

LEHRBUCH

Stefan Lecheler

Numerische Strömungsberechnung

Schneller Einstieg durch anschauliche
Beispiele mit ANSYS 15.0

3. Auflage



Springer Vieweg

Numerische Strömungsberechnung

Stefan Lecheler

Numerische Strömungsberechnung

Schneller Einstieg durch anschauliche
Beispiele mit ANSYS 15.0

3., aktualisierte Auflage



Springer Vieweg

Stefan Lecheler
Fakultät für Maschinenbau
Universität der Bundeswehr München
Neubiberg, Deutschland

ISBN 978-3-658-05200-3
DOI 10.1007/978-3-658-05201-0

ISBN 978-3-658-05201-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2009, 2011, 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Ein-speicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefrei und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Inzwischen haben die kommerziellen Strömungsberechnungsprogramme wie zum Beispiel CFX, FLUENT und STAR-CD einen so hohen Entwicklungsstand hinsichtlich Flexibilität, Genauigkeit und Effizienz erreicht, dass sie für sehr viele Strömungsprobleme bei industriellen Anwendungen eingesetzt werden. Ohne sie wäre eine effiziente Entwicklung neuer Fahrzeuge, Flugzeuge, Motoren und Turbinen nicht mehr möglich.

Aus diesem Grund müssen die Entwicklungingenieurinnen und -ingenieure heutzutage die Anwendung von CFD-Programmen (Computational Fluid Dynamics) beherrschen. Da schon kleine Eingabefehler große Auswirkungen auf das Rechenergebnis haben können, sind diese auf jeden Fall zu vermeiden. Hierzu möchte dieses Buch beitragen und neben den wichtigsten theoretischen Grundlagen vor allem zahlreiche praxisrelevante Tipps und Erfahrungen vermitteln.

Dieses Buch entstand aus der Vorlesung Numerische Strömungsberechnung, welche im Masterstudiengang Computer Aided Engineering an der Universität der Bundeswehr München angeboten wird. Hier lernen die Studierenden anhand von praktischen Übungen mit einem kommerziellen Strömungsberechnungs-Programm wie dieses zu bedienen ist, welche Theorie dahinter steckt und wie die Ergebnisse zu interpretieren sind. Ihre Anregungen flossen in das Buch mit ein. So wurde zum Beispiel auf komplizierte Mathematik soweit möglich verzichtet und viel Wert auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit gelegt.

Danken möchte ich an dieser Stelle allen Betreuern, Kolleginnen und Kollegen, die mich bei meinen Arbeiten auf dem Gebiet der numerische Strömungsberechnung unterstützt haben am Institut für Raumfahrtssysteme der Universität Stuttgart, am von Karman Institute in Brüssel, am Forschungslabor bei ABB Turbo Systems in Baden/Schweiz, in der Gasturbinenentwicklung bei ALSTOM Baden/Schweiz und an der Universität der Bundeswehr München.

Ich freue mich, dass nun die dritte Auflage erscheinen kann. In ihr wurden einige Korrekturen durchgeführt und die drei Übungsbeispiele aktualisiert und an die neueste Version ANSYS15.0 angepasst. Die Antworten auf die Zielfragen sind jetzt neben der bisherigen Datei zum Download auch am Ende des Buches angegeben. Für die Bereitstellung der Beispielbilder bedanke ich mich recht herzlich bei der Firma ANSYS, ebenso danke ich dem Lektorat Maschinenbau des Springer Vieweg Verlags.

Bad Tölz, Februar 2014

Stefan Lecheler

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	VII
Symbolverzeichnis	IX
1 Einführung.....	1
1.1 Ziel dieses Buchs	1
1.2 Aufgaben der numerischen Strömungsberechnung.....	1
1.3 Aufbau des Buchs	8
2 Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik.....	9
2.1 Ziel dieses Kapitels	9
2.2 Herleitung der Erhaltungsgleichungen.....	10
2.3 Navier-Stokes-Gleichungen	20
2.4 Vereinfachungsmöglichkeiten.....	35
3 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen.....	41
3.1 Ziel dieses Kapitels	41
3.2 Was bedeutet Diskretisierung?.....	42
3.3 Räumliche Diskretisierung.....	44
3.4 Zeitliche Diskretisierung.....	50
3.5 Differenzengleichungen	52
4 Rechennetze	61
4.1 Ziel dieses Kapitels	61
4.2 Übersicht.....	62
4.3 Strukturierte Rechennetze	64
4.4 Unstrukturierte Rechennetze	73
4.5 Rechennetzadaption	74
5 Lösungsverfahren	78
5.1 Ziel dieses Kapitels	78
5.2 Übersicht.....	79
5.3 Zentrale Verfahren	80
5.4 Upwind-Verfahren	84
5.5 High-Resolution-Verfahren	90
5.6 Vergleich der Verfahren.....	94

6 Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung	105
6.1 Ziel dieses Kapitels	105
6.2 Übersicht	106
6.3 Einlesen der Geometrie	107
6.4 Erzeugung des Rechengebiets	107
6.5 Erzeugung des Rechennetzes	109
6.6 Vorbereitung der Strömungsberechnung	111
6.7 Strömungsberechnung	111
6.8 Auswertung	112
6.9 Validierung	112
6.10 Einführung in die Übungsbeispiele	114
6.11 Die Arbeitsumgebung ANSYS WORKBENCH	116
7 Übungsbeispiel Tragflügelumströmung	117
7.1 Erzeugung der Geometrie	117
7.2 Erzeugung des Rechennetzes	124
7.3 Vorbereitung der Rechnung	128
7.4 Berechnung der Strömung	136
7.5 Auswertung der Ergebnisse	139
8 Übungsbeispiel Rohrströmung	146
8.1 Einlesen der Geometrie	146
8.2 Erzeugung der Geometrie	147
8.3 Erzeugung des Rechennetzes	150
8.4 Vorbereitung der Rechnung	153
8.5 Berechnung der Strömung	156
8.6 Auswertung der Ergebnisse	158
9 Übungsbeispiel Doppelrohr-Wärmeübertrager	162
9.1 Erzeugung der Geometrie	162
9.2 Erzeugung des Rechennetzes	167
9.3 Vorbereitung der Rechnung	173
9.4 Berechnung der Strömung	178
9.5 Auswertung der Ergebnisse	180
9.6 Parametervariation	186
Literaturverzeichnis	188
Sachwortverzeichnis	190
Antworten zur Zielkontrolle	195

Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Bezeichnung
A	m^2	Fläche, Oberfläche
a	m/s^2	Beschleunigung
a	m/s	Schallgeschwindigkeit
CFL	-	Courant-Friedrichs-Levy-Zahl
c_v	$J/kg/K$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
c_p	$J/kg/K$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
dx,dy,dz	M	Seitenflächen des Volumenelements dV
\dot{E}	J/s	Energiestrom
e	J/kg	Spezifische innere Energie
ε	m^2/s^3	Turbulente Dissipation
F	N	Kraft
F,G,H	-	Flussvektoren in kartesischen Koordinaten
$\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}$	-	Flussvektoren in krummlinigen Koordinaten
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
h	J/kg	Spezifische Enthalpie
I	-	Einheitsmatrix
i	N/s	Impulsstrom
i,j,k	-	Netzpunktindex in die 3 Raumrichtungen
k	m^2/s^2	Turbulente kinetische Energie
λ	$W/m/K$	Wärmeleitkoeffizient
Ma	-	Machzahl
m	kg	Masse
\dot{m}	kg/s	Massenstrom
NRB	-	Numerische Randbedingungen
$\vec{\nabla}$	-	Divergenz
n	-	Normalenrichtung
μ	$Pa\ s$	Dynamische Viskosität
ω	m^2/s^3	Turbulente Frequenz
PRB	-	Physikalische Randbedingungen

p	Pa	Druck
ϕ	-	Potential
Q	-	Quellterm in kartesischen Koordinaten
\hat{Q}	-	Quellterm in krummlinigen Koordinaten
\dot{Q}	W	Wärmestrom
\dot{q}	W/kg	Spezifischer Wärmestrom
R	$J/kg/K$	Gaskonstante
ρ	kg/m^3	Dichte
S	J/K	Entropie
T	K	Temperatur
t, τ	s	Zeit
U	-	Erhaltungsvektor in kartesischen Koordinaten, auch allgemeine Strömungsgröße
\hat{U}	-	Erhaltungsvektor in krummlinigen Koordinaten
u, v, w	m/s	Geschwindigkeitskomponenten in x-, y-, z-Richtung
V, dV	m^3	Volumen, Volumenelement
\dot{W}	W	Leistung
x, y, z	m	Kartesische Raumkoordinaten
ξ, η, ζ	-	Krummlinige Raumkoordinaten

Index	Bezeichnung
i, j, k	Raumrichtungen
x, y, z	x-, y-, z-Richtung
n	Zeitebene
t	total
w	Wand
$+$	Positiver Eigenwert
$-$	Negativer Eigenwert

1 Einführung

1.1 Ziel dieses Buchs

Wenn Sie (noch) keine Ahnung von numerischer Strömungsberechnung haben, dann ist dieses Buch das Richtige für Sie. Es ist einfach und verständlich gehalten, zumindest aus Sicht des Autors. Es richtet sich an angehende Ingenieure des Maschinenbaus und ähnlicher Studienrichtungen, die bereits mit der Strömungsmechanik und Thermodynamik vertraut sind. Kenntnisse über numerische Lösungsverfahren und in Informatik sind von Vorteil, aber nicht zwingend. Die Ziele in Einzelnen sind, dass Sie

- ansatzweise verstehen, welche Theorie hinter CFD-Programmen (CFD = Computational Fluid Dynamics = numerische Strömungsberechnung) steckt,
- die wichtigsten Begriffe und Gleichungen aus dem CFD-Bereich kennen,
- wissen, wie kommerzielle CFD-Programme wie z. B. ANSYS CFX funktionieren und sie auch bedienen können,
- den Einsatzbereich, die kritischen Punkte und die Ergebnisse von CFD-Programmen beurteilen können.

Dieses Buch zielt nicht darauf ab, dass Sie eigene CFD-Programme schreiben können. Dies ist bei der Anwendung kommerzieller CFD-Programme auch meistens nicht nötig. Für Leser, die sich nach der Lektüre dieses Buches für weitere Details interessieren, steht die Übersichtsliteratur [1] bis [5] und die Fachliteratur [6] bis [29] zur Verfügung.

1.2 Aufgaben der numerischen Strömungsberechnung

Die Strömungsgleichungen (dies sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, wie später gezeigt wird) haben nur für einfache Anwendungen wie die ebene Platte oder die Zylinderumströmung theoretische Lösungen. Nur für diese Spezialfälle können die Drücke, Geschwindigkeiten und Temperaturen analytisch berechnet werden. Für reale Strömungsprobleme aus z. B. der Luft- und Raumfahrt, der Energietechnik, dem Automobilbau, der Waffentechnik, der Marinetechnik oder der Medizintechnik muss die Strömung entweder experimentell oder numerisch bestimmt werden (Bild 1-1).

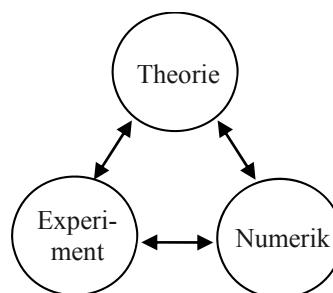


Bild 1-1 Die drei Disziplinen der Strömungsmechanik

Beim Experiment wird ein maßstäbliches Modell des zu untersuchenden Körpers in den Wind- oder Wasserkanal gestellt und die Drücke, Temperaturen, Geschwindigkeiten und Kräfte werden mittels Sonden erfasst. Experimente sind meistens aufwendig und teuer:

- Die realen Mach- und Reynoldszahlen können oftmals nicht eingestellt werden, womit die Ähnlichkeit mit dem Original begrenzt ist. Z. B. lassen sich hohe Strömungsgeschwindigkeiten wie im Hyperschall nur mit großem Aufwand (durch Kryotechnik) oder kurzzeitig (im Stoßwellen-Windkanal) erzielen.
- Strömungsdetails können oftmals nicht erfasst werden, wie z. B. die rotierende Innenströmung in Turbinen, da hier Sonden aus konstruktiven Gründen nur sehr aufwendig installiert werden können. Letztendlich verfälschen viele eingesetzten Sonden auch die zu messende Strömung.

Die numerische Strömungsberechnung hilft hier, diese Nachteile zu überwinden. Durch die Entwicklung von leistungsfähigen Computern lassen sich die Strömungsgleichungen numerisch lösen und reale Probleme aus der Praxis können genau, schnell und kostengünstig berechnet werden. Gerade bei der Entwicklung neuer Produkte wie z. B. Flugzeugen, Raketen, Automobilen und Turbinen müssen für die strömungstechnische Auslegung und Optimierung Hunderte von Varianten durchgerechnet werden, bis beispielsweise die Strömungsverluste minimal sind.

Es muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die Genauigkeit des CFD-Programms für den jeweiligen Anwendungsbereich immer zuerst anhand einer Validierung überprüft werden sollte. Validierung bedeutet, dass die Rechenergebnisse mit theoretischen und/oder experimentellen Ergebnissen für ähnliche Geometrien und Strömungen verglichen werden. Erst wenn die Übereinstimmung zufriedenstellend ausfällt, können CFD-Programme zuverlässig zur Auslegung und Optimierung neuer Geometrien angewendet werden.

Die Bilder 1-2 bis 1-10 zeigen neun typische Beispiele für die Leistungsfähigkeit moderner CFD-Programme:

- In Bild 1-2 sind die berechneten Stromlinien um einen Formel 1 Rennwagen dargestellt. Die Strömung kommt gleichmäßig an, verwirbelt sich an den Rädern und löst vor allem hinter dem Heck des Rennwagens ab.
- Bild 1-3 zeigt die Ergebnisse einer Strömungsberechnung um einen Flugzeugtragflügel mit ausgefahrenen Landeklappen. Neben den Stromlinien ist hier auch die Turbulenzintensität auf der Oberfläche dargestellt. Der Farbwechsel zeigt den Bereich der Transition von laminarer zu turbulenten Strömung.
- Auch die Berechnung von freien Oberflächen ist möglich. Bild 1-4 zeigt die Höhe die sich einstellende freie Wasseroberfläche um ein fahrendes Kanu.
- Bild 1-5 zeigt das Ergebnis einer Fluid-Struktur-Interaktions-Rechnung um eine Wasserturbine. Dargestellt sind neben den Stromlinien um die Schaufeln auch die Spannungen in den Rotorblättern.
- In Bild 1-6 ist die Machzahlverteilung auf den Schaufeln eines fünfstufigen transsonischen Axialverdichters dargestellt. Auch hier zeigen die roten Gebiete auf den Saugseiten des ersten und zweiten Laufrads eine Überschallströmung, die mit einem schwachen Verdichtungsstoß endet.
- Die Berechnung der Strömung in einem zukünftigen Kolbenmotor, bei dem kryogener Wasserstoff in das Ventil einströmt, ist in Bild 1-7 zu sehen. Dargestellt ist der Massenanteil des Wasserstoffs bei einem Kurbelwinkel von 460° .

