

## Exemple - Teoria ordinii parțiale

- ▶  $\mathcal{L}_{\leq} = (\leq, \emptyset, \emptyset) = (\leq)$
- ▶  $\mathcal{L}_{\leq}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, \leq)$ , unde  $\leq$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \leq x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z) \end{aligned}$$

### Definiție

Teoria ordinii parțiale este

$$T := Th((REFL), (ANTISIM), (TRANZ)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile parțial ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine parțială.

1

## Exemple - Teoria ordinii stricte

- ▶  $\mathcal{L}_{<} = (<, \emptyset, \emptyset) = (<)$
- ▶  $\mathcal{L}_{<}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, <)$ , unde  $<$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg (x < x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \end{aligned}$$

### Definiție

Teoria ordinii stricte este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile strict ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine strictă.

2

## Exemple - Teoria ordinii totale

Considerăm următorul enunț:

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x = y \vee x < y \vee y < x)$$

### Definiție

Teoria ordinii totale este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile total (liniar) ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine totală.

3

## Exemple - Teoria ordinii dense

Considerăm următorul enunț:

$$(DENS) := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

### Definiție

Teoria ordinii dense este

$$T := Th((IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui  $T$  sunt mulțimile dens ordonate.
- ▶  $T$  axiomatizează clasa relațiilor de ordine densă.

4

## Exemple - Teoria grafurilor

- ▶  $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- ▶  $\mathcal{L}_{Graf}$ -structurile sunt  $\mathcal{A} = (A, E)$ , unde  $E$  este relație binară.

Considerăm următoarele enunțuri:

$$(IREFL) := \forall x \neg \dot{E}(x, x)$$

$$(SIM) := \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \rightarrow \dot{E}(y, x)).$$

### Definiție

Teoria grafurilor este

$$T := Th((IREFL), (SIM)).$$

- ▶  $T$  este finit axiomatizabilă;
- ▶ modelele lui  $T$  sunt grafurile.

5

## Exemple

Pentru orice  $n \geq 2$ , notăm următorul enunț cu  $\exists^{\geq n}$ :

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \dots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \left( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

### Propoziția 2.56

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

**Dem.:** Exercițiu ușor.

6

## Exemple

### Notății

- ▶ Pentru uniformitate, notăm  $\exists^{\geq 1} := \exists x (x = x)$ .
- ▶  $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- ▶  $\exists^n := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

### Propoziția 2.57

Pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$  și orice  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} \iff \mathcal{A} \text{ are cel mult } n \text{ elemente}$$

$$\mathcal{A} \models \exists^n \iff \mathcal{A} \text{ are exact } n \text{ elemente.}$$

**Dem.:** Exercițiu ușor.

### Propoziția 2.58

Fie  $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$ . Atunci pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \models T \iff \mathcal{A} \text{ este mulțime infinită.}$$

**Dem.:** Exercițiu ușor.

7

## Teorema de compacitate

### Teorema de compacitate 2.59

O mulțime de enunțuri  $\Gamma$  este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- ▶ unul din cele mai importante rezultate ale logicii de ordinul întâi
- ▶ este punctul de pornire al teoriei modelelor, unul din domeniile principale ale logicii matematice

8

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul întâi.

**Propoziția 2.60**

Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri  $\Gamma$  astfel încât

(\*) pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$  este finită.

**Dem.:** Presupunem prin reducere la absurd că există  $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$  a.î. (\*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură finită a.î.  $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$ . Atunci  $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$  pentru orice  $i = 1, \dots, k$  și  $\mathcal{A} \models \Gamma$  deoarece  $\mathcal{A}$  este finită.

9

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model  $\mathcal{B}$ .

Deoarece  $\mathcal{B} \models \Gamma$ ,  $\mathcal{B}$  este finită.

Deoarece  $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$ , rezultă că  $\mathcal{B}$  este infinită.

Am obținut o contradicție. □

**Corolarul 2.61**

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_{=}$ .

10

**Propoziția 2.62**

Clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

**Dem.:** Notăm cu  $\mathcal{K}_{Inf}$  clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor infinite.

Conform Propoziției 2.58, pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e infinit axiomatizabilă.

11

Presupunem că  $\mathcal{K}_{Inf}$  este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie  $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ . Atunci  $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$ .

