2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

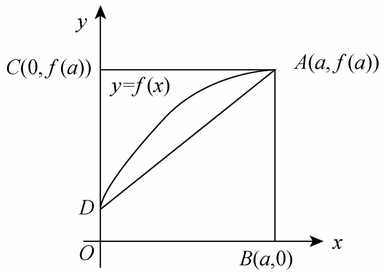
一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的 上册，P18，60 题

(A)跳跃间断点. (B)可去间断点.

(C)无穷间断点. (D)振荡间断点.

(2)如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a x f'(x)\mathrm{d}x$ 等于 上册，P47，4 题



(A)曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B)梯形 $ABOD$ 的面积.

(C)曲边三角形 ACD 的面积.

(D)三角形 ACD 的面积.

(3)已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则 上册，P64，1 题

(A)$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都存在.

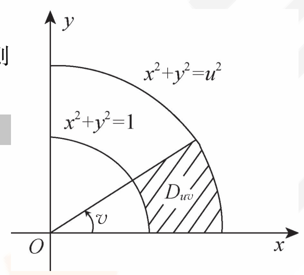
(B)$f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在.

(C)$f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在.

(D)$f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$都不存在.

(4)设函数 f 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则

$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$ 上册，P68，21 题



(A)$vf(u^2)$. (B)$\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C)$vf(u)$. (D)$\dfrac{v}{u}f(u)$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 上册，P125，17 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 上册，P178，17 题

(A)$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为 上册，P215，30 题

(A)$F^2(x)$. (B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$. (D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则 上册，P222，19 题

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$. (B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$. (D)$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，则 $c=$________. 上册，P18，61 题

(10)设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=$________. 上册，P52，28 题

(11)设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则$\iint\limits_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________. 上册，P85，24 题

(12)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________. 上册，P101，11 题

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，2，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则$|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________. 上册，P114，16 题

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$________. 上册，P197，26 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$. 上册，P9，28 题

(16)(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且$\varphi'\neq -1$.

(Ⅰ)求 $\mathrm{d}z$；

(Ⅱ)记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 上册，P70，29 题

(17)(本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 上册，P85，25 题

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ)证明对任意的实数 t，有$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

(Ⅱ)证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数. 上册，P63，59 题

(19)(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取$(10+9n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？ 上册，P97，26 题

(20)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$; 上册,P111,6 题

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解. 上册,P115,21 题

(21)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 上册,P138,18 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\text{记 } Z=X+Y.$$

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 上册,P215,31 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;(证明 $ET=\mu^2$ 即可)

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT. 上册,P228,10 题

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(C). (3)(B). (4)(A). (5)(C). (6)(D). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)1. (10)$\frac{1}{2}\ln 3$. (11)$\frac{\pi}{4}$. (12)$\frac{1}{x}$. (13)3. (14)$\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

三、解答题

(15)$-\frac{1}{6}$. (16)(Ⅰ) $\mathrm{d}z=\frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')\mathrm{d}x+(2y-\varphi')\mathrm{d}y]$. (Ⅱ)$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

(17)$\frac{19}{4}+\ln 2$. (18)证明略. (19)3 980 万元. (20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$a\neq0,x_1=\frac{n}{(n+1)a}$.

(Ⅲ)$a=0$,通解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

(21)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{2}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\frac{2}{n(n-1)}$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$的可去间断点的个数为 上册，P18，62 题

(A)1. (B)2. (C)3. (D)无穷多个.

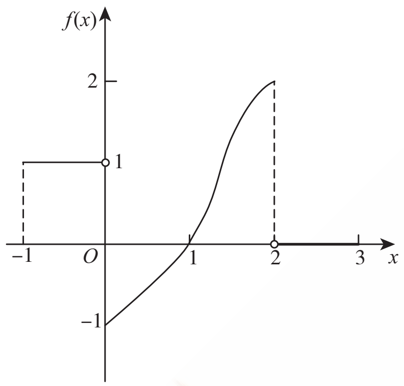
(2)当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则 上册，P15，52 题

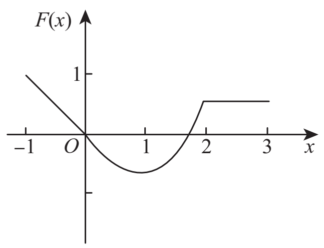
(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$. (C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3)使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是 上册，P56，40 题

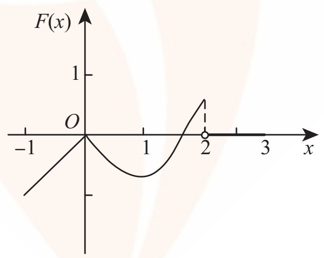
(A)$(0,1)$. (B)$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$. (C)$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. (D)$(\pi,+\infty)$.

(4)设函数 $y=f(x)$在区间$[-1,3]$上的图形如图所示，则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为 上册，P57，41 题

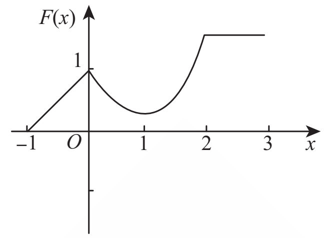




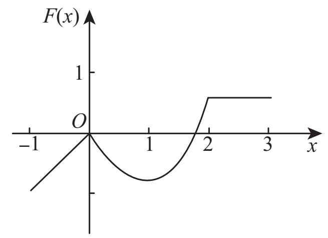
(A)



(B)



(C)



(D)

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 上册，P119，6 题

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (C)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为 上册，P125，20 题

(A)$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (B)$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (C)$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. (D)$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(7)设事件 A 与事件 B 互不相容，则 上册，P187，26 题

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=0$. (B)$P(AB)=P(A)P(B)$.

