2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_______ 分数_______

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$的零点个数为 上册，P33，51 题

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(2)函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于 上册，P71，47 题

(A)$\boldsymbol{i}$. (B)$-\boldsymbol{i}$. (C)$\boldsymbol{j}$. (D)$-\boldsymbol{j}$.

(3)在下列微分方程中，以

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x(C_1,C_2,C_3\text{ 为任意常数})$$

为通解的是 上册，P132，22 题

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$. (B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$. (D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4)设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，下列命题正确的是 上册，P12，29 题

(A)若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛. (B)若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛.

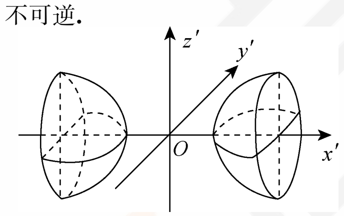
(C)若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛. (D)若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 上册，P152，10 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆. (D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图所示，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为 上册，P197，7 题



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为 上册，P228，22 题

(A)$F^2(x)$. (B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$. (D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则 上册，P234，15 题

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$. (B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$. (D)$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$_______. 上册，P128，7 题

(10)曲线 $\sin xy+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程为_______. 上册，P23，22 题

(11)已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_______. 上册，P114，17 题

(12)设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______. 上册，P102，65 题

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为_______. 上册，P184，8 题

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$_______. 上册，P214，15 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$. 上册，P8，19 题

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分

$$\int_L\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y,$$

其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点(0,0)到点$(\pi,0)$的一段. 上册，P90，41 题

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 求曲线 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点. 上册，P66，32 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$连续.

(Ⅰ)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(Ⅱ)当 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数时，证明

$$G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

也是以 2 为周期的周期函数. 上册，P46，27 题

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和. 上册，P125，46 题

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明：

(Ⅰ)$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A})<2$. 上册，P165，16 题

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解. 上册,P143,8 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle| X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 上册,P227,21 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT. 上册,P238,6 题

答案速查

一、选择题

(1)(B). (2)(A). (3)(D). (4)(B). (5)(C). (6)(B). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)$\frac{1}{x}$. (10)$y=x+1$. (11)$(1,5]$. (12)4π. (13)1. (14)$\frac{1}{2e}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{6}$. (16)$-\frac{1}{2}\pi^2$. (17)最远的点为$(-5,-5,5)$,最近的点为$(1,1,1)$.

(18)证明略. (19)$f(x)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,0\leqslant x\leqslant\pi$;$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

(20)证明略.

(21)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$a\neq0,x_1=\frac{n}{(n+1)a}$. (Ⅲ)$a=0,\boldsymbol{x}=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{2}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$DT=\frac{2}{n(n-1)}$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

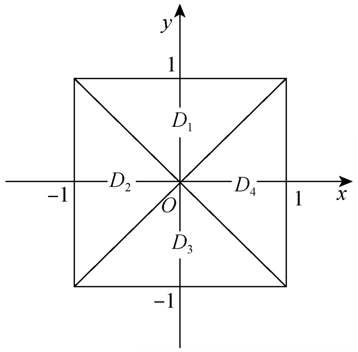
(1)当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则 上册，P15,36 题

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　(B)$a=1,b=\frac{1}{6}$.

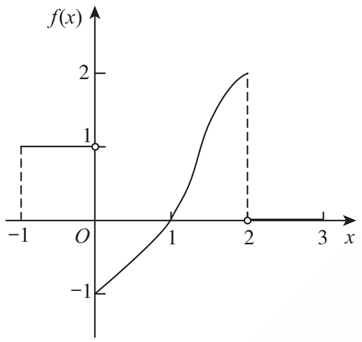
(C)$a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　(D)$a=-1,b=\frac{1}{6}$.

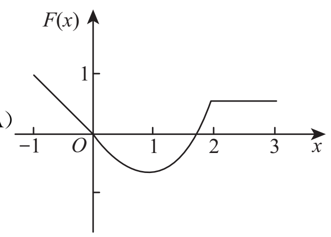
(2)如图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 D_k $(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$ 上册，P73,3 题

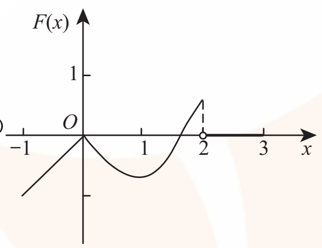
(A)I_1.　(B)I_2.　(C)I_3.　(D)I_4.

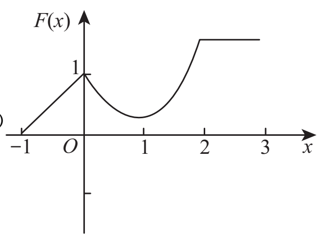


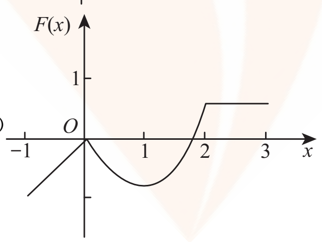
(3)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为 上册，P47,28 题



(A)


(B)


(C)


(D)


(4)设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 上册，P112,11 题

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.　　(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.　　(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 上册，P167,21 题

(A)$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 上册，P149,4 题

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(C)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $EX=$ 上册，P231,7 题

(A)0.　(B)0.3.　(C)0.7.　(D)1.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 上册，P228,23 题

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________. 上册，P59,18 题

(10)若二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$________. 上册，P131,19 题

(11)已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$________. 上册，P82,24 题

(12)设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________. 上册，P81,21 题

(13)若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________. 上册，P184,9 题

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$________. 上册，P243,10 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值. 上册，P64,28 题

(16)(本题满分 9 分)

设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$所围成区域的面积,记$S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求$S_1$与$S_2$的值.