- Auch zur Berechnung der Strömung in und um komplexe Gebäude werden CFD-Verfahren eingesetzt. Bild 1-8 Strömung zeigt die Stromlinien um das Amsterdamer Fußballstadion.
- Bild 1-9 zeigt die Stromlinien im Wasser bei der Umströmung eines Schwimmers. Hierdurch kann die Form des Badeanzuges strömungstechnisch optimiert werden.
- Bild 1-10 trägt den Titel „Athene im Sommerwind“. Für eine Weihnachtskarte wurde die Strömung um das ehemalige Logo der Universität der Bundeswehr berechnet. Es zeigt die Geschwindigkeitsvektoren bei einer Anströmung von 50 m/s. Strömungstechnisch könnte es sicherlich noch optimiert werden ☺.

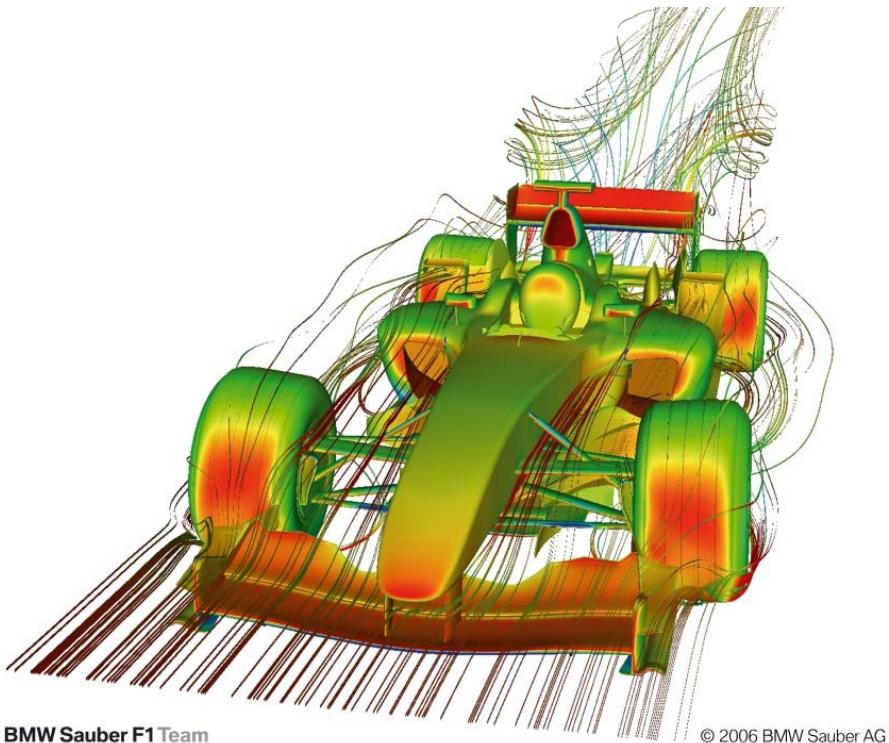


Bild 1-2 Strömung um einen Formel 1 Rennwagen [mit freundlicher Genehmigung von ANSYS und BMW Sauber F1 Team]

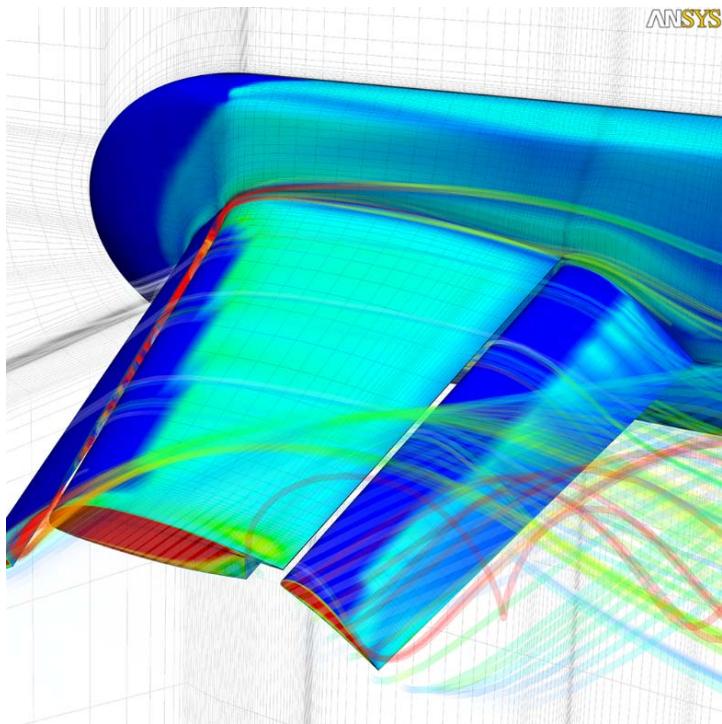


Bild 1-3 Strömung um einen Flugzeugtragflügel mit ausgefahrenen Landeklappen [mit freundlicher Genehmigung von ANSYS]

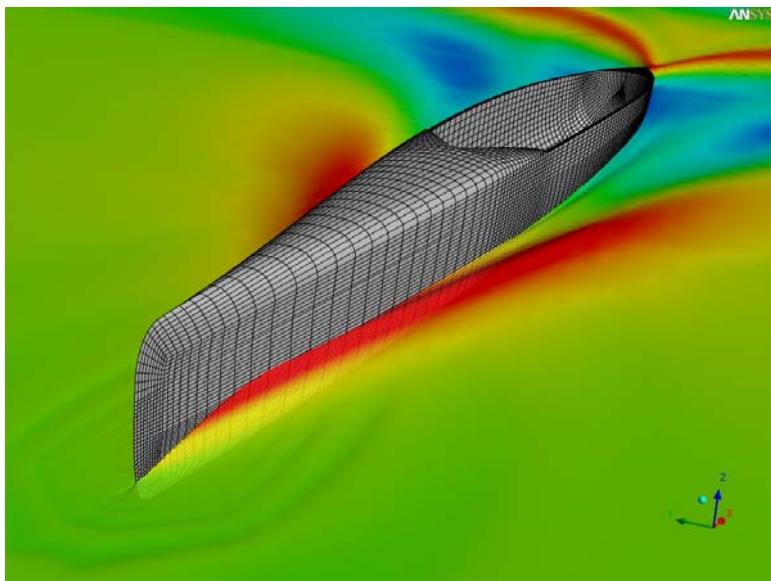


Bild 1-4 Wasseroberfläche bei einem fahrenden Kanu [mit freundlicher Genehmigung des Instituts für Forschung und Entwicklung von Sportgeräten (FES)]

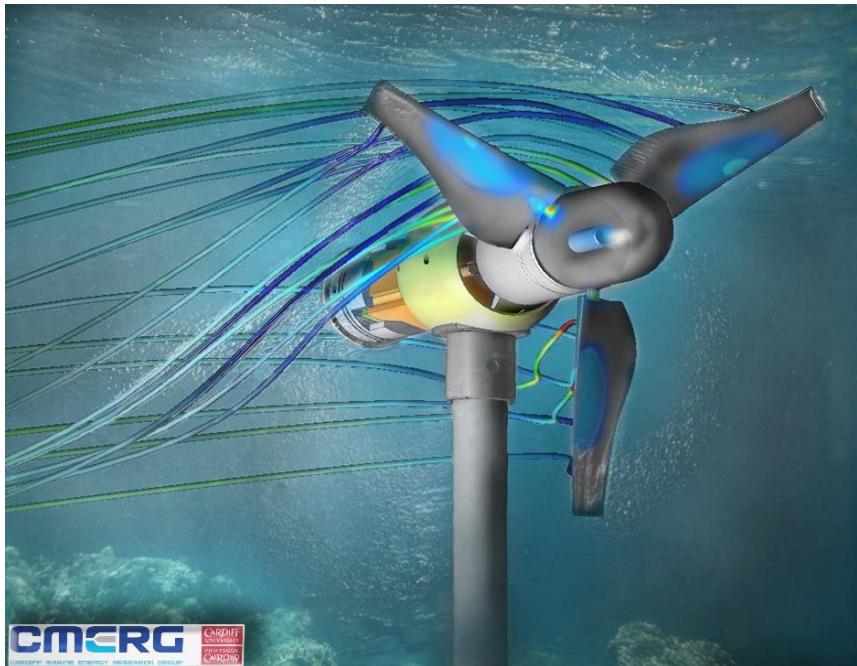


Bild 1-5 Strömung und Schaufelbelastung an einer Wasserturbine [mit freundlicher Genehmigung der Universität von Cardiff (CMERG), dem Low Carbon Research Institute (LCRI) und dem SuperGen Centre for Marine Energy Research (UKCMER)]

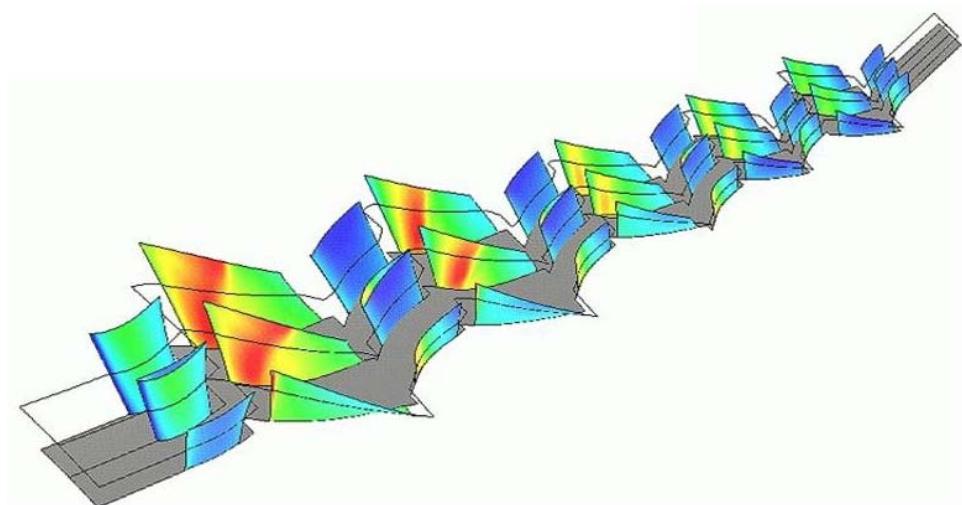


Bild 1-6 Machzahlverteilung auf den Schaufeln eines transsonischen Axialverdichters [mit freundlicher Genehmigung von ALSTOM]

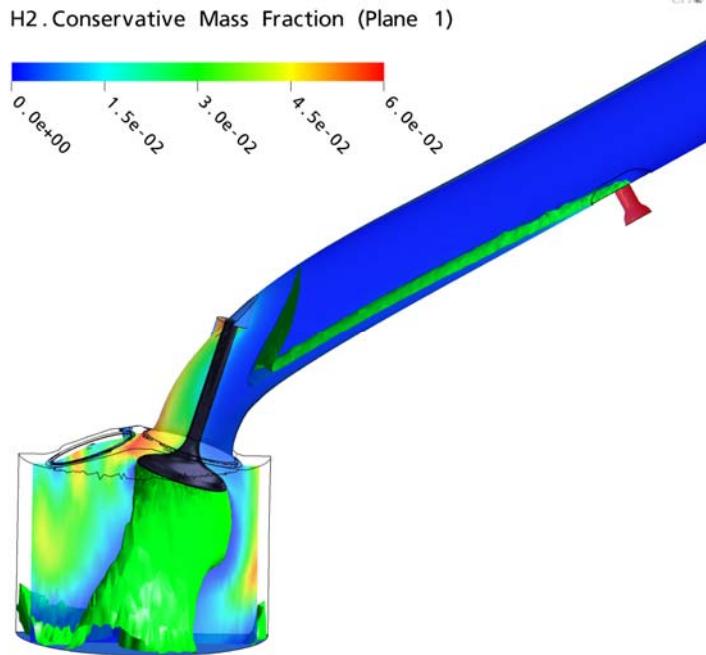


Bild 1-7 Kryogene Ventileinspritzung in einen Kolben [mit freundlicher Genehmigung von ANSYS]

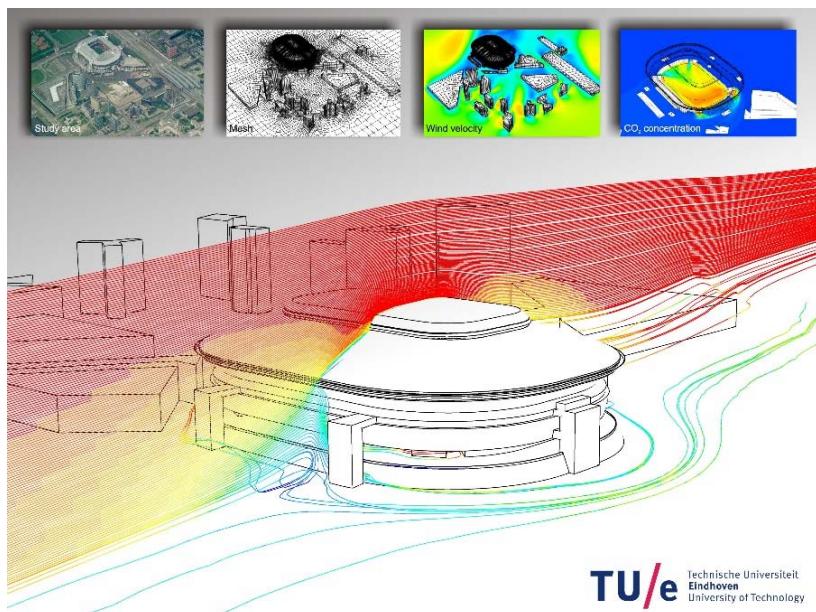


Bild 1-8 Strömung um das Fußballstadion Amsterdam Arena [mit freundlicher Genehmigung von Twan van Hoof und Bert Blocken, Technische Universität Eindhoven]

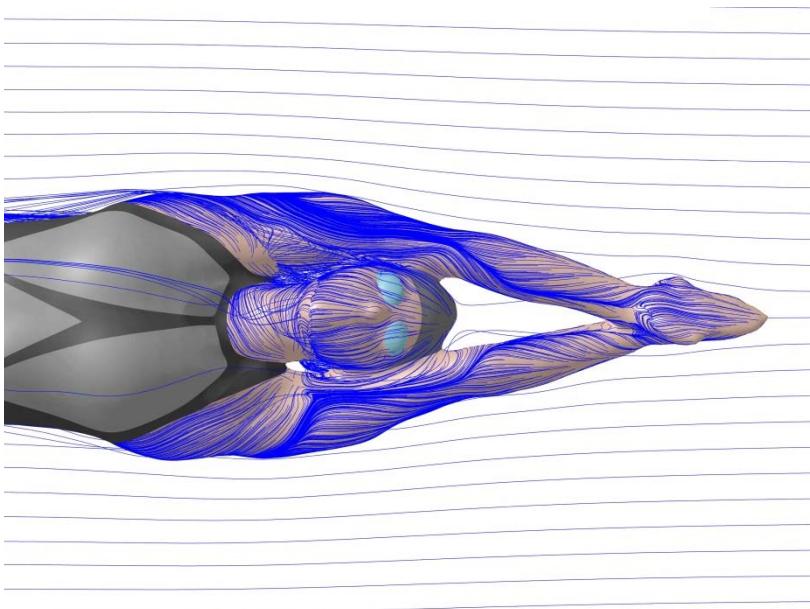


Bild 1-9 Strömung um einen Schwimmer mit Schwimmanzug [mit freundlicher Genehmigung von Speedo und ANSYS]

