Computació Numèrica

Tema 4 - Interpolació polinòmica. Aproximació de funcions i dades

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

26 d'abril de 2021

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex-Ajust de dades

Introducció

La interpolació és un recurs de primer ordre dins del camp de l'aproximació de funcions.

- Per interpolació es pot substituir una funció d'expressió molt costosa (temps processador) d'avaluar per una altre més senzilla: polinomis, racionals,...
- Per interpolació es pot, a partir d'una taula de valors, $(x_i, f(x_i))_{i=0,\ldots,n}$, obtenir valors aproximats de $f(x)$ per a $x \neq x_i \quad i = 0, \ldots, n$
- Per interpolació es pot aproximar de funcions que no es poden obtenir per mètodes analítics.

Exemple

La taula de valors, reflexa la temperatura de congelació d'un anticongelant, una solució de glicerina (%) amb aigua.

%	C^o
0	0
10	-1.6
20	-4.8
30	-9.5
40	-15.4
50	-21.9
60	-33.6
70	-37.8
80	-19.1
90	-1.6
100	17

Qüestio: Quin serà el punt de congelació per un anticongelant amb un 45% de glicerina?

Introducció

Les $n+1$ parelles $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}$, amb tots els x_i, diferents reben el nom de *nodes*, *nusos* o *punts de suport*.

Ens proposem construir una funció contínua $\widehat{f}$ que representi la llei (o la funció) que hi ha amagada darrera el conjunt de nodes donats.

- Polinòmica: $\widehat{f}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,.$
- Racional: $\widehat{f}(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + \cdots + b_m x^m} \,.$
- Exponencial: $\widehat{f}(x) = a_n e^{\lambda_n x} + \cdots + a_1 e^{\lambda_1 x} + a_0 \,.$
- Trigonòmetrica: $\widehat{f}(x) = a_{-M} e^{-Mxj} + \cdots + a_0 + \ldots a_M e^{Mxj} \,,$

  M enter igual a $n/2$ o $(n-1)/2$ segons paritat de n, j la unitat imagiària i la fómula d'Euler
  $$e^{kxj} = \cos(kx) + j \sin(kx) \,.$$

Interpolació polinòmica

Interpolació polinòmica

Donats $\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}$, volem determinar els $n+1$ coeficients del polinomi de grau n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, ,$$

de tal manera que passi per tots els punts de suport $\{x_i, y_i\}$,

$$P(x_i) = y_i \, , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de $n+1$ equacions i de $n+1$ incògnites: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

Interpolació polinòmica

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de $n+1$ equacions i de $n+1$ incògnites: $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

Existència i unicitat

Teorema

La solució del problema existeix i és única si tots els nodes x_i són diferents.

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j)$$

És un sistema lineal gran, costos de resoldre i amb possible inestabilitat numèrica, aquest mètode de resolució no és viable.

Error

Sigui $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivades fins a l'ordre $n+1$ amb continuïtat, sigui $P_n(x)$ el polinomi interpolador de f en els nodes
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Sigui $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $\bar{x} \in [a, b]$, llavors existeix $c \in [a, b]$ tal que:

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

Fórmules per calcular el polinomi interpolador

Càlcul del polinomi interpolador

Mètode directe

Fent ús de MATLAB® resolem el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

La solució obtinguda són els coeficients del polinomi en ordre decreixent: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

La dificultat que presenta la resolució de sistemes lineals grans, costosa i amb possible inestabilitat numèrica, fa que proposem altres formulacions que donen lloc al mateix poliniomi interpolador.

