

# Zusammenarbeit mit Dia Zeidan

In den Arbeiten von Dia wird das sogenannte Riemann-Problem für Mehrphasenströmungen behandelt und als mögliche Anwendung Aktivitäten von Vulkanen genannt. Zum Verständnis des Problem, hier ein paar Erläuterungen, insbesondere zu den verwendeten Gleichungen.

## 1 Einleitung

Wikipedia: Als Riemann-Problem (nach Bernhard Riemann) wird in der Analysis ein spezielles Anfangswertproblem bezeichnet, bei dem die Anfangsdaten als konstant definiert werden, bis auf einen Punkt, in welchem sie unstetig sind. Riemann-Probleme sind sehr hilfreich für das Verständnis hyperbolischer partieller Differentialgleichungen, da in ihnen alle Phänomene wie Schocks, Verdichtungsstöße oder Verdünnungswellen auftauchen. Ebenfalls sind auch für komplizierte nichtlineare Gleichungen wie die Euler-Gleichungen exakte Lösungen konstruierbar, was nicht für beliebige Anfangsdaten möglich ist.

Allgemein werden durch hyperbolische Gleichung Wellen und deren Ausbreitung beschrieben. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind hyperbolisch, falls die zugehörige Jacobi-Determinante nur reelle Eigenwerte hat. Im Unterschied zu parabolischen und elliptischen Gleichungen werden Lösungen hyperbolischer Gleichungen wenig bis gar nicht gedämpft. Das führt einerseits zu einer komplizierten Lösungstheorie, da mit weniger Differenzierbarkeit gerechnet werden kann. Andererseits können sich Wellen erst durch diese fehlende Dämpfung über weite Strecken ausbreiten.

Oft genannt werden die Euler-Gleichungen: Die Euler-Gleichungen oder auch eulersche Gleichungen (nach Leonhard Euler) sind ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Strömung von reibungsfreien Fluiden. Es handelt sich um ein partielles Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, das sich als Sonderfall der Navier-Stokes-Gleichungen ergibt, falls die innere Reibung (Viskosität) und die Wärmeleitung des Fluids vernachlässigt werden.

Eine weitere Eigenschaft der untersuchten Systeme ist, dass sie konservativ sind. Das bedeute physikalisch, dass sich die Kraft durch ein Potential herleiten lässt, oder dass die totale mechanische Energie erhalten bleibt. Wir werde es also im wesentlichen mit 3 Erhaltungssätzen, formuliert als partielle Differentialgleichungen zu tun haben, Massenerhaltung, Impulserhaltung und Energieerhaltung, die numerisch gelöst werden müssen.

In der numerischen Mathematik tauchen Riemann-Probleme in natürlicher Weise in Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung von Erhaltungsgleichungen auf. Dort werden die Riemann-Probleme approximativ mittels so genannter Riemann-Löser angegangen.

Zum weiteren Verständnis werden alle oben genannten Begriffe ausführlich eingeführt. Einigen aus dem Bereich der Strömungsmechanik wie die Navier-Stokes und die Euler-Gleichungen werden aufgeführt. Dann werde ich auf 2-Phasenströmungen und numerische Methoden eingehen.

## 2 Partielle Differentialgleichungen - PDFs

Hier möchte ich nur das Teil von dem allgemeinen Thema PDFs vorstellen, der für 2-Phasenströmungen gebraucht wird.

Betrachten wir Funktionen von 2 Variablen, einer Raumrichtung  $x$  und der Zeit  $t$ . Die implizite Form einer partiellen Differentialgleichung für eine Funktion  $u$ , die von zwei Variablen  $x$  und  $t$  abhängt, lautet allgemein

$$F\left(x, t, u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}, \dots\right) = 0, \quad (2.1)$$

wobei  $F$  eine beliebige Funktion ist.

Wikipedia: Eine sehr einfache partielle Differentialgleichung ist die lineare Transportgleichung in einer Raumdimension. Sie hat die Form

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

mit einem konstanten reellen Parameter  $c$ . Die gesuchte Funktion  $u(x, t)$  ist von zwei Variablen abhängig, wobei üblicherweise  $x$  den Ort und  $t$  die Zeit bezeichnet. Nehmen wir an, dass die Funktion  $u$  zu einer gewissen Zeit (etwa zu der Zeit  $t = 0$ ) bekannt ist. Es gelte also für alle  $x$  im Definitionsbereich von  $u$  eine Beziehung der Form  $u(x, 0) = g(x)$ , wobei  $g$  eine beliebig vorgegebene, mindestens einmal differenzierbare Funktion sei (Anfangsbedingung). Dann ist für beliebige Zeiten  $t$  die Lösung der linearen Transportgleichung durch  $u(x, t) = g(x - ct)$  gegeben. Diese Gleichung bedeutet nichts anderes, als dass die Anfangsdaten  $g$  in unveränderter Form mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse verschoben („transportiert“) werden (längs der Charakteristik der Gleichung), siehe nebenstehendes Bild. Ein Anwendungsbeispiel wäre der Transport eines im Wasser gelösten Stoffes mit der Strömung des Wassers, also zum Beispiel der Transport von Schadstoffen in einem Fluss (wobei die Diffusion des Stoffes vernachlässigt wird).

Bei linearen PDGs kommt die Funktion bzw. deren Ableitungen in jedem Summanden nur linear vor, Strömungsprobleme sind jedoch im Normalfall nichtlinear. Weiterhin haben wir mehrere und nicht nur eine PDG. Tauchen nur Ableitungen erster Ordnung auf, heißen die Gleichungen entsprechend Erste-Ordnung Partielle Differentialgleichungen. Eine Verallgemeinerung der lineare Transportgleichung besteht dementsprechend darin, dass  $u$  nicht eine Funktion, sondern ein Vektor von unbekannten Funktionen  $\vec{u} = \vec{u} = (u_1, \dots, u_l)$  ist, und der Anteil mit dem konstanten reellen Parameter  $c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  ebenfalls ein Vektor von Funktionen ist.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{f}(\vec{u}) = 0, \quad (2.3)$$

Betrachten wir jetzt die Kettenregel für eine Funktion einer Funktion

$$\frac{\partial \vec{f}(u(x))}{\partial x} = \frac{\partial \vec{f}(u(x))}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.4)$$

so lautet die Verallgemeinerung bei einer Funktion, die von über viele Funktionen von einer Variablen abhängt

$$\frac{\partial \vec{f}(u_1(x), \dots, u_s(x))}{\partial x} = \sum_i^s \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad (2.5)$$

Für nur eine PDG mit  $u_j$  folgt damit

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0. \quad (2.6)$$

oder in Vektorschreibweise für alle Gleichungen

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

mit der  $s \times s$  Jacobi Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial u_s} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Das Gleichungssystem wird als hyperbolisch bezeichnet, wenn die Matrix  $A$  diagonalisierbar ist und alle Eigenwerte reell sind.

Ein einfaches Beispiel der sogenannten linearisierten Gasdynamik aus [1]. Die partiellen Ableitungen werden der Einfachheit halber abgekürzt zu  $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x$ .

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \quad (2.9)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \rho a^2) = 0 \quad (2.10)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\partial_t \vec{u} + \partial_x \vec{f}(\vec{u}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho a^2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Diese beiden Gleichungen können mit der Produktregel aufgelöst werden in jeweils eine Gleichung für  $\rho$  und eine für  $u$  zu

$$\partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho = 0 \quad (2.13)$$

$$\rho \partial_t u + u \partial_t \rho + 2u \rho \partial_x u + u^2 \partial_x \rho + a^2 \partial_x \rho = 0$$

bzw. für die 2. Gleichung

$$\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} a^2 \partial_x \rho = 0 \quad (2.14)$$

Zur Herleitung von 2.14 wurde 2.13 verwendet und die Gleichung durch  $\rho$  geteilt. Das kann wiederum in Matrixschreibweise umgeformt werden:

$$\partial_t \vec{u} + A \partial_x \vec{u} = 0 \quad (2.15)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{1}{\rho} a^2 & u \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Falls die Matrix  $A$  diagonalisierbar ist, existiert eine Matrix  $K$  mit

$$A = K \Lambda K^{-1} \quad \text{oder} \quad \Lambda = K^{-1} A K, \quad (2.17)$$

wobei  $\Lambda$  eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten auf der Diagonalen. Sind alle Eigenwerte reell, handelt es sich um ein hyperbolisches Gleichungssystem. Wird nun Gleichung 2.15 von links mit  $K^{-1}$  multipliziert, zerfällt das Gleichungssystem in 2 unabhängige Gleichungen.

$$K^{-1} \partial_t \vec{u} = \vec{w}_t, \quad K^{-1} \partial_x \vec{u} = \vec{w}_x \quad K^{-1} A \partial_x \vec{u} = K^{-1} A K K^{-1} \partial_x \vec{u} \quad (2.18)$$

$$\vec{w}_t + \Lambda \vec{w}_x = 0$$

Hängen die Eigenwerte nicht von  $\rho$  und  $u$  ab, ergeben sich 2 Transportgleichungen und die Eigenwerte entsprechen wie oben den Geschwindigkeiten. Der größte Eigenwert bestimmt also die Geschwindigkeit im System. Diese Betrachtungen sind deshalb wichtig, da die Geschwindigkeiten, also die Eigenwerte bei numerischen Verfahren das Verhältnis der Schrittweiten in Raum und Zeit bestimmen, um physikalische Ergebnisse zu bekommen.

Wikipedia: Die Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl (CFL-Zahl oder auch Courant-Zahl) wird für die Diskretisierung zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen verwendet. Sie gibt an, um wie viele "Zellen" sich eine betrachtete Größe pro Zeitschritt maximal fortbewegt:

$$c = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta x} \quad (2.19)$$

Dabei ist  $c$  die Courant-Zahl,  $v$  die Geschwindigkeit, in unserem Fall der größte Eigenwert,  $\Delta t$  der diskrete Zeitschritt und  $\Delta x$  der diskrete Ortsschritt. Motiviert wird dies durch die CFL-Bedingung, die aussagt, dass das explizite Euler-Verfahren nur für  $c < 1$  stabil sein kann. Ähnliche Bedingungen gelten auch für andere Diskretisierungsschemata. Das heißt für uns mit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_{max}} \quad (2.20)$$

In Normalfall hängen die Eigenwerte jedoch von  $\rho$  und  $u$ , d.h. in jedem Zeitschritt müssen die Eigenwerte für alle Werte von  $\rho$  und  $u$  neu berechnet werden. Der größte Eigenwert ergibt sich jedoch meist bei dem maximalen Wert von  $u$ , so dass nur dieser maximale Wert im Raum bestimmt werden muss. Mit diesem Wert und dem zugehörigen anderen Werte an diesem Ortpunkt können dann die Eigenwerte der Matrix berechnet werden müssen.

### 3 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

#### Gleichungen

Grundlage dieser Einführung ist das Buch von Ferziger und Peric [2]. Für Materie oder *control mass* (CM) gelten die Grundgleichungen

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}. \quad (3.1)$$

Zur Beschreibung von Fluiden muss der Übergang von Massen zu Volumen (*control volume* CV) vollzogen werden. Für eine intensive erhaltene Größe  $\phi$  pro Einheitsmasse gilt

$$\Phi = \int_{\Omega_{CM}} \rho \phi d\Omega, \quad (3.2)$$

wobei  $\Omega_{CM}$  für das von CM eingenommene Volumen steht. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{CM}} \rho \phi d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega + \int_{S_{CV}} \rho \phi (\vec{v} - \vec{v}_b) \cdot \vec{n} dS. \quad (3.3)$$

$\vec{v}_b$  ist Strömungsgeschwindigkeit der Oberfläche und kann im folgenden = 0 gesetzt werden. Weiterhin werden keine Quellen berücksichtigt.