上册,P119,27 题

(17)(本题满分 11 分)

椭球面S_1是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$绕$x$轴旋转而成,圆锥面$S_2$是由过点$(4,0)$且与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$相切的直线绕$x$轴旋转而成.

(Ⅰ)求S_1及S_2的方程;

(Ⅱ)求S_1与S_2之间的立体的体积.

上册,P54,11 题

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数$f(x)$在$x=0$处连续,在$(0,\delta)$ $(\delta>0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则$f'_+(0)$存在,且$f'_+(0)=A$.

上册,P35,58 题

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

上册,P102,66 题

(20)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$的所有向量$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$,证明$\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$线性无关.

上册,P173,10 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,求a的值.

上册,P198,8 题

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球,2 个黑球与 3 个白球.现有放回地从袋中取两次,每次取一个球.以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求$P\{X=1|Z=0\}$;(Ⅱ)求二维随机变量(X,Y)的概率分布.

上册,P219,6 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数$\lambda(\lambda>0)$未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本.

(Ⅰ)求参数λ的矩估计量;(Ⅱ)求参数λ的最大似然估计量.

上册,P242,7 题

答案速查

一、选择题

(1)(A).　(2)(A).　(3)(D).　(4)(C).　(5)(A).　(6)(B).　(7)(C).　(8)(B).

二、填空题

(9)$xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.　(10)$x(1-e^x)+2$.　(11)$\frac{13}{6}$.　(12)$\frac{4}{15}\pi$.　(13)2.　(14)$-1$.

三、解答题

(15)极小值$f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.　(16)$S_1=\frac{1}{2}$;$S_2=1-\ln 2$.

(17)(Ⅰ)S_1的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$;$S_2$的方程为$(x-4)^2-4y^2-4z^2=0$.　(Ⅱ)体积为$\pi$.

(18)证明略.　(19)4π.

(20)(Ⅰ)$\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+C_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+C_1\\\frac{1}{2}-C_1\\2C_1\end{pmatrix}$,其中$C_1$为任意常数;

$\boldsymbol{\xi}_3=C_2(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-C_2\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$,其中$C_2,C_3$为任意常数.

(Ⅱ)证明略.

(21)(Ⅰ)$\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.　(Ⅱ)$a=2$.

(22)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$.

(Ⅱ)

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

(23)(Ⅰ)$\hat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$.　(Ⅱ)$\hat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名________　分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$　　上册，P8，20 题

(A)1.　(B)e.　(C)e^{a-b}.　(D)e^{b-a}.

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$　　上册，P61，22 题

(A)x.　(B)z.　(C)$-x$.　(D)$-z$.

(3)设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性　　上册，P44，19 题

(A)仅与 m 的取值有关.　(B)仅与 n 的取值有关.

(C)与 m,n 的取值都有关.　(D)与 m,n 的取值都无关.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$　　上册，P73，4 题

(A)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　(B)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　(D)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则　　上册，P158，28 题

(A)$r(\boldsymbol{A})=m,r(\boldsymbol{B})=m$.　(B)$r(\boldsymbol{A})=m,r(\boldsymbol{B})=n$.

(C)$r(\boldsymbol{A})=n,r(\boldsymbol{B})=m$.　(D)$r(\boldsymbol{A})=n,r(\boldsymbol{B})=n$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于　　上册，P188，15 题

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant1,\end{cases}$$

则 $P\{X=1\}=$　　上册，P215，16 题

(A)0.　(B)$\dfrac{1}{2}$.

(C)$\dfrac{1}{2}-e^{-1}$.　(D)$1-e^{-1}$.

(8)设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足　　上册，P211，2 题

(A)$2a+3b=4$.　(B)$3a+2b=4$.

(C)$a+b=1$.　(D)$a+b=2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设$\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=\int_0^t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u,\end{cases}$则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.　　上册，P21，17 题

(10)$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$________.　　上册，P43，16 题

(11)已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点是$(-1,0)$，终点为$(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$________.　　上册，P91，42 题

(12)设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$________.　　上册，P107，77 题

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$________.　　上册，P167，22 题

(14)设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $E(X^2)=$________.　　上册，P231，8 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.　　上册，P131，20 题

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.　　上册，P27，34 题

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\text{ 与 }\int_0^1t^n|\ln t|\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$$

的大小，说明理由；

(Ⅱ)记

$$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots),$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.　　上册，P10，26 题

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.　　上册，P115，21 题

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C. 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分. 上册，P95，49 题

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解. 上册，P174，11 题

(21)（本题满分 11 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 上册，P198，9 题

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. 上册，P221，10 题

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数（$i=1,2,3$）. 试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差. 上册，P244，11 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(B). (3)(D). (4)(D). (5)(A). (6)(D). (7)(C). (8)(A).

二、填空题

(9)0. (10)-4π. (11)0. (12)$\dfrac{2}{3}$. (13)6. (14)2.

三、解答题

(15)$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

(16)$f(x)$ 的单调增加区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$；单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$. $f(x)$ 的极小值为 $f(\pm1)=0$；极大值为 $f(0)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(17)（Ⅰ）$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$. 理由略. （Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18)收敛域为 $[-1,1]$；和函数为 $x\arctan x\ (-1\leqslant x\leqslant1)$.