Càlcul del polinomi interpolador

Fórmula de Lagrange

El mètode de la fórmula de Lagrange és una manera d'obtenir el polinomi interpolador dels $n+1$ nodes

$$\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_n, y_n\}.$$

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x), \quad L_k(x_j) = \delta_{kj}$$

Càlcul del polinomi interpolador

Polinomis de Lagrange

Si $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, llavors

$$L_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x - x_k)}\,.$$

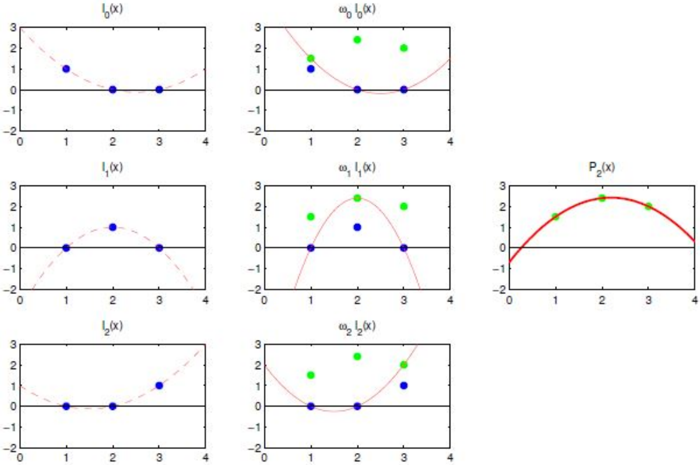
o equivalentment

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}\,.$$

★ MATLAB® la rutina `polyinterp(x,y,v)` retorna el valor del polinomi interpolador, fa ús de la fórmula de Lagrange

Càlcul del polinomi interpolador

Polinomis de Lagrange



Càlcul del polinomi interpolador

Diferències Dividides

El mètode de Newton de diferències dividides és una altra forma d'obtenir el polinomi interpolador dels $n+1$ punts $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots (x_n, f(x_n))$.

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) = \; & c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ & \cdots + c_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \,. \end{aligned}$$

Càlcul del polinomi interpolador

Diferències Dividides - Notació

Per $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots (x_n, f(x_n))$, es defineixen

1. les **diferències dividides d'ordre** 0 de la funció f, per cada $i = 0, 1, \ldots, n$ es defineixen i noten per

$$f[x_i] = f(x_i).$$

2. les **diferències dividides d'ordre** 1 de la funció f, per cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$ es defineixen i noten per

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Càlcul del polinomi interpolador

Diferències Dividides - Notació

Partint de les diferències dividides d'ordre $k-1$,

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}] \quad \text{i} \quad f[x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

es defineixen les **diferències dividides d'ordre** k corresponents a $x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, x_{i+k}$ per

$$\frac{f[x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

i es noten per

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

Càlcul del polinomi interpolador

Taula de diferències dividides

x	$f(x)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\dfrac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\dfrac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Pels nodes repetits, es considera $f[x_i,x_i]=f'(x_i)=y_i'$.

Càlcul del polinomi interpolador

Polinomi per diferències dividides

El polinomi interpolador de grau n s'escriu com:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = \;& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\
& f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\
& + \quad \dots \quad + \\
& f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \,.
\end{aligned}
$$

i la fórmula de l'error de l'aproximació és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

Fenòmen de Runge

Fenòmen de Runge

Construiu una taula per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}\,, \qquad -1 \leq x \leq 1\,,$$

en $x = -0.9 \div 0.9\,(0.2)$.

Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9.
Representeu graficament $f(x)$ i els polinomis obtinguts.
Avalueu l'error que es comet en $x = -1 \div 1\,,(0.2)$.
Què s'observa? (**Fenòmen de Runge**).

Fenòmen de Runge

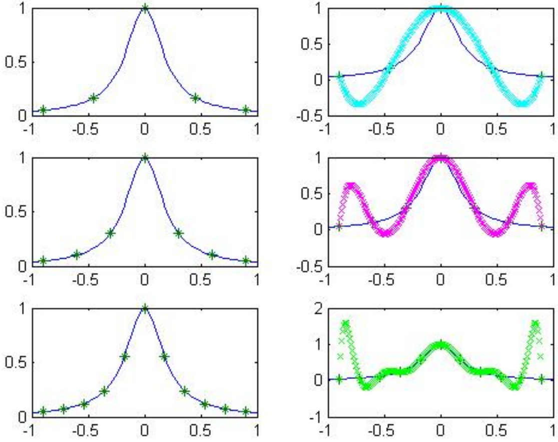


Figura: nodes equiespaiats

El·lecció òptima de nodes

El·lecció òptima de nodes

Sabem que la fòrmula de l'error per la interpolació polinòmica és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

on $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $\bar{x} \in [a, b]$.

