

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} .

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- ▶ e **satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. **Notăție:** $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.
- ▶ e **nu satisface** φ în \mathcal{A} dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. **Notăție:** $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.

Corolarul 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

- (i) $\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ implică } \mathcal{A} \models \psi[e]$
 $\iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e] \iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

1

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

- (i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor.

Corolarul 2.15

- (i) $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (ii) $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iii) $\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \psi[e]$.
- (iv) $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e] \iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

2

Fie φ formulă a lui \mathcal{L} .

Definiția 2.16

Spunem că φ este **adevărată** într-o \mathcal{L} -structură \mathcal{A} dacă pentru orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Spunem și că \mathcal{A} **satisface** φ sau că \mathcal{A} este un **model** al lui φ .

Notăție: $\mathcal{A} \models \varphi$

Definiția 2.17

Spunem că φ este formulă **universal adevărată** sau (**logic**) **validă** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \models \varphi.$$

Notăție: $\models \varphi$

3

Fie φ, ψ formule ale lui \mathcal{L} .

Definiția 2.18

φ și ψ sunt **logic echivalente** dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Definiția 2.19

ψ este **consecință semantică** a lui φ dacă pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$,

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[e].$$

Notăție: $\varphi \models \psi$

Observație

- (i) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models \varphi \rightarrow \psi$.
- (ii) $\varphi \models \psi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

4

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y ,

$$\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi \quad (1)$$

$$\neg \forall x \varphi \models \exists x \neg \varphi \quad (2)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad (3)$$

$$\forall x \varphi \vee \forall x \psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \quad (4)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi \quad (5)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad (6)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (7)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi \quad (8)$$

$$\forall x \varphi \models \exists x \varphi \quad (9)$$

$$\varphi \models \exists x \varphi \quad (10)$$

$$\forall x \varphi \models \varphi \quad (11)$$

$$\forall x \forall y \varphi \models \forall y \forall x \varphi \quad (12)$$

$$\exists x \exists y \varphi \models \exists y \exists x \varphi \quad (13)$$

$$\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi. \quad (14)$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice termeni s, t, u ,

$$(i) \models t = t;$$

$$(ii) \models s = t \rightarrow t = s;$$

$$(iii) \models s = t \wedge t = u \rightarrow s = u.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.22

Pentru orice $m \geq 1, f \in \mathcal{F}_m, R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \dots, m$,

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m \quad (15)$$

$$\models (t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m) \rightarrow (Rt_1 \dots t_m \leftrightarrow Ru_1 \dots u_m). \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \models ((t_1 = u_1) \wedge \dots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \models (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \dots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \models (ft_1 \dots t_m = fu_1 \dots u_m)[e]$.

Definiția 2.23

Fie $\varphi = \varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui \mathcal{L} și x o variabilă.

- spunem că variabila x **apare legată pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. (i, j) -subexpresia lui φ este o subformulă a lui φ de forma $\forall x \psi$;
- spunem că x **apare liberă pe poziția k** în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ ;
- x este **variabilă legată** (*bounded variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ ;
- x este **variabilă liberă** (*free variable*) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ .

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \rightarrow x = z$. Variabile libere: x, y, z . Variabile legate: x .

Notăție: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ .

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \rightarrow \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Notăție: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

9

Propoziția 2.24

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice termen t ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Propoziția 2.25

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$, pentru orice formulă φ ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2].$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

10

Propoziția 2.26

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (17)$$

$$\varphi \models \forall x\varphi \quad (18)$$

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (19)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi \quad (20)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \exists x\psi \quad (21)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (22)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (23)$$

$$\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \exists x\psi \quad (24)$$

$$\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \models \exists x\psi \rightarrow \varphi \quad (25)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (26)$$

Dem.: Exercițiu.

11

Notăție

Fie $t(x_1, \dots, x_n)$ un termen. Scriem

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de $t^{\mathcal{A}}(e)$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î.
 $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.

Notăție

Fie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ o formulă. Scriem

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

în loc de $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, unde $e : V \rightarrow A$ este o (orice) interpretare a.î.
 $e(x_1) = a_1, \dots, e(x_n) = a_n$.

12

Definiția 2.27

O formulă φ se numește **enunț** (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notăție: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui \mathcal{L} .

Propoziția 2.28

Dacă φ este un enunț, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e_2]$$

pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \rightarrow A$.

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.25 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. \square

Exemplu

- ▶ $\models \exists x(x = x)$;
- ▶ $\mathcal{A} \not\models \neg \exists x(x = x)$ pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} .

13

Noțiunea de **tautologie** se poate aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectivelor \neg, \rightarrow .

Definiția 2.29

O \mathcal{L} -evaluare (de adevăr) este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ ,

- ▶ $F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;
- ▶ $F(\varphi \rightarrow \psi) = F(\varphi) \rightarrow F(\psi)$.

Propoziția 2.30

Pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} și orice evaluare $e : V \rightarrow A$, funcția

$$V_{e, \mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow \{0, 1\}, \quad V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o \mathcal{L} -evaluare.

Dem.: Exercițiu ușor.

14

Definiția 2.31

φ este **tautologie** dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice \mathcal{L} -evaluare F .

Propoziția 2.32

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e, \mathcal{A}}$ este \mathcal{L} -evaluare, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e, \mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. \square

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu e tautologie.

15