(C)$P(A)=1-P(B)$. (D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$，记 $F_Z(z)$为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$的间断点个数为 上册，P215，32 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________. 上册，P9，29 题

(10)设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________. 上册，P66，10 题

(11)幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________. 上册，P91，14 题

(12)设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10 000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________元. 上册，P31，51 题

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $k=$________. 上册，P164，18 题

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$________. 上册，P228，11 题

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值. 上册，P72，34 题

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$. 上册，P50，18 题

(17)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$. 上册，P85，26 题

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

上册，P44，92 题

(19)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

上册，P105，26 题

(20)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关. 上册，P152，15 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值. 上册，P174，7 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅰ)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(Ⅱ)求条件概率 $P\{X\leqslant1|Y\leqslant1\}$. 上册，P208，17 题

(23)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次，每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1|Z=0\}$；

(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布. 上册，P205，10 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(A). (4)(D). (5)(B). (6)(A). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9)$\frac{3\mathrm{e}}{2}$. (10)$1+2\ln 2$. (11)e^{-1}. (12)8 000. (13)2. (14)np^2.

三、解答题

(15)极小值为 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$. (16)$x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C$，其中 C 为任意常数.

(17)$-\frac{8}{3}$. (18)证明略. (19)曲线方程为 $x=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3\sqrt{y}}$.

(20)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+C_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，其中 C_1 为任意常数；

$\boldsymbol{\xi}_3=C_2(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，其中 C_2,C_3 为任意常数.

(Ⅱ)证明略.

(21)(Ⅰ)特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$. (Ⅱ)$a=2$.

(22)(Ⅰ)$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ)$\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$.

(23)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$.

(Ⅱ)(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于 上册，P12，38 题

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 上册，P98，2 题

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.

(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.

(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 上册，P34，65 题

(A) $f'(a)<0$.

(B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$.

(D) $f''(a)>0$.

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有 上册，P5，9 题

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.

(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.

(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示．下列命题正确的是 上册，P139，19 题

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 上册，P164，19 题

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ 上册，P197，27 题

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$. (D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若 上册，P191，4 题

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\ (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

(A) $2a+3b=4$.

(B) $3a+2b=4$.

(C) $a+b=1$.

(D) $a+b=2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}\,dt=\int_0^x x\sin t^2\,dt$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________. 上册，P23，18 题

(10) 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________. 上册，P61，53 题

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$________. 上册，P31，52 题

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$________. 上册，P36，69 题

(13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________. 上册，P114，17 题

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本．记统计量 $T=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$________. 上册，P228，12 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. 上册，P9，30 题

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3\,dx\,dy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成．

上册，P86，27 题

(17)（本题满分 10 分）

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值． 上册，P75，39 题

(18)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\,dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

（Ⅱ）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,dt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$. 上册，P13，45 题

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\,dx=f(2)+f(3)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

(Ⅰ)证明存在 $\eta\in(0,2)$,使 $f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f''(\xi)=0$. 上册,P44,93 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$.已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ)求 λ,a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解. 上册,P152,16 题

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$,正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵,若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,求 $a,\boldsymbol{Q}$.

上册,P168,26 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. 上册,P209,18 题

(23)(本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球,其中红、白、黑球的个数分别为 1,2,3.现从箱中随机地取出 2 个球,记 X 为取出的红球个数,Y 为取出的白球个数.

(Ⅰ)求随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$. 上册,P206,11 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(C). (5)(A). (6)(D). (7)(C). (8)(A).

二、填空题

(9)-1. (10)$\frac{\pi^2}{4}$. (11)$p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$. (12)3. (13)3. (14)$\sigma^2+\mu^2$.

三、解答题

(15)e^{-1}. (16)$\frac{14}{15}$. (17)$u_{\max}=5\sqrt{5}$;$u_{\min}=-5\sqrt{5}$.

(18)(Ⅰ)$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$,$n=1,2,\cdots$;理由略. (Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(19)证明略. (20)(Ⅰ)$\lambda=-1$;$a=-2$. (Ⅱ)通解为 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)$a=-1$;$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. (22)$A=\frac{1}{\pi}$;$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$,$-\infty<y<+\infty$.

(23)(Ⅰ)(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{4}{45}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________　分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量,则　下册,P11,3 题

(A)$k=1,c=4$.　(B)$k=1,c=-4$.　(C)$k=3,c=4$.　(D)$k=3,c=-4$.

(2)设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$　下册,P17,2 题

(A)$-2f'(0)$.　(B)$-f'(0)$.　(C)$f'(0)$.　(D)0.

(3)设$\{u_n\}$是数列,则下列命题正确的是　下册,P77,6 题

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛.

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛.

(D)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x,J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x,K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为　下册,P35,1 题

(A)$I<J<K$.　(B)$I<K<J$.　(C)$J<I<K$.　(D)$K<J<I$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$　下册,P93,1 题

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,k_1,k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为　下册,P106,8 题

(A)$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(B)$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C)$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(D)$\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(7)设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$与 $f_2(x)$是连续函数,则必为概率密度的是　下册,P143,1 题

(A)$f_1(x)f_2(x)$.　(B)$2f_2(x)F_1(x)$.　(C)$f_1(x)F_2(x)$.　(D)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8)设总体 X 服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自该总体的简单随机样本,则对于统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$,有　下册,P163,1 题

(A)$ET_1>ET_2,DT_1>DT_2$.　(B)$ET_1>ET_2,DT_1<DT_2$.

