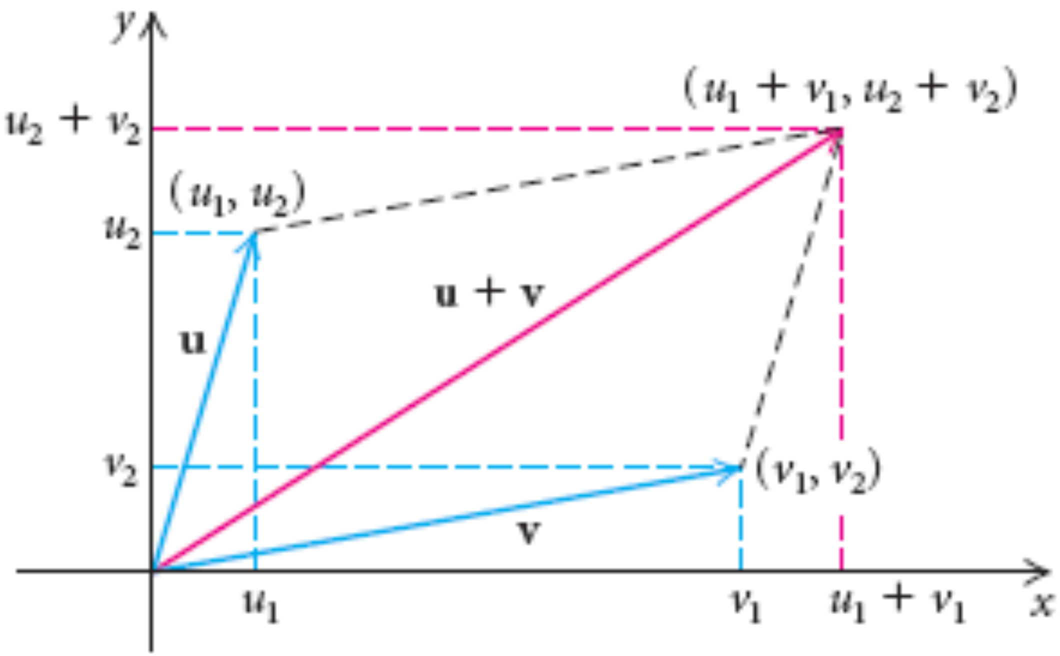
بازنمایی ویدیو



- در بینایی ماشین، یک ویدیوی HD سیاه‌سفید یک ثانیه‌ای با نرخ فریم ۳۰ به‌عنوان دنباله‌ای ۳۰ تایی از بردارهای دوبعدی/ با ابعاد ۱۲۸۰ × ۷۲۰ (یک ماتریس سه بعدی) بازنمایی شود.

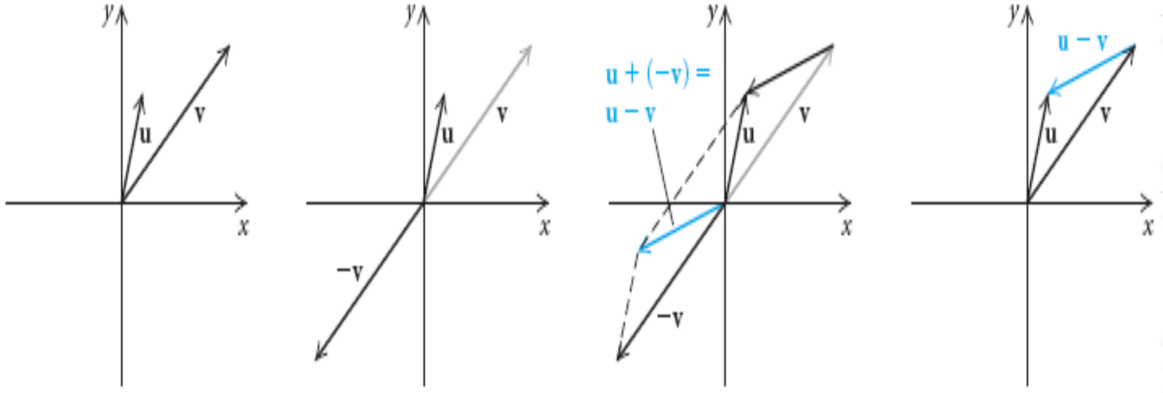
عملیات جبری: جمع بردارها

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}= \ [u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n]$$