(19)点 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases}2z-y=0,\\ x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1;\end{cases}$ $I=2\pi$.

(20)（Ⅰ）$\lambda=-1,a=-2$. （Ⅱ）$\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(21)（Ⅰ）$\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. （Ⅱ）证明略.

(22)$A=\dfrac{1}{\pi}$；$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$，$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$.

(23)$a_1=0,a_2=a_3=\dfrac{1}{n}$；$DT=\dfrac{(1-\theta)\theta}{n}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名_______　分数_______

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是　下册，P23，2

(A)(1,0).　(B)(2,0).　(C)(3,0).　(D)(4,0).

(2)设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为　下册 P81，2 题

(A)(-1,1].　(B)[-1,1).　(C)[0,2).　(D)(0,2].

(3)设函数 $f(x)$具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$在点(0,0)处取得极小值的一个充分条件是　下册，P61，1 题

(A)$f(0)>1,f''(0)>0$.　(B)$f(0)>1,f''(0)<0$.

(C)$f(0)<1,f''(0)>0$.　(D)$f(0)<1,f''(0)<0$.

(4)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为　下册，P35，1 题

(A)$I<J<K$.　(B)$I<K<J$.

(C)$J<I<K$.　(D)$K<J<I$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$　下册 P116，1 题

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系可为　下册，P124，2 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7)设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$与 $f_2(x)$是连续函数，则必为概率密度的是　下册，P171，1 题

(A)$f_1(x)f_2(x)$.　(B)$2f_2(x)F_1(x)$.

(C)$f_1(x)F_2(x)$.　(D)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$　下册，P184，8 题

(A)$EU\cdot EV$.　(B)$EX\cdot EY$.

(C)$EU\cdot EY$.　(D)$EX\cdot EV$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的弧长 $s=$_______.　下册，P53，5 题

(10)微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$_______.　下册，P70，3 题

(11)设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则$\left.\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$_______.　下册，P54，1 题

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$_______.　下册，P100，1 题

(13)若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$_______.　下册，P149，1 题

(14)设二维随机变量(X,Y)服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$_______.　下册，P181，2 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.　下册，P5，6 题

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f[xy,yg(x)]$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$可导，且在$x=1$ 处取得极值$g(1)=1$. 求$\left.\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.　下册，P58，3 题

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.　下册，P29，1 题

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明对任意的正整数 n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立；

(Ⅱ)设

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots),$$

证明数列$\{a_n\}$收敛.　下册，P9，4 题

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且

$$f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a,$$

其中

$$D=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\},$$

计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

下册，P69，8 题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　下册，P120，1 题

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$. 下册,P146,1 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}. 下册,P176,2 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知,$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计 $\widehat{\sigma^2}$;

(Ⅱ)计算 $E(\widehat{\sigma^2})$ 和 $D(\widehat{\sigma^2})$. 下册,P193,4 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(C). (3)(A). (4)(B). (5)(D). (6)(D). (7)(D). (8)(B).

二、填空题

(9)$\ln(1+\sqrt{2})$. (10)$e^{-x}\sin x$. (11)4. (12)π. (13)1. (14)$\mu(\sigma^2+\mu^2)$.

三、解答题

(15)$e^{-\frac{1}{2}}$. (16)$f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$.

(17)当 $k\leqslant 1$ 时,方程只有一个实根;当 $k>1$ 时,方程有且仅有 3 个不同的实根.

(18)证明略. (19)a.

(20)(Ⅰ)$a=5$. (Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$;$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$;$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21)(Ⅰ)-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,其对应的全部特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,$k_1$ 为任意非零常数;1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,其对应的全部特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$k_2$ 为任意非零常数;0 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,其对应的全部特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$k_3$ 为任意非零常数. (Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ)

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ)$\rho_{XY}=0$.

(23)(Ⅰ)$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$. (Ⅱ)$E(\widehat{\sigma^2})=\sigma^2$,$D(\widehat{\sigma^2})=\frac{2\sigma^4}{n}$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名________　分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为　下册，P25，1 题

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

(2)设函数

$$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n),$$

其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$　下册，P15，1 题

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　(B)$(-1)^n(n-1)!$.

(C)$(-1)^{n-1}n!$.　(D)$(-1)^n n!$.

(3)如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是　下册，P56，5 题

(A)若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(B)若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(C)若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D)若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4)设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\,(k=1,2,3)$，则有　下册，P36，3 题

(A)$I_1<I_2<I_3$.　(B)$I_3<I_2<I_1$.

(C)$I_2<I_3<I_1$.　(D)$I_2<I_1<I_3$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

下册，P118，2 题

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$

下册，P139，4 题

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$　下册，P170，10 题

(A)$\dfrac{1}{5}$.　(B)$\dfrac{1}{3}$.　(C)$\dfrac{2}{3}$.　(D)$\dfrac{4}{5}$.

(8)将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为　下册，P185，11 题

(A)1.　(B)$\dfrac{1}{2}$.　(C)$-\dfrac{1}{2}$.　(D)-1.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$________.

下册，P71，5 题

(10)$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$________.　下册，P40，4 题

(11)$\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$________.　下册，P89，5 题

(12)设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,dS=$________.　下册，P96，1 题

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.　下册，P122，2 题

(14)设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$________.