Rezultă că pentru orice  $\mathcal{L}$ -structură  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa  $\mathcal{L}$ -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 2.60. □

**Corolarul 2.63**

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_{=}$ .

12

**Definiția 2.64**

Fie  $\mathcal{L} = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}; \text{ari}_{\mathcal{L}})$  și  $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}; \text{ari}_{\mathcal{L}^+})$  două limbaje. Spunem că  $\mathcal{L}^+$  este **extensie** a lui  $\mathcal{L}$  sau că  $\mathcal{L}$  este **sublimbaj** al lui  $\mathcal{L}^+$  dacă

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}^+}; \quad \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{L}^+}$$

și  $\text{ari}_{\mathcal{L}}$  este restricția lui  $\text{ari}_{\mathcal{L}^+}$  la simbolurile nelogice ale lui  $\mathcal{L}$ .

**Notăție:**  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$

**Exemple**

- $\mathcal{L}_= \subseteq \mathcal{L}$  pentru orice limbaj  $\mathcal{L}$
- $\mathcal{L}_{<} = (\dot{<}) \subseteq (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}) \subseteq \mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$

13

Dacă  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ , atunci orice termen (formulă) din  $\mathcal{L}$  este termen (formulă) în  $\mathcal{L}^+$ .

**Definiția 2.65**

Fie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ ,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $\mathcal{A}^+$  o  $\mathcal{L}^+$ -structură.

Spunem că  $\mathcal{A}$  este  **$\mathcal{L}$ -redușă** lui  $\mathcal{A}^+$  sau că  $\mathcal{A}^+$  este o  **$\mathcal{L}^+$ -extensie** lui  $\mathcal{A}$  dacă

- ▶  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}^+|$ ;
- ▶ pentru orice  $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ ,  $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}^+}$ ;
- ▶ pentru orice  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ,  $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}^+}$ ;
- ▶ pentru orice  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ,  $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}^+}$ .

**Notăție:**  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \upharpoonright \mathcal{L}$

**Exemplu**

$(\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$  are redusele  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{N}, S, 0)$ ,  $(\mathbb{N}, <)$ .

14

**Propoziția 2.66**

Fie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$ ,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $\mathcal{A}^+$  o  $\mathcal{L}^+$ -extensie a sa. Pentru orice enunț  $\varphi$  al lui  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A}^+ \models \varphi.$$

15

**Definiția 2.66**

Fie  $A$  o mulțime nevidă. O relație de **bună ordonare** pe  $A$  este o relație de ordine totală  $<$  pe  $A$  cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui  $A$  are minim.

Spunem că  $(A, <)$  este mulțime **bine ordonată**.

**Exemple**

$(\mathbb{N}, <)$  este bine ordonată, dar  $(\mathbb{Z}, <)$  nu este bine ordonată.

16

**Propoziția 2.67**

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în  $\mathcal{L}_{<}$ .

**Dem.:** Fie  $\mathcal{K}$  clasa  $\mathcal{L}_{<}$ -structurilor  $\mathcal{A} = (A, <)$  a.î.  $(A, <)$  este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că  $\mathcal{K}$  este axiomatizabilă, deci că există  $\Gamma$  o mulțime de enunțuri ale lui  $\mathcal{L}_{<}$  a.î.  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Gamma)$ .

Fie  $\mathcal{L}$  extensia lui  $\mathcal{L}_{<}$  obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă  $c_n, n \in \mathbb{N}$ . Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că  $\Delta$  este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie  $\Delta_0$  o submulțime finită a lui  $\Delta$ . Atunci

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită} \\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n = 0, \dots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Fie  $(A, <)$  o mulțime infinită bine ordonată. Definim

$$a_{M+1} := \min A, \quad a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}, \dots,$$

$$a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \dots, a_1\}. \text{ Atunci } a_{M+1} < a_M < \dots < a_0.$$

Fie  $\mathcal{A}^+$  extensia lui  $\mathcal{A} = (A, <)$  la  $\mathcal{L}$  obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \dots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci  $\mathcal{A}^+ \models \Delta_0$ .

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model  $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$  (deci  $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ).

Deoarece  $\mathcal{B}^+ \models \Gamma$ , rezultă că  $(B, <)$  este bine ordonată.

Deoarece  $\mathcal{B}^+ \models \{c_{n+1} < c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  rezultă că  $b_{n+1} < b_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție. □