Ens interessa escollir els punts de manera que s'obtingui el mínim error possible. Per aconseguir això utilitzarem els polinomis de Chebyshev.

Abscisses de Chebyshev

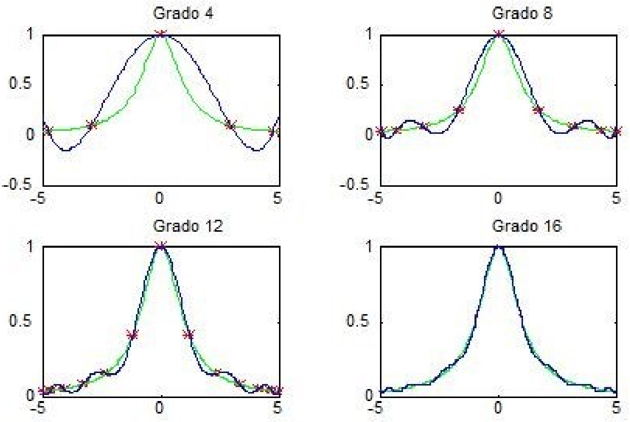


Figura: nodes de Chebyshev

Polinomis de Chebyshev

Els polinomis de Chebyshev de primer tipus són

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, \; n \geq 0.$$

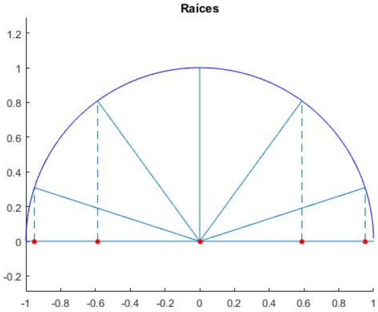
I per tant, $|T_n(x)| \leq 1\,, \quad -1 \leq x \leq 1.$

La recurrència és:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

Abscisses de Chebyshev



Els nodes de Chebyshev no són equiespaiats i tenen la propietat que $w(x)$ és mínim a l'interval $[-1,1]$.

$$x \in [-1,1] \Rightarrow z(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad z \in [a,b]\,.$$

Abscisses de Chebyshev

Les arrels del polinomi $T_n(x)$ són: (s'obtenen igualant $\cos(n\theta) = 0$)

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

valor mínim

En general $\max|w(x)| \geq \frac{1}{2^n}$ i si els punts x_i són les arrels del polinomi de Chebyschev de grau $n+1$ es verifica

$$\max|w(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Interpolació d'Hermite

Interpolació d'Hermite

Problema

Obtenir un polinomi

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

de grau $\leq 2n+1$ que compleixi les condicions

$$H_m(x_j) = y_j, \quad H'_m(x_j) = y'_j$$

per la taula de dades

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	$\cdots$	y'_n

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} y_j' \hat{H}_{n,j}(x)$$

amb

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j)L_{n,j}'(x_j)\right] L_{n,j}^2(x)$$

i

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L_{n,j}^2(x)$$

on $L_{n,j}(x)$ és el polinomi de Lagrange de grau n; $L_{n,j}(x_j) = \delta_{i,j}$.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
y'	y_0'	y_1'	$\cdots$	y_n'

Interpolació d'Hermite

Expressió per diferències dividides

Pels nodes repetits, es considera $f[x_i, x_i] = f'(x_i) = y_i'$.

x_0	$f[x_0]$				
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$

$$\begin{aligned} H_5(x) = \; & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\ + \; & f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\ + \; & f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \\ + \; & f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2) \, . \end{aligned}$$

Interpolació d'Hermite

Taula diferències dividides

z	$f(z)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

Sigui $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivades fins a l'ordre $2n + 2$ amb continuïtat, sigui $H_{2n+1}(x)$ el polinomi interpolador de f en els nodes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Sigui $w^2(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2$ i $\bar{x} \in [a, b]$, llavors existeix $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(\bar{x}) - H_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} w^2(\bar{x})$$

Exercici

Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

x	-1	2
f(x)	-11	14
f'(x)	14	5

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

“Splines”