下册，P168，4 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.　下册，P28，3 题

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.　下册，P61，2 题

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.　下册，P84，6 题

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.　下册，P76，2 题

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)\,dy$.　下册，P92，3 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式$|\boldsymbol{A}|$；

(Ⅱ)当实数a为何值时，方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解. 下册，P126，2 题

(21)(本题满分 11 分)

已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$的秩为 2.

(Ⅰ)求实数a的值；

(Ⅱ)求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f$化为标准形. 下册，P150，4 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求$P\{X=2Y\}$；

(Ⅱ)求$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$. 下册，P175，1 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量X与Y相互独立，且分别服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$，其中σ是未知参数且$\sigma>0$. 记$Z=X-Y$.

(Ⅰ)求Z的概率密度$f(z;\sigma^2)$；

(Ⅱ)设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$为来自总体Z的简单随机样本，求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；

(Ⅲ)证明$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量. 下册，P195，7 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)e^x. (10)$\frac{\pi}{2}$. (11)$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. (12)$\frac{\sqrt{3}}{12}$. (13)2. (14)$\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)证明略.

(16)$f(1,0)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$为$f(x,y)$的极大值；$f(-1,0)=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$为$f(x,y)$的极小值.

(17)收敛域为$(-1,1)$；和函数$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1,\\ 3, & x=0.\end{cases}$

(18)$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$；所求区域的面积为$\frac{\pi}{4}$.

(19)$\frac{\pi}{2}-4$.

(20)(Ⅰ)$1-a^4$. (Ⅱ)当$a=-1$时有无穷多解，其通解为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中$k$为任意常数.

(21)(Ⅰ)$a=-1$. (Ⅱ)正交变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$.

(22)(Ⅰ)$\frac{1}{4}$. (Ⅱ)$-\frac{2}{3}$.

(23)(Ⅰ)$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$，$-\infty<z<+\infty$. (Ⅱ)$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$. (Ⅲ)证明略.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$，则 下册，P4，1 题

(A)$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B)$k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C)$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D)$k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)曲面 $x^2+\cos xy+yz+x=0$ 在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为 下册，P88，1 题

(A)$x-y+z=-2$.　　(B)$x+y+z=0$.

(C)$x-2y+z=-3$.　　(D)$x-y-z=0$.

(3)设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$ 下册，P87，1 题

(A)$\dfrac{3}{4}$.　　(B)$\dfrac{1}{4}$.　　(C)$-\dfrac{1}{4}$.　　(D)$-\dfrac{3}{4}$.

(4)设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y(i=1,2,3,4),$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$ 下册，P91，2 题

(A)I_1.　　(B)I_2.　　(C)I_3.　　(D)I_4.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 下册，P121，3 题

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6)矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为 下册，P138，2 题

(A)$a=0,b=2$.　　(B)$a=0$，b 为任意常数.

(C)$a=2,b=0$.　　(D)$a=2$，b 为任意常数.

(7)设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且

$$X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2),$$
$$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3),$$

则 下册，P172，5 题

(A)$p_1>p_2>p_3$.　　(B)$p_2>p_1>p_3$.　　(C)$p_3>p_1>p_2$.　　(D)$p_1>p_3>p_2$.

(8)设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$ 下册，P189，4 题

(A)α.　　(B)$1-\alpha$.　　(C)2α.　　(D)$1-2\alpha$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)设函数 $y=f(x)$由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$________. 下册，P16，2 题

(10)已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$________. 下册，P71，6 题

(11)设$\begin{cases}x=\sin t,\\y=t\sin t+\cos t\end{cases}$($t$ 为参数)，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________. 下册，P19，1 题

(12)$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________. 下册，P50，1 题

(13)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|\boldsymbol{A}|=$________. 下册，P113，5 题

(14)设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则$P\{Y\leqslant a+1|Y>a\}=$________. 下册，P171，2 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

计算$\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$. 下册，P41，9 题

(16)(本题满分 10 分)

设数列$\{a_n\}$满足条件：

$$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2),$$

$S(x)$是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明 $S''(x)-S(x)=0$；

(Ⅱ)求 $S(x)$的表达式. 下册，P85，7 题

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$的极值. 下册，P61，3 题

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$. 下册，P32，1 题

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面$z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(Ⅰ)求曲面 Σ 的方程；

(Ⅱ)求 Ω 的形心坐标. 下册，P105，4 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

下册，P130，6 题

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$. 下册,P153,6 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ)求 Y 的分布函数;

(Ⅱ)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$. 下册,P173,2 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量. 下册,P191,1 题

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B). (6)(B). (7)(A). (8)(C).

二、填空题

(9)1. (10)$C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数. (11)$\sqrt{2}$. (12)ln 2. (13)-1. (14)$1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

三、解答题

(15)$8-2\pi-4\ln 2$. (16)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$S(x)=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

(17)极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. (18)证明略.

(19)(Ⅰ)$x^2+y^2-2z^2+2z=1$. (Ⅱ)$\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

(20)当且仅当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时,存在满足条件的矩阵 $\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1+k_1+k_2 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

(21)证明略.

(22)(Ⅰ)$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$ (Ⅱ)$\dfrac{8}{27}$.

(23)(Ⅰ)θ 的矩估计量为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. (Ⅱ)$\theta$ 的最大似然估计量为 $\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列曲线中有渐近线的是 下册，P26，3 题

(A) $y=x+\sin x$.　　(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上 下册，P28，2 题

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(3)设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$ 下册，P66，2 题

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(4)若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$

下册，P87，2 题

(A) $2\sin x$.　　(B) $2\cos x$.