#### Massengleichung

Setze  $\phi = 1$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{CV}} \rho d\Omega + \int_{S_{CV}} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (3.4)$$

In differentieller Form ergibt sich mit dem Gaußschen Satz die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.5)$$

#### Impulsgleichung

Setze  $\phi = \vec{v}$ . Dann gilt für ein festes Volumen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F} \quad (3.6)$$

Der Kraftterm setzt sich aus 2 Anteilen zusammen:

- Oberflächenkräfte: Druck (pressure), Normal- und Scherspannung (normal and shear stresses), Oberflächenspannung (surface tension) etc.;
- Körperkräfte: Gravitation, Zentrifugal- und Corioliskraft, elektromagnetische Kraft etc..

Für sogenannte Newtonsche Strömungen können die Oberflächenkräfte durch den folgenden Spannungstensor  $T$  beschrieben werden

$$\begin{aligned} T &= S - pI \\ S &= \mu \left( 2D - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) I \right). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mu$  die dynamische Viskosität,  $I$  der Einheitstensor und  $p$  der statische Druck. Bei Ferziger und Peric und bei Wikipedia wird  $T$  als Spannungstensor bezeichnet, während im Fluent-Handbuch

$S$  als Spannungstensor bezeichnet wird, also ohne den Term proportional zu  $p$ , sondern nur der Term proportional zur Viskosität. Der Tensor  $D$  (strain deformation tensor) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \vec{v})^T + (\nabla \otimes \vec{v})] \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Im Falle von reibungsfreien Fluiden ist  $\mu = 0$ . Mit der Körperkraft pro Einheitsmasse  $f$  lautet nun die Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S (T \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega \quad (3.7)$$

Damit lautet die differentielle Form der Impulsgleichung, wieder über den Gaußschen Satz, wobei bei der Umwandlung des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral der Term  $\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})$  in  $v$  zu einem dyadischen Produkt wird, also zu  $\vec{v} \vec{v}^T = \vec{v} \otimes \vec{v}$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot S + \rho \vec{f} \quad (3.8)$$

Fluent bietet verschiedene Optionen für nicht-Newtonsche Strömungen mit verschiedenen Gesetzmäßigkeiten für die Viskosität an, auf die im Ferziger nicht weiter eingegangen wird. Die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung zusammen heißen Navier-Stokes Gleichungen. Daneben können weitere Gleichungen aufgestellt werden, wobei z.B. als erhaltene Größe  $\phi$  die Energie eingesetzt wird.

### Energiegleichung

Wird in Gleichung 3.3 für  $\phi$  die Energie eingesetzt, folgt (ohne Begründung und nach Wikipedia)

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = \nabla \cdot (S \vec{v} - \vec{W}) + q - \rho \vec{v} \vec{g} \quad (3.9)$$

mit der Enthalpie pro Einheitsmasse

$$H = E + p/\rho,$$

dem Wärmefluss

$$\vec{W} = -\kappa \nabla T$$

mit dem Wärmeleitkoeffizienten  $\kappa$ , dem Anteils  $s_{i,j}$  des Spannungstensors und einem allgemeinen Quellterm  $q$ . Die totale Energie pro Einheitsmasse ist die Summe aus der inneren Energie  $e$ , der kinetischen und der potentiellen Energie

$$E = e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - h|g|$$

Der Druck wird über die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - h|g| \right) = (\gamma - 1) \rho e$$

mit dem adiabatischen Koeffizienten

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

berechnet. Mit der Anzahl der Freiheitsgrade  $f = f_{trans} + f_{rot} + f_{vib}$  ergibt sich in guter Näherung

$$\gamma = \frac{f + 2}{f}.$$

Ein einfache Gleichung erhält man über die ideale Gasgleichung. Dann gilt

$$\rho R T = p \quad \text{und} \quad e = c_v T = \frac{R T}{\gamma - 1} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

Der Druck ist also unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade, da die innere Energie gerade den Faktor  $\gamma - 1$  auffängt.

### Erhaltungsgleichung skalarer Größen

Analog zu Gleichung (3.3) lässt sich eine Erhaltungsgleichung für eine allgemeine skalare Größe  $\phi$  aufstellen

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{CM}} \rho \phi d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega + \int_{S_{CV}} \rho \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \sum f_\phi \quad (3.10)$$

wobei die rechte Seite jetzt nicht ein Kraftterm ist wie für die Impulsgleichung sondern den Transport der Größe  $\phi$  durch Diffusion (Übertragung, Transport durch Werteunterschiede wie z.B. Temperaturunterschiede) aus dem Volumen oder eine Quelle bzw. Senke beschreibt. Generell ist ein Diffusionsterm (Ausgleich bei unterschiedlichen Werten) zu berücksichtigen, der durch das *Fourier Gesetz* (Wärmeleitung) für die Wärme und durch das *Ficksche Gesetz* (Transport durch Konzentrationsunterschiede) für die Masse als Gradiententerm genähert werden kann.

$$f_\phi^d = \int_S \Gamma (\text{grad } \phi \cdot \vec{n}) dS \quad (3.11)$$

$\Gamma$  ist der Diffusionskoeffizient der Größe  $\phi$ . Ein Beispiel für eine Transportgleichungen erhält man z.B. beim Betrachten der Energie bzw. Temperatur. Für unser Problem werden jedoch keine weiteren Gleichungen benötigt.

Für allgemeine Betrachtungen numerischer Methoden wird mit diesem Ansatz von folgender allgemeinen Form einer Erhaltungsgleichung ausgegangen

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{CV}} \rho \phi d\Omega + \int_{S_{CV}} \rho \phi \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Gamma (\text{grad } \phi \cdot \vec{n}) dS + \int_{\Omega_{CV}} q_\phi d\Omega \quad (3.12)$$

wobei  $q_\phi$  eine Quelle bzw. Senke der Größe  $\phi$  ist. In differentieller Form lautet die Gleichung

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{v}) = \nabla \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) + q_\phi \quad (3.13)$$

Analysen der Gleichungen werden meist in dimensionsloser Form durchgeführt. Dabei werden die auftretenden Größen mit Referenzgrößen skaliert. Es treten 3 die Strömung bestimmende Konstanten auf:

$$St = \frac{L_0}{v_0 t_0} \quad \text{Strouhal Zahl} \quad (3.14)$$

$$Re = \frac{\rho v_0 L_0}{\mu} \quad \text{Reynolds Zahl} \quad (3.15)$$

$$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{L_0 g}} \quad \text{Froude Zahl} \quad (3.16)$$

Meist bedeutet  $v_0$  die Durchschnittsgeschwindigkeit und  $L_0$  die Ausdehnung des Systems.

### Zusammenfassung Navier-Stokes Gleichungen

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.17)$$

Impulsgleichung mit dem Spannungstensor  $T$  bzw.  $S$  und der Körperkraft  $f$ :

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot S + \rho \vec{f} \quad (3.18)$$

Energiegleichung:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = \nabla \cdot (S \vec{v} + \kappa \nabla T) + q - \rho \vec{v} \vec{g} \quad (3.19)$$

### Inkompressible Fluide

Da die Dichte konstant ist, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Der Spannungstensor vereinfacht sich dann zu

$$S = 2\mu D = \mu [(\nabla \otimes \vec{v})^T + (\nabla \otimes \vec{v})]$$

## Eulergleichungen

Die Eulergleichungen beschreibt reibungslose Fluide, also mit der Viskosität  $\mu = 0$ .

**Kontinuitätsgleichung:** Keine Änderung

Impulsgleichung: Hier verschwindet der Term  $S$  des Spannungstensors, es verbleibt nur der Druckterm.

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla p + \rho \vec{f} \quad (3.20)$$

Energiegleichung: Auch hier verschwindet der Term  $S$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = -\nabla \cdot W + q - \rho \vec{v} \vec{g} \quad (3.21)$$

In Wikipedia unter Eulergleichung werden alle Quellterme gleich Null gesetzt

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = 0. \quad (3.22)$$

Alle Gleichungen habe dieselbe Form (ohne Quell-Terme):

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = S(\mathbf{u})$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \rho \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \rho \vec{v} \\ S(\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned}$$

Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \rho \vec{v} \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \\ S(\mathbf{u}) &= \nabla \cdot (S - pI) + \rho \vec{f} \end{aligned}$$

Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \rho E \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \rho \vec{v} H = \rho \vec{v} \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \\ S(\mathbf{u}) &= \nabla \cdot (S \vec{v} - \vec{W}) + q - \rho \vec{v} \vec{g} \end{aligned}$$



## 4 Multiphase Flow - implementiert in Fluent

### Fluent Handbuch, Kapitel 17 und Schulungsfolien

In Fluent 6.3 sind vier Modelle für Mehrphasenströmungen implementiert, die sich im wesentlichen dadurch unterscheiden, in wie weit Oberflächen berücksichtigt werden und wie große die Anteile von jeder Phase sind. Die Modelle sind

- Lagrangian Dispersed Phase Model (DPM): für Lagrange Teilchen, also feste Teilchen, Blasen und Tropfen
- Volume of Fluid Model (VOF) zur Simulation von Grenzflächen zwischen den Phasen
- Eulerian Model als Mittlung des VOF-Modells, geeignet zur Simulation von sich ausbreitenden oder auflösenden Phasen
- Mixture Model, eine Vereinfachung des Euler Modells, anwendbar, wenn die Trägheit der dispersen Phase klein ist.

Betrachtet werden meist  $n$  Komponenten, der Einfachheit halber werde ich die Gleichungen auch zum besseren Vergleich mit der Arbeit von Dia mit zwei Komponenten angeben. Alle Gleichungen müssen für die einzelnen Komponenten sowie für die Wechselwirkung zwischen den Komponenten betrachtet werden.

### 4.1 Lagrangian Dispersed Phase Model (DPM)

Das Modell wurde genauer bei Projekt der Bewegung von Fasern in Strömungen untersucht (siehe Aufzeichnungen `fluent_discrete_phase_model.tex`) und wird auch als Euler-Lagrange Ansatz bezeichnet. Es wird hier nicht weiter behandelt.

### 4.2 Volume of Fluid Model (VOF)

Mit diesem Modell wurde aufsteigende größere Blasen oder das Einfließen von Tinte untersucht. Es geht davon aus, dass die Kontinuitätsgleichung für jede Phase einzeln ohne weitere Quellterme gilt. Es gibt eine klare Phasengrenze und nur ein Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  für beide Phasen, d.h. beide Phasen bewegen sich gleich schnell.

In einem Volumen seien die Volumenanteile  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der beiden Phasen und damit die Massenanteile  $\alpha_1\rho_1$  und  $\alpha_2\rho_2$  und die mittlere Dichte  $\rho_m = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$ . Betrachtet man die beiden Kontinuitätsgleichungen für die beiden Phasen,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_1\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1\rho_1\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial\alpha_2\rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2\rho_2\vec{v}) &= 0\end{aligned}$$

dann verwendet das VOF-Modell nur die addierten Gleichungen für die mittlere Dichte

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m\vec{v}) = 0.$$

In die Impulsgleichungen gehen die Kräfte für die Oberflächen zwischen den Phasen ein und die Bewegung der Oberflächen wird bestimmt. Dazu wird nur eine Impulsgleichung für beide Phasen bestimmt:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \otimes \vec{v})^T + (\nabla \otimes \vec{v})] + \rho\vec{g} + \vec{F}$$

Der Kraftterm beinhaltet die Oberflächenspannung  $T_\sigma$  in der Grenzschicht zwischen den Phasen.