عملیات جبری: تفریق بردارها

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n]$$

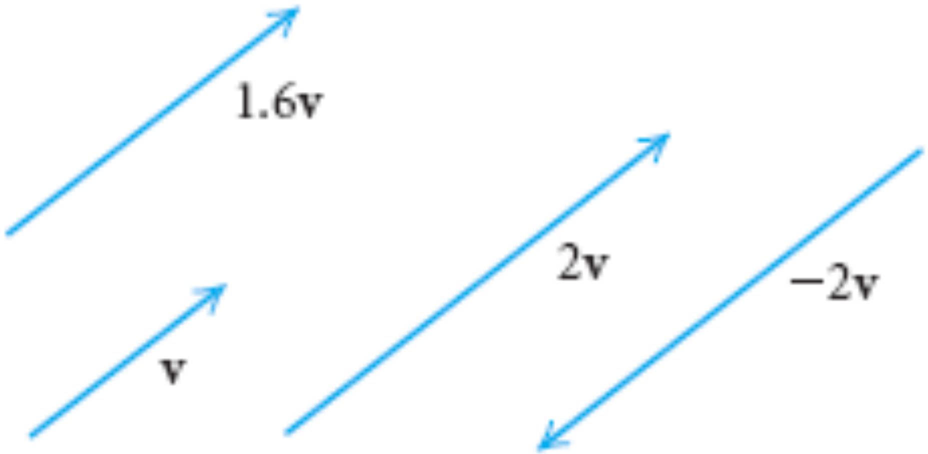


Sketch **u** and **v**. Sketch −**v**. Sketch **u** + (−**v**), or **u** − **v**, using the parallelogram law. **u** − **v** is the vector from the terminal point of **v** to the terminal point of **u**.

Iran Annual AI Award

عملیات جبری: ضرب اسکالر

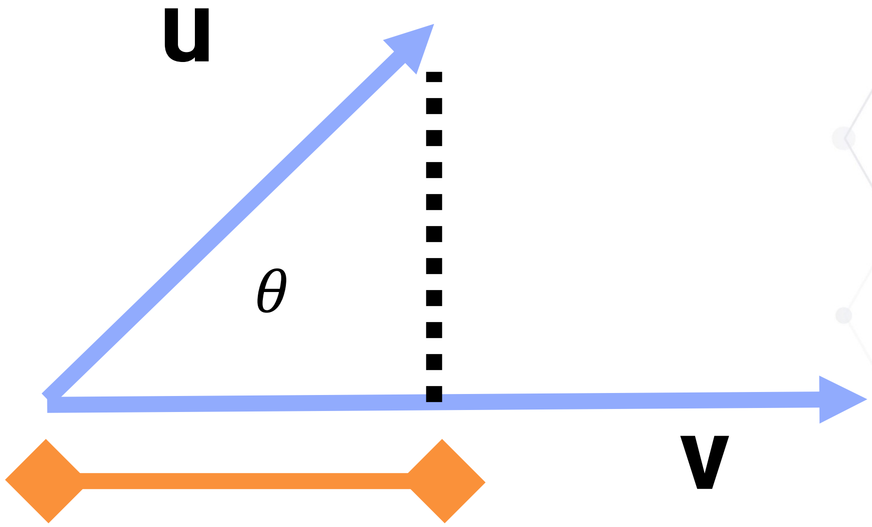
$$c\boldsymbol{v} = [cv_1, cv_2, \dots, cv_n]$$



Iran Annual AI Award

عملیات جبری: ضرب داخلی

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ \dots + u_nv_n = \|\boldsymbol{v}\|\|\mathbf{u}\|\cos\theta$$



سنجش مشابهت بردارها

- می‌توان از ضرب داخلی برای تعیین میزان مشابهت بین دو بردار ویژگی استفاده کرد.

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

- تشابه کسینوسی:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Iran Annual AI Award

شهود ضرب داخلی

- ضرب داخلی یعنی اندازه‌ی هم‌جهتی دو بردار.
- اگر بردارها کاملاً هم‌جهت باشند، ضرب داخلی‌شان بیشترین مقدار ممکن است.
- اگر کاملاً عمود باشند، ضرب داخلی‌شان صفر است (چون هیچ هم‌جهتی ندارند).
- اگر خلاف جهت باشند، ضرب داخلی‌شان منفی می‌شود (یعنی در جهت مخالف هم‌اند)

ماتریس‌ها

- ماتریس یک آرایه دوبعدی از اعداد است که در سطرها و ستون‌ها سازماندهی شده است.
- معمولاً به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- در یادگیری ماشین می‌توان یک داده را با یک بردار ویژگی و مجموعه‌ای از داده‌ها را با یک ماتریس نیز نمایش داد.
- تنسور تعمیم‌یافته‌ی ماتریس به بیش از دو بُعد یعنی یک آرایه چند بعدی است.

Iran Annual AI Award

فضای برداری

- یک فضای برداری (Vector Space) مجموعه‌ای از بردارها/اشیاء است که دو عمل جمع برداری و ضرب عددی (ضرب اسکالر) بر روی آن‌ها تعریف شده و مجموعه‌ای از اصول (آکسیوم‌ها) را برآورده می‌کند:
  - بسته بودن نسبت به جمع: اگر u و v بردارهای فضای برداری باشند:

    آنگاه $u + v$ نیز باید در فضای برداری وجود داشته باشد.
  - بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر: برای هر بردار u و هر عدد حقیقی c، بردار cu نیز در فضای برداری وجود دارد.
  - وجود بردار صفر: برداری که با هر برداری جمع شود همان بردار را به دست می‌دهد.
  - وجود معکوس جمعی: برای هر بردار u، قاعده $u + (-u) = 0$ برقرار است.

