

Propoziția 1.61

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

- (i) Γ este inconsistentă.
- (ii) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.
- (iv) $\Gamma \vdash \perp$.

Dem.: (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) și (i) \Rightarrow (iv) sunt evidente.

(iii) \Rightarrow (i) Fie φ o formulă. Conform (4) din Propoziția 1.52,

$$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

(iv) \Rightarrow (iii). Presupunem că $\Gamma \vdash \perp$. Avem că $\perp = \neg\top$. Deoarece \top este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a concludă că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. □

Propoziția 1.62

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

- (i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.
- (ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.:

(i) Avem

$$\begin{aligned} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp \\ &\text{P. 1.60.(iv)} \\ &\iff \Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp \\ &\text{Teorema Deducției} \\ &\iff \Gamma \vdash \varphi \\ &\neg\varphi \rightarrow \perp \sim \varphi \text{ și P.1.57.} \end{aligned}$$

(ii) Similar. □

Propoziția 1.63

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) Pentru orice formulă ψ , $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.
- (ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.64

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: " \Leftarrow " este evidentă.

" \Rightarrow " Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.60.(iv), $\Gamma \vdash \perp$. Aplicând Propoziția 1.47, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \perp$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.65

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 1.66

Pentru orice formulă φ ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă} \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă} &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\text{conform Propoziției 1.61.(ii)} \\ &\iff \models \neg\varphi \\ &\text{conform Teoremei de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{conform Propoziției 1.33.(ii).} \end{aligned}$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff \{\varphi\}$ este satisfiabilă. \square

5

Teorema 1.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: " \Leftarrow " Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \perp$ și, aplicând Teorema de corectitudine 1.54, rezultă că $\Gamma \models \perp$. Ca urmare, $e \models \perp$, ceea ce este o contradicție.

" \Rightarrow " Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.37 pentru a concluda că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ . Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 1.64. Din Propoziția 1.62.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.65, obținem că $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziției 1.34.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. \square

6

Teorema 1.68 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Dem.:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ &\text{conform Propoziției 1.61.(i)} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ &\iff \Gamma \models \varphi \\ &\text{conform Propoziției 1.33.(i).} \end{aligned} \quad \square$$

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (**exercițiu**).

7

Definiția 1.69

Un **literal** este o

- ▶ variabilă (în care caz spunem că este **literal pozitiv**) sau
- ▶ negația unei variabile (în care caz spunem că este **literal negativ**).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiția 1.70

O formulă φ este în **formă normală disjunctivă (FND)** dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

8

Definiția 1.71

O formulă φ este în **formă normală conjunctivă (FNC)** dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$

este literal.

Exemple:

- ▶ $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- ▶ $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- ▶ $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- ▶ $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

9

Notăție: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 1.72

- (i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.
- (ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg \varphi \sim \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.:

- (i) Aplicând Propoziția 1.26, obținem

$$\begin{aligned} \neg \varphi &= \neg \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^n \neg \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\ &\sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right). \end{aligned}$$

- (ii) Exercițiu. □

10

Exemplu: Arătați că $\models v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$.

v_1	v_2	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

11

Fie φ o formulă și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Definim $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \in \{0, 1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$.

Conform Propoziției 1.14, definiția nu este ambiguă.

Definiția 1.73

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = e_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^+(\varphi) \quad \text{pentru orice } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ .

12



Propoziția 1.74

- (i) Fie φ o formulă. Atunci
 - (a) $\models \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.
 - (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.
- (ii) Fie φ, ψ două formule. Atunci
 - (a) $\varphi \models \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.
 - (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.
- (iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Dem.: Exercițiu.