**Achtung:** der Term  $-\frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{v}_k) I$  im Spannungstensor tritt im Handbuch **nicht** auf (Kapitel 17.3.6. des Handbuchs), wird also vernachlässigt, obwohl eine Phase kompressible sein darf!

Die gemeinsame Energiegleichung für beide Phasen lautet

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} E + p) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + q - \rho \vec{v} \vec{g} \quad (4.1)$$

Hier wird der gesamte Spannungstensor weggelassen (Kapitel 17.3.7. des Handbuchs)!

Das ist das sogenannte “one fluid model”. Es existiert auch ein VOF “multi fluid model”, bei dem die Kontinuitätsgleichung für jede Phase mit einem Austauschterm zwischen den Phasen berücksichtigt wird sowie 2 Impulsgleichungen, ähnlich dem Euler-Modell.

### 4.3 Eulerian Model

Das gibt beiden Phasen eine unterschiedliche Geschwindigkeit und lässt eine Änderung der Masse von einer Phase in die andere zu (ist im Fluent-Handbuch auch für das VOF-Modell der Fall). Damit bekommt die Kontinuitätsgleichungen einen Quellterm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1) &= S_{\alpha_1} + \dot{m}_{21} \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2) &= S_{\alpha_2} + \dot{m}_{12} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Quelle  $S$  ist im Normalfall 0. Bei der Impulsgleichung werden neben dem Spannungstensor und der Gravitationskraft Kräfte zwischen den Phasen berücksichtigt. Nach den Folien lautet die Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1) &= -\alpha_1 \nabla p + \alpha_1 \rho_1 \vec{g} + \nabla \cdot (\alpha_1 S) + K_{12}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + F_{12} \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2) &= -\alpha_2 \nabla p + \alpha_2 \rho_2 \vec{g} + \nabla \cdot (\alpha_2 S) + K_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + F_{12} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Der Anteil des Spannungstensors proportional zur Viskosität  $S$  ist analog aufgebaut wie der Term in der Einphasenströmung, ist aber nicht genau bekannt. Der wichtigste Term ist die Zugkraft oder der Widerstandsterm  $K_{12}$ , der ebenfalls nur angenähert werden kann.

Die Energiegleichung wird im Fluent-Tutorial für  $H$  und nicht für  $E$  aufgestellt. Mit  $\rho H = \rho E + p$ , taucht die zeitliche Ableitung des Drucks auf.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1 \rho H_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1 H_1) &= -\frac{\partial(\alpha_1 p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 S \vec{v}_1 - \vec{W}_1) + q_1 - \rho_1 \vec{v}_1 \vec{g} \\ &\quad + Q_{12}(T_2 - T_1) - \dot{m}_{12} h_1 \\ \frac{\partial(\alpha_2 \rho H_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2 H_2) &= -\frac{\partial(\alpha_2 p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 S \vec{v}_2 - \vec{W}_2) + q_2 - \rho_2 \vec{v}_2 \vec{g} \\ &\quad + Q_{12}(T_1 - T_2) + \dot{m}_{21} h_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Achtung:** Auf dem Fluent-Folien steht beim Term  $\nabla \cdot \alpha_1 S$  ein  $\nabla \vec{v}_1$ , das dürfte aber eigentlich nicht sein, kommt schon mit den Einheiten nicht hin. Hingegen im Handbuch steht  $\alpha_1 S \nabla \vec{v}_1$ , also das  $\nabla$  steht nur vor  $v$ .

Hinzu sind die beiden Terme  $Q_{12}(T_2 - T_1)$  und  $\dot{m}_{12} h_1$  gekommen, die die Energie für den Wärmeaustausch und potentielle Energie beim Massenaustausch berücksichtigen.

## 4.4 Mixture Model

Beim Mixture Model wird analog zu zwei Teilchen in Schwerpunktskoordinaten bzw. in über die Dichten gemittelte Koordinaten übergegangen. Bei zwei Teilchen ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts gegeben durch

$$\vec{v}_m = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Damit ergibt sich analog zur Schwerpunktsbewegung eine über die Massen gemittelte Geschwindigkeit

$$\vec{v}_m = \frac{\alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2}{\rho_m}$$

### Gültigkeit

Annahmen, die Einfluss auf die Gleichungen haben sind:

- Nur eine Phase kann ein kompressibles ideales Gas sein.
- Es ist keine nichtviskose oder reibungsfreie Strömung erlaubt.
- Es erlaubt im Gegensatz zum VOF-Modell unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten.

Daneben gibt es noch zahlreiche andere Einschränkungen (siehe Handbuch Kapitel 17.4.2)

### Kontinuitätsgleichung:

Werden die beiden Euler-Gleichungen 4.3 addiert ergibt sich für  $S_{\alpha_1} = S_{\alpha} = 0$  und  $\dot{m}_{12} = -\dot{m}_{21}$  eine Kontinuitätsgleichung für die gemittelte Dichte  $\vec{v}_m$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m) = 0 \quad (4.5)$$

und eine Gleichung für die Anteile in der jeweiligen Phase, bei Fluent als *Volume Fraction Equation* bezeichnet, wenn die erste Gleichung von der 2. subtrahiert wird. Diese wird mit der Relativgeschwindigkeit bzw. Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_{dr,k}$  zwischen den Komponenten formuliert

$$\vec{v}_{dr,k} = \vec{v}_k - \vec{v}_m.$$

$k$  bezeichnet die betrachtete Phase. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2) = -\nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 \vec{v}_{dr,2}) + (\dot{m}_{12} - \dot{m}_{21})$$

### Impulsgleichung:

Als Impulsgleichung wird eine ähnliche Gleichung wie im VOF-Modell angegeben:

$$\frac{\partial \rho_m \vec{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \otimes \vec{v}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu_m ((\nabla \otimes \vec{v}_m)^T + (\nabla \otimes \vec{v}_m))] + \rho_m \vec{g} + \vec{F} + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \vec{v}_{dr,k} \otimes \vec{v}_{dr,k} \right) \quad (4.6)$$

mit  $\mu_m = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ .

Mögliche Herleitung: Ausgangspunkt sind Impulsgleichungen des Euler-Modells, Gleichung 4.4, wobei die Kräfte zwischen den Phasen zu  $F = K_{12}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + F_{12}$  zusammengefasst werden. Dann folgt für jede Phase  $k$  für sich mit Einsetzung des Spannungstensors

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \vec{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k) = -\nabla \alpha_k p_k + \alpha_k \rho_k \vec{g} + \nabla \cdot (\alpha_k \mu_k (\nabla \otimes \vec{v}_k)^T + (\nabla \otimes \vec{v}_k) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}_k) I) + \vec{F}$$

Werden die beiden Gleichungen addiert, ergibt sich

$$\frac{\partial \rho_m \vec{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \vec{v}_k \otimes \vec{v}_k \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k \mu_k (\nabla \otimes \vec{v}_k)^T + (\nabla \otimes \vec{v}_k) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}_k) I \right) + \rho_m \vec{g} + \vec{F}$$

mit  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = p$  und damit komme ich leider nicht auf die Gleichung aus dem Fluent-Handbuch! Es fehlt wieder der  $\nabla^2 \vec{v}_k$  und beim Term mit den Driftgeschwindigkeit bekomme ich etwas anderes heraus:

$$\begin{aligned} & \rho_m \vec{v}_m \otimes \vec{v}_m - \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \vec{v}_{dr,k} \otimes \vec{v}_{dr,k} \\ &= (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) \vec{v}_m \otimes \vec{v}_m - \alpha_1 \rho_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_m) \otimes (\vec{v}_1 - \vec{v}_m) - \alpha_2 \rho_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_m) \otimes (\vec{v}_2 - \vec{v}_m) \\ &= \alpha_1 \rho_1 [(\vec{v}_m \otimes \vec{v}_1) + (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_m) - (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1)] + \alpha_2 \rho_2 [(\vec{v}_m \otimes \vec{v}_2) + (\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_m) - (\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2)] \\ &\neq \alpha_1 \rho_1 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 + \alpha_2 \rho_2 \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2 \end{aligned}$$

**Achtung:** Nur für  $\vec{v}_1 \approx \vec{v}_2 \approx \vec{v}_m$  stimmt der Ausdruck.

**Achtung:** Der Anteil  $\nabla^2 \vec{v}_k$  des Spannungstensors in der Impulsgleichung für eine Phase fehlt, die nach Voraussetzung auch kompressible sein kann

### Energiegleichung

Es wird für beide Phasen eine gemeinsame Energiegleichung aufgestellt.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^2 (\alpha_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^2 \alpha_k \rho_k \vec{v}_k H_k \right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T_{eff}) + S_E \quad (4.7)$$

$S_E$  beinhaltet weitere Wärmequellen. Das ist die Summe der Eulergleichungen für die Energie von beiden Phasen (4.4) mit  $E = H - \rho p$ , dem Tensor  $S = 0$  und ohne Gravitation.

**Achtung:** Energiegleichung ohne Spannungstensor widerspricht der Voraussetzung, dass die Strömung Reibung haben muss, scheint für die Energiegleichung aber zu vernachlässigen zu sein.

## 5 Multiphase Flow, eine Dimension mit 3 PDFs - untersucht von Dia

Dia hat verschiedene Artikel in den letzten Jahren veröffentlicht, in denen er analytische und numerische Berechnungen von Multiphase Flow mit Riemann Randbedingungen durchführt. In diesem Kapitel soll das einfachste System, 3 hyperbolische konservative partielle Differentialgleichungen vorgestellt werden, wie sie in [3] und in seiner [4] untersucht werden.

### 5.1 Das Modell

In [3] wird folgendes ein-dimensionales Modell zur Beschreibung eines Gas-Flüssigkeit Systems vorgestellt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + P) = \rho g \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_r + \frac{\partial}{\partial x}(uu_r + \frac{1-2c}{2}u_r^2 + \Psi(P)) = \frac{S^I}{\rho c(c-1)}. \quad (5.3)$$

Die Volumenanteile werden wieder mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$  bezeichnet. Der Index 1 beschreibt die Flüssigkeit, der Index 2 das Gas. Zur Reduktion der Indices wird  $\alpha_2 = \alpha$  und  $\alpha_1 = (1 - \alpha)$  gesetzt. Die Symbole bedeuten

$\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 = \alpha\rho_2 + (1 - \alpha)\rho_1$  gemittelte Dichte

$c = c_2 = \frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}, c_1 = \frac{\alpha_1\rho_1}{\rho} = 1 - c$  Gas-Massenanteil

$u = \frac{\alpha_1\rho_1}{\rho}v_1 + \frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}v_2 = c_1v_1 + c_2v_2$  gemittelte Geschwindigkeit

$u_r = v_2 - v_1$  relative Geschwindigkeit

$P$  Druck für beide Phasen zusammen

$\Psi(P)$  verbindet die Phasen in der Impulsgleichung

$g$  Gravitationskonstante

$S^I$  Wechselwirkung zwischen den Phasen

Die Geschwindigkeiten der einzelnen Phasen werden mit  $v_1$  und  $v_2$  bezeichnet und die Dichten mit  $\rho_1$  und  $\rho_2$ .