فضای برداری: مثال‌ها

- فضای $\mathbb{R}^n$ مجموعه تمام بردارهای با n مولفه حقیقی
- مجموعه تمام چندجمله‌ای‌ها با درجه کمتر یا مساوی n
- فضای ویژگی در یادگیری ماشین
- تصاویر دیجیتال که به صورت ماتریس‌های پیکسلی نمایش داده می‌شوند می‌توانند به تنسور تبدیل شوند.
- تبدیل کلمات به بردار و ایجاد فضای برداری کلمات با استفاده از الگوریتم‌هایی مانند GloVe، Word2Vec یا FastText

Iran Annual AI Award

عملیات روی ماتریس‌ها

- جمع ماتریسی به‌صورت درایه به درایه انجام می‌شود:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- ضرب ماتریسی با ضرب سطرهای ماتریس اول در ستون‌های ماتریس دوم:

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

- برای حل سیستم‌های معادلات خطی می‌توان از این مفاهیم استفاده کرد.

iAAA
Iran Annual AI Award

تبدیل‌های خطی

- تبدیل خطی مثل یک «ماشین تغییر شکل» است که روی بردارها عمل می‌کند.
- هر برداری که وارد آن شود، خروجی قابل پیش‌بینی و منظم است. هیچ پیچیدگی غیرخطی یا اعوجاجی ندارد.
- بردار ورودی چرخش داده می‌شود، کشیده یا فشرده می‌شود، بازتاب می‌شود.
- اگر دو بردار در ورودی هم‌راستا باشند، در خروجی هم هم‌راستا می‌مانند.
- خط‌ها، صفحه‌ها و نسبت‌ها حفظ می‌شوند.

Iran Annual AI Award

تبدیل‌های خطی

- تبدیل خطی T باید دو شرط را رعایت کند:
  - جمع‌پذیری:

$$\mathrm{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$$

  - ضرب‌پذیری با عدد اسکالر:

$$\mathrm{T}(c.\boldsymbol{u})=c.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$$

- اگر بردارهای ورودی را ترکیب کنیم، تبدیل خطـی همـان ترکیـب را روی خروجی‌ها اعمال می‌کند.

$$\mathrm{T}(a.\boldsymbol{u}+b.\boldsymbol{v})=a.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})+b.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$$

Iran Annual AI Award

تبدیل‌های خطی

- هر تبدیل خطی در فضای برداری می‌تواند به‌وسیله یک ماتریس نشان داده شود که بردار ورودی را به بردار خروجی نگاشت می‌کند:

