Das Godunov-Verfahren

K. Benkert[1], A. Stock[2]

Universität Stuttgart

[1]Höchstleistungsrechenzentrum (HLRS)

[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)

www.iag.uni-stuttgart.de

Inhalt

Die Berechnung des numerischen Flusses

1. Finite-Volumen-Verfahren für die Eulergleichungen
2. Das Stoßwellenrohr
3. Die Idee von Godunov

Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \qquad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$$

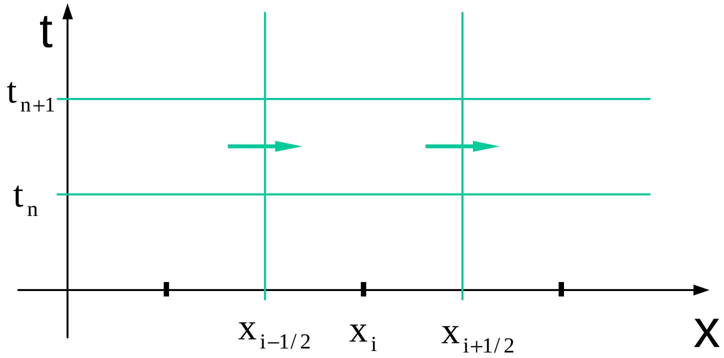
Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \iff p = (\gamma-1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2\right)$

Gasdynamik

Finite-Volumen-Verfahren in einer Raumdimension

Erhaltungsgleichung:

$$u_t + f(u)_x = 0$$



Integration über $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] x [t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x,t)dx\ dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x,t))_x\, dx\ dt = 0$$

Finite-Volumen-Verfahren oder Verfahren in Erhaltungsform

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x,t)\,dx\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x,t))_x\,dx\,dt = 0$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)\,dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t)) - f(u(x_{i-1/2},t))\,dt = 0$$

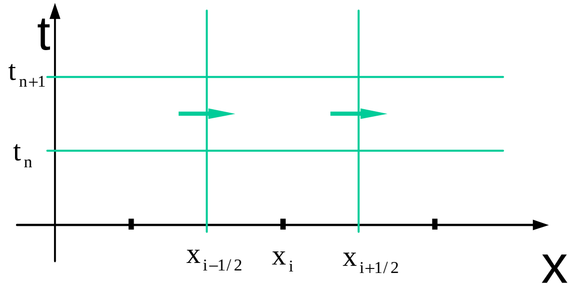
$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)}$$

u_i^n approximiert $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_n)\,dx$ Integraler Mittelwert

$g_{i+1/2}$ approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t))\,dt$ numerischer Fluss

Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)}$$



$$g_{i+1/2} \quad \text{approximiert} \quad \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t))dt$$

Einfachste Form des Flusses:

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2}\left(f\left(u(x_i, t_n)\right) + f\left(u(x_{i+1}, t_n)\right)\right)$$

Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

$$\boxed{u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)}$$

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2}\left(f\left(u(x_i, t_n)\right) + f\left(u(x_{i+1}, t_n)\right)\right)$$

Einsetzen: $\rightarrow$ $$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f\left(u(x_{i+1}, t_n)\right) - f\left(u(x_{i-1}, t_n)\right)\right)$$

Zentrale Differenz. Bedingungslos instabil, kann stabilisiert werden durch hinzufügen künstlicher Viskosität

Jameson-Verfahren

Zentrale Differenz + künstlicher Viskosität:

$$g_{i+\frac{1}{2}} = g\left(u_i, u_{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(u_i\right) + f\left(u_{i+1}\right)\right)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right) + \varepsilon \Delta x^2 u_{xx} \quad \text{oder} \quad \varepsilon \Delta x^4 u_{xxxx}$$

Runge-Kutta Verfahren in der Zeit

=> Jameson Schema für transsonische Strömungen

Wahl der Dissipation sehr sophisticated

Godunov‘s Idee

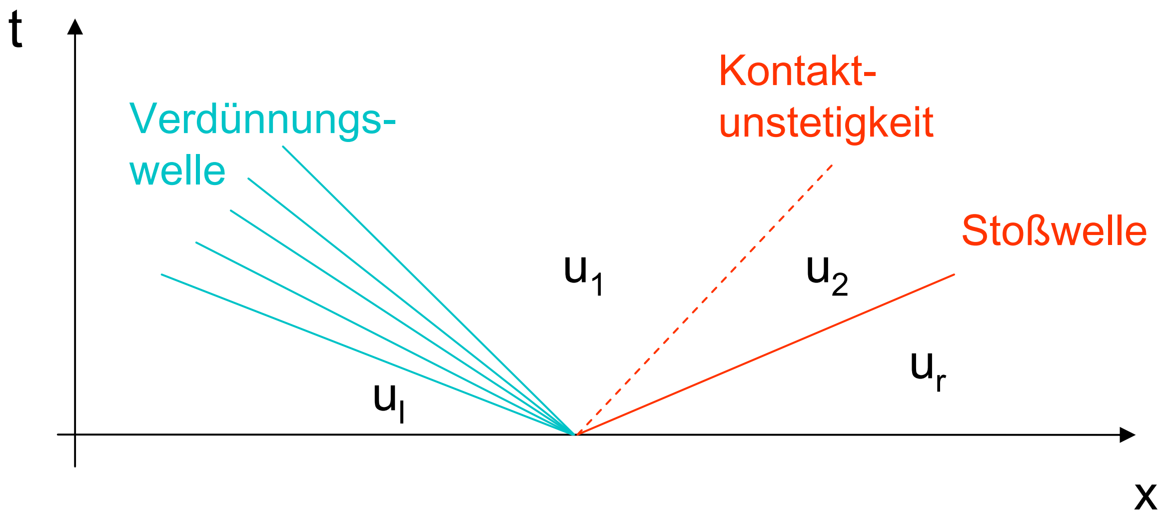
Das Stoßwellenrohr (Shock tube)