(C)$ET_1<ET_2,DT_1>DT_2$.　(D)$ET_1<ET_2,DT_1<DT_2$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则 $f'(x)=$________.　下册,P21,1 题

(10)设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$________.　下册,P54,4 题

(11)曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点$(0,0)$处的切线方程为________.　下册,P19,7 题

(12)曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$,直线 $x=2$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.　下册,P50,4 题

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的秩为 1,$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为________.　下册,P125,1 题

(14)设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$________.　下册,P155,1 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.　下册,P4,5 题

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数,$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$的极值,$z=f[x+y,f(x,y)]$. 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.　下册,P56,1 题

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　下册,P39,3 题

(18)(本题满分 10 分)

证明方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.　下册,P30,2 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上具有连续导数,$f(0)=1$,且满足$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$. 求 $f(x)$的表达式.　下册,P72,4 题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　下册,P97,1 题

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.　下册,P121,1 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

下册,P148,3 题

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0$,$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

下册,P149,5 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(B). (3)(A). (4)(B). (5)(D). (6)(C). (7)(D). (8)(D).

二、填空题

(9)$(1+3x)e^{3x}$. (10)$(1+2\ln 2)(dx-dy)$. (11)$y=-2x$. (12)$\frac{4}{3}\pi$.

(13)$3y_1^2$. (14)$\mu(\sigma^2+\mu^2)$.

三、解答题

(15)$-\frac{1}{2}$. (16)$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{(2,2)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(2,2)}\cdot\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

(17)$2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C$,其中 C 为任意常数.

(18)证明略. (19)$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(20)(Ⅰ)$a=5$. (Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21)(Ⅰ)对应于特征值-1的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,对应于特征值 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,对应于特征值 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$k_1,k_2,k_3$ 为任意非零常数. (Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ)$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ)$\rho_{XY}=0$.

(23)(Ⅰ)$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ)$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线的条数为 下册,P26,1 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ 下册,P17,1 题

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B)$(-1)^n(n-1)!$. (C)$(-1)^{n-1}n!$. (D)$(-1)^n n!$.

(3)设函数 $f(t)$连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\mathrm{d}r=$ 下册,P64,5 题

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$. (B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$. (D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(4)已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则 下册,P76,3 题

(A)$0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. (B)$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$. (C)$1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$. (D)$\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为 下册,P95,2 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$ 下册,P114,4 题

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间(0,1)上的均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$ 下册,P142,12 题

(A)$\frac{1}{4}$. (B)$\frac{1}{2}$. (C)$\frac{\pi}{8}$. (D)$\frac{\pi}{4}$.

(8)设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$的分布为 下册,P162,3 题

(A)$N(0,1)$. (B)$t(1)$. (C)$\chi^2(1)$. (D)$F(1,1)$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________. 下册,P4,3 题

(10)设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f[f(x)]$,则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=e}=$________. 下册,P21,2 题

(11)设连续函数 $z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=$________. 下册,P55,5 题

(12)由曲线 $y=\frac{4}{x}$和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________. 下册,P49,1 题

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=3$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,则$|\boldsymbol{BA}^*|=$________. 下册,P88,4 题

(14)设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则$P(AB|\overline{C})=$________. 下册,P140,7 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$. 下册,P5,6 题

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$及 y 轴为边界的无界区域. 下册,P66,8 题

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件)和 y(件),且这两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$(万元/件)与 $6+y$(万元/件).

(Ⅰ)求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元);

(Ⅱ)当总产量为 50 件时,甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小? 求最小总成本;

(Ⅲ)求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义. 下册,P61,5 题

(18)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$. 下册,P29,4 题

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$的表达式;

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点. 下册,P72,5 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式$|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解. 下册,P103,3 题

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

下册,P126,4 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

下册,P147,1 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从参数为 1 的指数分布. 记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(Ⅱ)求 $E(U+V)$.

下册,P153,2 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9)$e^{-\sqrt{2}}$. (10)$\frac{1}{e}$. (11)$2dx-dy$. (12)$4\ln 2$. (13)-27. (14)$\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{12}$. (16)$\frac{1}{2}$. (17)(Ⅰ)$C(x,y)=10\ 000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}$.

(Ⅱ)当甲产量为 24 件,乙产量为 26 件时,总成本达到最小,为 11 118 万元.

(Ⅲ)边际成本为 32 万元,其经济意义:当生产甲产品 24 件,乙产品 26 件时,生产第 25 件甲产品需 32 万元.

(18)证明略. (19)(Ⅰ)$f(x)=e^x$. (Ⅱ)拐点为(0,0).

(20)(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=1-a^4$. (Ⅱ)$a=-1$,通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)(Ⅰ)$a=-1$. (Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,标准形为 $f=2y_1^2+6y_2^2$.

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{4}$. (Ⅱ)$-\frac{2}{3}$.

(23)(Ⅰ)$f_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ)2.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)当 $x\to 0$ 时,用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是 下册,P11,1 题

(A)$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$. (B)$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C)$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$. (D)$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

(2)函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 下册,P15,2 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(3)设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4)$,则 下册,P63,1 题

(A)$I_1>0$. (B)$I_2>0$. (C)$I_3>0$. (D)$I_4>0$.