$$y = Ax$$

- حفظ جمع

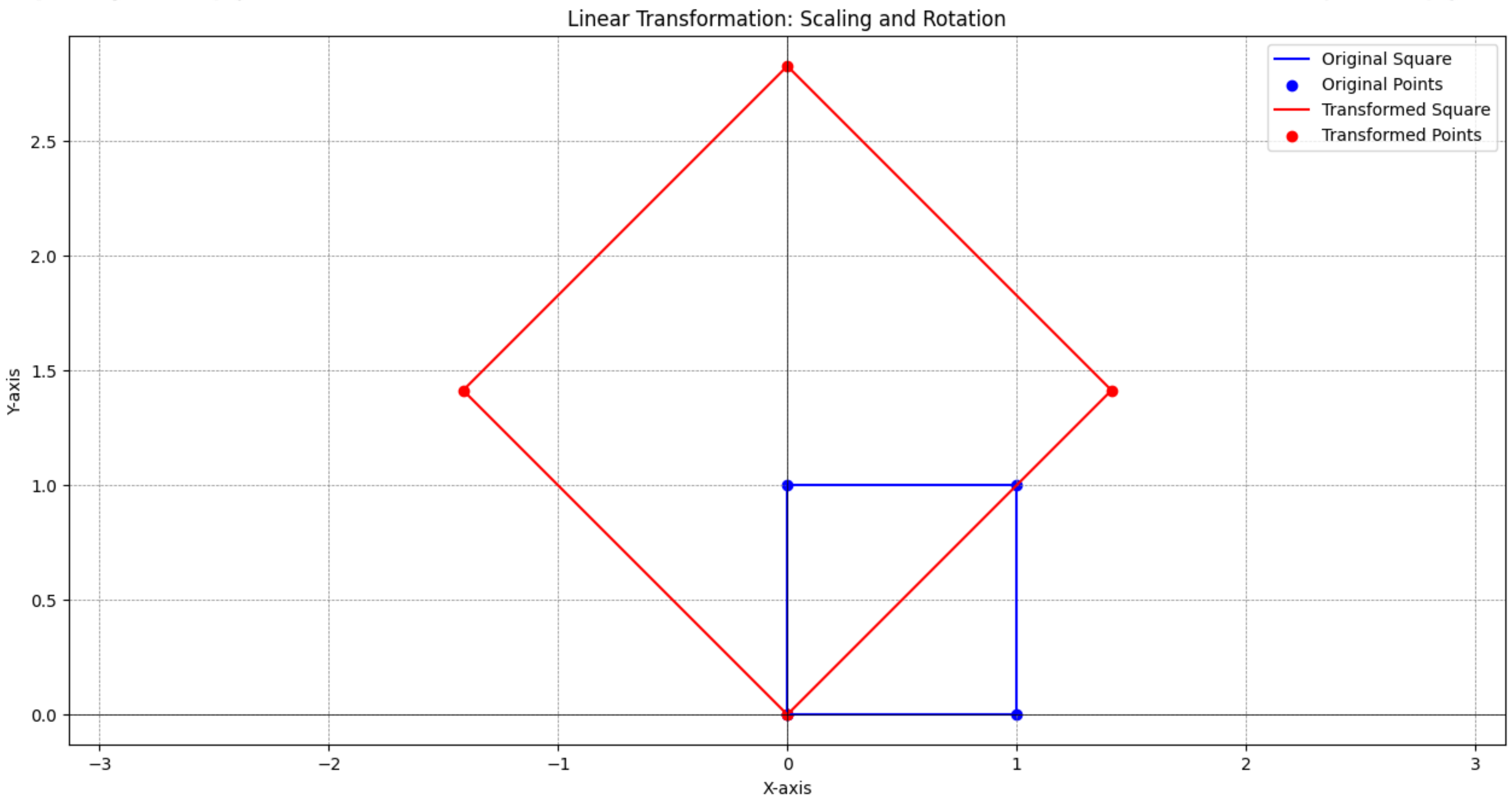
$$A(u + v) = Au + Av$$

- حفظ ضرب اسکالر

$$A(cv) = cAv$$

- استفاده از ماتریس‌های چرخش برای تغییر جهت داده‌ها هنگام پیش‌پردازش.
- انجام نرمال‌سازی یا استانداردسازی با ماتریس‌های مخصوص.

تصویر تبدیل خطی



Iran Annual AI Award

رتبه ماتریس/تبدیل خطی

- رتبه مثل «میزان استقلال اطلاعات» در یک ماتریس یا تبدیل خطی است.
- در نظر بگیرید هر ستون ماتریس یک بردار در فضاست.
- اگر هر یک از بردارهای ستونی جهت متفاوتی داشته باشند و هیچ‌کدام ترکیب خطی دیگری نباشند، یعنی اطلاعات جدیدی دارند.
  - اگر همه بردارها روی یک راستا/خط باشن ← رتبه 1
  - اگر روی یک صفحه باشن ولی نه روی یک خط ← رتبه 2
  - اگر فضا را پر کند (در فضای n بعدی) ← رتبه n
- رتبه می‌گوید «چند جهت مستقل» در ماتریس وجود دارد. بعبارت دیگر، رتبه تبدیل خطی برابر است با بعد تصویر تبدیل.

Iran Annual AI Award

ماتریس رتبه کامل

- رتبه یک ماتریس به تعداد ستون‌های مستقل خطی یا سطرهای مستقل خطی آن اشاره دارد.
- یعنی رتبه، بعد فضای برداری‌ای است که توسط ستون‌ها یا سطرهای ماتریس ساخته می‌شود.
- رتبه تعداد بُعدها یا اطلاعات منحصربه‌فردی است که ماتریس دارد.
- یک ماتریس مربعی رتبه کامل، معکوس‌پذیر است