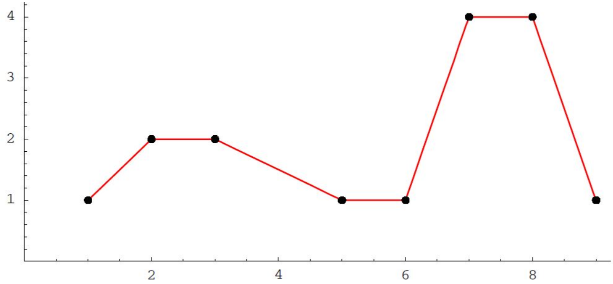
Interpolació polinomial a trossos

Interpolació polinomial a trossos

Spline

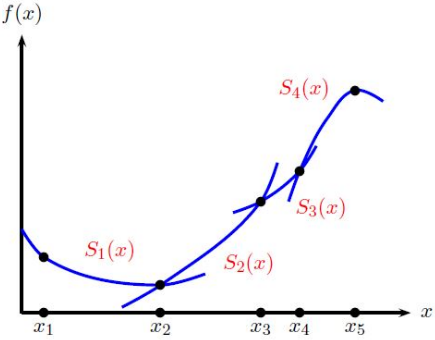
- Donats $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$, la idea és interpolar cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ format per cada parella de nodes per un polinomi de grau baix.
- Una spline és una corba definida per polinomis de grau k amb continuïtat fins la derivada $k-1$.

Spline Lineal



Una spline lineal és el cas més simple, els punts a interpolar es conecten per segments de recta; corba definida per polinomis de grau 1 amb continuïtat.

Spline Cúbic



Una spline cúbic és una corba definida per polinomis de grau 3 amb continuïtat fins la derivada 2 (segona).

Spline Cúbic

Les equacions d'una spline cúbic a l'interval $[x_i, x_{i+1}]$ per a $i = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ serien:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i\,.$$

Les condicions són:

1. $S_i(x_i) = y_i, \quad S_(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad i = 0 \div (n-1).$
2. $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots (n-2).$
3. $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots (n-2).$
4. $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots (n-2).$

Spline Cúbic

En total són $4n$ incògnites i $4n-2$ condicions. Calen condicions adicionals, per exemple

$S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0$, (spline cúbic natural)

$S_0'(x_0) = f'(x_0), \quad S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n)$, (spline cúbic lligat)

Les derivades és calculen fent servir fórmules de derivació aproximada. Diferents mètodes de càlcul d'aquestes derivades, dóna lloc a diferents algorismes.

Consulteu els apartats 3.3, 3.4 i 3.5 del capítol 3 del llibre de Cleve Moler: *Numerical Computing with MATLAB®*.

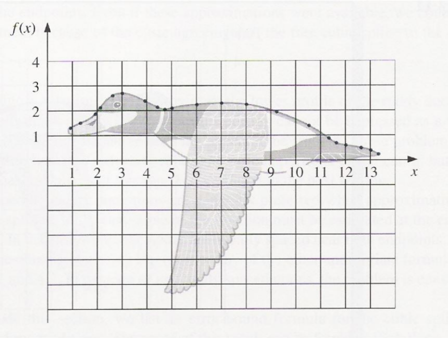
Spline Cúbic

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} & 0 \\
0 & & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \\ b_{n+1}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 \\
\frac{3}{h_2}(f_3-f_2) - \frac{3}{h_1}(f_2-f_1) \\
\frac{3}{h_3}(f_4-f_3) - \frac{3}{h_2}(f_3-f_2) \\
\vdots \\
\frac{3}{h_{n-1}}(f_n-f_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(f_{n-1}-f_{n-2}) \\
\frac{3}{h_n}(f_{n+1}-f_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(f_n-f_{n-1}) \\
0
\end{bmatrix}
$$

Ajust de corbes

Ajust de corbes



Consulteu l'apartat 3.5 del capítol 3 del llibre *Métodos Numéricos* de J. Douglas Faires & Richard Burden.