(4)设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是 下册,P78,7 题

(A)若 $a_n>a_{n+1}$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则 $a_n>a_{n+1}$.

(C)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则存在常数 $p>1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在.

(D)若存在常数 $p>1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则 下册,P97,3 题

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价. (B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价. (D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6)矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 下册,P113,2 题

(A)$a=0,b=2$. (B)$a=0,b$ 为任意常数.

(C)$a=2,b=0$. (D)$a=2,b$ 为任意常数.

(7)设 X_1,X_2,X_3 是随机变量,且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2),p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3)$,则 下册,P143,4 题

(A)$p_1>p_2>p_3$. (B)$p_2>p_1>p_3$. (C)$p_3>p_1>p_2$. (D)$p_1>p_3>p_2$.

(8)设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$ 下册,P148,2 题

(A)$\frac{1}{12}$. (B)$\frac{1}{8}$. (C)$\frac{1}{6}$. (D)$\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点$(1,0)$处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$________. 下册,P17,3 题

(10)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________. 下册,P57,5 题

(11)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________. 下册,P47,1 题

(12)微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$________. 下册,P69,3 题

(13)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________. 下册,P88,5 题

(14)设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$________. 下册,P157,8 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量,求 n 与 a 的值. 下册,P12,7 题

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴,y 轴旋转一周所得旋转体的体积.若 $V_y=10V_x$,求 a 的值. 下册,P50,6 题

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 下册,P66,10 题

(18)(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60 000 元,可变成本为 20 元/件,价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1\,000}$(p 是单价,单位:元;Q 是销量,单位:件).已知产销平衡,求:

(Ⅰ)该商品的边际利润;

(Ⅱ)当 $p=50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(Ⅲ)使得利润最大的定价 p. 下册,P52,14 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.证明:

(Ⅰ)存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$. 下册,P33,2 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$.当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$. 下册,P106,7 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

下册，P128，6 题

(22)(本题满分 11 分)

设(X,Y)是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$在给定$X=x(0<x<1)$的条件下 Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅰ)求(X,Y)的概率密度 $f(x,y)$；

(Ⅱ)求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅲ)求 $P\{X>2Y\}$.

下册，P150，7 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

下册，P165，2 题

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量；

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(C). (3)(B). (4)(D). (5)(B). (6)(B). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)-2. (10)$2(1-\ln 2)$. (11)$\ln 2$. (12)$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数. (13)-1. (14)$2\mathrm{e}^2$.

三、解答题

(15)$a=7$；$n=2$. (16)$7\sqrt{7}$. (17)$\dfrac{416}{3}$. (18)(Ⅰ)$-\dfrac{Q}{500}+40$. (Ⅱ)20 元，其经济意义：销售第 10 001 件商品时所得的利润为 20 元. (Ⅲ)$p=40$(元).

(19)证明略. (20)$a=-1,b=0,\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数. (21)证明略.

(22)(Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ)$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅲ)$\dfrac{1}{8}$.

(23)(Ⅰ)$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. (Ⅱ)$\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且 $a\neq 0$,则当 n 充分大时有 下册,P8,1 题

(A)$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$. (B)$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$. (C)$a_n>a-\dfrac{1}{n}$. (D)$a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

(2)下列曲线中有渐近线的是 下册,P27,3 题

(A)$y=x+\sin x$. (B)$y=x^2+\sin x$. (C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$. (D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

(3)设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$.当 $x\to 0$ 时,若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量,则下列选项中错误的是 下册,P11,4 题

(A)$a=0$. (B)$b=1$. (C)$c=0$. (D)$d=\dfrac{1}{6}$.

(4)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上 下册,P28,2 题

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$. (B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$. (D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ 下册,P87,1 题

(A)$(ad-bc)^2$. (B)$-(ad-bc)^2$. (C)$a^2d^2-b^2c^2$. (D)$b^2c^2-a^2d^2$.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 下册,P95,3 题

(A)必要非充分条件. (B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件. (D)既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=$ 下册,P140,5 题

(A)0.1. (B)0.2. (C)0.3. (D)0.4.

(8)设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 下册,P163,4 题

(A)$F(1,1)$. (B)$F(2,1)$. (C)$t(1)$. (D)$t(2)$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$(P 为商品的价格),则该商品的边际收益为________. 下册,P51,9 题

(10)设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域,则 D 的面积为________. 下册,P49,2 题

(11)设 $\displaystyle\int_0^a xe^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$,则 $a=$________. 下册,P39,4 题

(12)二次积分 $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=$________. 下册,P64,4 题

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是________. 下册,P134,2 题

(14)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$,则 $c=$________. 下册,P164,3 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. 下册,P6,10 题

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,计算 $\displaystyle\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$. 下册,P67,12 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$.若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式. 下册,P72,3 题

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数. 下册,P83,4 题

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$.证明:

(Ⅰ)$0\leqslant\displaystyle\int_a^x g(t)dt\leqslant x-a,x\in[a,b]$;

(Ⅱ)$\displaystyle\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx$. 下册,P45,1 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$. 下册,P104,5 题

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

下册,P116,8 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 EY.

下册,P145,3 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

下册,P148,4 题

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(D). (5)(B). (6)(A). (7)(B). (8)(C).

二、填空题

(9)$20-Q$. (10)$\frac{3}{2}-\ln 2$. (11)$\frac{1}{2}$. (12)$\frac{1}{2}(e-1)$. (13)$-2\leqslant a\leqslant 2$. (14)$\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$. (16)$-\frac{3}{4}$. (17)$f(u)=\frac{1}{16}(e^{4u}-4u-1)$.