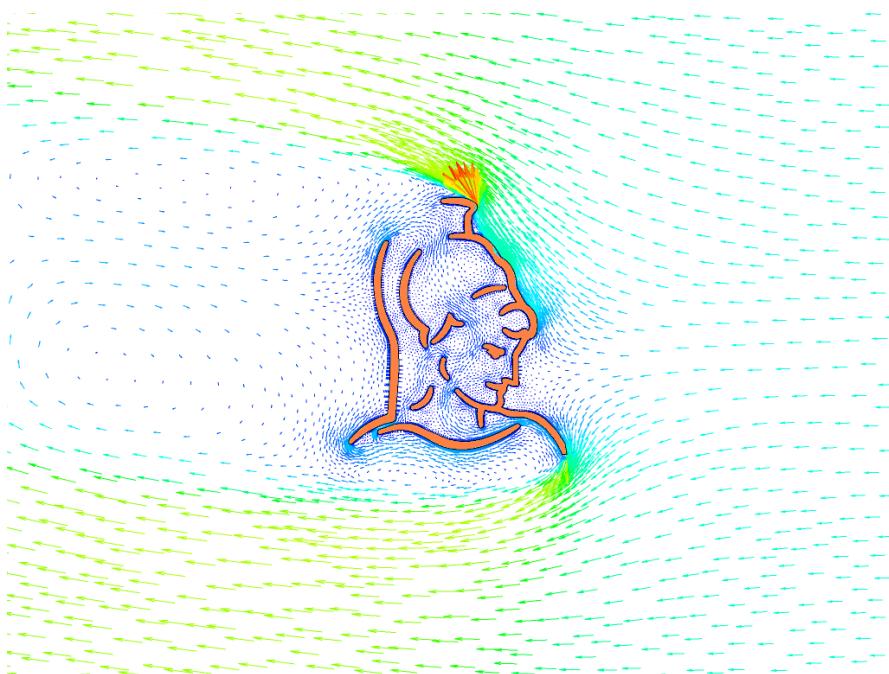


Bild 1-10 Strömung um das Logo der Universität der Bundeswehr München [mit freundlicher Genehmigung der UniBw München]

1.3 Aufbau des Buchs

In Kapitel 2 werden die Strömungsgleichungen vorgestellt. Dies sind die **Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie**, wie sie aus den Vorlesungen für Strömungsmechanik und Thermodynamik bekannt sind. Neben den **Navier-Stokes-Gleichungen**, die alle physikalisch relevanten Effekte beinhalten, werden auch übliche **Vereinfachungsmöglichkeiten** vorgestellt. Diese benötigen kürzere Rechenzeiten bei oftmals ausreichender Genauigkeit.

Kapitel 3 befasst sich mit der **Diskretisierung** der in Kapitel 2 vorgestellten Differentialgleichungen. Dies beinhaltet die Bildung der räumlichen und der zeitlichen Differenzen, ihre Genauigkeitsordnung und ihren Einfluss auf die Stabilität.

In Kapitel 4 werden die **unterschiedlichen Arten von Rechennetzen** und deren Vor- und Nachteile behandelt. Dies beinhaltet zum einen die strukturierten Rechennetze in Form von rechtwinkligen, schiefwinkeligen und blockstrukturierten Netzen. Zum anderen werden auch unstrukturierte und adaptive Rechennetze vorgestellt.

Kapitel 5 befasst sich mit den Lösungsverfahren der in Kapitel 2 bzw. 3 vorgestellten Gleichungssysteme. Neben den klassischen zentralen Verfahren werden auch die **modernen Lösungs-Algorithmen** der Upwind- und High-Resolution-Verfahren vorgestellt, mit denen die Strömungsgrößen auf den Rechennetzpunkten genau, schnell und robust berechnet werden können.

In Kapitel 6 wird der **typische Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung** von der Geometrieerzeugung bis zur Auswertung und Validierung exemplarisch dargestellt. Der Neueinsteiger in die numerische Strömungsberechnung bekommt hier **zahlreiche Tipps aus der Praxis**.

In den Kapiteln 7, 8 und 9 werden **drei einfache Anwendungsbeispiele** für den typischen Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung mit ANSYS CFX vorgestellt. Dabei handelt es sich in Kapitel 7 um die Umströmung eines **Tragflügelschnitts**, in Kapitel 8 um die Innenströmung in einem **Rohr mit zusätzlichem seitlichem Einlauf** und in Kapitel 9 um den Wärmedurchgang von einem warmen an ein kaltes Fluid in einem **Doppelrohr-Wärmeübertrager**.

Die Koordinatendatei für den Tragflügelschnitt in Kapitel 7 kann von der Homepage des Labors für Thermodynamik unter www.unibw.de/mb/fakultaet/we5/we51 aus dem Internet heruntergeladen werden. Für die deutsche Version des Programms DESIGN MODELER muss die Datei **Fluegel_dt.txt** verwendet werden. Hier sind die Dezimalzahlen mit Kommas angegeben. Für die englischsprachige Version gibt es die Datei **Fluegel_en.txt** mit Punkten.

Zu Beginn jedes Kapitels sind **Ziele** in Form von Fragen formuliert. Diese Fragen sollten Sie nach der Lektüre des Kapitels beantworten können. Die richtigen **Antworten** können weiterhin von der Homepage des Labors für Thermodynamik heruntergeladen werden. Sie stehen jetzt aber auch zusätzlich am Ende des Buchs.

Für Rückmeldungen und Fragen können Sie sich auch gerne direkt per E-Mail an mich wenden unter **stefan.lecheler@unibw.de**.

2 Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik

2.1 Ziel dieses Kapitels

An den Anfang meiner Promotion kann ich mich noch gut erinnern. Ich übernahm von einem Mathematiker ein Computerprogramm zur Strömungsberechnung in Turbomaschinen. Während seine Beschreibung der Theorie praktisch nur eine Gleichung enthielt, war das dazugehörige Computerprogramm sehr umfangreich. Wie passte das zusammen? Nun, Mathematiker versuchen meistens alles zu verallgemeinern und kurz und prägnant in eine Formel zu packen. Die sieht elegant aus, aber einem Ingenieur wird sich ihre Bedeutung in den meisten Fällen verschließen, da ihm die mathematischen Spezialkenntnisse der Vektor- und Tensorrechnung nicht so geläufig sind. Nach einigen Tagen und vielen Seiten Papier hatte ich diese eine Gleichung so umgewandelt, dass ich sie verstand. Meine Gleichungen waren zwar länger, aber für einen Ingenieur verständlicher. In diesem Kapitel wird deshalb versucht, die der Strömungsmechanik zu grunde liegenden Gleichungen möglichst einfach darzustellen.

Folgende Fragen sollten Sie anschließend beantworten können:

1. Welche fünf Größen bleiben bei der Strömungsberechnung erhalten?
2. Was ist der Unterschied zwischen der Integral- und der Differentialform?
3. Wie kommt man auf die Massenerhaltungsgleichung?
4. Aus welcher Gleichung lassen sich die Impulserhaltungsgleichungen herleiten?
5. Aus welcher Gleichung lässt sich die Energieerhaltungsgleichung herleiten?
6. Wie lautet die vektorielle Form der Navier-Stokes-Gleichungen mit Erhaltungsvektor, Flussterm und Quellterm?
7. Welche Gleichungen braucht man noch um die Strömung berechnen zu können?
8. Was ist der Unterschied zwischen physikalischen und numerischen Randbedingungen?
9. Wie viele Randbedingungen muss man vorgeben an einem Unterschall-Zuströmrand, an einem Überschall-Abströmrand und am Festkörperrand?
10. Was ist der Unterschied zwischen den vollständigen und den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen
11. Warum sind für letztere Turbulenzmodelle nötig?
12. Was wird bei den Thin-Layer Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigt?
13. Welche Terme werden bei den Euler-Gleichungen vernachlässigt? Für welche Re-Zahlen gelten sie deshalb nur?
14. Welche Vereinfachungen führen zur Potentialgleichung?
15. Welche Gleichungen benötigt man zur Berechnung der Polare (Auftriebs- und Widerstandsbeiwert über dem Anstellwinkel) eines Tragflügelprofils?
16. Sie wollen die Stoßlage um ein Hyperschallflugzeug abschätzen. Welche Gleichungen würden ausreichen?

2.2 Herleitung der Erhaltungsgleichungen

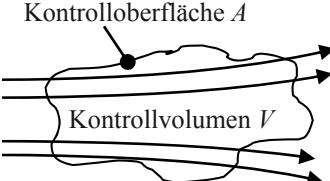
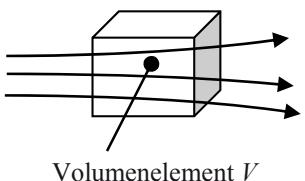
Bedeuten Erhaltungsgleichungen, dass sie uns ein ganzes Leben lang erhalten bleiben? Zumindest für einen Strömungsberechnungs-Ingenieur stimmt dies. Der Name kommt aber natürlich von der Erhaltung bestimmter physikalischer Größen wie Masse, Impuls und Energie. Hieraus ergeben sich die fünf Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik:

- Massenerhaltung
- Impulserhaltung in x-Richtung
- Impulserhaltung in y-Richtung
- Impulserhaltung in z-Richtung
- Energieerhaltung

Allen modernen CFD-Programmen ist gemeinsam, dass sie diese fünf Erhaltungsgleichungen lösen, um die Strömung von Gasen oder Flüssigkeiten zu berechnen.

Die Erhaltungsgleichungen lassen sich auf zwei unterschiedliche Arten angeben, in Integral- und in Differentialform. Tabelle 2.1 zeigt die wichtigsten Unterschiede.

Tabelle 2.1 Gegenüberstellung der Integral- und Differentialform der Erhaltungsgleichungen

	Integralform	Differentialform
Fluid strömt durch	ein endliches Kontrollvolumen V 	ein infinitesimal kleines Volumenelement V 
Erhaltungsgleichungen	in Integralform	in Differentialform
Diskretisierung	als Finite-Volumen-Verfahren (FV)	als Finite-Differenzen-Verfahren (FD)
Vorteile	Physikalisch anschaulicher: Zeitliche Änderung der Strömungsgröße im Inneren des Kontrollvolumens V entspricht der Änderung der Flüsse durch die Kontrolloberfläche A . Ist bei unstetigen Verläufen wie bei Verdichtungsstößen genauer.	Mathematisch anschaulicher, da keine Integrale auftauchen.
Nachteile	Mathematisch komplexer, da Integrale auftauchen.	Physikalisch unanschaulicher, da Volumen gegen Null geht.

Beide Formulierungen können ineinander überführt werden. In der Regel wird in modernen CFD-Programmen die Integralform bzw. die Finite-Volumen-Diskretisierung verwendet. Sie kann Verdichtungsstöße besser erfassen, da sie Unstetigkeiten innerhalb des Kontrollvolumens V zulässt, während die Differentialform bzw. die Finite-Differenzen-Diskretisierung voraussetzt, dass die Strömungsgrößen im Volumenelement V differenzierbar, d. h. stetig sind. Dies ist bei Verdichtungsstößen aber nicht der Fall.

Dagegen ist die Differentialform mathematisch anschaulicher, da sie Differentiale verwendet. Deshalb werden die Erhaltungsgleichungen der Einfachheit halber in Differentialform aufgestellt und die Integralform wird nur zum Vergleich angegeben.

2.2.1 Massenerhaltungsgleichung

In einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z liegt das raumfeste Volumenelement $V = dx \cdot dy \cdot dz$ (Bild 2-1).

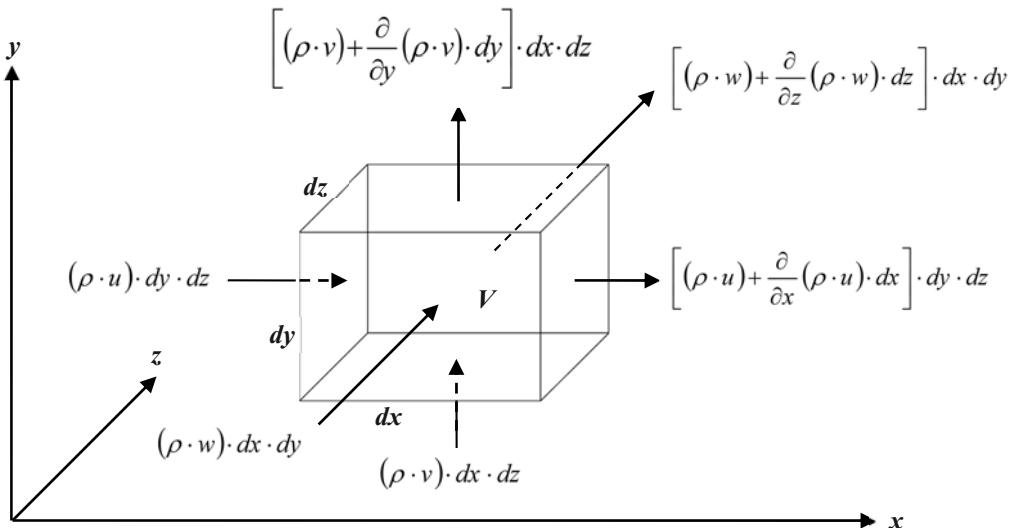


Bild 2-1 Infinitesimal kleines Volumenelement mit den Massenströmen

Hierbei bedeuten:

- $\rho = f(x, y, z, t)$ Dichte des Fluides als Funktion der drei Raumkoordinaten x, y, z und der Zeit t
- $u, v, w = f(x, y, z, t)$ Strömungsgeschwindigkeiten in x-, y- und z-Richtung
- $m = \rho \cdot V = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ Masse im Inneren des Volumenelementes V .

Für dieses Volumenelement wird nun die Massenbilanz aufgestellt:

- Im raumfesten Volumenelement V entspricht die zeitliche Änderung der Masse der partiellen Ableitung nach der Zeit $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz)$.
- Der in x-Richtung durch die Fläche $A_x = dy \cdot dz$ eintretende Massenstrom ist $(\rho \cdot u) \cdot dy \cdot dz$ und der austretende Massenstrom ist $\left[(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz$.
- Der in y-Richtung durch die Fläche $A_y = dx \cdot dz$ eintretende Massenstrom ist $(\rho \cdot v) \cdot dx \cdot dz$ und der austretende Massenstrom ist $\left[(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) \cdot dy \right] \cdot dx \cdot dz$.
- Der in z-Richtung durch die Fläche $A_z = dx \cdot dy$ eintretende Massenstrom ist $(\rho \cdot w) \cdot dx \cdot dy$ und der austretende Massenstrom ist $\left[(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) \cdot dz \right] \cdot dx \cdot dy$.