Ajust de corbes

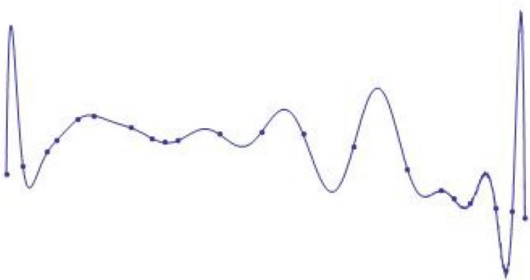


Figura: Polinomi interpolador

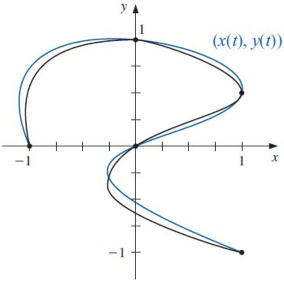
Ajust de corbes

Figura: spline cúbic

Ajust de corbes

Corbes paramètriques

Una tècnica paramètrica per trobar un polinomi per connectar els punts en l'ordre previst consisteix en fer ús d'un paràmetre t en un interval $[t_0, t_n]$ per a $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i construïr les funcions $x_i = x(t_i)$ i $y_i = y(t_i)$ per cada $i = 0, 1, \ldots, n$ fent ús de polinomis de Lagrange. També amb polinomis d'Hermite i spline.



i	0	1	2	3	4
t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
x_i	−1	0	1	0	1
y_i	0	1	0.5	0	−1

$$x(t) = \left(\left(\left(64t - \tfrac{352}{3}\right)t + 60\right)t - \tfrac{14}{3}\right)t - 1$$

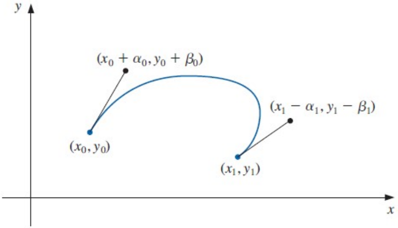
$$y(t) = \left(\left(\left(-\tfrac{64}{3}t + 48\right)t - \tfrac{116}{3}\right)t + 11\right)t$$

Ajust de corbes

Corbes paramètriques

El polinomis cúbics d'Hermite a trossos són els més emprats en computació gràfica: no cal refer tots els càlculs si es decideix modificar una part de la corba. Els nodes són (x_0, y_0) i (x_1, y_1) els punts de control són

$$(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0) \text{ i } (x_1 + \alpha 1, y_1 + \beta_1).$$



Ajust de corbes

Corbes de Bézier

La corba de Bézier és una corba paramètrica, que a partir d'uns punts de control permeten a l'usuari controlar les pendents en aquests punts i modelitzar a voluntat. La seva aplicació inicial era el disseny de carrosseries d'automòbils, vaixells, hèlix de vaixells, ...

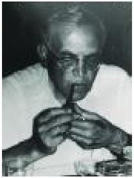
Iniciadors, Pierre Bézier a Renault i Paul de Faget de Casteljau a Citroën.

Els polinomis de Berstein són la base de les corbes de Bézier.

Splines

Paul de Faget de Casteljau 1930-
French mathematician/physicist
1958-1992: Citroën; unpublished work in **1958**

Pierre Bezier 1910-1999
1933-1975: engineer at Renault
1960: beginning of CADCAM work, Bezier curves



Isaac Jacob Schoenberg 1903-1990
Born in Romania (Landau's son-in-law). To USA in 1930.
Chicago, Harvard, Princeton, Swarthmore, Colby…
1941-1966: University of Pennsylvania
1943-1945: Army Ballistic Research Laboratory
1946: two papers on splines
1966-1973: U. of Wisconsin

Carl de Boor 1937-
Born in what became East Germany. To USA in 1959.
1960-1964: General Motors (grad student intern)
1962: first of many publications on splines
Purdue, Michigan…
1972- U. of Wisconsin

Desarrollo histórico de los splines y sus principales protagonistas. Trefethen [2005]

Corbes de Bézier

Les corbes de Bézier es poden conectar entre elles amb diverses continuïtats i ampliar-se per definir superfícies en $3D$.