Konstanter Zustand u_l	Konstanter Zustand u_r

$$u(x, t = 0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

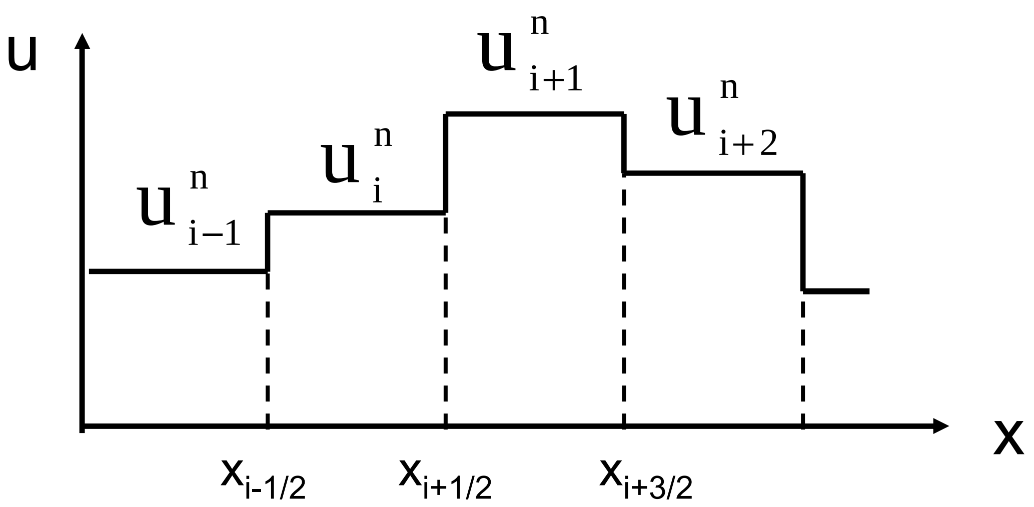
Riemann Problem für die Euler-Gleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0 \\ u_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



Exakte Lösung: Fixpunktproblem

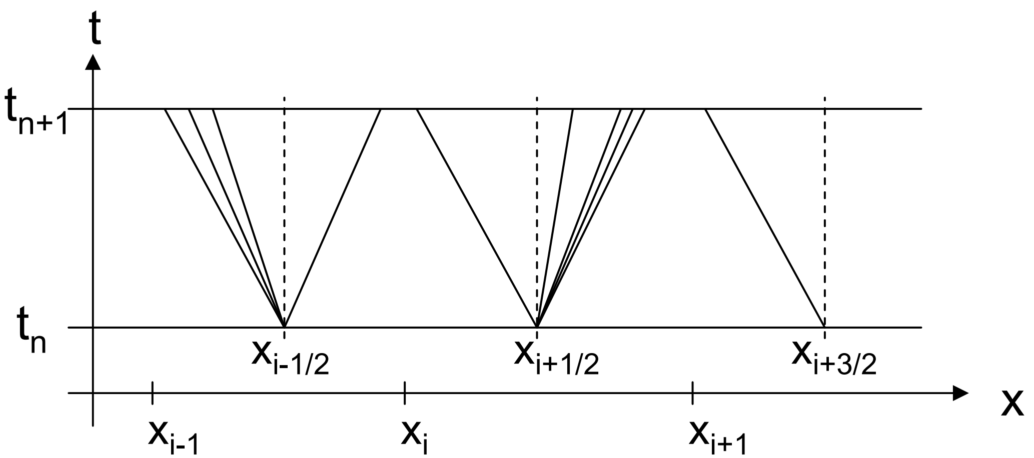
Godunov's Idee in einer Raumdimension



Stückweise konstante Werte in jeder Zelle

Löse Riemann-Problem an jeder Zellkante

Formulierung als Finite Volumen Verfahren



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$ FV-scheme

$g_{i+1/2}^n$ Numerischer Fluß bei $x_{i+1/2}$

$g_{i+1/2}$ approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t))\,dt$

Die Methode von Godunov

Numerischer Fluß der Godunov-Methode:

$$\boxed{g^{n}_{i+1/2} = f\left(u_{RP}\left(0; u_i, u_{i+1}\right)\right)}$$

$u_{RP:}$ Lösung des Riemann-Problem an der Zellkante

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens:

- Exakte Erhaltung
- Nichtlineare Wellenausbreitung
- Adaptivität

Stabilität: CFL-Bedingung

For private notes