#### 1. Kontinuitätsgleichung 5.1

Die Gleichungen lassen sich über die Eulergleichungen aus Kapitel 4.3 herleiten. Die Kontinuitätsgleichung 5.1 stimmt mit der Gleichung 4.5 überein bzw. ist die Summe der Gleichungen 4.3

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i\rho_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i\rho_iv_i) = 0 \quad i = 1, 2$$

ohne Quelle und ohne Massenübergang von einer Phase in die andere, also  $\dot{m}_{12} = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1\rho_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1\rho_1v_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2\rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2\rho_2v_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \end{aligned}$$

#### 2. Impulsgleichung 5.2

Vergleicht man die Impulsgleichungen 4.6 mit 5.2 bzw. 4.4, so findet man auch Übereinstimmung mit den addierten Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i v_i v_i) = -\frac{\partial}{\partial x} \alpha_i P_i + \alpha_i \rho_i g \quad i = 1, 2$$

ohne Spannungstensor und ohne weitere Kräfte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2 v_2) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) + g(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2) &= -\frac{\partial}{\partial x}P + \rho \vec{g} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 &= \rho \\ \alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2 &= \rho u \\ \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 &= P \end{aligned}$$

Die Beziehung

$$\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2 v_2 = \rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2$$

folgt aus dem Zusammenhang der Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} u_r &= v_2 - v_1 \\ u &= (1-c)v_1 + cv_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$v_1 = u - cu_r \tag{5.4}$$

$$v_2 = u + (1-c)u_r \tag{5.5}$$

Mit  $c_1 = \alpha_1 \rho_1 / \rho$ ;  $c_2 = \alpha_2 \rho_2 / \rho$  und  $c = c_2$ ;  $c_1 + c_2 = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 v_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2 v_2 &= (1-c)\rho v_1^2 + c\rho v_2^2 \\ &= (1-c)\rho(u - cu_r)^2 + c\rho(u + (1-c)u_r)^2 \\ &= \rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 \end{aligned}$$

### 3. Relativgeschwindigkeitsgleichung 5.3

Eine Übertragung der Gleichung 5.3 für die relative Geschwindigkeit lässt sich ebenfalls aus dem Eulergleichungen 4.3 und 4.4 herleiten. Vor der Subtraktion der Impulsgleichungen werden diese der Einfachheit halber für jede Phase umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 v_1 v_1) &= v_1 \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1^2 \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1) + \alpha_1 \rho_1 2v_1 \frac{\partial}{\partial x}v_1 \\ &= v_1 \left[ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1) + \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial x}v_1 \right] + \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 v_1 \frac{\partial}{\partial x}v_1 \\ &= v_1 \left[ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 v_1) \right] + \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 v_1 \frac{\partial}{\partial x}v_1 \\ &= \alpha_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 v_1 \frac{\partial}{\partial x}v_1 = -\frac{\partial \alpha_1 P_1}{\partial x} \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung der Gravitationskraft und mit  $\partial_x v^2 = 2v \partial_x v$ . Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist genau die Kontinuitätsgleichung und fällt somit weg. Analog gilt für die Gasphase

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} + \alpha_2 \rho_2 v_2 \frac{\partial}{\partial x}v_2 = -\frac{\partial \alpha_2 P_2}{\partial x}$$

bzw. wieder mit  $\partial_x v^2 = 2v \partial_x v$ , durch  $\alpha_2$  und  $\rho_2$  geteilt und mit der Näherung für den Druckterm

$$\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2 P_2}{\partial x} \approx \frac{\partial P_2}{\partial x} \approx \frac{\partial P}{\partial x}$$

gilt

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_2^2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Das beinhaltet die Näherung, dass  $\alpha$  konstant ist und das  $P_1 = P_2 = P$  gilt, also beide Phasen den gleichen Druck haben.

Diese beiden Gleichungen werden subtrahiert

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_2 - v_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(v_2^2 - v_1^2) + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Mit einigen Umrechnungsformeln (siehe Gl. 5.4 und 5.5)

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= u_r \\ v_2^2 - v_1^2 &= (u + (1 - c)u_r)^2 - (u - cu_r)^2 \\ &= 2uu_r + (1 - 2c)u_r^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( uu_r + \frac{1}{2}(1 - 2c)u_r^2 \right) + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (5.6)$$

#### 4. Zustandsgleichung

Der Term proportional zur Ableitung des Drucks lässt sich unter der Annahme umformen, dass Phase 1 inkompressibel ist, also  $\rho_1 = \text{const.}$

Die Zustandsgleichung (equation of states, EOS) beschreibt den Zusammenhang zwischen  $P$ ,  $\rho$ ,  $V$  und  $T$ . Da keine Wärme zu- oder abgeführt wird und keine Reibungsverluste auftreten ist die Entropie konstant, alle Zustandsänderungen adiabatisch und es gilt die sogenannte Isentropenbeziehung für den Druck (siehe Wikipedia: Gasdynamik) für die Gasphase.

$$P = K_2 \rho_2^\gamma \quad \text{bzw.} \quad \rho_2 = \frac{P^{1/\gamma}}{K_2} \quad (5.7)$$

( $K_2$  entspricht Cref im Fortranprogramm). Dabei wird angenommen, dass die Gasphase für den Druck verantwortliche ist, und der Druck für beide Phasen gleich angesetzt werden kann. Damit kann eine Beziehung zwischen der gemittelten Dichte und dem Druck abgeleitet werden. Über

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \rho_2 + (1 - \alpha) \rho_1 \\ &= c\rho + \left(1 - \frac{c\rho}{\rho_2}\right) \rho_1 \\ \rho \left(1 - c + \frac{c\rho_1}{\rho_2}\right) &= \rho_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{1 - c + c\rho_1 \left(\frac{K_2}{P}\right)^{1/\gamma}} \quad (5.9)$$

folgt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c}{\rho_2} + \frac{(1 - c)}{\rho_1} \quad (5.10)$$

nach dem Auflösen von der 2. Zeile nach  $\rho$ . Daraus lässt sich  $\rho = \rho(P)$  berechnen. Umgekehrt folgt für  $P = P(\rho)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\rho} - \frac{(1 - c)}{c\rho_1} &= \frac{1}{\rho_2} = K_2 P^{-1/\gamma} \\ P &= K_2^\gamma \left( \frac{1}{c\rho} - \frac{(1 - c)}{c\rho_1} \right)^{-\gamma} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Praktisch kann über Gleichung 5.11 oder z.B. auch über ein in einer Simulation berechnetes  $\rho$  und konstantem  $\rho_1$  der Wert

$$\alpha = 1 - \rho/\rho_1 + c\rho/\rho_1$$

berechnet werden, mit konstantem  $c$  der Wert  $\rho_2 = (c\rho)/\alpha$ , die Dichte der Gasphase, und damit der Druck  $P = K_2\rho_2^\gamma$ .

Die Funktion  $\Psi(P)$  aus der Gleichung 5.3 ergibt sich dann über

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} = \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial P}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial \Psi}{\partial P} = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \quad (5.12)$$

## Lösung Dia

Der Ansatz

$$\Psi = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho_2} - \frac{P}{\rho_1} \quad (5.13)$$

löst die Gleichung unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung 5.7, den

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho_2} - \frac{P}{\rho_1} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{d}{dx} \frac{P}{(P/K_2)^{1/\gamma}} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d}{dx} P \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{d}{dP} P^{(\gamma-1)/\gamma} K_2^{1/\gamma} \frac{d}{dx} P - \frac{1}{\rho_1} \frac{d}{dx} P \\ &= \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{d}{dx} P \end{aligned}$$

Für die Implementation im Fortran Programm wurde der erste Beitrag zu  $\Psi$ :  $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho_2}$  mit der Gleichung 5.7 genau so umgeformt, dass die Dichte  $\rho_2$  nicht mehr auftaucht, also

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho_2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} K_2^{1/\gamma} P^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Damit lautet die Gleichung für die Relativgeschwindigkeit ohne Quelle 5.3

$$\frac{\partial}{\partial t} u_r + \frac{\partial}{\partial x} \left( u u_r + \frac{1 - 2c}{2} u_r^2 + \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} K_2^{1/\gamma} P^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{P}{\rho_1} \right) \right) = 0. \quad (5.14)$$

Die Gleichung ist in einem Fortran-Programm implementiert mit den Abkürzungen  $G8 = \frac{\gamma}{\gamma-1}$ ,  $G9 = (\gamma - 1)/\gamma$ ,  $GI = -1/\gamma$  und  $Cref = K_2$ .

**Achtung:** Das Programm berechnet nun der Einfachheit halber den Druck  $P$  über eine zweite Zustandsgleichung, und zwar

$$P = K_g \rho^\gamma, \quad (5.15)$$

$K_g$  ist Größe  $CT$  im Fortranprogramm, nicht  $Cref$ , und wird einmal berechnet und dann konstant gehalten, was widersprüchlich ist (siehe auch Kapitel über den numerischen Ansatz). Richtig wäre es,  $P$  über  $\rho_2$  aus  $\rho$  zu berechnen bzw. Gleichung 5.11 zu verwenden.

**Variante:** Berechne  $\rho_2$  über 5.10 und anschließend  $P$  über 5.7 bzw berechne  $P$  direkt über 5.11. Verwende diese Werte für  $P$  und  $\rho_2$  sowohl zur Berechnung der CFL-Bedingung und damit für  $\Delta t$  als auch in den Gleichungen für den Fluss.

**Alternative:** Verwende nicht die Zustandsgleichung 5.7 für  $\rho_2$ , sondern die Zustandsgleichung 5.15 für  $\rho$  zur Berechnung des Drucks. In der Impulsgleichung 5.2 ändert sich nichts, außer dass die neue Berechnung von  $P$  verwendet wird, aber in der Gleichung für die Relativgeschwindigkeit 5.6 muss der



letzte Term, also die Funktion  $\Psi$  neu berechnet werden, da bei der Herleitung der Gleichung  $\Psi$  die Gleichung 5.7 verwendet wurde. Es gilt weiterhin Gleichung 5.12. Aus Gleichung 5.10 folgt

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right).$$

Zu berechnen ist also

$$\frac{\partial \Psi}{\partial P} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (5.16)$$

Analog zum oberen Fall löst der Ansatz

$$\Psi = \frac{1}{c} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \frac{P}{\rho_1} \right) \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{c} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} K_g^{1/\gamma} P^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{P}{\rho_1} \right) \quad (5.18)$$

$$= \frac{K_g}{c} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} - \frac{\rho^\gamma}{\rho_1} \right) \quad (5.19)$$

die Gleichung. Zusammengefasst lautet zu lösende Gleichungssystem jetzt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + K_g \rho^\gamma) = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_r + \frac{\partial}{\partial x} \left( u u_r + \frac{1-2c}{2} u_r^2 + \frac{K_g}{c} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} - \frac{\rho^\gamma}{\rho_1} \right) \right) = 0 \quad (5.22)$$

Hinweis zum Programm: Für einen Vergleich der Ergebnisse, verwende für den Wert von  $K_\rho$  die Rechnung so wie im Fortran Programm zur Berechnung der Variablen `CT` in der Funktion `INITIA`, weiterhin Gleichung 5.10 für  $\rho_2$  und für den Druck  $P$  die Gleichung 5.15.

## 5. Rand- und Anfangswertbedingungen

Für die Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems müssen im Raum die Randbedingungen *BC* (Boundary Condition) festgelegt werden, bei Dirichlet-Randbedingung werden die Werte der Variablen an den linken und rechten Rändern  $x_L$  und  $x_R$  zu allen Zeiten festgehalten:

$$BC : U(x_L, t), U(x_R, t)$$

Bei Neumann-Randbedingung werden nicht die Werte, sondern die Ableitungen der Variablen vorgegeben. Daneben werden gerne nach der Vergabe für Anfangswerte an den Rändern periodische Randbedingungen:  $U(x_L, t) = U(x_R, t)$ , reflektierende Randbedingungen, also so was wie feste Wände als Rand  $U(x_L, t) = -U(x_{L+\Delta x}, t)$  oder durchlässige Randbedingungen, also keine Wand  $U(x_L, t) = U(x_{L+\Delta x}, t)$  verwendet und analog bei  $x_R$ .