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1\,, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(t-1)P_1 + t^2 P_2\,, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(t-1)^2 P_1 + 3(t-1)t^2 P_2 + t^3 P_3\,, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Si voleu veure les imatges, teniu:

- Exemples de Corbes de Bézier de wikipedia.

B-spline

Una B-spline és una combinació lineal de splines *positives amb un suport compacte mínim*. El nom li va donar Isaac Jacob Schoenberg. Molts algoritmes, però numericament estable el de C. de Boor. Les B-spline són la generalització de les corbes de Bézier, que poden ser generalitzades per NURBS (Non-uniform rational B-splines).

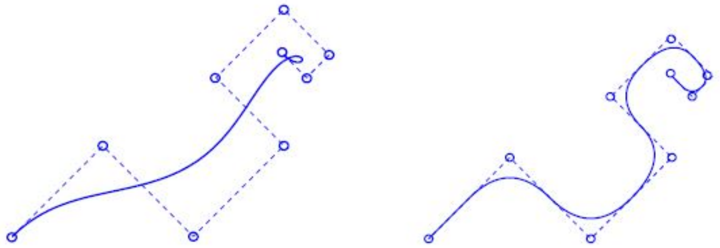


Figura: Corba de Bézier i B-spline per idèntics punts de control

Ajust de dades

Millor Aproximació

Quan a la taula de valors per a un mateix x_i tenim diversos valors de y_i el fet d'interpolar mitjançant polinomis no és possible, però podem construir una corba que s'ajusti el millor possible les dades disponibles, sense que la corba passi pels punts donats sino que "s'assembli" el més possible, per exemple minimitzant l'error quadràtic.

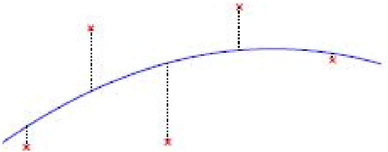
Cap mètode d'interpolació és apropiada per extrapolar informació de les dades disponibles, és a dir donar valors en punts fora de l'interval on es donen els nodes d'interpolació

Mètode dels mínims quadrats

L'aproximació la fem amb una funció

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \phi_i(x), \quad m < n, .$$

i es minimitza la suma de les distàncies dels nodes a la corba.



$$E^2 = \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - y_k)^2 .$$

Mètode dels mínims quadrats

El problema general és aproximar un conjunt de dades

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$$

per un polinomi $y = P_n(x)$ o una funció $y = f(x)$.

Es defineix el vector de residus $r(x)$ de components $r_i(x) = y_i - f(x_i)$, quan dóna lloc a un sistema de m equacions i $n+1$ incògnites, és un sistema d'equacions lineals sobredeterminat.

Mètode dels mínims quadrats

- Recta: $y = mx + b$.
- Paràbola: $y = ax^2 + bx + c$.
- Cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Potencial: $y = bx^m \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(b) + m\ln(x)$.
- Exponencial: $y = be^{mx} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(b) + mx$.
- Logarítmica: $y = m\ln(x) + b$.
- Hiperbòlica: $y = \dfrac{1}{mx+b} \quad \Rightarrow \quad mx + b = \dfrac{1}{y}$.

Guia estudi tema

Llibre Càlcul numèric: teoria i pràctica

- Conceptes associats: Capítol 2,Interpolació polinòmica. Apartat 2.1, del 2.2 els apartats 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.8, del 2.3 l?apartat 2.3.1.
- Problemes proposats: 1, 3, 5 i 16.
- Pràctiques resoltes: de la pàgina68-71.
- Pràctiques proposades: pàgines 71-74.

Llibre Cálculo Científico con MATLAB y Octave

- Conceptes i exercicis resolts: capítol 3, pàgines 73-103.
- Problemes i pràctiques proposades: del 3.3 al 3.14

Referències

- Numerical Computing with MATLAB,
  Libros de texto de Cleve Moler
- Análisis Numérico,
  Richard L. Burden & Douglas J. Faires & Annette M. Burden, 10a edición. Ed.Cengage Learning, 2016.
- Holistic Numerical Methods
  Topics of Numerical Methods
  Chapter 5 Interpolation
- E-notes, from Evgeny Demidov
  An Interactive Introduction to Splines