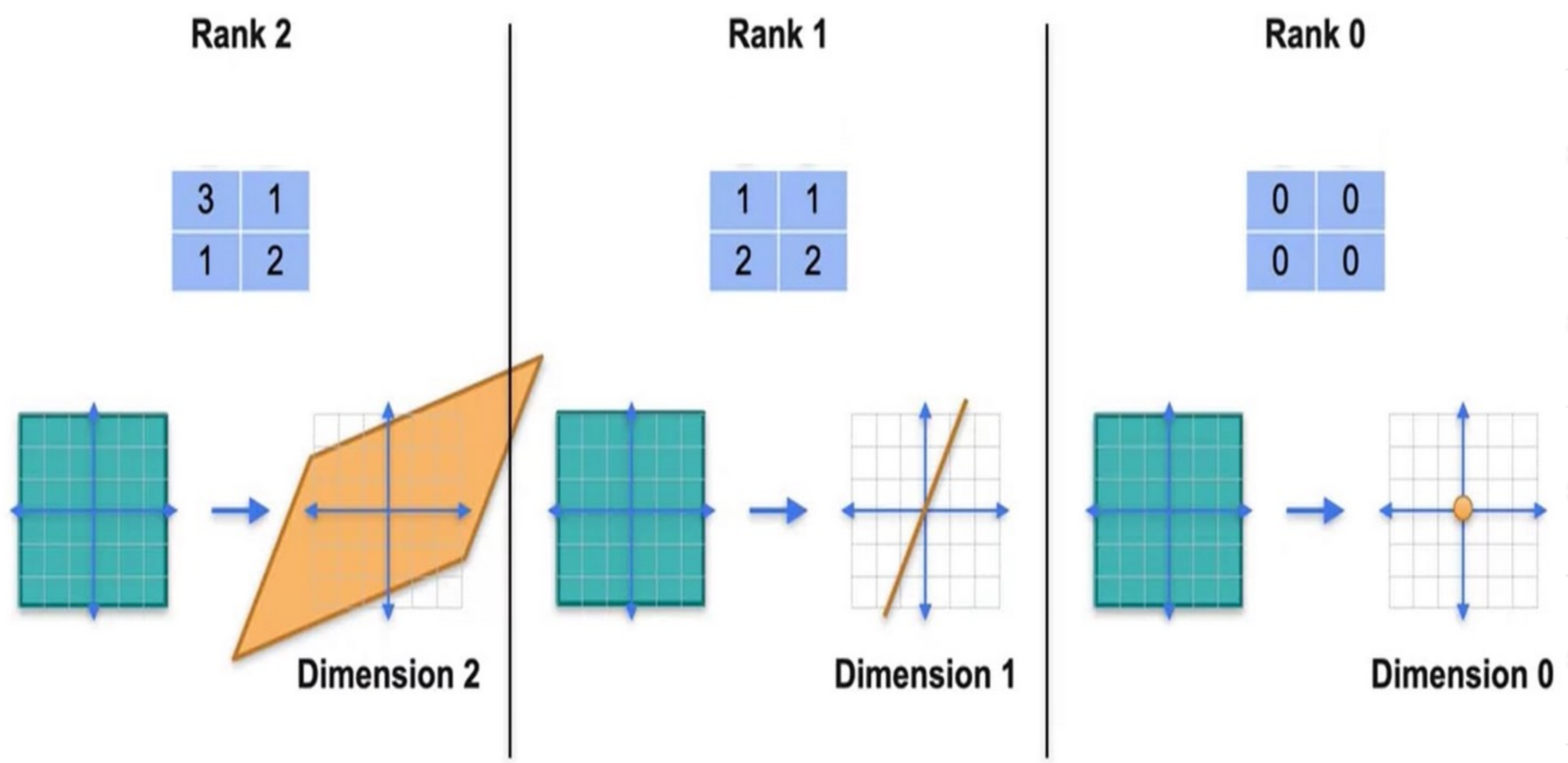
Iran Annual AI Award

جمع‌بندی مفهوم رتبه

مفهوم	تعریف	تفسیر
رتبه ماتریس	تعداد ستون‌های مستقل خطی	چند جهت مستقل در ستون‌ها
رتبه تبدیل خطی	بعد تصویر تبدیل	تعداد ابعاد قابل دستیابی در فضای خروجی