Für die Massenbilanz gilt dann

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz) + \left[(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) \cdot dx \right] \cdot dy \cdot dz - \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz + \left[(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) \cdot dy \right] \cdot dx \cdot dz \\ & - \rho \cdot v \cdot dx \cdot dz + \left[(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) \cdot dz \right] \cdot dx \cdot dy - \rho \cdot w \cdot dx \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

Nach Kürzung der $(\rho \cdot u), (\rho \cdot v), (\rho \cdot w)$ -Terme und Division durch $dx \cdot dy \cdot dz$ ergibt sich die

Massenerhaltungsgleichung in Differentialform in kartesischen Koordinaten

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0} \quad (2.1)$$

Sie bedeutet: Die Änderung der Dichte ρ mit der Zeit im Volumenelement plus die Änderung des Massenstroms $\rho \cdot u$ in x-Richtung plus die Änderung des Massenstroms $\rho \cdot v$ in y-Richtung plus die Änderung des Massenstroms $\rho \cdot w$ in z-Richtung sind Null.

Zum Vergleich wird noch die **Massenerhaltungsgleichung in Integralform** für die Finite-Volumen-Diskretisierung angegeben

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV + \iint_S \rho \cdot \bar{u} \cdot dS = 0 \quad (2.2)$$

Sie bedeutet: Die Änderung der Dichte ρ mit der Zeit im Kontrollvolumen V plus die Änderung des Massenstroms $\rho \cdot \bar{u}$ über die Oberfläche S des Kontrollvolumens ist Null.

Die Gleichungen 2.1 und 2.2 beinhalten dieselbe Physik. Dies wird anschaulicher, wenn man Gleichung 2.1 als **Massenerhaltungsgleichung in Divergenzform** anschreibt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \quad (2.3)$$

mit der Divergenz $\vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w)$ in kartesischen Koordinaten und dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{u} = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$ in die drei Raumrichtungen i, j, k .

2.2.2 Impulserhaltungsgleichungen

Die Impulserhaltung basiert auf dem zweiten Gesetz von Newton: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bzw. mit dem Impulsstrom $\vec{I} = \frac{d\vec{l}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$. Für die drei Raumrichtungen ergibt sich dann

$$F_x = m \cdot a_x \quad \text{bzw. } \frac{dI_x}{dt} = m \cdot \frac{du}{dt} \quad (2.4)$$

$$F_y = m \cdot a_y \quad \text{bzw. } \frac{dI_y}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.5)$$

$$F_z = m \cdot a_z \quad \text{bzw. } \frac{dI_z}{dt} = m \cdot \frac{dw}{dt} \quad (2.6)$$

Der Kraftvektor \vec{F} (Bild 2-2) beinhaltet sowohl Körperkräfte wie die Schwerkraft und die elektromagnetische Kraft als auch Oberflächenkräfte wie die Druckkraft und die Reibungskräfte. Letztere setzen sich wiederum aus der Normalspannungskraft, die das Teilchen in die Länge zieht und der Schubspannungskraft, die das Teilchen schert, zusammen.

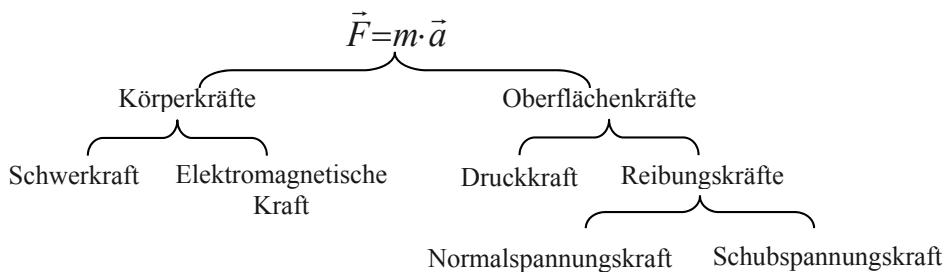


Bild 2-2 Zusammensetzung der Kraft für Fluide

Bild 2-3 zeigt diesmal ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z mit einem infinitesimal kleinen Volumenelement $V = dx \cdot dy \cdot dz$ und alle angreifenden Kraftkomponenten. Die Flächen sind wieder $A_x = dy \cdot dz$, $A_y = dx \cdot dz$ und $A_z = dx \cdot dy$

Die dargestellten Größen sind:

- $p = f(x, y, z, t)$ Druck des Fluides
- $\tau_{xx} = f(x, y, z, t)$ Normalspannung in x-Richtung normal zur $x = \text{konst.}$ -Fläche $dy \cdot dz$
- $\tau_{yx} = f(x, y, z, t)$ Schubspannung in x-Richtung entlang der $y = \text{konst.}$ -Fläche $dx \cdot dz$
- $\tau_{zx} = f(x, y, z, t)$ Schubspannung in x-Richtung entlang der $z = \text{konst.}$ -Fläche $dx \cdot dy$

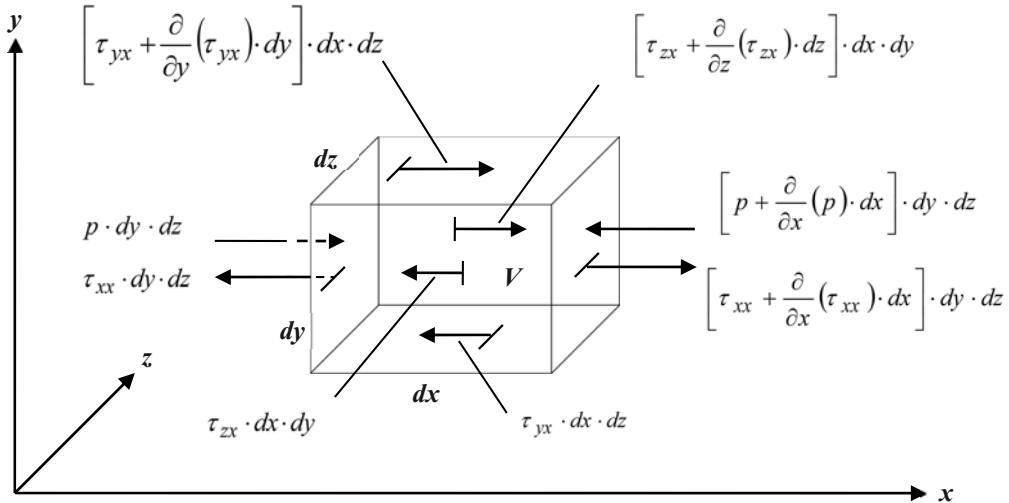


Bild 2-3 Die Kräfte in x-Richtung an einem infinitesimal kleinen Volumenelement

Nachfolgend wird am Beispiel von Gleichung 2.4 die Impulsgleichung in x-Richtung in Differentialform aufgestellt und für die Kraft, die Masse und die Beschleunigung die jeweiligen ausführlicheren Terme eingesetzt.

Die Kraft bzw. der Impulsstrom in x-Richtung ergibt sich somit zu

$$F_x = \frac{dI_x}{dt} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g_x \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.7)$$

Die Masse im Inneren des Volumenelementes V ist wie bei der Massenerhaltung wieder

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.8)$$

Die Beschleunigung ist die totale Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.9)$$

Werden die Gleichungen 2.7, 2.8 und 2.9 in 2.4 eingesetzt, so folgt

$$\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g_x \right]}_{F_x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ = \underbrace{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz}_{m} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{a_x}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g_x = \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

Diese Gleichung ist die so genannte nicht-konservative Form der x-Impulsgleichung, da die Terme $\rho, \rho \cdot u, \rho \cdot v$ und $\rho \cdot w$ auf der rechten Seite vor den Ableitungen stehen. Diese nicht-konservative Form der Erhaltungsgleichung ist bei der späteren Diskretisierung ungenauer, da der Impuls nicht vollständig erhalten bleibt.

Diesen Nachteil hat die konservative Form nicht. Bei ihr wird der Impuls auch nach der Diskretisierung komplett erhalten. Um auf die konservative Form zu kommen, wird die rechte Seite weiter umgeformt, so dass alle Größen unter den Ableitungen stehen.

Werden die mathematischen Gesetzmäßigkeiten für die Umformung von Differentialen

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} = \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} = \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} = \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \quad \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}$$

nach den nicht-konservativen Termen aufgelöst

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \\ \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \quad \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}$$

folgt für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 & \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} - u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} - u \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right]}_{\text{Massenerhaltung}=0} \\
 &= \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Der Term in der eckigen Klammer verschwindet, da er identisch mit der Massenerhaltungsgleichung nach 2.1 ist und somit zu Null wird.

Eingesetzt folgt dann die **x-Impulserhaltungsgleichung in Differentialform in kartesischen Koordinaten**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w - \tau_{zx}) - \rho \cdot g_x = 0} \quad (2.10)$$

Analog ergibt sich die **y-Impulserhaltungsgleichung in Differentialform in kartesischen Koordinaten** aus Gleichung 2.5

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v \cdot u - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v \cdot w - \tau_{zy}) - \rho \cdot g_y = 0} \quad (2.11)$$

und die **z-Impulserhaltungsgleichung in Differentialform in kartesischen Koordinaten** aus Gleichung 2.6

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot u - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot w \cdot v - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w^2 + p - \tau_{zz}) - \rho \cdot g_z = 0} \quad (2.12)$$

Anmerkung: Die reibungsbehafteten Normal- und Schubspannungen τ lassen sich noch durch die Geschwindigkeitsgradienten ausdrücken. Diese Ausdrücke sind für die so genannten „Newtonischen Fluide“ und die so genannten „Nicht Newtonischen Fluide“ unterschiedlich:

- Bei Newtonischen Fluiden sind nach Newton die Spannungen proportional zu den Geschwindigkeitsgradienten. Dieses Modell gilt praktisch immer in der Aerodynamik.
- Bei Nicht-Newtonischen Fluiden sind die Spannungen nicht proportional zum Geschwindigkeitsgradienten. Dies ist bei stark viskosen Fluiden wie z. B. Honig der Fall.

2.2.3 Energieerhaltungsgleichung

Die Energieerhaltung ist als 1. Hauptsatz der Thermodynamik bekannt

$$\frac{dE_{ges}}{dt} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.13)$$

und bedeutet, dass die Änderung der Gesamtenergie E_{ges} im Volumenelement gleich der Leistung \dot{W} am Volumenelement plus dem Wärmestrom \dot{Q} in das Volumenelement ist. Gleichung 2.13 gilt für ein geschlossenes System ohne Massentransfer, weshalb sich das Volumenelement hier mit der Strömung mitbewegen muss. Die drei Terme Gesamtenergie, Leistung und Wärmestrom werden nachfolgend näher beschrieben.

Die Gesamtenergie E_{ges} setzt sich aus drei Teilen zusammen:

- der inneren Energie $E_{in} = m \cdot e$ mit der spezifischen inneren Energie e ,
- der kinetischen Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{u}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (u^2 + v^2 + w^2)$ mit $\vec{u}^2 = u^2 + v^2 + w^2$ als Quadrat des Geschwindigkeitsbetrages
- und der potentiellen Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$, die für Gase vernachlässigt werden kann und deshalb der Übersichtlichkeit wegen vernachlässigt wird.

Somit ergibt sich für die Gesamtenergie eines Gases

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{in} + E_{kin} = m \cdot e + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{u}^2 = m \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) = \rho \cdot V \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \\ &= \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) = \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

und die totale Ableitung nach der Zeit lautet

$$\begin{aligned} \frac{dE_{ges}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] \right\} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Leistung \dot{W} ist die Leistung durch Körper- und Oberflächenkräfte und ergibt sich aus dem Produkt von Kraft mal Geschwindigkeitskomponente in Krafrichtung. Die Leistung setzt sich aus folgenden drei Teilen zusammen:

- der Gravitation g , die auf das Volumenelement wirkt,
- dem Druck p , der auf die Oberflächen des Volumenelements wirkt
- und den Normal- und Schubspannungen τ , welche ebenfalls auf die Oberflächen wirken.

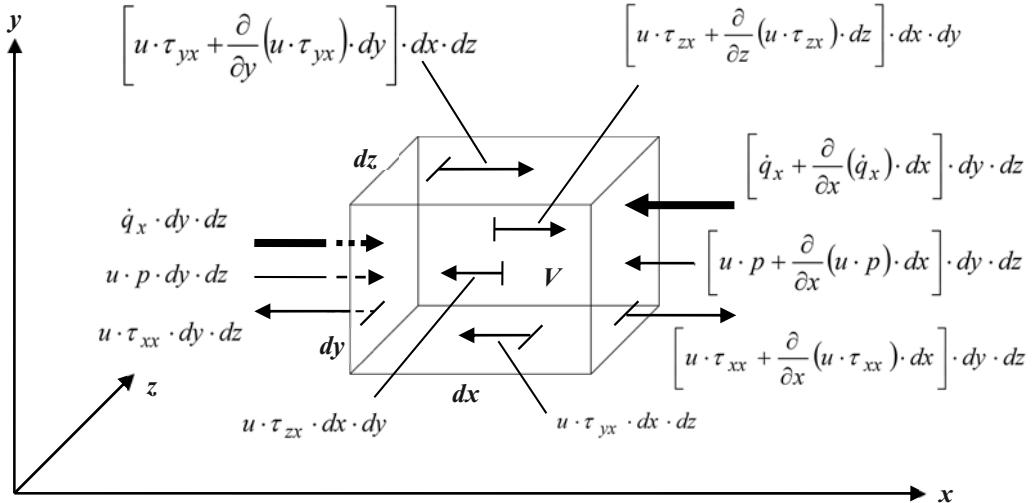


Bild 2-4 Die Leistungs- und Wärmeflüsse in x-Richtung an einem infinitesimal kleinen Volumenelement

Mit den Flüssen in x-Richtung aus Bild 2-4 und den entsprechenden Flüssen in y- und z-Richtung ergibt sich für die Leistung

$$\dot{W} = \left[\rho \cdot (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) - \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p) - \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p) - \frac{\partial}{\partial z} (w \cdot p) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \tau_{xx} + v \cdot \tau_{xy} + w \cdot \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot \tau_{yx} + v \cdot \tau_{yy} + w \cdot \tau_{yz}) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u \cdot \tau_{zx} + v \cdot \tau_{zy} + w \cdot \tau_{zz}) \right] dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.15)$$

Der Wärmestrom \dot{Q} setzt sich wiederum aus drei Teilen zusammen:

- der Wärmeleitung \dot{q}_L über die Oberfläche des Volumenelements, hervorgerufen durch Temperaturgradienten
- der Wärmestrahlung \dot{q}_S , die auf das Volumenelement wirkt (wird hier der Übersichtlichkeit wegen vernachlässigt)
- und der Konvektion, die aber hier nicht erscheint, da das Volumenelement mit der Strömung mitschwimmt.