(18)收敛域为$(-1,1)$;$S(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}$,$x\in(-1,1)$. (19)证明略.

(20)(Ⅰ)基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})$,$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

(21)证明略. (22)(Ⅰ)$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1, \\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\leqslant y<2, \\ 1, & y\geqslant 2. \end{cases}$ (Ⅱ)$\frac{3}{4}$.

(23)(Ⅰ)(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(Ⅱ)$\frac{4}{9}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

2015 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设$\{x_n\}$是数列.下列命题中不正确的是 下册,P8,2 题

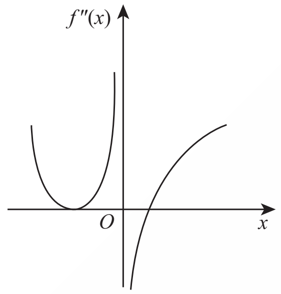
(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其二阶导函数 $f''(x)$的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$的拐点个数为 下册,P24,4 题



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(3)设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数 $f(x,y)$在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 下册,P64,3 题

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(4)下列级数中发散的是 下册,P76,2 题

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 下册,P102,1 题

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$. (B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$. (D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 下册,P125,2 题

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. (B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件,则 下册,P139,2 题

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$. (B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D)$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8)设总体 $X\sim B(m,\theta)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$ 下册,P163,2 题

(A)$(m-1)n\theta(1-\theta)$. (B)$m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C)$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$. (D)$mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________. 下册,P4,1 题

(10)设函数 $f(x)$连续,$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$,则 $f(1)=$________. 下册,P42,3 题

(11)若函数 $z=z(x,y)$由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=$________. 下册,P58,6 题

(12)设函数 $y=y(x)$是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$取得极值 3,则 $y(x)=$________. 下册,P69,4 题

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则行列式$|\boldsymbol{B}|=$________. 下册,P89,7 题

(14)设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$________. 下册,P151,8 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$,$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$与 $g(x)$在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a,b,k 的值. 下册,P12,6 题

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\geqslant x^2\}$. 下册,P67,13 题

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量,p 为价格,MC 为边际成本,η 为需求弹性$(\eta>0)$.

(Ⅰ)证明定价模型为 $p=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q)=1\ 600+Q^2$,需求函数为 $Q=40-p$,试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格. 下册,P52,15 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在定义域 I 上的导数大于零.若对任意的 $x_0\in I$,曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0)=2$,求 $f(x)$的表达式. 下册,P74,1 题

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x),v(x)$可导,利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$的求导公式. 下册,P20,11 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $A^3=O$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,求 X.

下册,P93,6 题

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

下册,P115,6 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 EY.

下册,P156,5 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

下册,P167,5 题

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(C). (3)(B). (4)(C). (5)(D). (6)(A). (7)(C). (8)(B).

二、填空题

(9)$-\frac{1}{2}$. (10)2. (11)$-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$. (12)$\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}$. (13)21. (14)$\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15)$a=-1;b=-\frac{1}{2};k=-\frac{1}{3}$. (16)$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.

(17)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$p=30$.

(18)$f(x)=\frac{8}{4-x},x\in I$.

(19)(Ⅰ)证明略.

(Ⅱ)$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

(20)(Ⅰ)$a=0$. (Ⅱ)$X=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(21)(Ⅰ)$a=4;b=5$. (Ⅱ)$P=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2},k=2,3,\cdots$. (Ⅱ)$EY=16$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\theta}=2\bar{X}-1$. (Ⅱ)$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2015 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

2016 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

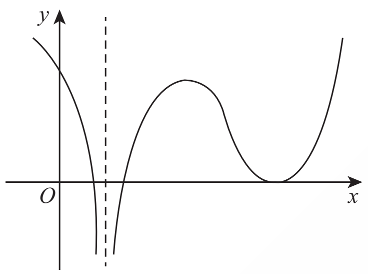
(1)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图所示,则　下册,P24,5 题

(A)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.

(B)函数 $f(x)$有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 3 个拐点.

(C)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 1 个拐点.

(D)函数 $f(x)$有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$有 2 个拐点.



(2)已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$,则　下册,P53,1 题

(A)$f'_x-f'_y=0$.　(B)$f'_x+f'_y=0$.

(C)$f'_x-f'_y=f$.　(D)$f'_x+f'_y=f$.

(3)设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy(i=1,2,3)$,其中 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$,$D_3=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$,则　下册,P37,5 题

(A)$J_1<J_2<J_3$.　(B)$J_3<J_1<J_2$.

(C)$J_2<J_3<J_1$.　(D)$J_2<J_1<J_3$.

(4)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$($k$ 为常数)　下册,P77,4 题

(A)绝对收敛.　(B)条件收敛.

(C)发散.　(D)收敛性与 k 有关.

(5)设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是　下册,P115,7 题

(A)$\boldsymbol{A}^{T}$与 $\boldsymbol{B}^{T}$相似.　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$与 $\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}$与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{T}$相似.　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2,则　下册,P133,1 题

(A)$a>1$.　(B)$a<-2$.

(C)$-2<a<1$.　(D)$a=1$ 或 $a=-2$.

(7)设 A,B 为两个随机事件,且 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,如果 $P(A|B)=1$,则　下册,P140,4 题

(A)$P(\overline{B}|\overline{A})=1$.　(B)$P(A|\overline{B})=0$.