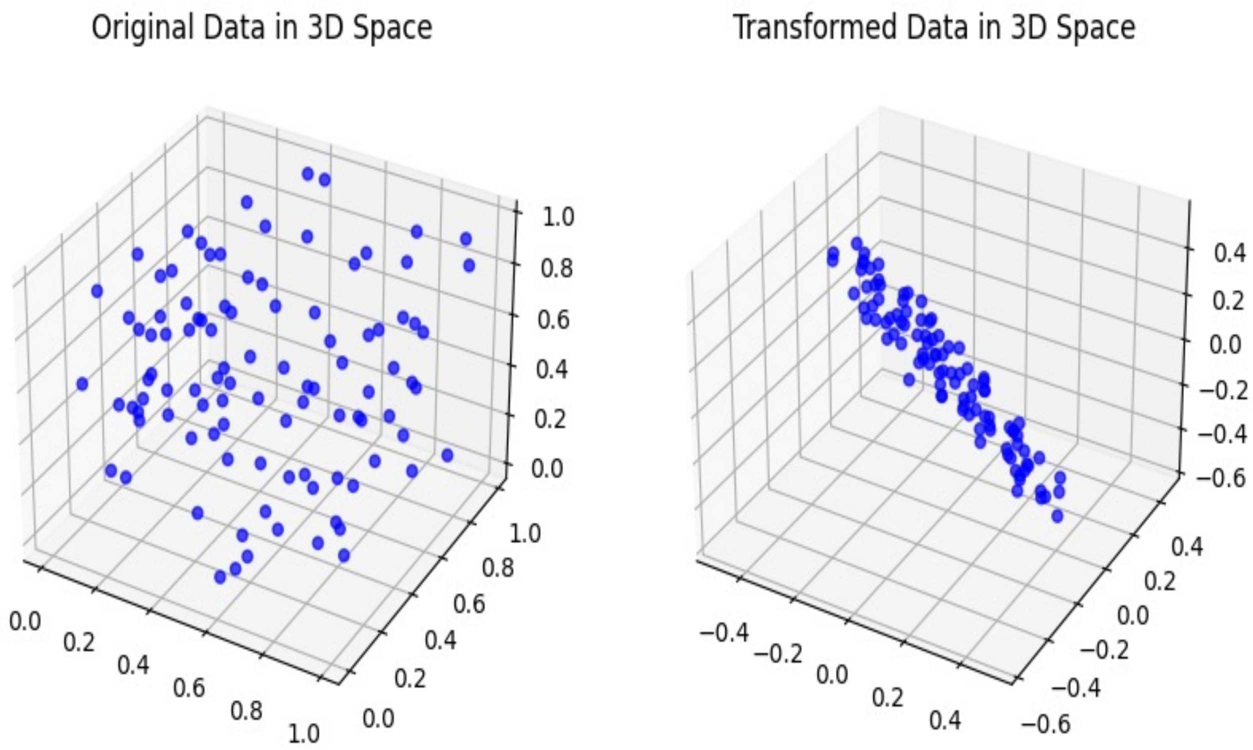
iAAA
Iran Annual AI Award

رتبه تبدیل خطی



iAAA
Iran Annual AI Award

خروجی نمونه کد تبدیل رتبه ناکامل



Iran Annual AI Award

دترمینان

- دترمینان عددی است که برخی خصوصیات یک ماتریس (مانند معکوس‌پذیری) را تعیین می‌کند.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- محاسبه دترمینان یک ماتریس داده جهت تصمیم‌گیری درباره‌ی استفاده از روش‌های حل معادلات خطی.

Iran Annual AI Award

معکوس ماتریس

- ماتریس A^{-1} معکوس ماتریس A است، به طوری که $AA^{-1} = I$ که I ماتریس همانی است.
- در صورتی که دترمینان غیرصفر باشد، ماتریس معکوس‌پذیر است.
- برای حل دستگاه معادلات خطی $b = Ax$ می‌توان از معکوس استفاده کرد.

$$x = A^{-1}b$$

- در کاربردهای رگرسیون ساده می‌توان به کمک معکوس ماتریس یک سیستم معادلات خطی را حل کرد.

مثال: رگرسیون خطی

- فرض می‌کنیم بین متغیرهای ورودی و خروجی یک سیستم ارتباطی از نوع رگرسیون خطی برقرار است:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ \dots + \beta_d x_d$$

- دیتاستی با n داده با بعد d در اختیار داریم

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- می‌خواهیم پارامترهای مدل رگرسیون خطی (بردار $\boldsymbol{\beta}$) را تخمین بزنیم

Iran Annual AI Award

مثال: رگرسیون خطی

- اگر آنگاه b=0 این تبدیل کاملاً خطی و معادل تبدیل خطی تعریف شده در بالا است.
- در غیر اینصورت، یک تبدیل affine است که در بسیاری از کاربردها هنوز هم به‌عنوان «تبدیل خطی» شناخته می‌شود:
  - چرخش (rotation)، کشش یا فشردگی (scaling)، بازتاب (reflection)، جابجایی (translation)
- خطوط، همچنان خط باقی می‌مانند.
- نقاطی که روی یک خط بودند، بعد از تبدیل هم روی یک خط هستند.
- نسبت فاصله‌ها بین نقاط روی یک خط حفظ می‌شود.

مثال: رگرسیون خطی

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix}$$

- فرم ماتریسی

$$\bar{X}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y}$$

- حل دستگاه معادلات خطی

$$\bar{X}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y} \Longrightarrow \bar{X}^T\bar{X}\boldsymbol{\beta} = \bar{X}^T\boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{\beta} = (\bar{X}^T\bar{X})^{-1}\bar{X}^T\boldsymbol{y}$$