(C) $2\pi\sin x$.　　(D) $2\pi\cos x$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=$ 下册，P111，1 题

(A) $(ad-bc)^2$.　　(B) $-(ad-bc)^2$.　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 下册，P118，3 题

(A)必要非充分条件.　　(B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ 下册，P168，3 题

(A) 0.1.　　(B) 0.2.　　(C) 0.3.　　(D) 0.4.

(8)设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$，则 下册，P184，9 题

(A) $EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$.　　(B) $EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$.

(C) $EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$.　　(D) $EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点$(1,0,1)$处的切平面方程为________. 下册，P88，2 题

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________. 下册，P39，1 题

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为 $y=$________. 下册，P70，2 题

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________. 下册，P101，2 题

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________.

下册，P159，1 题

(14)设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $c=$________.

下册，P197，1 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$. 下册，P6，8 题

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程

$$y^3+xy^2+x^2y+6=0$$

确定，求 $f(x)$ 的极值. 下册，P23，5 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式. 下册，P74，2 题

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ 下册，P98，5 题

(19)(本题满分 10 分)

设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(Ⅱ)证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛. 下册，P79，1 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\0 & 1 & -1 & 1\\1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$. 下册,P127,3 题

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\0 & \cdots & 0 & 2\\\vdots & & \vdots & \vdots\\0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似. 下册,P140,7 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(Ⅱ)求 EY. 下册,P174,3 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\0, & x<0,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 EX 与 $E(X^2)$；

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

(Ⅲ)是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$? 下册,P196,9 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(D). (4)(A). (5)(B). (6)(A). (7)(B). (8)(D).

二、填空题

(9)$2x-y-z-1=0$. (10)1. (11) $x\mathrm{e}^{2x+1}$. (12) π. (13) $[-2,2]$. (14) $\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}$. (16)极小值为 $f(1)=-2$. (17)$f(u)=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^{-2u}-4u)$. (18)$-4\pi$. (19)证明略.

(20)(Ⅰ)方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 6 & -1\\-1 & -3 & 1\\-1 & -4 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+(k_1\boldsymbol{\alpha},k_2\boldsymbol{\alpha},k_3\boldsymbol{\alpha})$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(21)证明略.

(22)(Ⅰ)$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\\frac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\\frac{1}{2}+\frac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\1, & y\geqslant 2.\end{cases}$ (Ⅱ)$\frac{3}{4}$.

(23)(Ⅰ)$EX=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$；$E(X^2)=\theta$. (Ⅱ)$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$. (Ⅲ)存在，$a=\theta$. 理由略.

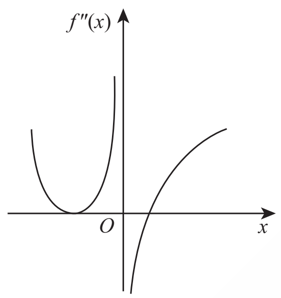
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

2015 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 下册,P23,3 题



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解,则 下册,P73,10 题

(A)$a=-3,b=2,c=-1$. (B)$a=3,b=2,c=-1$.

(C)$a=-3,b=2,c=1$. (D)$a=3,b=2,c=1$.

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 下册,P81,3 题

(A)收敛点,收敛点. (B)收敛点,发散点.

(C)发散点,收敛点. (D)发散点,发散点.

(4)设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 下册,P65,1 题

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$. (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 下册,P126,1 题

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$. (B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$. (D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 下册,P149,2 题

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. (B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件,则 下册,P167,1 题

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$. (B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D)$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8)设随机变量 X,Y 不相关,且 $EX=2,EY=1,DX=3$,则 $E[X(X+Y-2)]=$ 下册,P181,1 题

(A)-3. (B)3. (C)-5. (D)5.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________. 下册,P4,2 题

(10)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________. 下册,P41,6 题

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$________. 下册,P59,6 题

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域,则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________. 下册,P68,5 题

(13)n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$________. 下册,P112,4 题

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$________. 下册,P177,4 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a,b,k 的值. 下册,P12,4 题

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0)=2$,求 $f(x)$ 的表达式. 下册,P76,1 题

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$,曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$,求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数. 下册,P89,6 题

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x),v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式. 下册,P18,8 题

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\z=x,\end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$,计算曲线积分

$$I=\int_L(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z.$$ 下册,P102,3 题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$. 下册,P162,4 题

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值；

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. 下册,P139,5 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布；

(Ⅱ)求 EY. 下册,P182,3 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量；

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量. 下册,P192,3 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(A). (3)(B). (4)(B). (5)(D). (6)(A). (7)(C). (8)(D).

二、填空题

(9)$-\frac{1}{2}$. (10)$\frac{\pi^2}{4}$. (11)$-\mathrm{d}x$. (12)$\frac{1}{4}$. (13)$2^{n+1}-2$. (14)$\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15)$a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$. (16)$f(x)=\frac{8}{4-x},x\in I$. (17)3.

(18)(Ⅰ)证明略.

(Ⅱ)$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

(19)$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. (20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)当 $k=0$ 时,$\boldsymbol{\xi}=c(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$,$c$ 为任意非零常数.

(21)(Ⅰ)$a=4,b=5$. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)$P\{Y=k\}=(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{8}\right)^2,k=2,3,\cdots$. (Ⅱ)16.

(23)(Ⅰ)θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$. (Ⅱ)$\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则 下册，P50，2 题

(A)$a<1$ 且 $b>1$. (B)$a>1$ 且 $b>1$.

