

### Propoziția 1.14

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$\varphi$  are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\varphi$  satisface (\*).

Demonstrăm că orice formulă  $\varphi$  are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$ . Atunci  $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$ .

### Propoziția 1.14

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$  și  $\psi$  satisface **P**. Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.î.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\varphi)$ . Deoarece  $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\psi)$ . Așadar, aplicând **P** pentru  $\psi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisface **P**.

### Propoziția 1.14

Pentru orice formulă  $\varphi$  și orice evaluări  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

**Dem.:** (continuare)

- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$  și  $\psi, \chi$  satisfac **P**. Fie  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  a.î.  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\varphi)$ . Deoarece  $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$  și  $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ , rezultă că  $e_1(v) = e_2(v)$  pentru orice  $v \in \text{Var}(\psi) \cap \text{Var}(\chi)$ . Așadar, aplicând **P** pentru  $\psi$  și  $\chi$ , obținem că  $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$  și  $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$ . Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci  $\varphi$  satisface **P**. □

Fie  $\varphi$  o formulă.

### Definiția 1.15

- O evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este **model** al lui  $\varphi$  dacă  $e^+(\varphi) = 1$ . **Notație:**  $e \models \varphi$ .
- $\varphi$  este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă  $\varphi$  nu este satisfiabilă, spunem și că  $\varphi$  este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- $\varphi$  este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui  $\varphi$ . **Notație:**  $\models \varphi$ .

**Notație:** Mulțimea tuturor modelelor lui  $\varphi$  se notează  $\text{Mod}(\varphi)$ .

### Propoziția 1.16

- (i)  $\varphi$  este tautologie dacă  $\neg\varphi$  este nesatisfiabilă.
- (ii)  $\varphi$  este nesatisfiabilă dacă  $\neg\varphi$  este tautologie.

**Dem.:** Exercițiu.

### Propoziție

Există o mulțime numărabilă de formule  $\varphi$  a.î. atât  $\varphi$  cât și  $\neg\varphi$  sunt satisfiabile.

**Dem.:** Demonstrăm că mulțimea  $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Form}$  satisface condiția din enunț. Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Considerăm interpretările  $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$  definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci  $e_1 \models \varphi_n$ . Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci  $e_2 \models \neg\varphi_n$ . □

5

Fie  $\varphi$  o formulă arbitrară și  $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $e^+(\varphi)$  depinde doar de  $e(x_1), \dots, e(x_k)$ , conform Propoziției 1.14.

Așadar,  $e^+(\varphi)$  depinde doar de restricția lui  $e$  la  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ :

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt  $2^k$  de astfel de funcții posibile  $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$ . Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$ subformule ale lui $\varphi \dots$	$\varphi$
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\dots$	$e'_1(x_k)$	$\dots$	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\dots$	$e'_2(x_k)$	$\dots$	$e'^+_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\dots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\dots$	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice  $i$ ,  $e'^+_i(\varphi)$  se definește similar cu Teorema 1.12

$\varphi$  este tautologie ddacă  $e'^+_i(\varphi) = 1$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, 2^k\}$ .

6

### Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că  $\models \varphi$ .

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

$v_1$	$v_2$	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	$\varphi$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

7

### Definiția 1.17

Fie  $\varphi, \psi$  două formule. Spunem că

- ▶  $\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\psi$  dacă  $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ . **Notație:**  $\psi \models \varphi$ .
- ▶  $\varphi$  și  $\psi$  sunt **(logic) echivalente** dacă  $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$ . **Notație:**  $\varphi \sim \psi$ .

### Observație

Relația  $\sim$  este o relație de echivalență pe mulțimea  $\text{Form}$  a formulelor lui  $LP$ .

### Propoziția 1.18

Fie  $\varphi, \psi$  formule. Atunci

- (i)  $\psi \models \varphi$  ddacă  $\models \psi \rightarrow \varphi$ .
- (ii)  $\psi \sim \varphi$  ddacă  $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$  ddacă  $\models \psi \leftrightarrow \varphi$ .

**Dem.:** Exercițiu.

8

Propoziția 1.19

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$ ,

- |                             |  |     |
|-----------------------------|--|-----|
| terțul exclus               | $\models \varphi \vee \neg\varphi$   | (1) |
| modus ponens                | $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$                                     | (2) |
| afirmarea concluziei        | $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$  | (3) |
| contradicția                | $\models \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$   | (4) |
| dubla negație               | $\varphi \sim \neg\neg\varphi$   | (5) |
| contrapoziția               | $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$                             | (6) |
| negarea premisei            | $\neg\varphi \models \varphi \rightarrow \psi$   | (7) |
| modus tollens               | $\neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg\varphi$                             | (8) |
| tranzitivitatea implicației | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$ | (9) |

9

legile lui de Morgan  $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$  (10)

$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$  (11)

exportarea și importarea  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$  (12)

idempotența  $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$  (13)

slăbirea  $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$  (14)

comutativitatea  $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$  (15)

asociativitatea  $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$  (16)