Iran Annual AI Award

حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
import numpy as np

# Define the coefficient matrix A
A = np.array([[4, 3],
              [2, 1]])
print(A)

# Define the constants vector B
b = np.array([20, 10])

# Calculate the determinant of matrix A
determinant = np.linalg.det(A)

# Check if the determinant is zero (singular matrix)
if determinant == 0:
    print("Matrix A is singular and cannot be inverted.")
else:
    # Calculate the inverse of matrix A
    A_inverse = np.linalg.inv(A)
    x = np.dot(A_inverse, b)
    print("\nSolution (X):")
    print("x0 =", x[0])
    print("x1 =", x[1])
```

Iran Annual AI Award

زیر فضا

- یک زیرفضا W از فضای برداری V، زیرمجموعه‌ای از V است که خودش یک فضای برداری با عملیات تعریف شده در V محسوب می‌شود.
- وجود بردار صفر $\mathbf{0} \in W$
- بسته بودن نسبت به جمع

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W} \rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$$

- بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}, c \in \mathbb{R} \rightarrow c\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$$

Iran Annual AI Award

زیر فضا: مثال‌ها

- در فضای $\mathbb{R}^3$، یک خط یا یک صفحه که از مبدأ عبور می‌کند زیرفضا محسوب می‌شوند.
- با محاسبه مولفه‌های اصلی (Principal Components)، داده‌های با ابعاد بالا به یک فضای با بعد کمتر نگاشت می‌شوند.
- الگوریتم SVM سعی می‌کند یک ابرصفحه (یک زیرمجموعه از فضای برداری) پیدا کند که کلاس‌ها را از یکدیگر جدا کند.
- بسیاری از الگوریتم‌های خوشه‌بندی فرض می‌کنند که نقاط داده در چندین زیرفضای متفاوت قرار دارند.

Iran Annual AI Award

فضای تهی

- فضای تهی (یا هسته، Kernel) یک ماتریس A مجموعه‌ای از بردارهای x است که در آن‌ها رابطه $Ax = 0$ برقرار است:

$$Null(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$$

- فضای تهی یک زیرفضا از فضای برداری اصلی است

- اگر ماتریس A دارای n ستون باشد، بعد فضای تهی عبارت‌است از:

$$nullity(\boldsymbol{A}) = n - Rank(\boldsymbol{A})$$

فضای تهی: مثال‌ها

- در مسائل رگرسیون خطی، ماتریس X شامل ویژگی‌های داده است. اگر ستون‌های X دچار هم‌بستگی باشند، برخی از آن‌ها به صورت خطی وابسته خواهند بود. این یعنی وجود بردارهای غیر صفر v در فضای تهی به گونه‌ای است که:

$$Xv = 0$$

- در تحلیل مولفه‌های اصلی (PCA)، ماتریس کوواریانس داده‌ها تشکیل می‌شود. جهت‌هایی که داده‌ها هیچ واریانسی در آن‌ها ندارند، متناظر با بردارهایی هستند که برابر با فضای تهی هستند.

Iran Annual AI Award

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- در نظر بگیرید یک ماتریس مانند یک «تغییر شکل‌دهنده» در فضا عمل می‌کند.
- وقتی این ماتریس روی یک بردار عمل می‌کند، معمولاً جهت و اندازه‌ی آن بردار تغییر می‌کند.
- اما گاهی بردار (های) خاصی وجود داره که وقتی ماتریس روی آن اعمال می‌شود، فقط طول آن تغییر می‌کند و جهت آن ثابت می‌ماند.
- این بردار خاص، بردار ویژه (Eigenvector) نامیده می‌شود و و ضریبی که طول بردار را تغییر می‌دهد، مقدار ویژه (Eigenvalue) نامیده می‌شود.

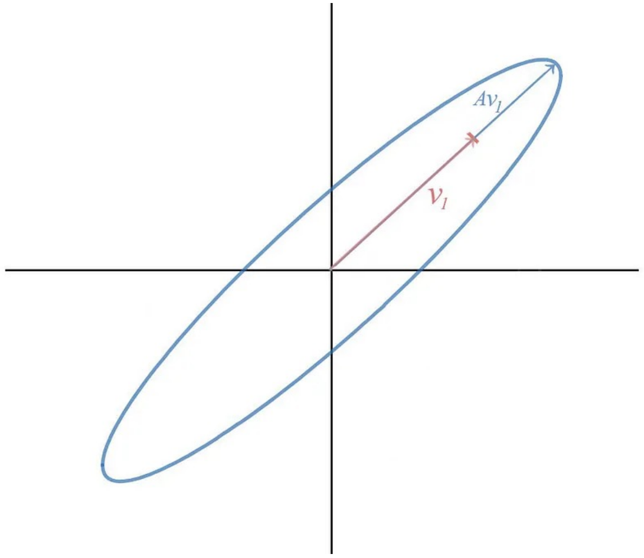
Iran Annual AI Award

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- برای ماتریس A، اگر بردار v و اسکالر λ وجود داشته باشند که

$$Av = \lambda v$$

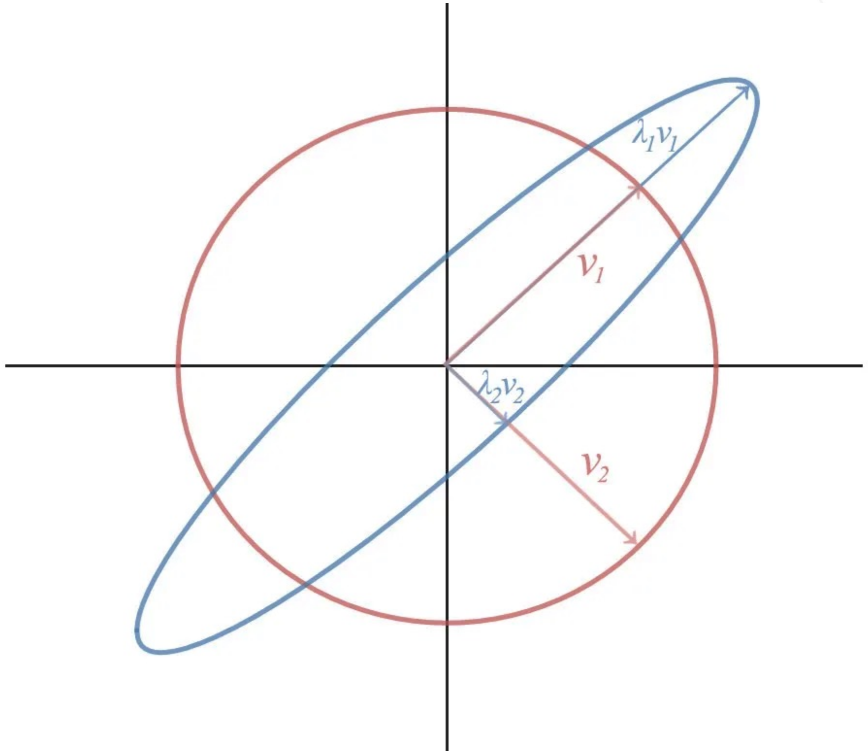
- آنگاه v بردار ویژه و λ مقدار ویژه نامیده می‌شود.



Iran Annual AI Award

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

- اگر مقدار ویژه بزرگتر از یک باشد، Av_i مربوطه منبسط می‌شود و بالعکس



Iran Annual AI Award

قطری‌سازی

- در نظر بگیرید A یک ماتریس 2×2 است