Da eine Zeitentwicklung berechnet werden soll und nicht ein Gleichgewichtszustand, bei dem die zeitliche Ableitung der Variablen verschwindet, müssen die Anfangswerte *IC* (Initial Condition) festgelegt werden.

$$IC : U(x, t=0)$$

Ein für uns interessantes Riemannproblem hat dabei, wie bereits beschrieben, eine Unstetigkeit in den Anfangswerten.

Ein typischer Testfall ist in dem Fortranprogramm von Dia implementiert. Dort werden Zellen von *1:cells* initialisiert und zwar so, dass in der linken Hälfte eine negative und in der rechten eine positive Geschwindigkeit als Initialwerte vorgegeben wird. Dichte und Relativgeschwindigkeit werden in beiden Hälften oft gleich gesetzt. Die Randwerte bei 0 und *cells* + 1 werden dann entweder auf durchlässig oder reflektierend eingestellt. Zu beachten ist, dass diese Randwerte nach jedem Zeitschritt wieder neu berechnet werden müssen. In diesen Systeme treten dann "Verdünnungswellen" (rarefaction waves) bzw. "Druckwellen" (shock waves) auf, die interessant zu untersuchen sind.

## 5.2 Matrixschreibweise des Gleichungssystems in 1-d

Die Gleichungen 5.1 bis 5.3 ergeben 3 Gleichungen für die 3 unbekannten Funktionen  $\rho, \rho u$  und  $u_r$  und lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U), \quad t > 0, -\infty < x < \infty \quad (5.23)$$

mit

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ u_r \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + P \\ uu_r + \frac{1-2c}{2}u_r^2 + \Psi(\rho, P) \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho g}{\frac{S^I}{\rho c(c-1)}} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U), \quad t > 0, -\infty < x < \infty \quad (5.25)$$

mit

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ u_r \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + P \\ uu_r + \frac{1-2c}{2}u_r^2 + \Psi(\rho, P) \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho g}{\frac{S^I}{\rho c(c-1)}} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

und

$$\Psi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho_2} - \frac{P}{\rho_1} \quad \text{mit} \quad P = K_2 \rho_2^\gamma \quad (5.27)$$

oder

$$\Psi = \frac{1}{c} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \frac{P}{\rho_1} \right) \quad \text{mit} \quad P = K_\rho \rho^\gamma \quad (5.28)$$

je nach gewählter EOS. Wie in Kapitel 2 diskutiert, lässt sich dieses System von Gleichungen in der Form schreiben

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J(U) \frac{\partial U}{\partial x} = S(U)$$

mit der Jacobi Matrix

$$J(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, das Gleichungssystem wie z.B. im Buch von Toro in dem Kapitel zu den Eulergleichungen ausgeführt, in die Variablen

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ u_r \end{bmatrix}$$

umzuschreiben. Der Fluss lautet dann

$$F(U) = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + u_1 c(1-c)u_3^2 + P \\ \frac{u_2}{u_1} u_3 + \frac{1-2c}{2} u_3^2 + \Psi(u_1) \end{bmatrix}.$$

$J$  ist die Jacobimatrix dieses Vektors.

Damit lautet das Gleichungssystem (der Kürze wegen mit  $\partial_t, \partial_x$  und  $\partial_{u_1}$  und ohne Quellen)

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 + \partial_x u_2 &= 0 \\ \partial_t u_2 + \partial_x \left( \frac{u_2^2}{u_1} + u_1 c(1-c)u_3^2 + P(u_1) \right) \\ &= \partial_t u_2 + \frac{2u_2}{u_1} \partial_x u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2} \partial_x u_1 + c(1-c)u_3^2 \partial_x u_1 + u_1 c(1-c)2u_3 \partial_x u_3 + \partial_{u_1} P(u_1) \partial_x u_1 = 0 \\ \partial_t u_3 + \partial_x \left( \frac{u_2}{u_1} u_3 + \frac{1-2c}{2} u_3^2 + \Psi(u_1) \right) \\ &= \partial_t u_3 - \frac{u_2}{u_1^2} u_3 \partial_x u_1 + \frac{1}{u_1} u_3 \partial_x u_2 + \frac{u_2}{u_1} \partial_x u_3 + (1-2c)u_3 \partial_x u_3 + \partial_{u_1} \Psi(u_1) \partial_x u_1 = 0 \end{aligned}$$

Daraus lässt sich jetzt die Jacobi-Matrix ablesen und berechnen.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + c(1-c)u_3^2 + \partial_{u_1}P & \frac{2u_2}{u_1} & u_1c(1-c)2u_3 \\ -\frac{u_2}{u_1^2}u_3 + \partial_{u_1}\Psi(u_1) & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} + (1-2c)u_3 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Noch zu berechnen sind die Terme

$$\partial_\rho P \quad \text{und} \quad \partial_\rho \Psi(\rho)$$

### Lösung Dia

**Achtung:** Mit der Verwendung von EOS so wie im Fortranprogramm, also auch mit  $P = K_\rho \rho^\gamma$ , ist das System überbestimmt, aber es vereinfachen sich die Gleichung. Der erste Term ergibt sich zu

$$a_m^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} K_\rho \rho^\gamma = \gamma K_\rho \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

und wird so im Fortran-Programm für die CFL-Bedingung verwendet.

Verwickelter ist der Term  $\Psi(\rho)$ . Er ergibt sich zu (siehe auch Gleichung 5.13 und anschließende Rechnung)

$$\Psi(P) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho_2} - \frac{P}{\rho_1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} K_2^{1/\gamma} P^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{P}{\rho_1}$$

mit der EOS

$$P = K_2 \rho_2^\gamma \quad \text{und} \quad \rho_1 = \text{const}$$

So ist der Term in der Gleichung für  $u_r$  im Fortran-Programm implementiert. Da auch die zweite EOS verwendet wird, kann der Term weiter umgeformt werden

$$\begin{aligned} \Psi(P) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} K_2^{1/\gamma} P^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{P}{\rho_1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} K_2^{1/\gamma} (K_\rho \rho^\gamma)^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{K_\rho \rho^\gamma}{\rho_1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{K_2}{K_\rho} \right)^{1/\gamma} K_\rho \rho^{\gamma-1} - \frac{K_\rho \rho^\gamma}{\rho_1} \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\partial_\rho \Psi(\rho) = \left( \frac{K_2}{K_\rho} \right)^{1/\gamma} \gamma K_\rho \rho^{\gamma-2} - \frac{\gamma K_\rho \rho^{\gamma-1}}{\rho_1}$$

Damit lautet die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + c(1-c)u_3^2 + \gamma K_\rho u_1^{\gamma-1} & \frac{2u_2}{u_1} & u_1c(1-c)2u_3 \\ -\frac{u_2}{u_1^2}u_3 + \left( \frac{K_2}{K_\rho} \right)^{1/\gamma} \gamma K_\rho u_1^{\gamma-2} - \frac{\gamma K_\rho u_1^{\gamma-1}}{\rho_1} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} + (1-2c)u_3 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

**Variante:** Wie oben bei den Differentialgleichungen im letzten Abschnitt beschrieben, berechne  $\rho_2$  aus  $\rho$  und anschließend  $P$ . Verwende diese Werte und nicht die mit der 2. EOS berechneten. Weiterhin wird zur Vereinfachung der Rechnung die Ableitung per Kettenregel verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho}$$

Als Funktion von  $\rho_2$  ausgedrückt müssen noch die Ableitungen folgender Terme berechnet werden:

$$\begin{aligned}\partial_\rho P &= K_2 \partial_\rho \rho_2^\gamma \\ &= K_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \rho_2^\gamma \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho} \\ &= K_2 \gamma \rho_2^{\gamma-1} \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho}\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Psi(P) &= K_2 \partial_\rho \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_2^{\gamma-1} - \frac{\rho_2^\gamma}{\rho_1} \right) \\ &= K_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_2^{\gamma-1} - \frac{\rho_2^\gamma}{\rho_1} \right) \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho} \\ &= K_2 \left( \gamma \rho_2^{\gamma-2} - \frac{\gamma \rho_2^{\gamma-1}}{\rho_1} \right)\end{aligned}$$

Eine Gleichung für  $\partial_\rho \Psi(\rho)$  und  $\partial_\rho P(\rho)$  folgt dann mit der Gleichung 5.9:

$$\begin{aligned}\rho &= c\rho + (1 - \frac{c\rho}{\rho_2})\rho_1 \quad \text{oder} \\ \rho - c\rho - \rho_1 &= -\frac{c\rho\rho_1}{\rho_2} \\ \rho_2 &= \frac{c\rho\rho_1}{\rho(c-1) + \rho_1}\end{aligned}\tag{5.31}$$

Es folgt

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \rho} = \frac{c\rho_1(\rho_1 + (c-1)\rho) - c\rho\rho_1(c-1)}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2} = \frac{c\rho_1^2}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2}\tag{5.32}$$

und damit

$$\partial_\rho P = K_2 \gamma \rho_2^{\gamma-1} \frac{c\rho_1^2}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2}\tag{5.33}$$

$$\partial_\rho \Psi(P) = K_2 \left( \gamma \rho_2^{\gamma-2} - \frac{\gamma \rho_2^{\gamma-1}}{\rho_1} \right) \frac{c\rho_1^2}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2}\tag{5.34}$$

Konsequent wäre also folgendes Vorgehen: Berechne  $\rho_2$  aus 5.31, damit die Ableitungen 5.33 und 5.34. Das Ergebnis wird dann für die Jacobi-Matrix 5.29 eingesetzt, bzw.  $\rho_2$  in

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + c(1-c)u_3^2 + K_2 \gamma \rho_2^{\gamma-1} \frac{c\rho_1^2}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2} & \frac{2u_2}{u_1} & u_1 c(1-c)2u_3 \\ -\frac{u_2}{u_1^2} u_3 + K_2 \left( \gamma \rho_2^{\gamma-2} - \frac{\gamma \rho_2^{\gamma-1}}{\rho_1} \right) \frac{c\rho_1^2}{(\rho_1 + (c-1)\rho)^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} + (1-2c)u_3 \end{pmatrix}\tag{5.35}$$

und es werden die Eigenwerte berechnet.