(C)$a<1$ 且 $a+b>1$. (D)$a>1$ 且 $a+b>1$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$的一个原函数是 下册，P39，2 题

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ (B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3)若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$的两个解，则 $q(x)=$ 下册，P72，9 题

(A)$3x(1+x^2)$. (B)$-3x(1+x^2)$.

(C)$\frac{x}{1+x^2}$. (D)$-\frac{x}{1+x^2}$.

(4)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则 下册，P16，4 题

(A)$x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点. (B)$x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点.

(C)$f(x)$在 $x=0$ 处连续但不可导. (D)$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

(5)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是 下册，P140，6 题

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似. (B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似. (D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 下册，P162，3 题

(A)单叶双曲面. (B)双叶双曲面.

(C)椭球面. (D)柱面.

(7)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$，则 下册，P172，4 题

(A)p 随着 μ 的增加而增加. (B)p 随着 σ 的增加而增加.

(C)p 随着 μ 的增加而减少. (D)p 随着 σ 的增加而减少.

(8)随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1，A_2，A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为 下册，P185，12 题

(A)$-\frac{1}{2}$. (B)$-\frac{1}{3}$. (C)$\frac{1}{3}$. (D)$\frac{1}{2}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________. 下册，P4，3 题

(10)向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$________. 下册，P104，1 题

(11)设函数 $f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________. 下册，P59，7 题

(12)设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$________. 下册，P21，5 题

(13)行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________. 下册，P112，2 题

(14)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________. 下册，P199，3 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 下册，P69，7 题

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

(Ⅰ)证明反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(Ⅱ)若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值. 下册，P50，4 题

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$的最小值. 下册，P95，4 题

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ 下册，P98，6 题

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛；

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$. 下册，P80，2 题

(20)(本题满分 11 分)

2016 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}.$$

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程. 下册，P128，4 题

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合. 下册，P145，2 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\0, & X>Y.\end{cases}$$

(Ⅰ)写出(X,Y)的概率密度；

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F_Z(z)$. 下册，P179，3 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$为未知参数. X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令

$$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}.$$

(Ⅰ)求 T 的概率密度；

(Ⅱ)确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计. 下册，P198，2 题

答案速查

一、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(A). (4)(D). (5)(C). (6)(B). (7)(B). (8)(A).

二、填空题

(9)$\frac{1}{2}$. (10)$\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$. (11)$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$. (12)$\frac{1}{2}$. (13)$4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$. (14)$(8.2,10.8)$.

三、解答题

(15)$\frac{32}{3}+5\pi$. (16)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\frac{3}{k}$. (17)$I(t)=\mathrm{e}^{2-t}+t$；$I(2)=3$ 是 $I(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的最小值.

(18)$\frac{1}{2}$. (19)证明略. (20)当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$；当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有无穷多解，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数；当$a=-2$时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

(21)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^{99}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$. (Ⅱ)$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$

(22)(Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)U 与 X 不相互独立；理由略.

(Ⅲ)$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\\frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\1, & z\geqslant2.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_T(z)=\begin{cases}\dfrac{9z^8}{\theta^9}, & 0<z<\theta,\\0, & 其他.\end{cases}$ (Ⅱ)$a=\frac{10}{9}$时，aT 为 θ 的无偏估计.

2017 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名_______　分数_______

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则　下册，P13，1 题

(A)$ab=\dfrac{1}{2}$.　(B)$ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C)$ab=0$.　(D)$ab=2$.

(2)设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则　下册，P27，1 题

(A)$f(1)>f(-1)$.　(B)$f(1)<f(-1)$.

(C)$|f(1)|>|f(-1)|$.　(D)$|f(1)|<|f(-1)|$.

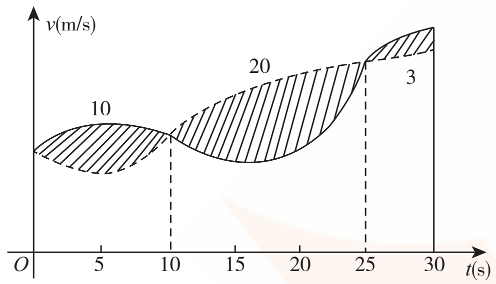
(3)函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为　下册，P89，4 题

(A)12.　(B)6.　(C)4.　(D)2.

(4)甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处. 图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10，20，3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位：s)，则　下册，P53，7 题

(A)$t_0=10$.　(B)$15<t_0<20$.

(C)$t_0=25$.　(D)$t_0>25$.



(5)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则　下册，P116，3 题

(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(B)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C)$\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　(D)$\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则　下册，P137，1 题

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7)设 A,B 为随机事件. 若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是　下册，P168，5 题

(A)$P(B|A)>P(B|\overline{A})$.　(B)$P(B|A)<P(B|\overline{A})$.

(C)$P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$.　(D)$P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$.

(8)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是　下册，P188，1 题

(A)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　(B)$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C)$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　(D)$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________.　下册，P21，6 题

(10)微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________.　下册，P71，4 题

(11)若曲线积分 $\int_L \dfrac{x\,\mathrm{d}x-ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$________.　下册，P94，1 题

(12)幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________.　下册，P84，5 题

(13)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________.　下册，P122，1 题

(14)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$________.　下册，P183，5 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.　下册，P57，2 题

(16)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.　下册，P7，1 题

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.　下册，P24，6 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.　下册，P30，2 题

(19)(本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(Ⅰ)求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(Ⅱ)求 S 的质量 M. 下册,P106,6 题

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解. 下册,P131,8 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$,在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 下册,P150,3 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant EY\}$；

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度. 下册,P179,2 题

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度；

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量. 下册,P195,8 题

答案速查

一、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(C). (5)(A). (6)(B). (7)(A). (8)(B).

