2022年全国硕士研究生招生考试

数　学（三）

（科目代码：303）

考试时间：180分钟，试卷总分：150分

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1.当 $x \to 0, \alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题.

①若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$.

②若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

③若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$.

④若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

所有真命题的序号：

A.①③　　B.①④　　C.①③④　　D.②③④

【答案】选 C.

【解析】

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = 1$，正确；

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0$, 正确

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，即 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，正确；

而 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x) + o(\alpha(x))}{\beta(x)} = 1$, 取 $\alpha(x) = x, \beta(x) = -x$, 则②错误,故选 C.

2.已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \dfrac{(-1)^n}{n} (n = 1, 2, \ldots)$, 则 $\{a_n\}$

A.有最大值，有最小值　　B.有最大值，没有最小值

C.没有最大值，有最小值　　D.没有最大值，没有最小值

【答案】选 A

【解析】令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[e^{\frac{1}{x}\ln x}(1-\ln x)-1\right]$，易知当 x 充分大时，

$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单减；

令 $g(x)=x^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x^2}\left[e^{\frac{1}{x}\ln x}(1-\ln x)+1\right]$，易知当 x 充分大时，$g'(x)<0$，即 $g(x)$

单减；又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$，$a_n=\begin{cases}g(n) & n=2k\\ f(n) & n=2k+1\end{cases}$

故前有限项必存在最值，综上 $\{a_n\}$ 必存在最大最小值，选 A.

3 .设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】选 C

【解析】$F(x,y)=x\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-y\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xf(x-y)-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f(x-y)，故 \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}，故选 C.$$

4. 已知$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}dx, I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx, I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}dx$. 则

A. $I_1 < I_2 < I_3$　　B. $I_2 < I_1 < I_3$　　C. $I_1 < I_3 < I_2$　　D. $I_3 < I_2 < I_1$

【答案】选 A

【解析】$f(x) = \frac{x}{2} - \ln(1+x)$，$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-1}{2(1+x)} < 0, x \in (0,1)$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \le \ln(1+x), I_1 < I_2.$$

现比较 I_2 和 I_3，即比较 $\frac{2\ln(1+x)}{2(1+\cos x)}$ 与 $\frac{2x}{1+\sin x}$

$$\cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}, x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^2 > \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{x}{2} > 1 + \sin x$$

$$2(1+\cos x) > 1 + \sin x$$

即$\frac{1}{2(1+\cos x)} < \frac{1}{1+\sin x}$

而$2\ln(1+x) < 2x \quad x \in (0,1)$

则$I_2 < I_3$.

故选 A.

5.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1，-1，0 的充分必要条件是

A.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda Q}$

B.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

C.存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$

D.存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$

【答案】选 B

【解析】【解析】根据相似对角化定义，B 选项可以直接推出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1，-1，0，又若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1，-1，0，互不相同，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可相似对角化，故可推出 B.故选 B.

6.设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的情况为

A.无解　　B.有解　　C.有无穷多解或无解　　D.有唯一解或无解

【答案】选 D

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&b&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}$$

【解析】

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}=(b-a)(b-1)(a-1)$$

$|A|\neq 0\Rightarrow r(A)=r(A,b)=3$，有唯一解

$|A|=0\Rightarrow r(A)\neq r(A,b)$ 无解，故选 D.

7. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价，则 λ 的取值范围是（　　）.

A. $\{0,1\}$ B. $\{\lambda|\ \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq -2\}$ C. $\{\lambda|\ \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ D. $\{\lambda|\ \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq -1\}$

【答案】选 C

【解析】
$$\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&\lambda&1&\lambda\\0&1-\lambda&\lambda-1&\lambda^2-\lambda\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)&(1+\lambda)(1-\lambda^2)\end{pmatrix}$$

$\lambda=1\Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=1$ ，等价

$\lambda=0 \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，等价

$\lambda=-1 \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3,\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$，不等价

$\lambda=-2 \Rightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，不等价

其他时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，等价

故$\{\lambda|\ \lambda\in\boldsymbol{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$，故选 C.

