一、选择题：1 ～ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极小值.　　B. 连续且取得极大值.

C. 可导且导数等于零.　　D. 可导且导数不为零.

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

A. $dx-dy$.　　B. $dx+dy$.

C. dy.　　D. $-dy$.

3. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

A. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.　　B. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$.　　D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，则$\int_0^1 f(x)dx=$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 1，1.　　B. 2，0.　　C. 2，1.　　D. 1，2.

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交，则 l_1，l_2 依次为

A. $-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　　B. $\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$.　　C. $\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.　　D. $-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵. 下列结论不成立的是

A. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　B. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

C. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　D. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

8. 设 A,B 为随机事件，且 $0 < P(B) < 1$. 下列命题中为假命题的是

A. 若 $P(A \mid B) > P(A)$，则 $P(\overline{A} \mid \overline{B}) > P(\overline{A})$.

B. 若 $P(A \mid B) = P(A)$，则 $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

C. 若 $P(A \mid B) > P(A \mid \overline{B})$，则 $P(A \mid B) > P(A)$.

D. 若 $P(A \mid A \cup B) > P(\overline{A} \mid A \cup B)$，则 $P(A) > P(B)$.

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本. 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \hat{\theta} = \overline{X} - \overline{Y}$，则

A. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

B. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

C. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

D. $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计，$D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu \leqslant 10$，$H_1:\mu > 10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数. 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\overline{X} > 11\}$，其中 $\overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i$，则 $\mu = 11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为

A. $1-\Phi(1)$.　　B. $1-\Phi(0.5)$.　　C. $1-\Phi(1.5)$.　　D. $1-\Phi(2)$.

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} =$ ________.

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)\mathrm{e}^t + t^2 \end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} =$ ________.

13. 欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 的解为 $y =$ ________.

14. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

15. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式. 若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 2，且 $|\boldsymbol{A}| = 3$，则 $A_{11} + A_{21} + A_{31} =$ ________.

16. 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球. 令 X,Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

18.(本题满分 12 分)

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$,求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

19.（本题满分 12 分）

已知曲线 C：$\begin{cases} x^2+2y^2-z=6, \\ 4x+2y+z=30, \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

20.（本题满分 12 分）

设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

(1) 求 $I(D_1)$ 的值；

(2) 计算 $\displaystyle\int_{\partial D_1} \frac{(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵；

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

22.（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度；

(2) 求 Z 的概率密度；

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.