一、选择题:1 ～ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

A. 等价无穷小. B. 低阶无穷小.

C. 高阶无穷小. D. 同阶但非等价无穷小.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极小值. B. 连续且取得极大值.

C. 可导且导数等于零. D. 可导且导数不为零.

3. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为2 cm/s,-3 cm/s. 当底面半径为10 cm,高为 5 cm 时,圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

A. 125π cm^3/s,-40π cm^2/s. B. 125π cm^3/s,40π cm^2/s.

C. -100π cm^3/s,40π cm^2/s. D. -100π cm^3/s,-40π cm^2/s.

4. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点,则$\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

A. $(0,e)$. B. $(e,+\infty)$.

C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

5. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$,则

A. $a=1,b=\dfrac{1}{2}$. B. $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

C. $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$. D. $a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

6. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$

A. $dx-dy$. B. $dx+dy$.

C. dy. D. $-dy$.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,则$\int_0^1 f(x)dx=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$. B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$. D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

启航教育

A. 1,1.　　　　B. 2,0.

C. 2,1.　　　　D. 1,2.

9. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,则

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

10. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$. 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ ________.

14. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$,则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ________.

15. 微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

16. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

启航教育

19.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^2 - x + C$，$L$ 为曲线 $y = f(x)(4 \leqslant x \leqslant 9)$. 记 L 的长度为 s，L 绕 x 轴旋转所成旋转曲面的面积为 A，求 s 和 A.

20.（本题满分 12 分）

设 $y = y(x)(x > 0)$ 是微分方程 $xy' - 6y = -6$ 满足条件 $y(\sqrt{3}) = 10$ 的解.

(1) 求 $y(x)$；

(2) 设 P 为曲线 $y = y(x)$ 上一点，记曲线 $y = y(x)$ 在点 P 处的法线在 y 轴上的截距为 I_P. 当 I_P 最小时，求点 P 的坐标.

启航教育

21.（本题满分 12 分）

设平面区域 D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.