QuickSort (nerandomizat!)
Analiza cazului mediu

La timpul T(n) avem recurenta:

$$T(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n}(T(p-1) + T(n-p)) + n - 1 \tag{1}$$

Fiecare pivot posibil p este ales cu aceeasi probabilitate.
Numarul de comparatii necesare partitionarii este *n-1*.
Numerele armonice H_n au urmatoarea proprietate :

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln n \tag{2}$$

Este important de inteles:
1. Cum se deduce relatia de recurenta;
2. Cum apare logaritmul pornind de la sumare.
Pornim de la Eq. (1):

$$T(n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n}(T(p-1) + T(n-p)) + n - 1$$

... deci ... relatia devine:

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n} T(p-1) + n - 1 \tag{3}$$

Inmultind Eq. (3) cu n,:

$$nT(n) = 2\sum_{p=1}^{n} T(p-1) + n(n-1)$$

si scriind recurenta pentru T(n-1)

$$(n-1)T(n-1) = 2\sum_{p=1}^{n-1} T(p-1) + (n-1)(n-2)$$

prin scaderea celor 2 relatii rezulta:

$$nT(n) - (n-1)T(n-1) = 2T(n-1) + 2(n-1) \tag{4}$$

Rearanjand termenii se obtine:

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \tag{5}$$

Se face substitutia $a_n = \frac{T(n)}{n+1}$ si se scriu relatiile de recurenta pentru pasii anteriori:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \tag{6}$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{2((n-1)-1)}{(n-1)((n-1)+1)} \tag{7}$$

$$etc.... \cdots \tag{8}$$

$$\text{si } a_1 = T(1) = 0 \tag{9}$$

Insumand, rezulta:

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)} \tag{10}$$

Dupa efectuarea operatiilor a rezultat:

$$a_n \approx 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \tag{11}$$

Aplicand proprietatea (1) rezulta:

$$a_n \approx 2\ln n \tag{12}$$

Revenind la substitutie:

$$T(n) = (n+1)a_n \approx 2(n+1)\ln n \approx 1.38n\lg n \tag{13}$$