$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$  (17)

absorbția  $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$  (18)

$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$  (19)

distributivitatea  $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$  (20)

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$  (21)

10

- |   |      |
|---|------|
| $\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$  | (22) |
| $\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$  | (23) |
| $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$   | (24) |
| $\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$   | (25) |
| $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (26) |
| $\neg\varphi \sim \varphi \rightarrow \neg\varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | (27) |
| $\varphi \rightarrow \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$  | (28) |
| $\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$  | (29) |
| $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$  | (30) |
| $\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg\varphi \rightarrow \psi)$  | (31) |
| $\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | (32) |
| $\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$   | (33) |
| $\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$   | (34) |

Dem.: Exercițiu.

11

Demonstrăm (1):  $\models \varphi \vee \neg\varphi$ .

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că  $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$ . Observăm că  $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$ . Putem demonstra că  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$  în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$ . Atunci  $\neg e^+(\varphi) = 0$  și, prin urmare,  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ .
- $e^+(\varphi) = 0$ . Atunci  $\neg e^+(\varphi) = 1$  și, prin urmare,  $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ .

□

12

### Definiția 1.20

Pentru orice formule  $\varphi, \chi, \chi'$ , definim

$\varphi_\chi(\chi') :=$  expresia obținută din  $\varphi$  prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui  $\chi$  cu  $\chi'$ .

$\varphi_\chi(\chi')$  se numește **substituția lui  $\chi$  cu  $\chi'$  în  $\varphi$** . Spunem și că  $\varphi_\chi(\chi')$  este o **instanță de substituție** a lui  $\varphi$ .

- ▶  $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$ .
- ▶ Dacă  $\chi$  nu este subformulă a lui  $\varphi$ , atunci  $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$ .

### Exemple:

Fie  $\varphi = (v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow v_2)$ .

- ▶  $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4. \quad \varphi_\chi(\chi') = v_4 \rightarrow \neg v_4$
- ▶  $\chi = v_1, \chi' = \neg\neg v_2. \quad \varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \rightarrow v_2) \rightarrow \neg(\neg\neg v_2 \rightarrow v_2)$
- ▶  $\chi = v_1 \rightarrow v_2, \chi' = v_4 \vee v_1. \quad \varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \rightarrow \neg(v_4 \vee v_1)$

13

### Propoziția 1.21

Pentru orice formule  $\varphi, \chi, \chi', \varphi_\chi(\chi')$  este de asemenea formulă.

**Dem.:** Demonstrăm prin inducție după formula  $\varphi$ . Avem următoarele cazuri:

- ▶  $\varphi = v \in V$ . Atunci

$$v_\chi(\chi') = \begin{cases} \chi' & \text{dacă } \chi = v \\ v & \text{dacă } \chi \neq v. \end{cases}$$

Prin urmare,  $v_\chi(\chi')$  este formulă.

- ▶  $\varphi = \neg\psi$  și  $\psi_\chi(\chi')$  este formulă. Dacă  $\chi$  nu apare în  $\varphi$ , atunci  $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$ , deci este formulă. Dacă  $\chi$  este subformulă a lui  $\varphi$ , atunci avem două cazuri:
  - $\chi = \varphi$ . Rezultă că  $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$  este formulă.
  - $\chi$  este subformulă a lui  $\psi$ . Atunci  $\varphi_\chi(\chi') = \neg\psi_\chi(\chi')$  este de asemenea formulă.

14

- ▶  $\varphi = \psi \rightarrow \theta$  și  $\psi_\chi(\chi'), \theta_\chi(\chi')$  sunt formule. Dacă  $\chi$  nu apare în  $\varphi$ , atunci  $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$ . Dacă  $\chi$  este subformulă a lui  $\varphi$ , atunci avem două cazuri:

- $\chi = \varphi$ . Rezultă că  $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$ .
- $\chi$  este subformulă a lui  $\psi$  sau  $\theta$  (e posibil să apară atât în  $\psi$  cât și în  $\theta$ ). Atunci

$$\varphi_\chi(\chi') = \psi_\chi(\chi') \rightarrow \theta_\chi(\chi')$$

este de asemenea formulă.

□

### Propoziția 1.22

Pentru orice formule  $\varphi, \chi, \chi'$ ,

$$\chi \sim \chi' \text{ implică } \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

**Dem.:** Exercițiu.

15

Propoziția 1.22 poate fi aplicată pentru a arăta că o formulă este tautologie.

### Exemplu:

Să se demonstreze că, pentru orice formule  $\varphi, \psi$ , formula  $\theta = (\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$  este tautologie.

**Dem.:** Conform (28),  $\neg\varphi \vee \psi \sim \varphi \rightarrow \psi$ . Aplicăm Propoziția 1.22 cu  $\chi = \neg\varphi \vee \psi$  și  $\chi' = \varphi \rightarrow \psi$  pentru a obține că  $\theta \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$ . Pe de altă parte,  $(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg(\varphi \rightarrow \psi)$  este tautologie, din (1). Prin urmare,  $\theta$  este tautologie. □

16

Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare și  $v \in V$  o variabilă.