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2] = [\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{V\Lambda}$$

- ماتریس مربعی A قطری‌پذیر است اگر بتوانیم آن را به یک ماتریس قطری تبدیل کنیم:

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{\Lambda}$$

- اگر ماتریس n×n قطری‌پذیر باشد آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی دارد.

ویژگی‌های مهم مقادیر و بردارهای ویژه

- حاصلضرب مقادیر ویژه برابر با دترمینان است.
- برای محاسبه توان‌های ماتریس می‌توان از آن‌ها استفاده کرد:

$$A^k = V\Lambda^{\mathrm{k}}V^{-1}$$

- اگر A منفرد باشد، مقدار ویژه 0 دارد.
- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌توانند اعداد مختلط باشند.

Iran Annual AI Award

بردارها و مقادیر ویژه چه می‌گویند؟

- وقتی ماتریس کوواریانس داده‌ها رو محاسبه می‌کنیم، در واقع داریم بررسی می‌کنیم که داده‌ها در کدام جهت‌ها بیشترین تغییر (واریانس) را دارند.
- با تجزیه این ماتریس به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، به این نتایج می‌رسیم:
  - بردارهای ویژه: جهت‌هایی در فضای ویژگی‌ها که داده‌ها بیشترین یا کمترین تغییر را در آن‌ها دارند.
  - مقادیر ویژه: میزان واریانس داده‌ها در امتداد هر بردار ویژه.

Iran Annual AI Award

ارتباط با کاهش بعد

- بعد واقعی داده‌ها (Intrinsic Dimensionality) یعنی تعداد جهت‌هایی که واقعاً داده‌ها در آن‌ها پخش شده‌اند.
- مثلاً اگر داده‌ای در فضای 100 بعدی باشد، ولی فقط در 3 جهت اصلی تغییر کند، بعد واقعی آن 3 است. در این حالت، فقط 3 مقدار ویژه بزرگ داریم و بقیه تقریباً صفرند.
  - مقادیر ویژه بزرگ‌تر ← جهت‌هایی که اطلاعات بیشتری دارند
  - مقادیر ویژه کوچک‌تر ← جهت‌هایی که تقریباً نویز هستند یا اطلاعات کمی دارند
- با انتخاب بردارهای ویژه متناظر با بزرگ‌ترین مقادیر ویژه، می‌توانیم داده‌ها را روی یک فضای کوچکتر فشرده کنیم، بدون اینکه بخش مهمی از اطلاعات را از دست بدهیم.

iAAA
Iran Annual AI Award

تجزیه مقادیر منفرد

- SVD ابزاری قدرتمند برای تجزیه و تحلیل داده‌ها است که در تحلیل‌های یادگیری ماشین نقش اساسی دارد.
- تعمیمی از تجزیه مقادیر ویژه است
- برای یک ماتریس A با ابعاد $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}$$

- ماتریس U با ابعاد $\mathbf{m}\times m$ و ستون‌های متعامد
- ماتریس قطری Σ با عناصر غیر صفر مرتب نزولی به عنوان مقادیر منفرد
- ماتریس $\mathbf{V}^{\mathbf{T}}$ ترانهاده ماتریس متعامد V با ابعاد $\mathbf{n}\times n$

Iran Annual AI Award

خصوصیات و نکات کلیدی

ارتباط با مقادیر ویژه

- SVD به‌طور غیر مستقیم به تحلیل مقادیر ویژه AA^T مرتبط است.
- مقادیر منفرد σ_i ریشه‌های مثبت مقادیر ویژه AA^T هستند.

کاهش بعد

- در الگوریتم‌هایی نظیر PCA، استفاده از SVD به جداسازی مولفه‌های اصلی داده‌ها و بهبود عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین کمک می‌کند.

فشرده‌سازی تصاویر و توصیه‌گرها

- با نگه‌داشتن تنها مقادیر منفرد بزرگ، داده‌های اصلی با نویز و اطلاعات جزئی حذف شده به‌دست می‌آید.

کاهش نویز در داده‌ها

- نگه‌داشتن تنها مؤلفه‌های اصلی و حذف نویزهای کوچک.

Iran Annual AI Award

سوالات رایج

- تفاوت بین ضرب داخلی و ضرب ماتریسی چیست؟
- چگونه می‌توان از مفهوم مقادیر ویژه در کاهش ابعاد استفاده کرد؟
- چه ارتباطی بین PCA و SVD وجود دارد؟
- موارد ذیل را برای بردار ویژه و مقدار ویژه ثابت کنید:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v} = \lambda^k\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v} = \lambda^{-1}\boldsymbol{v}$$

$$(\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = (\lambda + c)\boldsymbol{v}$$

Iran Annual AI Award

منابع پیشنهادی

- Strang, G. (2000). Linear algebra and its applications.
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix computations. JHU press.

Iran Annual AI Award