二、填空题

(9)0. (10)$e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$,其中 C_1,C_2 为任意常数. (11)-1. (12)$\frac{1}{(1+x)^2}$.

(13)2. (14)2.

三、解答题

(15)$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}$;$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}+\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}-\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}$. (16)$\frac{1}{4}$.

(17)$y(-1)=0$ 是 $y(x)$ 的极小值;$y(1)=1$ 是 $y(x)$ 的极大值. (18)证明略.

(19)(Ⅰ)所求方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0.\end{cases}$ (Ⅱ)$M=64$.

(20)(Ⅰ)证明略. (Ⅱ)$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,其中 k 为任意常数.

(21)$a=2$;$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. (22)(Ⅰ)$\frac{4}{9}$. (Ⅱ)$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)(Ⅰ)$f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$ (Ⅱ)矩估计量 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$. (Ⅲ)最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

2018 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1)下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 下册，P16，3 题

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$. (B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$. (D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2)过点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为 下册，P88，3 题

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$. (B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$. (D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$ 下册，P83，3 题

(A) $\sin 1+\cos 1$. (B) $2\sin 1+\cos 1$.

(C) $2\sin 1+2\cos 1$. (D) $2\sin 1+3\cos 1$.

(4)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，则 下册，P35，2 题

(A) $M>N>K$. (B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$. (D) $K>N>M$.

(5)下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 下册，P142，9 题

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\ \ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则 下册，P123，3 题

(A) $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$. (B) $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$. (D) $r(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7)设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=$ 下册，P169，9 题

(A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

(8)设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检验假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则 下册，P200，4 题

(A)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D)如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$________. 下册，P7，10 题

(10)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数. 若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$________. 下册，P41，8 题

(11)设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________. 下册，P104，2 题

(12)设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xy\mathrm{d}s=$________. 下册，P91，1 题

(13)设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________. 下册，P113，7 题

(14)设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\varnothing$. 若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$________. 下册，P168，6 题

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$. 下册，P39，3 题

(16)(本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值. 下册，P64，7 题

(17)(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

下册，P98，7 题

(18)(本题满分 10 分)

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(Ⅰ)若 $f(x)=x$，求方程的通解；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解. 下册，P75，5 题

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 下册，P10，5 题

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形. 下册，P157，1 题

(21)(本题满分 11 分)

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a；

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$. 下册,P129,5 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$,$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ)求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ)求 Z 的概率分布. 下册,P178,1 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ)求 $\hat{\sigma}$;

(Ⅱ)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$. 下册,P193,5 题

答案速查

一、选择题

(1)(D). (2)(B). (3)(B). (4)(C). (5)(A). (6)(A). (7)(A). (8)(D).

二、填空题

(9)-2. (10)$2(\ln 2-1)$. (11)$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$. (12)$-\frac{\pi}{3}$. (13)$-1$. (14)$\frac{1}{4}$.

三、解答题

(15)$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{6}(\mathrm{e}^x+2)\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$,其中 C 为任意常数. (16)$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\ \mathrm{m}^2$.

(17)$\frac{14\pi}{45}$. (18)(Ⅰ)$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+x-1$(C_1 为任意常数). (Ⅱ)证明略.

(19)证明略;$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20)(Ⅰ)当 $a\neq2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;当 $a=2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

(Ⅱ)当 $a\neq2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;当 $a=2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(21)(Ⅰ)2. (Ⅱ)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3\\-1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数,$k_2\neq k_3$.

(22)(Ⅰ)λ. (Ⅱ)$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$;$P\{Z=n\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{|n|}}{2\cdot|n|!}$,$n=\pm1,\pm2,\cdots$.

(23)(Ⅰ)$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$. (Ⅱ)$E\hat{\sigma}=\sigma$,$D\hat{\sigma}=\frac{\sigma^2}{n}$.

2019 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=$ 下册,P11,1 题

A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x|x|, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 下册,P22,1 题

A. 可导点,极值点. B. 不可导点,极值点.
C. 可导点,非极值点. D. 不可导点,非极值点.

3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是 下册,P78,3 题

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$. B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$.
C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

4. 设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面($y>0$)内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,那么函数 P(x,y) 可取为 下册,P94,2 题

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$. B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.
C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$. D. $x-\dfrac{1}{y}$.

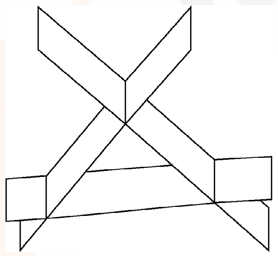
5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 下册,P158,2 题

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.
C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6. 如图所示,有 3 张平面两两相交,交线相互平行,它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$,则 下册,P161,2 题



A. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.
B. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.
C. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.
D. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.

