一、选择题:1 ～ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

A. 等价无穷小. B. 低阶无穷小.

C. 高阶无穷小. D. 同阶但非等价无穷小.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极小值. B. 连续且取得极大值.

C. 可导且导数等于零. D. 可导且导数不为零.

3. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有 2 个零点,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

A. $(0,e)$. B. $(e,+\infty)$.

C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

4. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$

A. $dx-dy$. B. $dx+dy$.

C. dy. D. $-dy$.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 1,1. B. 2,0. C. 2,1. D. 1,2.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$. B. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$. D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$. 若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. 设 A,B 为随机事件,且 $0 < P(B) < 1$. 下列命题中为假命题的是

A. 若 $P(A \mid B) > P(A)$,则 $P(\overline{A} \mid \overline{B}) > P(\overline{A})$.

B. 若 $P(A \mid B) = P(A)$,则 $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

C. 若 $P(A \mid B) > P(A \mid \overline{B})$,则 $P(A \mid B) > P(A)$.

D. 若 $P(A \mid A \cup B) > P(\overline{A} \mid A \cup B)$,则 $P(A) > P(B)$.

9. 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本. 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \hat{\theta} = \overline{X} - \overline{Y}$,则

A. $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.　　B. $E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

C. $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.　　D. $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

10. 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4}$. 利用来自总体 X 的样本值 1,3,2,2,1,3,1,2,可得 θ 的最大似然估计值为

A. $\frac{3}{8}$.　　B. $\frac{1}{4}$.　　C. $\frac{1}{2}$.　　D. $\frac{5}{8}$.

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 若 $y = \cos e^{-\sqrt{x}}$,则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} =$ ________.

12. $\int_{\sqrt{5}}^{5} \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 9|}}\mathrm{d}x =$ ________.

13. 设平面区域 D 由曲线段 $y = \sqrt{x}\sin \pi x (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 x 轴围成,则 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为________.

14. 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $y_t =$ ________.

15. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

16. 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球,先从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒

中，再从乙盒中任取一球．令 X,Y 分别表示从甲盒和从乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________．

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值．

18．（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值．

19.（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,dx\,dy$.

20.（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（1）求 $y_n(x)$；

（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值. 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

22.（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度；

(2) 求 Z 的概率密度；

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

启航教育