(C)$P(A\cup B)=1$.　(D)$P(B|A)=1$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(1,2)$,$Y\sim N(1,4)$,则 $D(XY)=$　下册,P155,2 题

(A)6.　(B)8.

(C)14.　(D)15.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)已知函数 $f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.　下册,P4,2 题

(10)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.　下册,P8,4 题

(11)设函数 $f(u,v)$可微,$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定,则 $dz\Big|_{(0,1)}=$________.　下册,P58,7 题

(12)设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_{D}x^2e^{-y^2}\,dxdy=$________.　下册,P63,2 题

(13)行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.　下册,P88,2 题

(14)设袋中有红、白、黑球各 1 个,从中有放回地取球,每次取 1 个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰好为 4 的概率为________.　下册,P139,1 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.　下册,P6,8 题

(16)(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1 200 件,该商品的需求函数 $Q=Q(p)$,需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$,$p$ 为单价(万元).

(Ⅰ)求需求函数的表达式;

(Ⅱ)求 $p=100$ 万元时的边际收益,并说明其经济意义.　下册,P52,16 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\,dt(x>0)$,求 $f'(x)$,并求 $f(x)$的最小值.　下册,P26,10 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$连续,且满足$\int_0^x f(x-t)\,dt=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt+e^{-x}-1$,求 $f(x)$.　下册,P72,2 题

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛域及和函数.　下册,P83,3 题

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.　下册,P104,4 题

2016 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

下册,P120,2 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布,令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出(X,Y)的概率密度;

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

下册,P154,5 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 $E(aT)=\theta$.

下册,P158,9 题

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(D). (3)(B). (4)(A). (5)(C). (6)(C). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)6. (10)$\sin 1-\cos 1$. (11)$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$. (12)$\dfrac{1}{3}(1-2\mathrm{e}^{-1})$. (13)$4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$. (14)$\dfrac{2}{9}$.

三、解答题

(15)$\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

(16)(Ⅰ)$Q=1\,200-10p$. (Ⅱ)$R'(Q)=120-\dfrac{1}{5}Q$. 当 $p=100$ 时,$Q=200$,故当 $p=100$ 万元时的边际收益 $R'(200)=80$,其经济意义:销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

(17)$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\leqslant 1,\\2x, & x>1.\end{cases}$ $f(x)$的最小值为$\dfrac{1}{4}$. (18)$f(x)=-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

(19)收敛域为$[-1,1]$;和函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1),\\2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$

(20)(Ⅰ)$a=0$. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

(21)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^{99}=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$. (Ⅱ)$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

(22)(Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)U 与 X 不相互独立;理由略.

(Ⅲ)$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\\dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\\dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\1, & z\geqslant 2.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)$a=\dfrac{10}{9}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

2017 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 下册,P14,1 题

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$. (B)$ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C)$ab=0$. (D)$ab=2$.

(2)二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是 下册,P59,1 题

(A)$(0,0)$. (B)$(0,3)$. (C)$(3,0)$. (D)$(1,1)$.

(3)设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则 下册,P28,1 题

(A)$f(1)>f(-1)$. (B)$f(1)<f(-1)$.

(C)$|f(1)|>|f(-1)|$. (D)$|f(1)|<|f(-1)|$.

(4)若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛,则 $k=$ 下册,P77,5 题

(A)1. (B)2. (C)-1. (D)-2.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则 下册,P92,3 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C)$\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (D)$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则 下册,P113,1 题

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似. (D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7)设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立,B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

下册,P140,6 题

(A)A 与 B 相互独立. (B)A 与 B 互不相容.

(C)AB 与 C 相互独立. (D)AB 与 C 互不相容.

(8)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是

下册,P162,1 题

(A)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B)$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D)$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ________. 下册,P40,6 题

(10)差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$ ________. 下册,P69,5 题

(11)设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$,其中 Q 为产量,则边际成本为________. 下册,P51,10 题

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$,$f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$ ________.

下册,P55,6 题

(13)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

下册,P99,1 题

(14)设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\dfrac{1}{2}$,$P\{X=1\}=a$,$P\{X=3\}=b$. 若 $EX=0$,则 $DX=$ ________.

下册,P155,3 题

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$. 下册,P6,11 题

(16)(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

下册,P66,9 题

(17)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. 下册,P8,5 题

(18)(本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间$(0,1)$内有实根,试确定常数 k 的取值范围. 下册,P31,3 题

(19)(本题满分 10 分)

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$,$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

(Ⅱ)证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 的表达式. 下册,P84,5 题

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解. 下册,P107,10 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 下册,P125,3 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant EY\}$;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度. 下册,P154,4 题

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度;

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量. 下册,P168,8 题

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(D). (3)(C). (4)(C). (5)(A). (6)(B). (7)(C). (8)(B).

二、填空题

(9)$\frac{\pi^3}{2}$. (10)$C2^t+t2^{t-1}$,其中 C 为任意常数. (11)$1+(1-Q)\mathrm{e}^{-Q}$. (12)$xy\mathrm{e}^y$. (13)2. (14)$\frac{9}{2}$.

三、解答题

(15)$\frac{2}{3}$. (16)$\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi$. (17)$\frac{1}{4}$. (18)$\left(\frac{1}{\ln 2}-1,\frac{1}{2}\right)$. (19)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)证明略;$S(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

(20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)$a=2$;$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$ (Ⅱ)σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$.