### Notăție

Pentru orice  $a \in \{0, 1\}$ , definim evaluarea  $e_{v \leftarrow a} : V \rightarrow \{0, 1\}$  prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

### Propoziția 1.23

Fie  $\theta$  o formulă și  $a := e^+(\theta)$ . Atunci pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

**Dem.:** Exercițiu suplimentar.

17

### Propoziția 1.24

Pentru orice formule  $\varphi, \psi, \theta$  și orice variabilă  $v \in V$ ,

- (i)  $\varphi \sim \psi$  implică  $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$ .
- (ii) Dacă  $\varphi$  este tautologie atunci și  $\varphi_v(\theta)$  este tautologie.
- (iii) Dacă  $\varphi$  este nesatisfiabilă, atunci și  $\varphi_v(\theta)$  este nesatisfiabilă.

**Dem.:** Fie  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  o evaluare arbitrară și  $a := e^+(\theta)$ .

Aplicând Propoziția 1.23, rezultă că  $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\varphi)$  și  $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$ .

- (i) Deoarece  $\varphi \sim \psi$ , avem că  $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v \leftarrow a})^+(\psi)$ . Deci,  $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$ .
- (ii) Deoarece  $\varphi$  este tautologie, avem că  $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 1$ . Deci,  $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$ .
- (iii) Deoarece  $\varphi$  este nesatisfiabilă, avem că  $(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = 0$ . Deci,  $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$ . □

18

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

### Observație

$v_0 \rightarrow v_0$  este tautologie și  $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$  este nesatisfiabilă.

**Dem.:** Exercițiu.

### Notății

Notăm  $v_0 \rightarrow v_0$  cu  $\top$  și o numim **adevărul**. Notăm  $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$  cu  $\perp$  și o numim **falsul**.

- $\varphi$  este tautologie ddacă  $\varphi \sim \top$ .
- $\varphi$  este nesatisfiabilă ddacă  $\varphi \sim \perp$ .

19

### Notății

Scriem  $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$  în loc de  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ . Similar, scriem  $\varphi \vee \psi \vee \chi$  în loc de  $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ .

Fie  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  formule. Pentru  $n \geq 3$ , notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$  se mai scrie și  $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$  sau  $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ .
- $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$  se mai scrie și  $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$  sau  $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ .

20

### Propoziția 1.25

Pentru orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,

- ▶  $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$  ddacă  $e^+(\varphi_i) = 1$  pentru **orice**  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
- ▶  $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$  ddacă  $e^+(\varphi_i) = 1$  pentru **un**  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Dem.:** Exercițiu.

### Propoziția 1.26

$$\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$$

$$\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$$

**Dem.:** Exercițiu.

21

Fie  $\Gamma$  o mulțime de formule.

### Definiția 1.27

- ▶ O evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este **model** al lui  $\Gamma$  dacă este model al fiecărei formule din  $\Gamma$  (adică  $e \models \gamma$  pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ ).  
**Notăție:**  $e \models \Gamma$ .
- ▶  $\Gamma$  este **satisfiabilă** dacă are un model.
- ▶  $\Gamma$  este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- ▶ Dacă  $\Gamma$  nu este satisfiabilă, spunem și că  $\Gamma$  este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

**Notății:** Mulțimea tuturor modelelor lui  $\Gamma$  se notează  $Mod(\Gamma)$ .  
Notăm  $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  în loc de  $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$ .

- ▶  $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$ .

22

Fie  $\Gamma, \Delta$  mulțimi de formule.

### Definiția 1.28

O formulă  $\varphi$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă  $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$ . **Notăție:**  $\Gamma \models \varphi$ .

Notăm cu  $Cn(\Gamma)$  mulțimea consecințelor semantice ale lui  $\Gamma$ .  
Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

### Definiția 1.29

- ▶  $\Delta$  este **consecință semantică** a lui  $\Gamma$  dacă  $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$ .  
**Notăție:**  $\Gamma \models \Delta$ .
- ▶  $\Gamma$  și  $\Delta$  sunt **(logic) echivalente** dacă  $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$ .  
**Notăție:**  $\Gamma \sim \Delta$ .

23

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

### Observație

- ▶  $\psi \models \varphi$  ddacă  $\{\psi\} \models \varphi$  ddacă  $\{\psi\} \models \{\varphi\}$ .
- ▶  $\psi \sim \varphi$  ddacă  $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$ .

### Propoziția 1.30

- $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$ , adică orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$  este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.
- $Cn(\emptyset)$  este mulțimea tuturor tautologiilor, adică  $\varphi$  este tautologie ddacă  $\emptyset \models \varphi$ .

**Dem.:** Exercițiu ușor.

24