Somit ergibt sich für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\dot{q}_{L,x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\dot{q}_{L,y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\dot{q}_{L,z}) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Mit den Fourierschen Wärmeleitungsgesetzen $\dot{q}_{L,x} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$, $\dot{q}_{L,y} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$ und $\dot{q}_{L,z} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$ ergibt sich folgende Gleichung

$$\dot{Q} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.16)$$

Werden die Gleichungen 2.14, 2.15 und 2.16 in 2.13 eingesetzt, so folgt daraus die Energieerhaltungsgleichung mit $\vec{u}^2 = u^2 + v^2 + w^2$ zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] \\ & - \rho \cdot (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot p) + \frac{\partial}{\partial y} (v \cdot p) + \frac{\partial}{\partial z} (w \cdot p) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot \tau_{xx} + v \cdot \tau_{xy} + w \cdot \tau_{xz}) - \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot \tau_{yx} + v \cdot \tau_{yy} + w \cdot \tau_{yz}) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (u \cdot \tau_{zx} + v \cdot \tau_{zy} + w \cdot \tau_{zz}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann noch vereinfacht werden. Wenn die spezifische Enthalpie $h = e + p/\rho$ anstelle der spezifischen inneren Energie e für die räumlichen Ableitungen verwendet wird, fällt der Druckterm weg.

Werden dann die Terme nach $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ geordnet, so ergibt sich die **Energieerhaltungsgleichung in Differentialform in kartesischen Koordinaten**

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot u \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) - (u \cdot \tau_{xx} + v \cdot \tau_{xy} + w \cdot \tau_{xz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot v \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) - (u \cdot \tau_{yx} + v \cdot \tau_{yy} + w \cdot \tau_{yz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot w \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) - (u \cdot \tau_{zx} + v \cdot \tau_{zy} + w \cdot \tau_{zz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \\ & - \rho \cdot (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) = 0 \end{aligned}} \quad (2.17)$$

2.3 Navier-Stokes-Gleichungen

2.3.1 Vollständige Navier-Stokes-Gleichungen

Als Navier-Stokes-Gleichungen werden die fünf Erhaltungsgleichungen von Masse, Impuls und Energie bezeichnet (früher wurden oftmals auch nur die drei Impulserhaltungsgleichungen so genannt). Vollständig bedeutet, dass die Strömung vollständig, d. h. auch mit den kleinsten Wirbeln und Turbulenzen beschrieben wird. Allerdings sind die Rechenzeiten zur Lösung der vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen so groß, dass für technische Anwendungen die so genannten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen verwendet werden, wie später im Kapitel 2.3.4 gezeigt wird.

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Bewegung einer zähen, isotropen Flüssigkeit und werden zu Ehren der Herren Navier und Stokes so genannt. Ihre wichtigsten Lebensdaten sind:



Claude Louis Marie Henri Navier

- Französischer Physiker und Ingenieur
- 15. Februar 1785 - 23. August 1836
- Ab 1819 Professor in Paris
- Bedeutende Beiträge zur Mechanik, Baustatik und Hydro-mechanik



Sir George Gabriel Stokes

- Britischer Mathematiker und Physiker
- 13. August 1819 - 1. Februar 1903
- Ab 1849 Professor in Cambridge, 1885-90 Präsident der Royal Society
- Bedeutende Beiträge zur Analysis (Stokesscher Integralsatz), Optik (Stokessche Regel) und zur Hydrodynamik (Stokessches Reibungsgesetz)

Bild 2-5 Die Namensgeber der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen bilden ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem und konnten bisher analytisch nur für Spezialfälle wie z. B. eindimensionale Strömungen um die ebene Platte gelöst werden. Deshalb wird dieses Gleichungssystem für allgemeine Fälle numerisch gelöst.

Die Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich auf unterschiedliche Art und Weise darstellen:

- in Skalarform
- in Vektorform
- in Divergenzform.

Diese drei Formen werden nachfolgend näher beschrieben.

Navier-Stokes-Gleichungen in Skalarform (kartesische Koordinaten)

Die Skalarform ist die im letzten Kapitel verwendete Form. Der Übersicht halber werden die fünf Erhaltungsgleichungen für Masse (Gleichung 2.1), Impuls (Gleichungen 2.10, 2.11, 2.12) und Energie (Gleichung 2.17) nochmals angegeben

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot u^2 + p - \tau_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w - \tau_{zx}) - \rho \cdot g_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v \cdot u - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \cdot v^2 + p - \tau_{yy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v \cdot w - \tau_{zy}) - \rho \cdot g_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot u - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot w \cdot v - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \cdot w^2 + p - \tau_{zz}\right) - \rho \cdot g_z = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho \cdot u \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2\right) - (u \cdot \tau_{xx} + v \cdot \tau_{xy} + w \cdot \tau_{xz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho \cdot v \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2\right) - (u \cdot \tau_{yx} + v \cdot \tau_{yy} + w \cdot \tau_{yz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho \cdot w \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2\right) - (u \cdot \tau_{zx} + v \cdot \tau_{zy} + w \cdot \tau_{zz}) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right] \\ & - \rho \cdot (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) = 0 \end{aligned}$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen enthalten drei Arten von Termen:

- die zeitliche Ableitung $\partial/\partial t$ der Erhaltungsgrößen \vec{U} mit der Dichte ρ , dem Impuls $\rho \cdot \vec{u}$ und der totalen Energie $\rho \cdot (e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2)$. Sie geben die Änderungen der gesuchten Variablen im Volumenelement mit der Zeit an. Nach ihnen werden die Gleichungen aufgelöst.
- Die räumlichen Ableitungen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ der Flussterme \vec{E} , \vec{F} und \vec{G} mit den konvektiven Termen mit $\rho \cdot \vec{u}$, den Drucktermen mit p , den Reibungstermen mit den Spannungen τ und den Wärmeleitungstermen mit λ . Sie geben an, was in das Volumenelement durch alle Oberflächen hinein und hinaus fließt.
- Die Terme ohne Ableitungen werden Quellterme \bar{Q} genannt, da sie wie eine Quelle im Volumenelement wirken. Dies ist die Schwerkraft mit der Gravitationskonstante g (und ggf. die Wärmestrahlung \dot{q}_S).

Navier-Stokes-Gleichungen in Vektorform (kartesische Koordinaten)

Eleganter und kürzer lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen in Vektorform schreiben. Sie ist auch für die Umsetzung in ein Computerprogramm nützlich

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{F} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{G} = \vec{Q}} \quad (2.18)$$

mit dem Erhaltungsvektor \vec{U}

$$\boxed{\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot v \\ \rho \cdot w \\ \rho \cdot \left[e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \end{bmatrix}} \quad (2.19)$$

den Flussvektoren $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ in x-, y- und z-Richtung

$$\boxed{\vec{E} = \begin{bmatrix} \rho \cdot u \\ \rho \cdot u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho \cdot v \cdot u - \tau_{xy} \\ \rho \cdot w \cdot u - \tau_{xz} \\ \rho \cdot u \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] - u \cdot \tau_{xx} - v \cdot \tau_{xy} - w \cdot \tau_{xz} - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}} \quad (2.20)$$

$$\boxed{\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx} \\ \rho \cdot v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho \cdot w \cdot v - \tau_{yz} \\ \rho \cdot v \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] - u \cdot \tau_{yx} - v \cdot \tau_{yy} - w \cdot \tau_{yz} - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}} \quad (2.21)$$

$$\boxed{\vec{G} = \begin{bmatrix} \rho \cdot w \\ \rho \cdot u \cdot w - \tau_{zx} \\ \rho \cdot v \cdot w - \tau_{zy} \\ \rho \cdot w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho \cdot w \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] - u \cdot \tau_{zx} - v \cdot \tau_{zy} - w \cdot \tau_{zz} - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}} \quad (2.22)$$

und dem so genannten Quellterm \vec{Q}

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \cdot g_x \\ \rho \cdot g_y \\ \rho \cdot g_z \\ \rho \cdot (u \cdot g_x + v \cdot g_y + w \cdot g_z) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Navier-Stokes-Gleichungen in Divergenzform

Eine eher mathematische Schreibweise, die aber vom Koordinatensystem unabhängig ist, lässt sich auch oft in der Literatur finden. Sie verwendet den Geschwindigkeitsvektor \vec{U} , den Gravitationsvektor \vec{g} , die Divergenz $\vec{\nabla}$, die Einheitsmatrix I und die Spannungsmatrix τ

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \quad \vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Hierdurch wird die Massenerhaltungsgleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0$$

und die drei Impulserhaltungsgleichungen lauten mit dem Vektorprodukt \otimes

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} + p \cdot I - \tau) = \rho \cdot \vec{g}$$

und die Energieerhaltungsgleichung ergibt sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \cdot \vec{u} \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) - \tau \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{\nabla} T \right] = \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{u}$$

Nochmals zu einem Gleichungssystem zusammengefasst ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \cdot \vec{u} \\ \rho \cdot \left(e + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) \end{bmatrix} + \vec{\nabla} \begin{bmatrix} \rho \cdot \vec{u} \\ \rho \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} + p \cdot I - \tau \\ \rho \cdot \vec{u} \cdot \left(h + \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^2 \right) - \tau \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{\nabla} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \cdot \vec{g} \\ \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{u} \end{bmatrix}$$

bzw. abgekürzt

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{Q} \quad (2.24)$$

Bei dieser Formulierung in Divergenzform wird die Analogie zur Integralform sichtbar

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{U} \cdot dV + \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{Q} \quad (2.25)$$

2.3.2 Zusätzlich benötigte Gleichungen und Größen

Die fünf Erhaltungsgleichungen reichen zur Lösung nicht aus, da sie mehr Unbekannte als Gleichungen enthalten. Um alle 17 Unbekannten ($\rho, u, v, w, p, e, h, T$ und die 9 τ -Terme) zu ermitteln, werden zusätzlich zu den fünf Erhaltungsgleichungen noch 12 weitere Gleichungen benötigt. Dies sind drei Zustandsgleichungen für das Fluid und 9 sog. Stokessche Beziehungen für die Normal- und Schubspannungen.

Die **thermische Zustandsgleichung** koppelt den Druck p mit der Dichte ρ und der Temperatur T . Sie lautet z. B. für ein ideales Gas mit R als Gaskonstante

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (2.26)$$

Die **kalorischen Zustandsgleichungen** koppeln die spezifische innere Energie e und die spezifische Enthalpie h mit der Temperatur T . Für ein ideales Gas lautet sie mit c_v als spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen und c_p als spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck z. B.

$$de = c_v \cdot dT \quad (2.27)$$

$$dh = c_p \cdot dT \quad (2.28)$$

Die **Stokesschen Beziehungen** koppeln bei den so genannten Newtonschen Fluiden die Spannungen τ mit den Geschwindigkeiten u, v, w . Die Terme lauten mit μ als dynamischer Viskosität des Fluides

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.29)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.30)$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.32)$$

$$\tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.33)$$

$$\tau_{yz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.34)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (2.35)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.36)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (2.37)$$

Die Stoffwerte

Zu beachten ist weiterhin, dass die Stoffwerte wie c_v, c_p, λ, μ in der Regel von der Temperatur abhängen:

- die spezifische Wärmekapazitäten c_v, c_p und der Wärmeleitkoeffizient λ werden oftmals als konstant angenommen oder aus Tabellen interpoliert.
- Die dynamische Viskosität μ kann ebenfalls aus Tabellen interpoliert werden. Für Luft wird sie oftmals auch näherungsweise mit der so genannten Sutherland-Formel berechnet

$$\mu = 1,458 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{T^{1,5}}{T + 110,4} \right) \quad \text{mit } T \text{ in } [K] \quad (2.38)$$

2.3.3 Randbedingungen

Die zuvor gezeigten Navier-Stokes-Gleichungen gelten für (fast) alle Strömungen. Sowohl die Überschallströmung um ein Flugzeug als auch die Unterschallströmung um ein Auto oder auch die Innenströmung in einem Rohr lassen sich damit berechnen. Wie wird zwischen diesen unterschiedlichen Strömungsfällen unterschieden, wo doch die Gleichungen dieselben sind? Um das konkrete Strömungsproblem lösen zu können, sind neben der jeweiligen Geometrie deshalb auch Randbedingungen notwendig. Typische Randbedingungen sind zum Beispiel:

- Was strömt in das Rechengebiet hinein (Zuströmrand)?
- Was strömt aus dem Rechengebiet heraus (Abströmrand)?
- Wie ist die Strömung an einer festen Wand (Festkörperrand)?

Nur durch richtige Wahl der Randbedingungen stellt sich auch eine Strömung ein. Z. B. muss der Totaldruck in der Zuströmung höher sein als in der Abströmung.

Da in den fünf Erhaltungsgleichungen die fünf Unbekannten ρ, u, v, w, e übrig bleiben, müssen auch fünf Größen am Rand bekannt sein. Je nach Art des Randes und der Strömung dürfen aber nicht alle fünf Größen vorgegeben werden, manche Größen müssen auch berechnet werden:

- die vorgegebenen Größen am Rand nennt man **physikalische Randbedingungen (PRB)**. Sie werden vom Anwender in Form von bekannten Größen, meistens aus Messungen oder theoretischen Herleitungen, vorgegeben. Meistens sind dies Drücke, Geschwindigkeiten, Temperaturen oder Massenströme. Ihre Verteilung am Rand kann konstant oder variabel sein.
- die berechenbaren Größen am Rand nennt man **numerische Randbedingungen (NRB)**. Dies sind Gleichungen, die den Rand mit dem Innenfeld verknüpfen und vom Programm berechnet werden. Am genauesten ist die Verwendung ausgewählter Erhaltungsgleichungen, da diese die Physik richtig wiedergeben. Weniger genau aber einfacher ist die Extrapolation der Strömungsgrößen aus dem Innenfeld auf die Ränder.

Die Summe aus PRB und NRB muss immer der Anzahl der zu lösenden Erhaltungsgleichungen entsprechen. Somit ergeben sich für die Anzahl der physikalischen und numerischen Randbedingungen je nach der räumlichen Dimension

$$\begin{aligned} 3D : \quad & PRB + NRB = 5 \\ 2D : \quad & PRB + NRB = 4 \\ 1D : \quad & PRB + NRB = 3 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Die Anzahl der physikalischen Randbedingungen PRB kann aus der so genannten Charakteristiken-Theorie bestimmt werden. Diese Theorie beschreibt u. a. die Ausbreitungsrichtung von Informationen in einer Strömung. Zum Beispiel gibt es in einer Überschallströmung keine Stromauf-Wirkung; alle Charakteristiken laufen stromab. Dies führt dazu, dass sich bei einem Überschallflugzeug der Überschallknall nur nach hinten ausbreitet; von vorne hört man nichts. In einer Unterschallströmung läuft hingegen eine Charakteristik stromauf und transportiert Informationen entgegen der Strömungsrichtung. Dies sieht man z. B. bei einem Schiff. Die meisten Wasserwellen laufen zwar nach hinten, doch auch vor dem Schiff breitet sich eine Bugwelle aus.

