Tema 3 la algebră
–seria 13–
21.12.2016[1]

Problema 1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi o lege de compoziţie pe $\mathbb{R}$ definită astfel:

$$x * y = x + y - xy - ax - ay + a.$$

(1) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ este grup?
(2) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ mulţimea $H = [0, 1]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de operaţia $*$?
(3) În condiţiile de la (1) să se calculeze $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Pe intervalul real $(0, 1)$ definim legea "$*$" astfel:

$$x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}.$$

Arătaţi că mulţimea $(0, 1)$ împreună cu operaţia $*$ formează un grup. Demonstraţi apoi că pe orice interval deschis şi mărginit de numere reale se poate defini o operaţie algebrică "$\circ$" ce determină pe intervalul respectiv o structură de grup.

Problema 3. Fie grupul $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Determinaţi mulţimea tuturor morfismelor de grupuri

$$\mathrm{Hom}_{gr}(G, G) = \{\phi : G \mapsto G, \phi \text{ morfism de grupuri}\}.$$

Fie U submulţimea lui $\mathrm{Hom}_{gr}(G, G)$ formată din izomorfisme. Demonstraţi că $(U, \circ)$ este un grup izomorf cu $(S_3, \circ)$.

Problema 4. Fie grupul $(\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}, +)$. Determinaţi elementele de ordin 3, 4, respectiv 9 din acest grup. Este mulţimea $\{(\overline{4}, \hat{3}), (\overline{3}, \hat{5})\}$ un sistem de generatori pentru grupul $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$?

[1] Primele 4 probleme pot fi redactate în vederea corecturii. Celelalte sunt opţionale, dar utile pentru pregătirea examenului final.

Problema 5. Fie
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ \ x \in \mathbb{R}^*.$$
a) Dacă $G = \{A^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ să se determine $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $(G, \cdot)$ să fie un grup finit.
b) Să se determine cu cine este izomorf grupul finit $(G, \cdot)$, determinat anterior.

Problema 6. Fie $G = (-1, 1)$ şi operaţia algebrică $* : G \times G \to G$ definită prin
$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \text{ pentru orice } x, y \in G.$$
Arătaţi că $(G, *)$ este grup abelian şi $(G, *) \cong (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$.

Problema 7. Să se arate că mulţimea izomorfismelor de grup $\phi : (\mathbb{Q}, +) \mapsto (\mathbb{Q}, +)$ formează un grup izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Problema 8. Fie G un grup cu proprietatea că aplicaţiile $f, g : G \mapsto G$ definite prin $f(x) = x^4$ şi $g(x) = x^8$ sunt izomorfisme de grupuri. Să se arate că G este grup abelian.