8.设随机变量$X\sim N(0,4)$,随机变量$Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$

A.2　　B.4　　C.6　　D.10

【答案】选 D

【解析】$X\sim N(0,4),Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$, $DX=4$, $DY=3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

则$D(X-3Y+1)=DX+9DY=10$.故选 D.

9.设随机变量序列$X_1,X_2\cdots X_n,\cdots$独立分布且X_1的概率密度为$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$则

当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率密度收敛于

A.$\dfrac{1}{8}$　　B.$\dfrac{1}{6}$　　C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

【答案】选 B

【解析】

$$EX^2=\int_{-1}^{1}x^2\cdot(1-|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-2\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\dfrac{1}{n}\cdot n\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$,故选 B.

10.设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max\{X,Y\}=2\}$ 与事件 $\{\min\{X,Y\}=1\}$ 相互独立，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$

A. 0.6　　B. -0.36　　C. 0　　D. 0.48

【答案】选 B

【解析】由题意，得

$$P\{\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=1\}=P\{\max\{X,Y\}=2\}P\{\min\{X,Y\}=1\}$$

$$P\{\max\{X,Y\}=2\}=b+0.1，\quad P\{\min\{X,Y\}=1\}=0.1+0.1=0.2$$

$$P\{\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=1\}=0.1$$

故 $0.2(b+0.1)=0.1\Rightarrow b=0.4$

又 $a+b=1-0.4=0.6$，故 $a=0.2$，

$$\operatorname{Cov}(X.Y)=EXY-EXEY=-0.1-0.8+0.1+0.2-(-0.6+0.4)\cdot(0.2+1)$$
$$=-0.6+1.2\cdot 0.2=-0.6+0.24=-0.36$$

故选 B.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$______.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\left(\frac{1+e^x}{2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(e^x-1)}{2\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{原式}=e^{\frac{1}{2}}$$

12. $\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x =$ ______.

【答案】 $\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

【解析】

$$\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{2x+2-6}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+4}-6\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}$$

$$=\ln\left(x^2+2x+4\right)\Big|_0^2-6\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\ln 12-\ln 4-6\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^2$$

$$=\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

13.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ ______.

【答案】 0

【解析】

因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'''(x)$ 为奇函数，故 $f'''(0)=0$，又因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，故

$f'''(2\pi)=f'''(0)=0$

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$ ______.

【答案】 $\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$

【解析】

$$f(x)\cdot f(y-x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{y-x}, 0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{y-x}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)$$

$$=\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+1$$

15.设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $\mathrm{tr}\left(A^{-1}\right)=$______.

【答案】-1

【解析】$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\mathrm{tr}\left(A^{-1}\right)=-1$$

16. A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(B\cup C\middle|A\cup B\cup C\right)=$______.

【答案】$\frac{5}{8}$

【解析】

$$P(AB)=0,P(AC)=0,P(BC)=P(B)\cdot P(C)$$

$$P(B\cup C)|\ (A\cup B\cup C)=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-0-\frac{1}{9}+0}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{5}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{5}{8}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【解析】

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C\right]\\&=e^{-\sqrt{x}}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx+C\right]\\&=e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2e^{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+C\right]\\&=e^{-\sqrt{x}}\left[2xe^{\sqrt{x}}-\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx+C\right]\\&=2x+Ce^{-\sqrt{x}}\end{aligned}$$

代入 $x=1$，$2+Ce^{-1}=3\Rightarrow C=e$，所以 $y=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2,b=\lim_{x\to+\infty}2x+e^{1-\sqrt{x}}-2x=0.$$

斜渐近线为：$y=2x$.

18.（本题满分 12 分）

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定.生产函数为 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P=1160-1.5Q$.若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8.求利润最大时的产量.