Als Regel gilt deshalb:

- Für alle Informationen bzw. Charakteristiken, die von außen an das Rechengebiet kommen, müssen physikalische Randbedingungen vorgegeben werden.
- Für alle Informationen bzw. Charakteristiken, die von innen an den Rand des Rechengebiets laufen, werden numerische Randbedingungen verwendet.

Die Anzahl der physikalischen Randbedingungen hängt deshalb davon ab, wie die Strömung den Rand überschreitet (Zuström-, Abström-, Festkörperrand) und ob am Rand eine Unter- oder Überschallströmung herrscht.

Physikalische Randbedingungen am Zuströmrund

Bei einer Unterschall-Zuströmung müssen entsprechend Bild 2-6 vier physikalische Randbedingungen vorgegeben werden (dies gilt für 3D-Probleme, bei 2D-Problemen sind es drei und bei 1D-Problemen zwei). In der Regel werden bei einer Unterschall-Zuströmung folgende vier Größen vorgegeben (siehe auch Tabelle 2.2):

- der Totaldruck p_t
- die Totaltemperatur T_t

- die Zuströmrichtung in der xz -Ebene (Zuströmwinkel γ) bzw. das Verhältnis der Zuströmgeschwindigkeit w/u
- und die Zuströmrichtung in der xy -Ebene (Zuströmwinkel α) bzw. das Verhältnis der Zuströmgeschwindigkeit v/u .

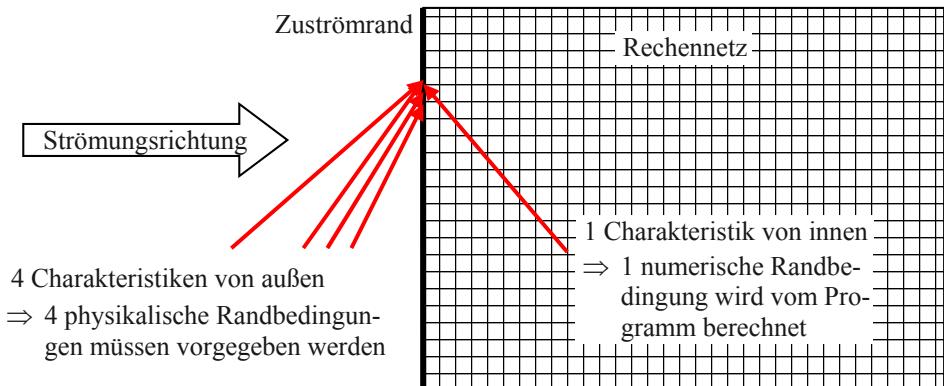


Bild 2-6 Charakteristiken am Unterschall-Zuströmrand

Je nach Programm, können auch andere Größen gewählt werden, wie z. B. der Massenstrom. Die obigen vier haben sich aber als besonders robust bewährt. Ihre Werte können konstant oder variabel sein. Z. B. kann auch ein gemessenes Grenzschichtprofil für Totaldruck- und -temperatur vorgegeben werden.

Bei einer Überschall-Zuströmung müssen alle fünf physikalischen Randbedingungen vorgegeben werden (Bild 2-7).

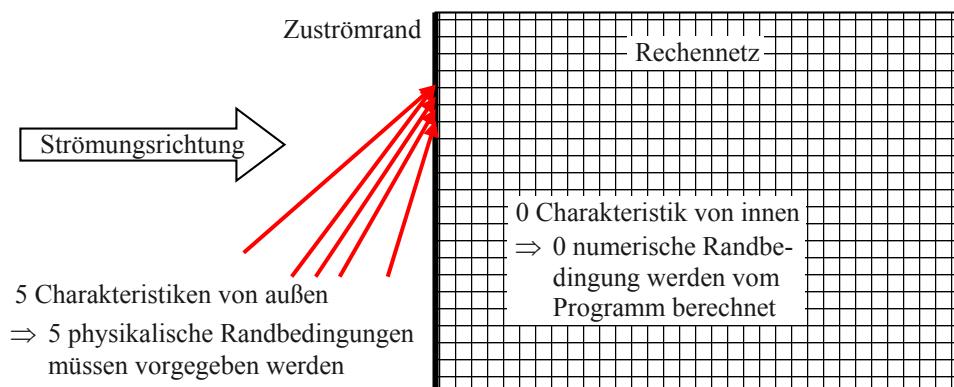


Bild 2-7 Charakteristiken am Überschall-Zuströmrand

Meistens werden bei einer Überschall-Zuströmung folgende Größen gewählt (Tabelle 2.2):

- der Totaldruck p_t
- die Totaltemperatur T_t
- die Zuströmgeschwindigkeit in x-Richtung u
- die Zuströmgeschwindigkeit in y-Richtung v
- die Zuströmgeschwindigkeit in z-Richtung w .

Physikalische Randbedingungen am Abströmrand

Am Abströmrand wird ebenfalls zwischen Unter- und Überschallströmung unterschieden. Im Unterschall wird nur eine physikalische Randbedingung benötigt (Bild 2-8). Meistens wird der statische Druck $p = \text{konst.}$ oder eine statische Druckverteilung $p = f(y, z)$ vorgegeben.

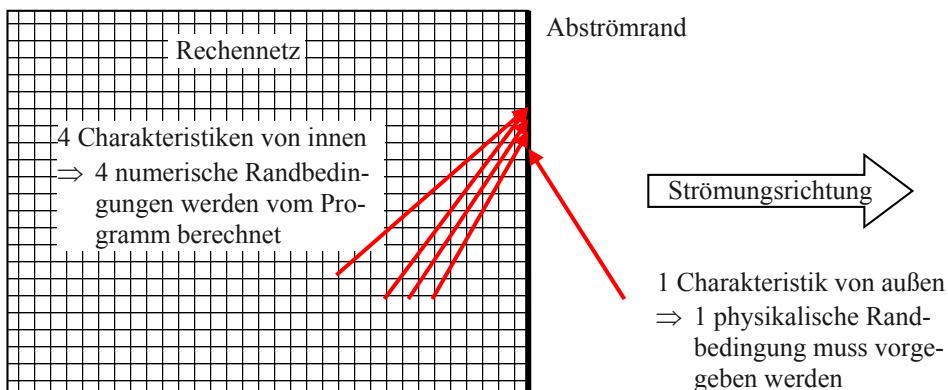
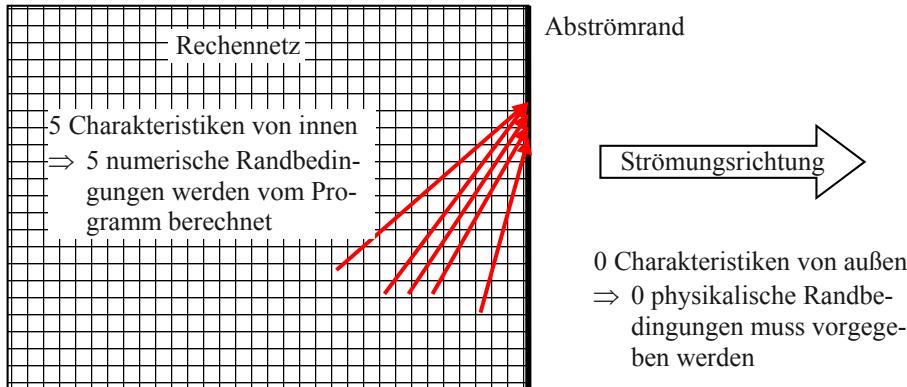


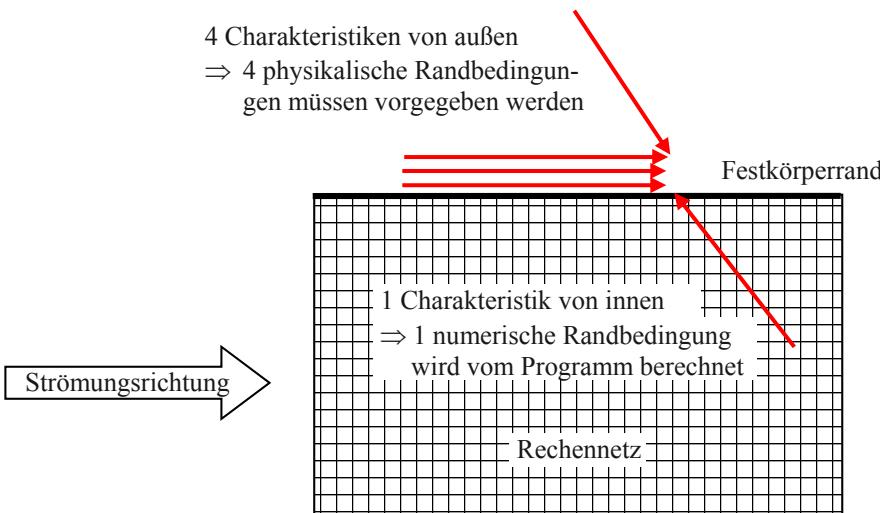
Bild 2-8 Charakteristiken am Unterschall-Abströmrand

Im Überschall muss dagegen überhaupt keine physikalische Randbedingung vorgegeben werden (Bild 2-9).

**Bild 2-9** Charakteristiken am Überschall-Abströmrand

Physikalische Randbedingungen am Festkörperrand

Am Festkörperrand müssen sowohl im Unterschall (Bild 2-10) als auch im Überschall (Bild 2-11) vier Größen als physikalische Randbedingungen vorgegeben werden. Dies sind die drei Geschwindigkeitskomponenten und die Wandtemperatur oder deren Gradient.

**Bild 2-10** Charakteristiken am Unterschall-Festkörperrand

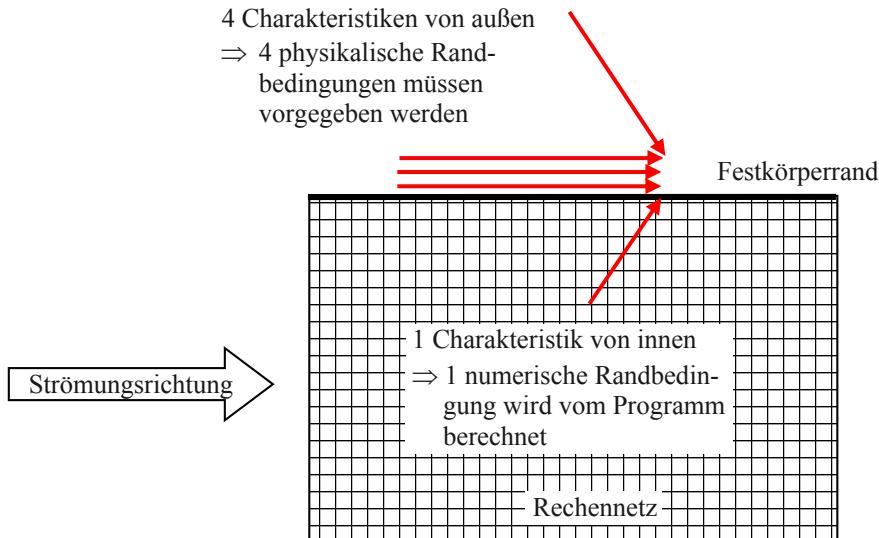


Bild 2-11 Charakteristiken am Überschall-Festkörperrand

Für die Geschwindigkeitskomponenten gilt bei reibungsbehafteten Strömungen die sog. **Haftbedingung**, d. h. die Geschwindigkeiten an der Wand sind Null

$$u = v = w = 0 \quad (2.40)$$

In den meisten CFD-Programmen müssen die Geschwindigkeitskomponenten nicht explizit vorgegeben werden, sondern es wird die Option „reibungsbehaftete Wand“ ausgewählt.

Für die Wandtemperatur gibt es drei Formulierungen, je nachdem ob die Wandtemperatur bekannt ist oder ob die Wand wärmedurchlässig ist oder nicht.

Falls die Wandtemperatur T_w bekannt ist, so gilt

$$T = T_w \quad (2.41)$$

Falls der Wärmestrom bekannt ist, so kann der Temperaturgradient normal zur Wand vorgegeben werden. Aus dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz folgt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = - \frac{\dot{q}_w}{\lambda} \quad (2.42)$$

Falls es sich um eine wärmeundurchlässige (adiabate) Wand handelt, so ergibt sich für den Temperaturgradienten normal zur Wand

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = 0 \quad (2.43)$$

Nicht reflektierende Randbedingungen

Werden konstante Werte für die physikalischen Randbedingungen am Zu- und Abströmrand vorgegeben, so müssen diese Ränder vom Körper (z. B. Flügelprofil, Turbinenschaufel, Flugzeug, Fahrzeug) weit genug entfernt sein, um die Strömung am Körper selbst nicht zu stören. Dies ist aber nicht immer möglich. Z. B. sind bei der Berechnung der Strömung durch Schaufelreihen von Turbomaschinen die Abstände zwischen Leit- und Laufrad meistens so klein, dass konstante Randbedingungen zwischen Leit- und Laufrad die Druckverteilung auf der Schaufel beeinflussen und verfälschen können.

Hier liefert eine nicht-reflektierende Formulierung der Zu- und Abström-Randbedingungen genauere Ergebnisse. Nicht-reflektierend bedeutet, dass Störungen bzw. Schallwellen am Zuström- oder Abströmrand des Rechengebietes nicht reflektiert werden, sondern das Rechengebiet nahezu ungestört verlassen. Ein weiterer Vorteil ist, dass das Rechengebiet deutlich kleiner gehalten werden kann, was die Rechenzeit verkürzt oder die Genauigkeit erhöht.

Zusammenfassung Randbedingungen

Tabelle 2.2 fasst noch einmal die Anzahl der physikalischen (PRB) und numerischen Randbedingungen (NRB) zusammen und zeigt die üblichen Größen, die als physikalische Randbedingungen vorgegeben werden in Klammer.

Tabelle 2.2 Anzahl und übliche Variablen (in Klammer) der physikalischen Randbedingungen (PRB) und Anzahl der numerischen Randbedingungen (NRB).