**Alternative:** Wie bei den Differentialgleichungen beschrieben, verwende nur die EOS für  $\rho$  und nicht für  $\rho_2$ . Das vereinfacht alles.

$$\partial_\rho P = K_\rho \gamma \rho^{\gamma-1}\tag{5.36}$$

und mit Gleichung 5.16

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{\partial \Psi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) K_\rho \gamma \rho^{\gamma-1}\tag{5.37}$$

Jetzt lautet die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + c(1-c)u_3^2 + K_\rho \gamma u_1^{\gamma-1} & \frac{2u_2}{u_1} & u_1 c(1-c)2u_3 \\ -\frac{u_2}{u_1} u_3 + \frac{1}{c} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{\rho_1} \right) K_\rho \gamma u_1^{\gamma-1} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} + (1-2c)u_3 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

### 5.3 Matrix mit physikalischen Variablen

Eine Alternative stellt der Übergang von den Variablen  $U$  zu einem Vektor aus physikalischen oder “primitiven” Unbekannten

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ u_r \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

dar, herzuleiten mit Hilfe der Produktregel für Ableitungen. Dieses Variablen wurde in den analytischen Arbeiten in [3] verwendet. In dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = S(W) \quad (5.40)$$

bzw.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = S(W)$$

mit

$$A = \frac{\partial F(W)}{\partial W}$$

ändert sich die 2. Zeile. Aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + P) = \rho g$$

wird zu

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u + \rho u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho c(1-c)u_r^2 + P) = \rho g$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial t} \rho \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u - u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \quad \text{mit Konti-Gl.} \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u - u \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \left( \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) \right) \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u + \rho u \frac{\partial}{\partial x} u - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) \end{aligned}$$

analog zu den Umformungen in Kapitel 2 und mit Gleichung 5.1. Damit lautet das Gleichungssystem (wie gehabt, der Kürze wegen mit  $\partial_t$ ,  $\partial_x$  und  $\partial_\rho$  und ohne Quellen)

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) &= \\ \partial_t \rho + \rho \partial_x u + u \partial_x \rho &= 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \rho \partial_t u + \rho u \partial_x u + \partial_x (\rho c(1-c)u_r^2 + P) &= \\ \rho \partial_t u + \rho u \partial_x u + \rho c(1-c)2u_r \partial_x u_r + c(1-c)u_r^2 \partial_x \rho + \partial_\rho P \partial_x \rho &= 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_r + \partial_x (u u_r + \frac{1-2c}{2} u_r^2 + \Psi(P)) &= \\ \partial_t u_r + u_r \partial_x u + u \partial_x u_r + (1-2c)u_r \partial_x u_r + \partial_\rho \Psi(\rho) \partial_x \rho &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Damit ergibt sich die Matrix  $A$  zu

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ (c(1-c)u_r^2 + \partial_\rho P)/\rho & u & 2c(1-c)u_r \\ \partial_\rho \Psi(\rho) & u_r & u + (1-2c)u_r \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

In [4] bzw. [3] wird die Matrix auch hergeleitet. Dabei wird die Größe  $c$  nicht als konstant angenommen, sondern über  $\rho$  abhängig vom Druck

$$c = \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} = c(P).$$

In der Gleichung für  $u$  und  $u_r$  kommt dann noch ein Term von der Ableitung  $\partial_x c = \partial_{PC} \partial_\rho P \partial_x \rho = a_m^2 \partial_{PC} \partial_x \rho$  hinzu, genauer zu Gleichung 5.42:

$$\rho u_r^2 \partial_x c(1-c) = \rho u_r^2 (1-2c) a_m^2 \partial_{PC} \partial_x \rho$$

und zu Gleichung 5.43

$$\frac{1}{2} u_r^2 \partial_x (1-2c) = -u_r^2 a_m^2 \partial_{PC} \partial_x \rho$$

Werden diese beiden Terme hinzugenommen und wie in [3] die zweite Zeile mit  $\rho$  multipliziert, folgt für die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ a_m^2 + c(1-c)u_r^2 + \rho u_r^2 (1-2c) a_m^2 \partial_{PC} & \rho u & 2\rho c(1-c)u_r \\ a_m^2 \partial_P \Psi - a_m^2 u_r^2 \partial_{PC} & u_r & u + (1-2c)u_r \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

mit  $\partial_\rho \Psi(\rho) = \partial_P \Psi(\rho) a_m^2$  und  $\partial_\rho P = a_m^2$ . Damit bin ich dicht an der Matrix von Dia dran (siehe Gleichungen 31, 32 und 33 aus [3]):

$$A_{Dia} = \begin{pmatrix} u/a_m^2 & \rho & 0 \\ 1 + c(1-c)u_r^2/a_m^2 + \rho(1-2c)u_r^2 \partial_{PC} & \rho u & 2\rho c(1-c)u_r \\ \partial_P \Psi - u_r^2 \partial_{PC} & u_r & u + (1-2c)u_r \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Bemerkung: In  $A_{3,3}$  steht in [3] ein  $(1+2c)$ , was falsch ist, in [4] steht richtig  $(1-2c)$ . Weiterhin steht in  $A_{2,1}$  in [3] ein  $u^2$ , was ebenfalls falsch ist, in [4] steht richtig  $u_r^2$ .

**Frage:** In den Arbeiten von Dia wurde die erste Spalte noch mit  $a_m^{-2}$  multipliziert. Mit der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} a_m^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

in Gleichung 32 aus [3], müsste es aber die erste Zeile sein, da dort das Gleichungssystem

$$C(W) \partial_t W + A(W) \partial_x W = \begin{pmatrix} a_m^{-2} \partial_t \rho \\ \rho \partial_t u \\ \partial_t u_r \end{pmatrix} + A(W) \begin{pmatrix} \partial_x \rho \\ \partial_x u \\ \partial_x u_r \end{pmatrix} = Q(W)$$

betrachtet wird. Sowohl die Multiplikation mit  $\rho$  als auch die Multiplikation mit  $a_m^{-2}$  ändern die Eigenwerte nur um diese beiden Größen.

## 5.4 Numerischer Lösungsansatz

Zwei-Phasenströmungen haben typischer Weise hohe Gradienten, was oft zu numerischen Instabilitäten und Oszillationen führt. Es kommt in diesen Systemen oft zu Stoßwellen oder Verdünnungswellen. Das ist z.B. eine starke Druckwelle, die durch Explosionen oder andere Phänomene erzeugt

wird, die extreme Druckunterschiede hervorrufen. Die Druckwelle läuft dabei als Wellenfront durch das Medium. Die numerischen Methoden beruhen auf sogenanntem shock-capturing, mit denen sich das Problem in allen Bereichen einer Strömung beschreiben lassen.

Es werden 2 Kategorien unterschieden, *upwind schemes* und *centred schemes*. Die *centred schemes* arbeiten mit einem künstlichen Viskositätsterm, den sie in die Gleichungen einfügen. Dieser Term erzeugt genug Dissipation an die Diskontinuität, um Oszillationen zu erzeugen.

Wie im letzten Abschnitt beschrieben, sind die drei Gleichungen 5.1, 5.2 und 5.3 für die 3 unbekannten Funktionen  $\rho, \rho u$  und  $u_r$  zu lösen. Hinzu kommt die Gleichung für die Gasdynamik

$$P = K_2 \rho_2^\gamma$$

Damit haben wir einen Satz von 3 Differentialgleichungen und einer Gleichung für den Druck, die zusammen gelöst werden müssen. In der Arbeit von Dia wird zur Vereinfachung angenommen, dass weiterhin für beide Phasen zusammen gilt

$$P = K \rho^\gamma$$

mit konstanten  $K$ . Das ist eigentlich inkonsistent, da dann  $\rho \propto \rho_2$  gilt und  $\rho_1$  dann nicht konstant sein kann, eigentlich müsste Gleichung 5.9 berechnet werden. Nach Aussage von Dia ermöglicht diese Approximation jedoch eine analytische Lösung.

Um zu zeigen, dass es sich um ein hyperbolischen Gleichungssystem handelt und die maximale Geschwindigkeit zu berechnen, sind reichlich viele Umformungen nötig, wie in der Dissertation von Dia [4], Kapitel 2 durchgeführt. Dort wurde mit Hilfe der Produktregel zu den Vektor aus physikalischen oder "primitiven" Unbekannten  $W = (\rho, u, u_r)$  übergegangen und das System für eine analytische Lösung linearisiert. Alle Eigenwerte sind reell und als größten Eigenwert ergibt sich (Gleichung 2.39 aus [4]) der folgende Ausdruck, der auch im angehängten Fortran-Programm für die CFL-Bedingung (siehe Kapitel 2) implementiert ist

$$\lambda = u + a_m + \frac{\rho}{\rho_{21}} c(1 - c)u_r + a_m O(\eta^2). \quad (5.48)$$

mit  $a_m = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)}$  der Schallgeschwindigkeit zwischen den beiden Phasen und  $\eta = \frac{u_r}{a_m} \ll 1$ . Diese Lösung wird für das Originalgleichungssystem in  $U$  verwendet, was meiner Meinung nach nicht konsistent ist.

Interessant ist, wie bereits gesagt, das Problem mit konstanten und an einem Punkt unstetigen Anfangsbedingungen, also das Riemannproblem.

#### 5.4.1 Lax-Friedrichs Methode

Es gibt verschiedene Herleitungen der Lax-Friedrichs Methode, einmal durch Betrachtung von gemittelten Werten, einmal durch das Hinzufügen einer sogenannten numerischen Dissipation oder Viskosität, um das Verfahren zu stabilisieren.

Zuerst möchte ich eine Herleitung betrachten, die sich an der Dissertation von Dia orientiert und so im Fortran-Programm implementiert ist. Die Ableitungen werden durch finite Differenzen ersetzt. Die Zeitableitung bei  $t_n$  wird durch eine "Vorwärtsdifferenz" an den Zellpunkten  $x_i$  ersetzt

$$\partial_t U(x_i, t_n) \rightarrow \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \Delta t = t^{n+1} - t^n$$

Die Ableitung in Raumrichtung ist komplizierter aufgebaut, da es sonst zu Instabilitäten bei unstetigen Anfangsbedingungen kommt. Eine einfache Ableitung in Raumrichtung ist

$$\partial_x F(U(x_i, t_n)) \rightarrow \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{mit} \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

Damit ergäbe sich

$$\partial_t U(x_i, t_n) = -\partial_x F(U(x_i, t_n)) \Rightarrow U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1}^n - F_i^n) \quad (5.49)$$

Aber, wie gesagt, das funktioniert leider nicht stabil. Bei der Lax-Friedrichs Methode wird nicht der Fluss  $F$  genommen, sondern ein modifizierter Fluss, der sogenannte Lax-Friedrichs Fluss  $F^{LF}$ .

$$F_i^{LF} = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i+1}^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_i^n - U_{i+1}^n) \quad (5.50)$$

Anschließend werden mit diesem Fluss die neue Werte für die Variablen berechnet nach

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-1}^{n,LF} - F_i^{n,LF}) \quad (5.51)$$

Die Frage ist, warum ist der Ausdruck für den LF-Fluss sinnvoll? Dieser Fluss besteht im ersten Term (bezeichnet mit  $\bar{F}$ ) aus dem Mittelwert der Flüsse an zwei benachbarten Punkten, entspricht also einem Term

$$\bar{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i+1}^n)$$

Es wird also ein Fluss  $F$  an den Punkten (mehrdimensional an den Flächen) zwischen den Zellmittelpunkten betrachtet wird, an denen die Variablen berechnet werden.

$$\begin{array}{ccccccccc} & | & & | & & | & & | & & | \\ \text{U}_{-1} & | & \text{U}_{-2} & | & \text{U}_{-3} & | & \text{U}_{-4} & | & \text{U}_{-5} \\ & | & & | & & | & & | & & | \\ & \text{F}_{-(1+1/2)} & \text{F}_{-(2+1/2)} & \text{F}_{-(3+1/2)} & \text{F}_{-(4+1/2)} & & & & & \end{array}$$

Der 2. Termin (bezeichnet mit  $F^v$ ) entspricht einem künstlichen Viskositätsterm, der zur Stabilisierung hinzugefügt wurde. Mit

$$F_i^v = \frac{1}{2\Delta t} (U_i^n - U_{i+1}^n)$$

folgt für den Beitrag in Gleichung 5.51

$$F_{i-1}^v - F_i^v = \frac{1}{2\Delta t} (U_{i-1} - 2 \cdot U_i + U_{i+1}) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

mit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1} - 2 \cdot U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Dieser Term verschwindet für kleine Abstände im Raum, da er proportional zu  $\Delta x^2$  ist.

Eine andere und wahrscheinlich einfachere Herleitung ergibt sich durch die Überlegung, nur mit Mittelwerten über benachbarte Punkte zu arbeiten. Setzt man in die Gleichung 5.51 den LF-Fluss aus Gleichung 5.50 ein, folgt

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{2} (F_{i-1}^n + F_i^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_{i-1}^n - U_i^n) - \frac{1}{2} (F_i^n + F_{i+1}^n) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_i^n - U_{i+1}^n) \right) \\ &= U_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i-1}^n - F_{i+1}^n) + \frac{1}{2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \\ &= \frac{1}{2} (U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i-1}^n - F_{i+1}^n) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Das kann so interpretiert werden: Im Raum wird ein zentraler Differenzenquotient verwendet

$$\partial_x F_i \rightarrow \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

und in der Zeit nicht der ursprüngliche Wert  $U_i^n$ , sondern der Mittelwert der beiden benachbarten Werte.