【解析】

$$L = PQ - 6x - 8y = \left(1160 - 15\cdot 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}\right)\left(12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}\right) - 6x - 8y$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1160\cdot y^{\frac{1}{6}}\cdot 6x^{-\frac{1}{2}} - 12\times 18y^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

$\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1160\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot 2y^{-\frac{5}{6}} - 18x\cdot 4y^{-\frac{2}{3}} - 8 = 0$

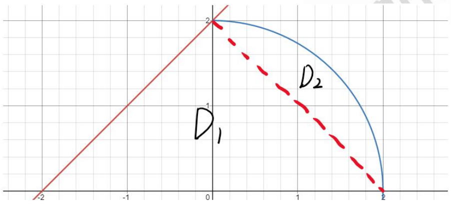
解得 $\begin{cases} x = 256 \\ y = 64 \\ Q = 384 \end{cases}$

19.（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D = \left\{(x,y)\middle| y-2 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le y \le 2\right\}$，计算 $I = \iint\limits_D \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint\limits_D \left(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma - \iint\limits_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$



补线 $x+y=2$（图中虚线），根据对称性

$$\begin{aligned} &= \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D_2} \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma \\ &= \pi + 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \int_{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}^{2} 2r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r \\ &= \pi + 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4 - \frac{4}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\right)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \pi + 2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \pi + 2 - 2 + \pi - 2 = 2\pi - 2. \end{aligned}$$

20.求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

【解析】$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}\cdot\frac{4^n(2n+1)}{(-4)^n+1}\cdot\frac{1}{x^{2n}}\right|=\left|x^2\right|$,

令 $\left|x^2\right|<1$，得 $x^2<1\Rightarrow x\in(-1,1)$，代入 $x=1,-1$，显然收敛，则收敛域为 $x\in[-1,1]$.

当 $x\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\\&=\frac{1}{x}\arctan x+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right|\\&=\frac{1}{x}\left[\arctan x+\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$S(x)=2$.

所以 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left[\arctan x+\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right] & x\neq 0,\\ 2 & x=0.\end{cases}$

21.已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2)证明 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

【解析】(1)已知:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\left(\lambda^2-6\lambda+9-1\right)$$

$$=(\lambda-4)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

$\lambda=2$ 时，$2E-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得：$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

$\lambda=4$ 时，$4E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得：$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

已正交，直接单位化：

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令：

$$Q=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

得标准型：

$$f=4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2$$

(2)证明：因为 Q 可逆：

$$\min_{x\neq 0}\frac{f}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\min_{y\neq 0}\frac{f}{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}$$

$$=\min_{y\neq 0}\frac{f}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}$$

$$=\min_{y\neq 0}\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

$$\frac{4y_1^2+4y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geqslant\frac{2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2$$

令：

$$\begin{cases} y_1^2=0 \\ y_2^2=0 \\ y_3^2=1 \end{cases}$$

得：$f=2$

故最小值为 2.

22.（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta\left(\theta>0\right)$ 是未知参数.利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D\left(\hat{\theta}\right)$.

【解析】总体 X 的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

总体 Y 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以似然函数为：

$$L(\theta)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i}\cdot\left(\frac{1}{2\theta}\right)^m e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{m}Y_j}, & X_i>0\,(i=1,2\ldots n)\text{且}Y_j>0\,(j=1,2\ldots m)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $X_i>0(i=1,2\ldots n)$ 且 $Y_j>0(j=1,2\ldots m)$ 时，

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\ln 2\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{j=1}^{m}Y_j$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{-n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{2}{(2\theta)^2}\sum_{j=1}^{m}Y_j$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，得：$\hat{\theta}=\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{j=1}^{m}Y_j}{2m+2n}$

$$\begin{aligned}D\hat{\theta}&=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4\sum_{i=1}^{n}DX_i+\sum_{j=1}^{m}DY_j\right]\\&=\frac{1}{4(m+n)^2}\left[4n\theta^2+4m\theta^2\right]\\&=\frac{\theta^2}{m+n}.\end{aligned}$$