Dimension	Ränder	Unterschall		Überschall	
		PRB	NRB	PRB	NRB
3D	Zuströmrand	$4 \left(p_t, T_t, \frac{v}{u}, \frac{w}{u} \right)$	1	$5 \left(p_t, T_t, u, v, w \right)$	0
	Abströmrand	$1 \left(p \right)$	4	0	5
	Festkörperrand	$4 \left(u, v, w, T \right)$	1	$4 \left(u, v, w, T \right)$	1
2D	Zuströmrand	$3 \left(p_t, T_t, \frac{v}{u} \right)$	1	$4 \left(p_t, T_t, u, v \right)$	0
	Abströmrand	$1 \left(p \right)$	3	0	4
	Festkörperrand	$3 \left(u, v, T \right)$	1	$3 \left(u, v, T \right)$	1
1D	Zuströmrand	$2 \left(p_t, T_t \right)$	1	$3 \left(p_t, T_t, u \right)$	0
	Abströmrand	$1 \left(p \right)$	2	0	3
	Festkörperrand	$2 \left(u, T \right)$	1	$2 \left(u, T \right)$	1

2.3.4 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die in Kapitel 2.3.1 angegebenen dreidimensionalen, sog. „vollständigen“ Navier-Stokes-Gleichungen können numerisch gelöst werden. Allerdings ist für turbulente Strömungen der Rechenaufwand sehr hoch, da aufgrund der Nichtlinearität noch kleinste Störungen die Lösung beeinflussen. Das bedeutet, dass auch die kleinsten Turbulenzen noch aufgelöst werden müssen. Die Volumenelemente müssen deshalb sehr klein sein bzw. das Rechennetz muss sehr viele Punkte aufweisen. Hierdurch werden die Rechenzeiten für technische Anwendungen unvertretbar groß.

Deshalb basieren heutige CFD-Programme auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, welche die Physik noch genau genug wiedergeben, aber zu akzeptablen Rechenzeiten führen. Bei den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen werden die kleinen Turbulenzen nicht aufgelöst, sondern durch so genannte Turbulenzmodelle modelliert.

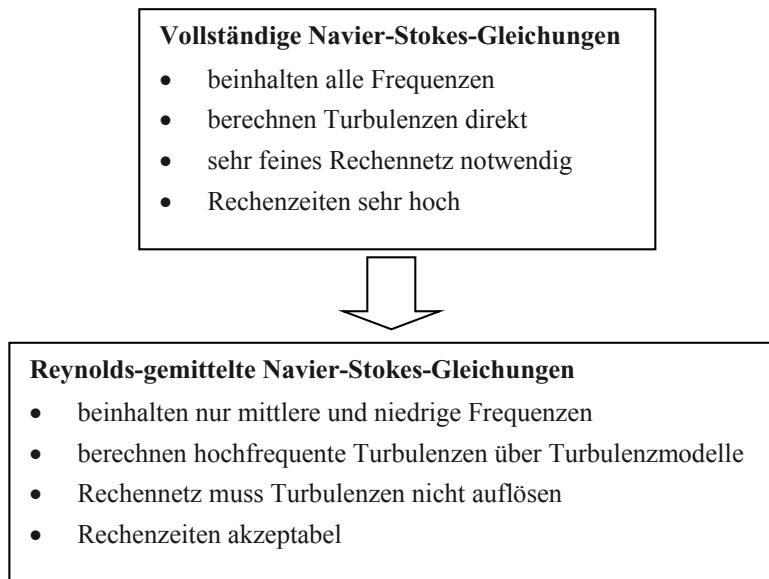


Bild 2-12 Vollständige und Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Um die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen zu erhalten, werden die einzelnen Strömungsgrößen wie z. B. ρ, u, v, w, e durch die Summe ihrer niederfrequenten Mittelwerte und $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{e}$ ihrer hochfrequenten Schwankungsgrößen ρ', u', v', w', e' ersetzt

$$\begin{aligned}
 \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\
 u &= \bar{u} + u' \\
 v &= \bar{v} + v' \\
 w &= \bar{w} + w' \\
 e &= \bar{e} + e'
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die hochfrequenten Schwankungsterme erfassen die turbulenten Schwankungen in der Strömung und führen auf die sog. Reynolds-Spannungen. Sie werden durch Turbulenzmodelle ersetzt. Dies hat den Vorteil, dass das Rechennetz die kleinen turbulenten Schwankungen nicht mehr auflösen muss.

In den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen stehen dann nur die niederfrequenten Mittelwerte. Mit ihnen können die „normalen“ zeitlichen Schwankungen der Strömung noch erfasst werden, nicht jedoch die Turbulenzen. Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen sehen formal wie die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen aus. Über jeder Strömungsgröße würde aber ein Querstrich stehen, der der Einfachheit halber aber wieder weggelassen wird. Die Details sind eher mathematisch und für Interessierte der einschlägigen Literatur wie z. B. [1] bis [5] zu entnehmen.

2.3.5 Turbulenzmodelle

Durch diese Reynolds-Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen hängt allerdings die Genauigkeit der gesamten Lösung vom Turbulenzmodell ab. Vor allem die Lage des Strömungsumschlags von laminar zu turbulent und der Ort der Strömungsablösung bei einem Druckanstieg werden von vielen Turbulenzmodellen noch nicht genau genug berechnet.

Die Bandbreite der heutzutage verwendeten Turbulenzmodelle reicht von einfachen algebraischen Gleichungen bis zu Differentialgleichungssystemen 2. Ordnung:

- das laminare Modell für rein laminare Strömungen, bei dem die Reynolds-Spannungen verschwinden.
- Die Wirbelviskositätsmodelle, die die Reynolds-Spannungen durch eine turbulente Zähigkeit oder Wirbelviskosität ersetzen:
 - beim Null-Gleichungsmodell wird die Wirbelviskosität durch eine einfache algebraische Gleichung angenähert und keine Differentialgleichung für den Wirbeltransport gelöst. Typischer Vertreter ist das Baldwin-Lomax-Modell.
 - beim Ein-Gleichungsmodell wird die Wirbelviskosität mit einer Differentialgleichung für den Transport der turbulenten kinetische Energie berechnet. Typischer Vertreter ist das Spalart-Allmaras-Modell.
 - beim Zwei-Gleichungsmodell wird die Wirbelviskosität aus zwei Differentialgleichungen bestimmt. Hierzu gehören die zurzeit für industrielle Anwendungen üblicherweise verwendeten $k-\varepsilon$ -, $k-\omega$ - und SST- (Shear Stress Transport) Modelle.
- Die Reynolds-Spannungsmodelle, die die einzelnen Komponenten des Reynolds-Spannungstensors berechnen und die Richtungsabhängigkeit der Turbulenz berücksichtigen.
- Die Wirbelsimulationsmodelle, die auf die Reynolds-Mittelung verzichten und die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen instationär lösen, wie z. B. die LES- (Large Eddy Simulation), DES- (Detached Eddy Simulation) und DNS- (Direct Numerical Simulation) Modelle.

Die Genauigkeit der numerischen Lösung erhöht sich mit zunehmender Komplexität der Turbulenzmodelle. Jedoch steigt auch die Rechenzeit stark an, vor allem, wenn sie sehr feine Rechennetze benötigen. Die in der Praxis üblicherweise eingesetzten Turbulenzmodelle werden nachfolgend noch etwas näher beschrieben. Weitere Details sind in [6] enthalten.

Das **laminare Modell** wird für rein laminare Strömungen verwendet. Hier reicht die direkte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen aus, d. h. es wird kein Turbulenzmodell benötigt. Bedingung ist, dass die Reynoldszahlen klein sind, ansonsten wird mit dem laminaren Modell eine unphysikalische Lösung erzielt.

Das **Baldwin-Lomax-Modell** wurde ursprünglich für Tragflügelströmungen entwickelt und ist einfach und robust. Es wird Null-Gleichungs-Modell genannt, da es nur eine algebraische Gleichung und keine Transportgleichungen verwendet. Nachteil dieses Modells ist die Ungenauigkeit bei abgelösten Strömungen. Die Ablösung wird zu spät und die Größe der Ablösezone zu gering berechnet. Es wurde für strukturierte Rechennetze mit orthogonalen Netzlinien an der Wand entwickelt, weshalb bei unstrukturierten Netzen zusätzlich ein strukturiertes Hintergrundnetz benötigt wird.

Das **$k-\varepsilon$ -Modell** verwendet zwei zusätzliche Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die turbulente Dissipation ε . Es ist stabil, benötigt nur wenig zusätzlichen Rechenaufwand und war lange Zeit der Industriestandard. Es ist für die Berechnung der Strömung im Inneren des Strömungsfeldes gut geeignet, hat allerdings Probleme bei der Berechnung von Strömungen, die aufgrund von Druckgradienten an der Wand ablösen. Der Beginn der Ablösung wird zu spät und das Ablösegebiet wird zu klein berechnet. Das $k-\varepsilon$ -Modell liefert deshalb meistens zu optimistische Ergebnisse bei Strömungen, die an der Wand ablösen.

Das **$k-\omega$ -Modell** als zweiter Vertreter der Zwei-Gleichungsmodelle liefert in Wandnähe genauere Ergebnisse als das $k-\varepsilon$ -Modell. Dies wird erreicht, indem anstelle der turbulenten Dissipation ε die turbulente Frequenz ω verwendet wird. Sie liefert schon bei geringerer Grenzschichtauflösung genauere Ergebnisse bei abgelösten Strömungen. Im Inneren des Strömungsfeldes ist es allerdings dem $k-\varepsilon$ -Modell bez. Genauigkeit unterlegen.

Aus diesem Grund wurde das sog. **SST-Modell** (Shear-Stress-Transport) entwickelt. Es kombiniert die guten Eigenschaften des $k-\omega$ -Modells in Wandnähe mit den guten Eigenschaften des $k-\varepsilon$ -Modells im restlichen Strömungsfeld. Hierdurch liefert es im gesamten Strömungsfeld auch für abgelöste Strömungen genauere Ergebnisse. Zudem ist es robust und die Rechenzeiten sind akzeptabel. Das SST-Modell wird als das neue Standard-Turbulenzmodell für industrielle Anwendungen angesehen und liefert auch bei Phänomenen wie der druckinduzierten Ablösung oder dem Wärmeübergang gute Ergebnisse.

Das **Reynolds-Stress-Modell** sollte eingesetzt werden, wenn die Turbulenz anisotrop, d. h. richtungsabhängig ist oder Nicht-Gleichgewichtseffekte auftreten. Bei diesem Modell werden anstelle der isotropen Wirbelviskosität direkt die Reynolds-Spannungen algebraisch oder über Transportgleichungsmodelle berechnet. Es ist für komplexe Strömungen mit starken Sekundärströmungen am genauesten, jedoch sind die Rechenzeiten deutlich höher als bei den Wirbelviskositätsmodellen.

Abschließend sind bei allen Turbulenzmodellen noch folgende Punkte zu beachten:

- für alle Differentialgleichungen im Turbulenzmodell müssen auch physikalische Randbedingungen vorgegeben werden.
- Der Ort des Umschlags von laminarer zu turbulenter Strömung wird normalerweise durch ein Transitionsmodell automatisch berechnet. Ist er z. B. aus Messungen bekannt, so kann er auch vorgegeben werden, was die Genauigkeit verbessern kann.

2.4 Vereinfachungsmöglichkeiten

2.4.1 Einführung

Die meistens kommerziellen CFD-Programme basieren auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen. Die Rechenzeiten liegen typischerweise bei Stunden oder Tagen. Da beim Entwurf neuer Geometrien oftmals viele Varianten in kurzer Zeit berechnet werden müssen, sind kurze Rechenzeiten sehr hilfreich. In der Industrie werden deshalb oft CFD-Programme verwendet, die auf vereinfachten Erhaltungsgleichungen basieren, sofern die Physik noch ausreichend wiedergegeben wird. Z. B. können die Druckverteilungen um Profile bei hohen Reynoldszahlen auch reibungsfrei relativ genau mit Hilfe der Euler-Gleichungen berechnet werden. Treten zudem keine Verdichtungsstöße auf, so reichen auch die Potentialgleichungen aus. Hier liegen typische Rechenzeiten dann bei Sekunden oder Minuten. Bild 2-13 zeigt die wichtigsten der heute verwendeten Vereinfachungsmöglichkeiten der Navier-Stokes-Gleichungen.

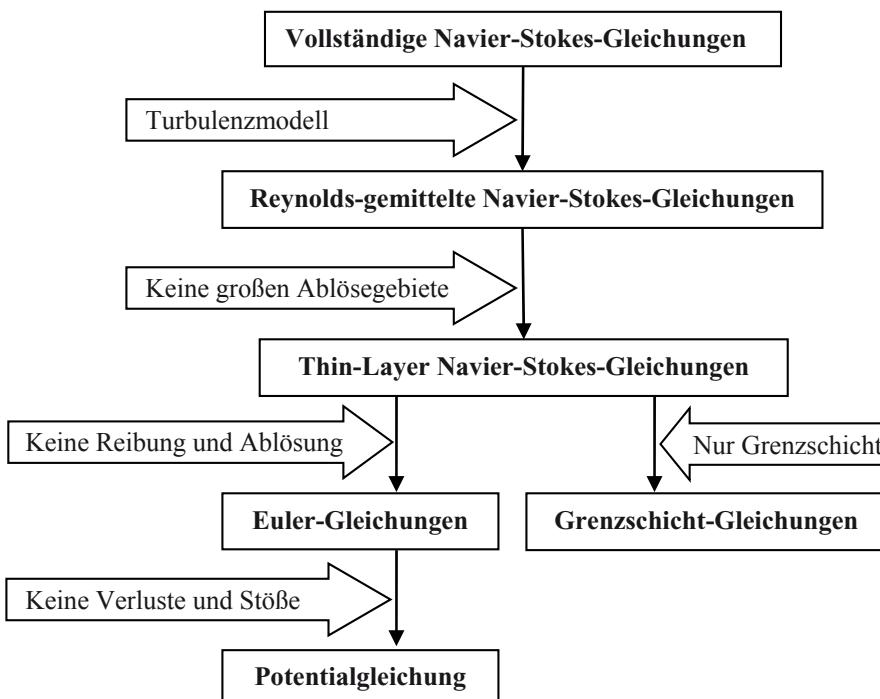


Bild 2-13 Einige Vereinfachungsmöglichkeiten der Navier-Stokes-Gleichungen

Bei der Vereinfachung wird in erster Linie nach dem Einfluss der Viskosität unterschieden. Sind die Gebiete klein, in denen viskose Effekte wie Reibung und Wärmeleitung auftreten, so können bestimmte Reibungsterme aus den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen weggelassen werden.

2.4.2 Thin-Layer-Navier-Stokes-Gleichungen

Bei den Thin-Layer-Navier-Stokes-Gleichungen werden alle viskosen Terme parallel zur Wand vernachlässigt und es bleiben nur die Spannungen und Wärmeleitungsterme normal zur Wand übrig. Dies hat den Vorteil, dass die wichtigsten Reibungsterme bei anliegender Grenzschicht noch berücksichtigt werden, aber die Rechenzeiten kürzer als bei den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen sind. Die kurzen Rechenzeiten ergeben sich vor allem deshalb, weil das Rechennetz in den zwei Raumrichtungen, in der die viskosen Terme vernachlässigt werden, größer ausgeführt werden kann.

Mit ihnen lassen sich Auftrieb und Widerstand berechnen. Ihr Einsatz ist sinnvoll, wenn die Strömung hohe Reynoldszahlen und keine größeren Ablösegebiete aufweist, wie z. B. bei der Tragflügel-Umströmung bei Anstellwinkeln um den Auslegungspunkt.