(Ⅲ)σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

2017 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

2018 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是 下册,P18,4 题

(A)$f(x)=|x|\sin|x|$. (B)$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C)$f(x)=\cos|x|$. (D)$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2)设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则 下册,P28,3 题

(A)当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. (B)当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C)当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$. (D)当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(3)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$,$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则 下册,P35,2 题

(A)$M>N>K$. (B)$M>K>N$.

(C)$K>M>N$. (D)$K>N>M$.

(4)设某产品的成本函数 $C(Q)$可导,其中 Q 为产量. 若产量为 Q_0 时平均成本最小,则 下册,P51,11 题

(A)$C'(Q_0)=0$. (B)$C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(C)$C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$. (D)$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(5)下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 下册,P117,10 题

(A)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (D)$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$表示分块矩阵,则 下册,P99,2 题

(A)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$. (B)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$. (D)$r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7)设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}=$

下册,P142,11 题

(A)0.2. (B)0.3. (C)0.4. (D)0.5.

(8)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$,$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$,则 下册,P162,2 题

(A)$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$. (B)$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

(C)$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$. (D)$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是________. 下册,P23,2 题

(10)$\int \mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=$________. 下册,P39,2 题

(11)差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的通解为________. 下册,P70,6 题

(12)设函数 $f(x)$满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,且 $f(0)=2$,则 $f(1)=$________.

下册,P68,1 题

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,则$|\boldsymbol{A}|=$________.

下册,P89,8 题

(14)随机事件 A,B,C 相互独立,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$,则 $P(AC|A\cup B)=$________. 下册,P141,8 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x]=2$,求 a,b. 下册,P7,14 题

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成,计算二重积分$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

下册,P67,11 题

(17)(本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值. 下册,P62,6 题

(18)(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$,求 a_n. 下册,P82,2 题

(19)(本题满分 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0$,$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 下册,P9,7 题

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$的规范形. 下册,P132,1 题

(21)(本题满分 11 分)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$. 下册,P105,6 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$,$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Z=XY$.

(Ⅰ)求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ)求 Z 的概率分布.

下册,P152,1 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ)求 $\hat{\sigma}$;

(Ⅱ)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

下册,P167,6 题

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(D). (3)(C). (4)(D). (5)(A). (6)(A). (7)(A). (8)(B).

二、填空题

(9)$y=4x-3$. (10)$\mathrm{e}^x\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+C$,其中 C 为任意常数.

(11)$y_x=C\cdot 2^x-5$,其中 C 为任意常数. (12)2e. (13)2. (14)$\frac{1}{3}$.

三、解答题

(15)$a=1,b=1$. (16)$\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. (17)存在,理由略;最小值为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^2$.

(18)$\begin{cases} a_{2n}=\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}-2n-1, \\ a_{2n+1}=2n+2 \end{cases}(n=0,1,2,\cdots)$. (19)证明略. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20)(Ⅰ)当 $a\neq 2$ 时,$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,当 $a=2$ 时,$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

(Ⅱ)当 $a\neq 2$ 时,$y_1^2+y_2^2+y_3^2$,当 $a=2$ 时,$y_1^2+y_2^2$.

(21)(Ⅰ)$a=2$. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3\\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数且 $k_2\neq k_3$.

(22)(Ⅰ)λ. (Ⅱ)$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$;$P\{Z=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{|n|}}{2\cdot|n|!}$,$n=\pm1,\pm2,\cdots$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$. (Ⅱ)$E\hat{\sigma}=\sigma$;$D\hat{\sigma}=\frac{\sigma^2}{n}$.

2019 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=$ 　下册,P11,2 题

A. 1. 　B. 2.
C. 3. 　D. 4.

2. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是 　下册,P30,1 题

A. $(-\infty,-4)$. 　B. $(4,+\infty)$.
C. $\{-4,4\}$. 　D. $(-4,4)$.

3. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$,则 a,b,c 依次为 　下册,P70,9 题

A. 1,0,1. 　B. 1,0,2. 　C. 2,1,3. 　D. 2,1,4.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛,则 　下册,P78,8 题

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛. 　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.
C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 收敛. 　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 发散.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$ 　下册,P102,3 题

A. 0. 　B. 1. 　C. 2. 　D. 3.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为 　下册,P132,2 题

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. 　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.
C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7. 设 A,B 为随机事件,则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 　下册,P140,3 题

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 　B. $P(AB)=P(A)P(B)$.
C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$. 　D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P\{|X-Y|<1\}$ 　下册,P144,5 题

A. 与 μ 无关,而与 σ^2 有关. 　B. 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.
C. 与 μ,σ^2 都有关. 　D. 与 μ,σ^2 都无关.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$ ________. 　下册,P9,6 题

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为________. 　下册,P23,1 题

11. 已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt$,则 $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=$ ________. 　下册,P40,8 题

12. 以 p_A,p_B 分别表示 A,B 两种商品的价格,设商品 A 的需求函数为

$$Q_A=500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2,$$

则当 $p_A=10,p_B=20$ 时,商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$ 为________. 　下册,P51,12 题

13. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$.若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则 $a=$ ________.

下册,P103,2 题

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,EX 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)>EX-1\}=$ ________. 　下册,P143,2 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$,并求 $f(x)$ 的极值. 　下册,P25,6 题

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数,函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

下册,P56,2 题

17. (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(1)求 $y(x)$;

(2)设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$,求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

下册,P73,6 题

18. (本题满分 10 分)

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\,(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积. 　下册,P49,3 题

19. (本题满分 10 分)

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$.

(1)证明:数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$;

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. 　下册,P9,8 题

20. (本题满分 11 分)

已知向量组

Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^{\mathrm{T}}$;

Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^{\mathrm{T}}$.