7. 设 A,B 为随机事件,则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 下册,P167,2 题

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. B. $P(AB)=P(A)P(B)$.
C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$. D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P\{|X-Y|<1\}$ 下册,P172,6 题

A. 与 μ 无关,而与 σ^2 有关. B. 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.
C. 与 μ,σ^2 都有关. D. 与 μ,σ^2 都无关.

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导,$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________. 下册,P57,1 题

10. 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$________. 下册,P70,1 题

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$________. 下册,P83,4 题

12. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________. 下册,P97,4 题

13. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________. 下册,P125,3 题

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,EX 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)>EX-1\}=$________. 下册,P171,3 题

三、解答题:15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(1)求 $y(x)$;

(2)求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点. 下册,P75,3 题

16.(本题满分 10 分)

设 a,b 为实数,函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点(3,4)处的方向导数中,沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大,最大值为 10.

(1)求 a,b;

(2)求曲面 $z=2+ax^2+by^2$($z\geqslant 0$)的面积. 下册,P104,3 题

17.(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积. 下册,P52,2 题

18.(本题满分 10 分)

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

(1)证明:数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$;

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. 下册,P8,3 题

19.(本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体,求 Ω 的形心坐标. 下册,P105,5 题

20.(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1)求 a,b,c;

(2)证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵. 下册,P163,5 题

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 x,y;

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 下册,P143,10 题

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 服从参数为 1 的指数分布,Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$,令 $Z=XY$.

(1)求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时,X 与 Z 不相关?

(3) X 与 Z 是否相互独立? 下册,P187,2 题

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数,$\sigma>0$ 是未知参数,A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求 A;

(2)求 σ^2 的最大似然估计量. 下册,P194,6 题

答案速查

一、选择题

1. C. 2. B. 3. D. 4. D. 5. C. 6. A. 7. C. 8. A.

二、填空题

9. $\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$. 10. $\sqrt{3e^x-2}$. 11. $\cos\sqrt{x}$. 12. $\dfrac{32}{3}$. 13. $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$. 14. $\dfrac{2}{3}$.

三、解答题

15. (1) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.(2) 曲线 $y=y(x)$ 在$(-\sqrt{3},0)$及$(\sqrt{3},+\infty)$内是凹的,在$(-\infty,-\sqrt{3})$及$(0,\sqrt{3})$内是凸的. 拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$,$(0,0)$,$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

16. (1) $a=-1,b=-1$. (2) $\dfrac{13\pi}{3}$.

17. $\dfrac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$.

18. (1) 略. (2) 1.

19. $\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20. (1) $a=3,b=2,c=-2$. (2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$.

21. (1) $x=3,y=-2$. (2) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

22. (1) $f_Z(z)=\begin{cases}pe^z, & z<0,\\ (1-p)e^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$ (2) $p=\dfrac{1}{2}$. (3) X 与 Z 不相互独立.

23. (1) $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$. (2) $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学一试题

姓名________ 分数________

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是 下册,P11,2 题

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\, dt$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则 下册,P17,5 题

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f(0,0)=0$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$,非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,则 下册,P56,6 题

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径,r 是实数,则 下册,P82,4 题

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$.　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时,$|r|\leqslant R$.

C. 当 $|r|\geqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散.　D. 当 $|r|\leqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$,则 下册,P117,2 题

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.　B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$.　D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

6. 已知直线 $l_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点. 记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$,$i=1,2,3$,则 下册,P161,1 题

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件,且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 下册,P169,7 题

A. $\frac{3}{4}$.　B. $\frac{2}{3}$.　C. $\frac{1}{2}$.　D. $\frac{5}{12}$.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本,其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为 下册,P199,1 题

A. $1-\Phi(1)$.　B. $\Phi(1)$.　C. $1-\Phi(0.2)$.　D. $\Phi(0.2)$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$______. 下册,P4,4 题

10. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$______. 下册,P20,2 题

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$,且 $f(0)=m,f'(0)=n$,则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=$______. 下册,P75,4 题

12. 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$,则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=$______. 下册,P55,2 题

13. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$______. 下册,P112,3 题

14. 设 X 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布,$Y=\sin X$,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$______. 下册,P185,10 题

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值. 下册,P62,4 题

16.(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}dy$,其中 L 是 $x^2+y^2=2$,方向为逆时针方向.

下册,P92,4 题

17.(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$,证明:当 $|x|<1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 收敛,并求其和函数.

下册,P86,9 题

18.(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧,$f(x)$ 是连续函数,计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy.$$

下册,P99,9 题

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$；

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$. 下册，P33，3 题

20.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 下册，P155，8 题

21.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵. 下册，P138，3 题

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$. $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量(X_1,Y)的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布. 下册，P180，4 题

23.（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$. 若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

下册，P191，2 题

答案速查

一、选择题

1. D.　2. C.　3. A.　4. A.　5. B.　6. C.　7. D.　8. B.

二、填空题

9. -1.　10. $-\sqrt{2}$.　11. $am+n$.　12. 4e.　13. $a^2(a^2-4)$.　14. $\dfrac{2}{\pi}$.

三、解答题

15. 极小值为 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

16. $I=\pi$.

17. 证明略.　$S(x)=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)$.

18. $I=\dfrac{14}{3}\pi$.

19. 略.

20. (1) $a=4,b=1$.　(2) $\boldsymbol{Q}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-3&-4\end{pmatrix}$.

21. (1) 略.　(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵.

22. (1) (X_1,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})$.　(2) 略.

23. (1) $P\{T>t\}=\mathrm{e}^{-\frac{t^n}{\theta^m}}$；$P\{T>s+t\mid T>s\}=\mathrm{e}^{-\frac{(s+t)^m-s^m}{\theta^m}}$.　(2) $\hat{\theta}=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学一试题