Es wurde gezeigt, dass diese Methode stabil ist für eine CFL-Zahl von  $c = 0.9$ , siehe Gleichung 2.19, also

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\lambda_{max}} \cdot 0.9$$



### 5.4.2 FORCE Methode

Im Prinzip kann jeder Form von diskretisiertem Fluss  $\tilde{F}$  verwendet werden, solange für kleine Abstände sich eine Näherung für die Raumableitung ergibt, also

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = \partial_x F(U(x_i, t_n))$$

Bei der FORCE-Methode wird neben dem Lax-Friedrichs Fluss der Richtmyer Fluss genommen und ein Mittelwert dieser beiden gemildert. Berechne zuerst den einen modifizierten Mittelwert der Variablen

$$U_{i+1/2}^{RI} = \frac{1}{2} [U_i^u + U_{i+1}^n] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_i^n - F_{i+1}^n) \quad (5.53)$$

Das entspricht Gleichung 5.50 des Lax-Friedrichs Flusses, wobei die Rollen der Variablen und des Flusses vertauscht sind. Mit diesen neuen Variablenwerten wird ein Fluss  $F_{i+1/2}^{RI}$  an den Flächen bzw. Mittelpunkten zwischen den Punkten der Variablen berechnet

$$F_{i+1/2}^{RI} = F(U_{i+1/2}^{RI}). \quad (5.54)$$

und der Mittelwert zwischen den beiden Flüssen

$$F_{i+1/2}^{FORCE} = \frac{1}{2} [F_{i+1/2}^{LF} + F_{i+1/2}^{RI}] \quad (5.55)$$

wird zum update analog zu Gleichung 5.51

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{FORCE} - F_{i-1/2}^{FORCE}) \quad (5.56)$$

verwendet.

### 5.4.3 Gudunov Methode (NICHT FERTIG!)

Die sogenannte *finite volume Godunov-centered methods* sind genau die oben vorgestellten Methoden *upwind schemes*, die er 1959 entwickelt hat. Sie arbeiten mit der Standardform für ein update

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{Gu} - F_{i-1/2}^{Gu}), \quad (5.57)$$

jedoch wird jetzt in den Fluss eine lokale Lösung des Riemannproblems der Variablen  $U$  verwendet.

$$F_{i+1/2}^{Gu} = F(U_{RP}(0, U_i, u_{i+1}))$$

Ist  $w = w(x/t; u_l, u_r)$  eine approximative Lösung des Riemannproblems, so lässt sich damit der Fluss berechnen. Genauer kommt später mal, denn **das Berechnungsschema ist mir noch unklar!**. Prinzip:

- Beginne mit den initialen Werten

$$U(x, t^n) = \begin{cases} U_L & x < x_{i+1/2} \\ U_R & x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (5.58)$$

Warum  $t^n$  ist unklar.

Weiterhin fehlt auch noch das SLIC-Schema (Slope Limiter Centred).

## 6 Das Modell von 2014

In [5] wird eine Zugkraft (drag source) zwischen den Phasen in der Impulsgleichung hinzu genommen, um die unterschiedliche Geschwindigkeiten der Phasen mit zu berücksichtigen. Das System ist hyperbolisch und konservativ, was viele numerische Ansätze zulässt. Verwendet wir das sogenannte *slope limiter centered scheme* (SLIC), welches eine Godunov-Methode ist. Für Details wird auf das Buch von Toro verwiesen.

Es werden 2 Sätze von PDEs betrachtet, ein Satz für die gemittelte Masse, Impuls und Energie, und ein Satz für den Volumenanteil, Massenanteil und die relative Geschwindigkeit.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + \rho c(1-c)u_r^2 + P) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho E + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + P u + \rho c(1-c)u_r(u_r + \frac{1-2c}{2}u_r^2 + \frac{\partial e}{\partial c})) = 0 \quad (6.3)$$

Die Kontinuitätsgleichung 6.1 entspricht Gleichung 5.1 und die Impulsgleichung 6.2 der Gleichung 5.2. Die Energiegleichung wird voraussichtlich nur die Summer der Eulergleichungen 4.4 für die Energie sein, nicht nachgerechnet. Dabei ist zu beachten, dass gilt:  $\rho H = \rho E + p$  und  $E = e + \frac{u^2}{2} + c(1-c)\frac{u_r^2}{2}$ . Die weitere 3 Gleichungen lauten

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha\rho + \frac{\partial}{\partial x}\alpha\rho u = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}c\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u c + \rho c(1-c)u_r) = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_r + \frac{\partial}{\partial x}(u u_r + \frac{1-2c}{c}u_r^2 + e_c) = \pi \quad (6.6)$$

Die Gleichung 6.4 ist die Kontinuitätsgleichung für eine Phase, die Gleichung 6.5 verstehe ich nicht, da sie in den anderen Gleichungen 6.1 und 6.4 enthalten sein müsste, da  $c\rho = \alpha_2\rho_2$ , habe ich aber nicht nachgerechnet und kann dadurch zustande kommen, dass  $\alpha$  nicht konstant ist. Die Gleichung 6.6 entspricht der Gleichung 5.3. Die Kraft zwischen an der Grenzschicht der Phasen  $\pi$  hat die einfache Form

$$\pi = \kappa(u_2 - u_1) = \kappa u_r$$

Anstatt z.B. Geschwindigkeit oder Dichte kann in den allgemeinen Gleichungen auch die Entropie eingesetzt werden und damit kommt man analog zur den anderen Gleichungen auf eine Differentialgleichung für die Entropie, die sich z.B. über  $Tds = dh - vdp$  oder  $Tds = de - pdv$  in die Gleichung für die Energie bzw. Enthalpie umrechnen lässt.

## 7 Zwei-Phasen-Strömung in 2 Dimensionen

### 7.1 Ein einfaches Modell in 2-D

Es gibt zahlreiche Modelle und Simulationen, die bereits mit Experimenten verglichen wurden. Die meisten nehmen jedoch an, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Phasen zu vernachlässigen ist. Hier soll die Relativgeschwindigkeit explizit berücksichtigt werden. Eine einfache Erweiterung der Gleichungen 5.15.2 und 5.3 von einer zu zwei Dimensionen ohne Quellterme kann über die Gleichungen 3.5 und 3.8 gewonnen werden. Die lauten in Komponentenschreibweise für jede Phase

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i v_{i,x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_{i,y}) = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i v_{i,x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i v_{i,x} v_{i,x} + P) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_{i,x} v_{i,y}) = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i v_{i,y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_i \rho_i v_{i,x} v_{i,y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_i \rho_i v_{i,y} v_{i,y} + P) = 0 \quad (7.3)$$

Die Rechnungen verlaufen ganz analog zu den Rechnungen aus Kapitel 5.1. In den ersten beiden Gleichungen kommt nur der Term mit der Ableitung nach  $y$  hinzu, und die dritte Gleichung ist symmetrisch zur zweiten aufgebaut. Aus diesem Grunde brauchen nur die beiden zusätzlichen Terme der ersten beiden Gleichungen genauer betrachtet werden. Addition von Gleichung 7.1 für beide Phasen ergibt eine Kontinuitätsgleichung wie gehabt.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho u_y = 0 \quad (7.4)$$

Bei der Impulsgleichung für die  $x$ -Komponente kommt folgender Term hinzu

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi_1 + \phi_2) := \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 \rho_1 v_{1,x} v_{1,y} + \alpha_2 \rho_2 v_{2,x} v_{2,y}),$$

bezeichnet mit  $\phi_+$ , der umgeformt werden muss. Mit den analogen Gleichungen wie im 1-dimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} u_{r,x} &= v_{2,x} - v_{1,x} \\ u_x &= (1-c)v_{1,x} + cv_{2,x} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= u_x - cu_{r,x} \\ v_{2,x} &= u_x + (1-c)u_{r,x} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \phi_+ = \alpha_1 \rho_1 v_{1,x} v_{1,y} + \alpha_2 \rho_2 v_{2,x} v_{2,y} &= (1-c)\rho(u_x - cu_{r,x})(u_y - cu_{r,y}) \\ &\quad + c\rho(u_x + (1-c)u_{r,x})(u_y + (1-c)u_{r,y}) \\ &= \rho u_x u_y + \rho c(1-c)u_{r,x} u_{r,y} \end{aligned}$$

mit  $\alpha_1 \rho_1 = (1-c)\rho$  bzw.  $\alpha_2 \rho_2 = c\rho$ . Damit ergeben sich die beiden Impulsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2 + \rho c(1-c)u_{r,x}^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y + \rho c(1-c)u_{r,x} u_{r,y}) = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_y + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2 + \rho c(1-c)u_{r,y}^2 + P) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_y + \rho c(1-c)u_{r,x} u_{r,y}) = 0 \quad (7.6)$$

Die Herleitung der Gleichung für  $u_{r,i}$  erfolgt analog zu eindimensionalen Fall. Dort wurden zur Herleitung von Gleichung 5.6 zuerst in der Gleichung für jede Phase einige Umformungen vorgenommen

und durch  $\alpha_i \rho_i$  geteilt und dann die Differenz beider Gleichungen betrachtet. Dementsprechend käme jetzt nur der Term

$$\begin{aligned}\phi_- &= v_{2,x}v_{2,y} - v_{1,x}v_{1,y} \\ &= (u_x + (1-c)u_{r,x})(u_y + (1-c)u_{r,y}) - (u_x - cu_{r,x})(u_y - cu_{r,y}) \\ &= u_x u_{r,y} + u_y u_{r,x} + (1-2c)u_{r,x}u_{r,y}\end{aligned}$$

hinzu. Damit lauten die beiden Gleichungen für die Relativgeschwindigkeit

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{r,x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x u_{r,x} + \frac{1-2c}{2} u_{r,x}^2 + \Psi(P) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u_x u_{r,y} + u_y u_{r,x} + (1-2c)u_{r,x}u_{r,y}) = 0. \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{r,y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( u_y u_{r,y} + \frac{1-2c}{2} u_{r,y}^2 + \Psi(P) \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_{r,y} + u_y u_{r,x} + (1-2c)u_{r,x}u_{r,y}) = 0. \quad (7.8)$$

mit  $\Psi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho_2} - \frac{P}{\rho_1}$  aus Gleichung 5.13.

Die 5 Differentialgleichungen 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 und 7.8 zusammen mit den gleichen Annahmen wie in Kapitel 5, also  $\rho_1 = \text{const}$  und

$$P = K_2 \rho_2^\gamma \quad \text{und/oder} \quad P = K_\rho \rho^\gamma \quad (7.9)$$

können ganz analog zum 1-dimensionalen Fall gelöst werden. Die Ableitungen bzw. Flüsse in einer Richtung werden in zwei Richtungen erweitert.