若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价,求 a 的取值,并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 　下册,P98,4 题

21. (本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 x, y；

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

下册,P118,11 题

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 服从参数为 1 的指数分布,Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$,$P\{Y=1\}=1-p\,(0<p<1)$.令 $Z=XY$.

(1)求 Z 的概率密度;

(2)p 为何值,X 与 Z 不相关?

(3)X 与 Z 是否相互独立?

下册,P160,2 题

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数,$\sigma>0$ 是未知参数,A 是常数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 A;

(2)求 σ^2 的最大似然估计量.

下册,P168,7 题

答案速查

一、选择题

1.C.　2.D.　3.D.　4.B.　5.A.　6.C.　7.C.　8.A.

二、填空题

9.e^{-1}.　10.$(\pi,-2)$.　11.$\dfrac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.　12.0.4.　13.1.　14.$\dfrac{2}{3}$.

三、解答题

15.$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ \mathrm{e}^x(1+x), & x<0;\end{cases}$ 极小值为 $f(-1)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,$f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$,极大值为 $f(0)=1$.

16.$1-3f''_{11}(x+y,x-y)-f''_{22}(x+y,x-y)$.　17.(1)$y(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.　(2)$\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e})$.

18.$\dfrac{\mathrm{e}^\pi+1}{2(\mathrm{e}^\pi-1)}$.　19.(1)证明略.　(2)1.

20.当 $a=1$ 时,$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$,当 $a\neq\pm1$ 时,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.(1)$x=3, y=-2$.　(2)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

22.(1)$f_Z(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^z, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant0.\end{cases}$　(2)$p=\dfrac{1}{2}$.　(3)不相互独立,理由略.

23.(1)$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.　(2)$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学三试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ 下册,P4,4 题

A. $b\sin a$. B. $b\cos a$. C. $b\sin f(a)$. D. $b\cos f(a)$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$的第二类间断点的个数为 下册,P15,3 题

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

3. 设奇函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数,则 下册,P42,1 题

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是奇函数. B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 是偶函数.

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是奇函数. D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 是偶函数.

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为$(-2,6)$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 下册,P81,2 题

A. $(-2,6)$. B. $(-3,1)$. C. $(-5,3)$. D. $(-17,15)$.

5. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可逆,a_{12}的代数余子式 $A_{12}\neq 0$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 下册,P102,4 题

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值-1 的特征向量,则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为 下册,P115,5 题

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$. B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$. D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件,且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 下册,P141,9 题

A. $\dfrac{3}{4}$. B. $\dfrac{2}{3}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{5}{12}$.

8. 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2}\right)$,则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 下册,P151,9 题

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$,则 $dz\Big|_{(0,\pi)}=$________. 下册,P54,3 题

10. 曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点$(0,-1)$处的切线方程为________. 下册,P19,8 题

11. 设某厂家生产某产品的产量为 Q,成本 $C(Q)=100+13Q$,该产品的单价为 p,需求量 $Q(p)=\dfrac{800}{p+3}-2$,则该厂家获得最大利润时的产量为________. 下册,P51,13 题

12. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$,则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为________. 下册,P50,5 题

13. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________. 下册,P88,3 题

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$,$k=1,2,3,\cdots$.Y 表示 X 被 3 除的余数,则 $EY=$________. 下册,P156,4 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

已知 a,b 为常数,若$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$ 与$\dfrac{b}{n^a}$在 $n\to\infty$时是等价无穷小,求 a,b. 下册,P13,8 题

16.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值. 下册,P60,2 题

17.(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$满足 $y''+2y'+5y=0$,且 $f(0)=1,f'(0)=-1$.

(1)求 $f(x)$的表达式;

(2)设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)dx$,求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 下册,P84,7 题

18.(本题满分 10 分)

设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$,连续函数 $f(x,y)$满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)dxdy,$$

求$\iint_D xf(x,y)dxdy$. 下册,P67,14 题

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$在区间$[0,2]$上具有连续导数,$f(0)=f(2)=0$,$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.证明:

(1)存在 $\xi\in(0,2)$,使得$|f'(\xi)|\geqslant M$;

(2)若对任意的 $x\in(0,2)$,$|f'(x)|\leqslant M$,则 $M=0$. 下册,P33,3 题

20.(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,其

中 $a\geqslant b$.

(1)求 a,b 的值；

(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 下册，P130，9 题

21.(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1)证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2)若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵. 下册，P114，3 题

22.(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1)求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布；

(2)求 Z_1 与 Z_2 的相关系数. 下册，P159，11 题

23.(本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

(1)求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

(2)任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$. 若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

下册，P166，4 题

答案速查

一、选择题

1. B. 2. C. 3. A. 4. B. 5. C. 6. D. 7. D. 8. C.

二、填空题

9. $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$. 10. $y=x-1$. 11. 8. 12. $\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right)$. 13. $a^2(a^2-4)$. 14. $\frac{8}{7}$.

三、解答题

15. $a=1,b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$. 16. 极小值为 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

17. (1) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{5(1-\mathrm{e}^{-\pi})}=\frac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$.

18. $\frac{3\pi^2}{128}$. 19. 证明略.

20. (1) $a=4,b=1$. (2) $\boldsymbol{Q}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$.

21. (1)证明略. (2) $\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵.

22. (1)

Z_1 \ Z_2	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$.

23. (1) $\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m-s^m}{\theta^m}}$. (2) $\hat{\theta}=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.