Funcția caracteristică

Definiție

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă A, $B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\} \end{aligned}$$

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}. \end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, $\pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numește proiecție canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ și } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

$I = \{1, \ldots, n\}$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiție

O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Bună ordonare și inducție

Principiul bunei ordonări

Orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Principiul inducției

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n+1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) și (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Fie n_0 cel mai mic element din $\mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Deoarece $n_0 - 1 \in S$, din (ii) rezultă că $n_0 \in S$. Am obținut o contradicție. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Observație

Principiul bunei ordonări și principiul inducției sunt echivalente.

Principiul inducției (forma tare)

Principiul inducției (forma tare)

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, atunci $n+1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Aplicăm Principiul inducției pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \ldots, n\} \subseteq S\}.$$

Obținem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \ldots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Principiul inducției

Fie $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate). $P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

Principiul inducției

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției (forma tare)

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul diagonalizării

Principiul diagonalizării

Fie R o relație binară pe o mulțime A și $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Dem.: Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a, a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicție.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a, a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicție.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. $\square$

Argumentul diagonal al lui Cantor

Teoremă Cantor

Nu există o bijecţie între $\mathbb{N}$ şi mulţimea $2^{\mathbb{N}}$ a părţilor lui $\mathbb{N}$, deci $\mathbb{N}$ şi $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt echipotente.

Dem.: Presupunem că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots,\}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relaţia binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

şi aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ şi f este bijecţie, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) = = S_k = R_k$. Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obţinut o contradicţie. $\square$

Mulţimi numărabile

Definiţie

O mulţime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulţime finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

Corolar

$2^{\mathbb{N}}$ nu este mulţime numărabilă.

Propoziţie

(i) Orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.
(ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.
(iii) $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.
(iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

Dem.: Exerciţiu.