## 7.2 Matrixschreibweise des Gleichungssystems in 2-d

In erster Näherung kann auch dieselbe Gleichung für die CFL-Bedingung verwendet werden, falls mit analogen Anfangs- und Randbedingungen gearbeitet wird. Besser ist es jedoch die Jacobi-Matrix wie für den 1-dimensionalen Fall in Kapitel 5.2 beschrieben herzuleiten.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, -\infty < x < \infty \quad (7.10)$$

mit

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ u_{r,x} \\ u_{r,y} \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + \rho c(1-c)u_{r,x}^2 + P \\ \rho u_x u_y + \rho c(1-c)u_{r,x}u_{r,y} \\ u_x u_{r,x} + \frac{1-2c}{2} u_{r,x}^2 + \Psi \\ u_x u_{r,y} + u_y u_{r,x} + (1-2c)u_{r,x}u_{r,y} \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y + \rho c(1-c)u_{r,x}u_{r,y} \\ \rho u_y^2 + \rho c(1-c)u_{r,y}^2 + P \\ u_x u_{r,y} + u_y u_{r,x} + (1-2c)u_{r,x}u_{r,y} \\ u_y u_{r,y} + \frac{1-2c}{2} u_{r,y}^2 + \Psi \end{bmatrix}.$$

bzw. in der Schreibweise der Variablen

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + c(1-c)u_1 u_4^2 + P(u_1) \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} + c(1-c)u_1 u_4 u_5 \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} + \frac{1-2c}{2} u_4^2 + \Psi(u_1) \\ \frac{u_2 u_5}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} u_4 + (1-2c)u_4 u_5 \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} u_3 \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} + c(1-c)u_1 u_4 u_5 \\ \frac{u_3^2}{u_1} + c(1-c)u_1 u_5^2 + P(u_1) \\ \frac{u_2 u_5}{u_1} + \frac{u_3 u_4}{u_1} + (1-2c)u_4 u_5 \\ \frac{u_3 u_5}{u_1} + \frac{1-2c}{2} u_5^2 + \Psi(u_1) \end{bmatrix}.$$

Jetzt werden wieder die Ableitungen per Kettenregel ausgeführt, wobei es eine Jacobi-Matrix für die Geschwindigkeiten in x-Richtung und eine für die Geschwindigkeiten in y-Richtung gibt. Beide Matrizen sind in wesentlichen Teilen identisch mit dem 1-dimensionalen Fall, d.h. bei  $J_x$  und bei  $J_y$  kommen nur 2 neue Spalten bzw. Zeilen hinzu. Um sich hier die Fallunterscheidungen zu ersparen,

wird die Funktion  $\Psi$  und die Größe  $P$  offen gelassen und müssen analog zum 1-dimensionalen Fall je nach Version ersetzt werden.

Für  $J_x$ :

$$\begin{aligned}
& \partial_x \left( \frac{u_2^2}{u_1} + u_1 c (1 - c) u_4^2 + P(u_1) \right) \\
&= \frac{2u_2}{u_1} \partial_x u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2} \partial_x u_1 + c(1 - c) u_4^2 \partial_x u_1 + u_1 c (1 - c) 2u_4 \partial_x u_4 + \partial_{u_1} P(u_1) \partial_x u_1 \\
& \partial_x \left( \frac{u_2 u_3}{u_1} + c(1 - c) u_1 u_4 u_5 \right) \\
&= -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} \partial_x u_1 + \frac{u_3}{u_1} \partial_x u_2 + \frac{u_2}{u_1} \partial_x u_3 + c(1 - c) (u_4 u_5 \partial_x u_1 + u_1 u_5 \partial_x u_4 + u_1 u_4 \partial_x u_5) \\
& \partial_x \left( \frac{u_2 u_4}{u_1} + \frac{1 - 2c}{2} u_4^2 + \Psi(u_1) \right) \\
&= -\frac{u_2 u_4}{u_1^2} \partial_x u_1 + \frac{1}{u_1} u_4 \partial_x u_2 + \frac{u_2}{u_1} \partial_x u_4 + (1 - 2c) u_4 \partial_x u_4 + \partial_{u_1} \Psi(u_1) \partial_x u_1 \\
& \partial_x \left( \frac{u_2 u_5}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} u_4 + (1 - 2c) u_4 u_5 \right) \\
&= -\frac{u_2 u_5}{u_1^2} \partial_x u_1 + \frac{u_5}{u_1} \partial_x u_2 + \frac{u_2}{u_1} \partial_x u_5 - \frac{u_3 u_4}{u_1^2} \partial_x u_1 + \frac{u_4}{u_1} \partial_x u_3 + \frac{u_3}{u_1} \partial_x u_4 + (1 - 2c) (u_5 \partial_x u_4 + u_4 \partial_x u_5)
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich jetzt die Jacobi-Matrix für die  $x$ -Richtung ablesen.

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_2^2}{u_1^2} + c(1 - c) u_4^2 + \partial_{u_1} P & \frac{2u_2}{u_1} & 0 & c(1 - c) 2u_1 u_4 & 0 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} + c(1 - c) u_4 u_5 & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & c(1 - c) u_1 u_5 & c(1 - c) u_1 u_4 \\ -\frac{u_2 u_4}{u_1^2} + \partial_{u_1} \Psi(u_1) & \frac{u_4}{u_1} & 0 & \frac{u_2}{u_1} + (1 - 2c) u_4 & 0 \\ -\frac{u_2 u_5}{u_1^2} - \frac{u_3 u_4}{u_1^2} & \frac{u_5}{u_1} & \frac{u_4}{u_1} & \frac{u_3}{u_1} + (1 - 2c) u_5 & \frac{u_2}{u_1} + (1 - 2c) u_4 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Für die Jacobi-Matrix  $J_y$  ist die 2. Zeile identisch mit der 3. von  $J_x$  und die 4. Zeile mit der 5. von  $J_x$ . In den anderen 3 Zeilen wird  $u_2$  durch  $u_3$  und  $u_4$  durch  $u_5$  ersetzt, also dementsprechend werden die Einträge in den Spalten der Zeilen 1, 2 und 4 vertauscht. Damit ergibt sich

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} + c(1 - c) u_4 u_5 & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} & c(1 - c) u_1 u_5 & c(1 - c) u_1 u_4 \\ -\frac{u_3^2}{u_1^2} + c(1 - c) u_5^2 + \partial_{u_1} P & 0 & \frac{2u_3}{u_1} & 0 & c(1 - c) 2u_1 u_5 \\ -\frac{u_2 u_5}{u_1^2} - \frac{u_3 u_4}{u_1^2} & \frac{u_5}{u_1} & \frac{u_4}{u_1} & \frac{u_3}{u_1} + (1 - 2c) u_5 & \frac{u_2}{u_1} + (1 - 2c) u_4 \\ -\frac{u_3 u_5}{u_1^2} + \partial_{u_1} \Psi(u_1) & 0 & \frac{u_5}{u_1} & 0 & \frac{u_3}{u_1} + (1 - 2c) u_5 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Für die noch zu berechnen Terme

$$\partial_\rho P \quad \text{und} \quad \partial_\rho \Psi(\rho)$$

ergibt sich das Gleiche wie in den 3 Varianten von Kapitel 5.2.

## 8 Andere Forschungsgruppen, Anwendungen und Förderprogramme

Selbstverständlich ist die Gruppe um Toro weiterhin auf diesem Gebiet aktiv, <http://eleuteriotoro.com/research/>, der an der University of Trento arbeitet.

Aktivitäten gibt es an der RWTH Aachen:

<http://www.igpm.rwth-aachen.de/node/200> An Institut für Geometrie und praktische Mathematik wird an dem Projekt *“Dynamics of cavitation bubbles in compressible two-phase fluid flow”* gearbeitet.

Frei verfügbaren Code in C++ steht unter

<http://amroc.sourceforge.net/examples/index.htm> für die Euler Gleichungen. Da gibt es bestimmt noch mehr.

Ein weiteres interessantes Thema könnte die Parallelisierung sein. Das wird z.B. von einer Gruppe in Cambridge betrieben

<http://www.many-core.group.cam.ac.uk/projects/blakely.shtml>, die eine Seite zu “Riemann-problem-based methods on the GPU” haben.

Ein weitere Platz ist das ICCS - International Center for Computational Science, darin die Gruppe Infrastructure for Astrophysics Applications Computing,

[http://iccs.lbl.gov/research/isaac/GAMER\\_Framework.html](http://iccs.lbl.gov/research/isaac/GAMER_Framework.html), die ihre Code bereits hybrid in OpenMP/MPI/GPU parallelisiert haben.

Förderprogramme sind schwer zu finden. Leider gerade verpasst haben wir

<http://www.bmbf.de/foerderungen/25515.php> bzw.

<http://www.ernetmed.eu/>

Dann gäbe es noch das EU-Programm

<http://ec.europa.eu/programmes/horizon2020/>.

Vielleicht lässt sich darüber was finden,

Ein Herr Eric Goncalves Da Silva vom ENSMA,

<http://www.ensma.fr/>

wäre im Falle eines EU-Projekts an der Mitarbeit interessiert.

Zusammenstellung von Peter an Anwendungen aus den entsprechenden WWW-Seiten:

- Toro

My own experience is related to compressible, reactive multiphase flows in propulsion technology, in which complex moving boundaries are present. Past and current work in this area has been funded by the British Ministry of Defense via DERA.

Another area of application of my interest is in Nuclear Reactor Safety and Design. Dia war PhD Student bei diesem Projekt.

THE REMISSION PROJECT REMISSION: a long-term research project on Research into Mathematical modelling of Multiple Sclerosis and its vascular connection Computer simulation of blood flow in the intra/extra cranial venous system in humans with multiple sclerosis and the CCSVI condition. This research programme is motivated by the recently proposed association between multiple sclerosis (MS) and a vascular anomaly termed chronic cerebro-spinal venous insufficiency (CCSVI) by Zamboni and collaborators. The CCSVI condition is characterized by the presence of obstructions of various kinds in the extracranial veins. Such obstructions prevent a normal drainage of blood from the brain to the heart. CCSVI is present in a relevant number of MS patients and such occurrence is of great clinical interest.

- INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK der RWTH Aachen

The primary objective of the project is to provide an accurate description and prediction of all wave and flow phenomena arising in the dynamical two-phase system formed by a collapsing cavitation bubble. Cavitation processes in liquids, i.e., bubble formation and collapse of the bubble, play a significant role in numerous technical applications such as fluid transport, tube and nozzle flow and water turbines. By means of cavitation, shock and expansion waves may occur as well as liquid jets with high kinetic energy. At a solid wall these effects may cause material damage by erosion.

- Gruppe in Cambridge

The Rayleigh–Taylor instability, or RT instability (after Lord Rayleigh and G. I. Taylor), is an instability of an interface between two fluids of different densities which occurs when the lighter fluid is pushing the heavier fluid.[1][2] Examples include supernova explosions in which expanding core gas is accelerated into denser shell gas,[3][4] instabilities in plasma fusion reactors,[5] and the common terrestrial example of a denser fluid such as water suspended above a lighter fluid such as oil in the Earth’s gravitational field.

- ICCS - International Center for Computational Science, darin die Gruppe Infrastructure for Astrophysics Applications Computing

GAMER is a GPU-accelerated Adaptive MESH Refinement Code for astrophysical applications. The Kelvin–Helmholtz instability (after Lord Kelvin and Hermann von Helmholtz) can occur when there is velocity shear in a single continuous fluid, or where there is a velocity difference across the interface between two fluids. An example is wind blowing over water: The instability manifests in waves on the water surface. More generally, clouds, the ocean, Saturn’s bands, Jupiter’s Red Spot, and the sun’s corona show this instability.

## Literatur

- [1] El.F. Toro: *Rieman Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* Springer Verlag, 3rd Edition, 2010.
- [2] J.H. Ferziger and M. Peric: *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 2nd Edition, 1999.
- [3] D. Zeidan: *The Riemann problem for a hyperbolic model of two-phase flow in conservative form*, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol 25, No 6, (2011) 299-318
- [4] D. Zeidan: *Mathematical and Numerical Study of Two-Phase Flow Models*, erhältlich z.B. über <http://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl.ethos.396533> (2003)
- [5] D. Zeidan, R. Touma and A. Slaouti: *Application of a thermodynamically compatible two-phase flow model to the high-resolution simulations of compressible gas-magma flow*, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol ?? No ?., (2014) ??-??