Die Thin-Layer-Navier-Stokes-Gleichungen ergeben sich aus den Reynolds-gemittelten bzw. den vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen (Gleichungen 2.18 bis 2.23), indem in den Vektoren \vec{E} und \vec{F} die viskosen Terme mit τ und die Wärmeleitungsterme mit λ vernachlässigt werden

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \rho \cdot u \\ \rho \cdot u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho \cdot v \cdot u - \tau_{xy} \\ \rho \cdot w \cdot u - \tau_{xz} \\ \rho \cdot u \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot v - \tau_{yx} \\ \rho \cdot v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho \cdot w \cdot v - \tau_{yz} \\ \rho \cdot v \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Die Spannungen aus den Stokesschen Beziehungen der Gleichungen 2.39 bis 2.37 verkürzen sich dann auf

$$\tau_{zz} = \frac{4}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.47)$$

$$\tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.48)$$

$$\tau_{zx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.49)$$

2.4.3 Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen ergeben sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen unter Vernachlässigung aller Reibungsterme mit τ und aller Wärmeleitungsterme mit λ .

Gegenüber den Thin-Layer-Navier-Stokes-Gleichungen ändert sich der Flussterm normal zur Wand. Ohne Reibung und Wärmeleitung wird er zu

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} \rho \cdot w \\ \rho \cdot u \cdot w \\ \rho \cdot v \cdot w \\ \rho \cdot w^2 + p \\ \rho \cdot w \cdot \left[h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

und auch die restlichen Spannungen aus den Gleichungen 2.47 bis 2.49 entfallen.

Da die Euler-Gleichungen keine Reibung in der Grenzschicht berechnen und diese somit nicht auflösen müssen, reichen auch gröbere Rechennetze aus. Hierdurch lassen sich die Rechenzeiten deutlich reduzieren. Dies ist gerade bei der Auslegung neuer Geometrien entscheidend. Hier müssen sehr viele verschiedene Geometrien untersucht werden, bis ein Optimum gefunden ist.

Da die Euler-Gleichungen eine reibungsfreie Strömung voraussetzen, ändert sich auch die physikalische Festkörper-Randbedingung. Anstelle der Haftbedingung $u = v = w = 0$ (Gl. 2.40) gilt jetzt die sog. Tangentialbedingung. Der Geschwindigkeitsvektor muss tangential zur Wand liegen bzw. seine Normalkomponente muss verschwinden

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = u \cdot n_x + v \cdot n_y + w \cdot n_z = 0 \quad (2.51)$$

Das Modell der Euler-Gleichungen ist für Strömungen bei hohen Reynolds-Zahlen und ohne Ablösungen anwendbar. Eine wichtige Eigenschaft der Euler-Gleichungen (wie der Navier-Stokes-Gleichungen) ist, dass sie Unstetigkeiten wie Verdichtungsstöße automatisch erfassen können, da sie die Rankine-Hugoniot-Bedingungen erfüllen. Die Ausbreitung von Verdichtungsstößen in Über- und Hyperschallströmungen kann somit schon mit den Euler-Gleichungen relativ genau erfasst werden. Sollen z. B. auch die Reibungsverluste berechnet werden, so können sie auch mit den Grenzschichtgleichungen gekoppelt werden.

2.4.4 Grenzschicht-Gleichungen

Die so genannten Grenzschicht-Gleichungen basieren auf den Untersuchungen von Prandtl. Er fand heraus, dass sich bei hohen Reynoldszahlen die viskosen Gebiete hauptsächlich entlang der festen Wände erstrecken und, sofern keine Ablösung auftritt, die restlichen Gebiete nahezu reibungsfrei sind.

Als Grenzschicht-Gleichungen werden die vereinfachten Impulsgleichungen entlang der Wand bezeichnet, die sich aus den Thin-Layer-Navier-Stokes-Gleichungen ergeben

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot u \cdot w) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot v \cdot w) + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.54)$$

Man sieht, dass sich die z-Impulsgleichung reduziert auf den Druckterm normal zur Wand, d. h. der Druck in der Grenzschicht bleibt konstant. Hierdurch wird das Druckfeld vom viskosen Geschwindigkeitsfeld entkoppelt und kann separat berechnet werden.

Der praktische Ablauf, z. B. um einen Tragflügel, ist dann wie folgt:

- reibungsfreie Rechnung der Strömung z. B. mittels den Euler-Gleichungen oder der Potentialgleichung.
- Übergabe des statischen Druckfeldes an der Wand an das Grenzschichtverfahren.
- Berechnung der Geschwindigkeiten und der Verluste in der Grenzschicht mit dem Grenzschichtverfahren. Bestimmung der Verdrängungsdicke.
- Aufdickung des Tragflügelprofils um die Verdrängungsdicke.
- Wiederholung der reibungsfreien Rechnung um das aufgedickte Profil.

Der Ablauf wird so lange wiederholt, bis sich die Lösungen aus reibungsfreier Berechnung der Kernströmung und reibungsbehafteter Rechnung der Grenzschichtströmung nicht mehr oder nur noch minimal ändern.

2.4.5 Potentialgleichung

Als letzte Vereinfachungsmöglichkeit wird hier die Potentialgleichung angegeben. Sie ist eine weitere Vereinfachung der Eulergleichungen und gilt deshalb auch nur für reibungsfreie Strömungen. Um auf die Potentialform zu kommen, muss die Strömung zusätzlich noch rotationsfrei sein. Rotationsfrei bedeutet physikalisch, dass sowohl die Entropie als auch die Totalenthalpie entlang von Stromlinien konstant sein müssen (isentrope und isenthalpe Strömung). Dies ist der Fall, wenn im Strömungsfeld keine Unstetigkeiten wie z. B. Stöße auftreten. Die Potentialgleichungen können keine stärkeren Verdichtungsstöße erfassen und werden deshalb nur für reine Unterschallströmungen und transsonische Strömungen bis $Ma < 1,2$ verwendet, wo keine oder nur schwache Stöße auftreten.

Trifft die Rotationsfreiheit zu, so kann anstelle der drei Geschwindigkeiten u, v, w das skalare Potential ϕ eingeführt werden

$$\bar{u} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Hierdurch reduzieren sich die fünf Euler-Gleichungen zu einer einzigen Potentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{\nabla} \phi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0$$

Mit der Potentialgleichung lassen sich sehr schnell Tragflügel- oder Schaufelprofile auslegen. Selbst gekoppelt mit einem Grenzschichtverfahren ergeben sich Rechenzeiten von lediglich einigen Sekunden. Sie werden in der Industrie z. B. für die Optimierung von so genannten superkritischen Tragflügelprofilen verwendet, die bei modernen Verkehrsflugzeugen eingesetzt werden, um stoßfrei und damit verlustarm im transsonischen Bereich fliegen zu können. Ebenso werden sie für die Auslegung subsonischer und transsonischer Verdichterschaufeln verwendet.

Bild 2-14 zeigt abschließend noch die wichtigsten Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichungen, Euler-Gleichungen und der Potentialgleichung in der Übersicht.

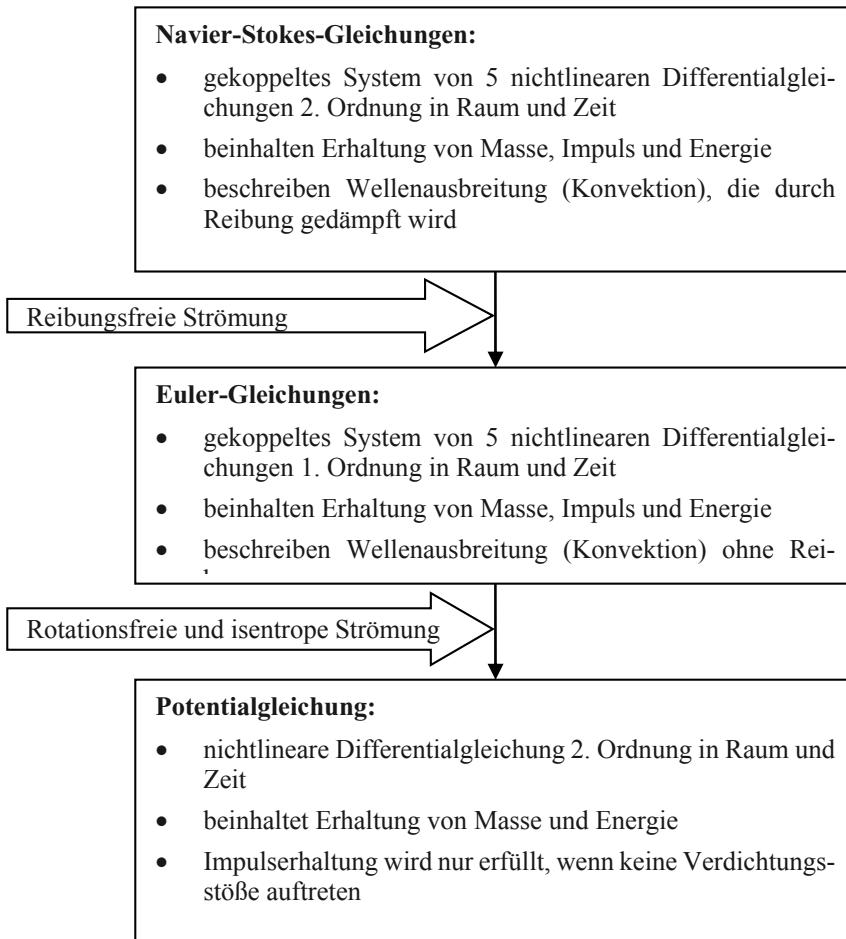


Bild 2-14 Eigenschaften der Navier-Stokes- und Euler-Gleichungen und der Potentialgleichung

3 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen

3.1 Ziel dieses Kapitels

Die in Kapitel 2 gezeigten Erhaltungsgleichungen müssen umgeformt werden, damit sie in einem Computerprogramm numerisch gelöst werden können. Diese sog. Diskretisierung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen wird in diesem Kapitel gezeigt. Der Anwender von modernen Strömungsberechnungsprogrammen sollte zumindest einen Überblick über die Diskretisierungsmethoden haben, auch wenn ihm diese Schritte die Entwickler der CFD-Programme bereits abgenommen haben.

Nach der Lektüre dieses Kapitels sollte er dann folgende Fragen beantworten können:

1. Was versteht man unter Diskretisierung?
2. Welche drei Diskretisierungsmethoden gibt es?
3. Welche Möglichkeiten der Diskretisierung gibt es für die räumlichen Ableitungen?
4. Was versteht man unter 1. und 2. Ordnung Genauigkeit?
5. Welche räumliche Ordnung soll bei stetigem Verlauf und welche bei unstetigem Verlauf der Strömungsgrößen verwendet werden?
6. Wie kann die zeitliche Ableitung diskretisiert werden?
7. Was bedeutet zeitasymptotische und zeitgenaue Rechnung?
8. Welche zeitliche Diskretisierung wird für eine instationäre Rechnung verwendet?
9. Was ist der Vorteil, wenn auch für stationäre Lösungen die zeitlichen Ableitungen mitgelöst werden?
10. Wie heißen die Gleichungen, die sich nach der Diskretisierung ergeben?
11. Was versteht man unter Konsistenz?
12. Wann ist ein numerisches Lösungsverfahren stabil?
13. Wann ist die numerische Lösung konvergent?
14. Warum wird bei zentraler räumlicher Diskretisierung eine additive numerische Viskosität benötigt?
15. Was versteht man unter der Upwind-Diskretisierung?
16. Was ist der Unterschied zwischen expliziter und impliziter Diskretisierung?
17. Was sind Vor- und Nachteile der impliziten Diskretisierung?
18. Welche Zahl koppelt den Zeitschritt mit der Maschenweite?
19. Wie groß kann diese Zahl bei einem expliziten Verfahren sein?

3.2 Was bedeutet Diskretisierung?

Für die in Kapitel 2 angegebenen Grundgleichungen der Strömungsmechanik (Navier-Stokes-Gleichungen bzw. Masse-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen) sind keine analytischen Lösungen bekannt, abgesehen von Sonderfällen wie die ebene Platte. Eine analytische Lösung wäre z. B. eine Gleichung für die Dichte ρ als Funktion der anderen Größen u, v, w, e .

Deshalb muss das Differentialgleichungssystem für technisch relevante Probleme numerisch gelöst werden. Hierzu müssen die partiellen Ableitungen (Differentiale) in endliche Differenzen umgewandelt werden. Dies nennt man Diskretisierung. Die diskretisierten Differentialgleichungen nennt man dann Differenzengleichungen. Diese Differenzengleichungen können auf einem so genannten Rechennetz gelöst werden. Bei der numerischen Lösung liegen dann die Zahlenwerte für die Strömungsgrößen wie ρ, u, v, w, e an den Netzenpunkten vor.

Bild 3-1 zeigt einen kleinen Ausschnitt eines zweidimensionalen Rechennetzes mit 9 Netzenpunkten. Nur an diesen Stützstellen wird die Lösung berechnet. Dargestellt ist hier ein sog. Zelleckpunktschema, wo die Stützstellen auf den Ecken des Volumenelements liegen. Alternativ können sie auch im Inneren des Volumenelements liegen. Das Volumenelement ist dann um eine halbe Maschenweite versetzt und man spricht von einem Zellzentrumsverfahren.

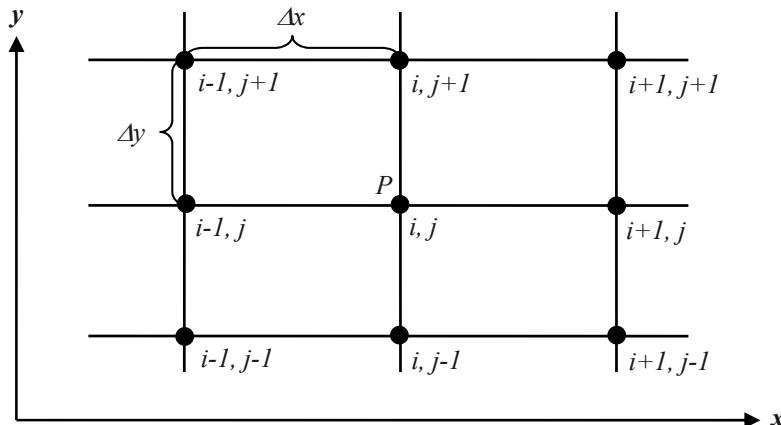


Bild 3-1 Schema eines Rechennetzes um den Punkt P

Diskretisierung bedeutet also, dass in den Differentialgleichungen die Differentiale durch Differenzen ersetzt werden. Z. B. kann das Differential der Geschwindigkeit $\partial u / \partial x$ in x-Richtung am Punkt $P(i, j)$ ersetzt werden durch die Differenz der Werte an den benachbarten Punkten $(i + 1, j)$ und (i, j)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

Man unterscheidet drei Methoden der Diskretisierung, die aber gleichwertig sind und ineinander überführt werden können: die Finite-Differenzen-, die Finite-Volumen- und die Finite-Elemente-Diskretisierung. Jede Methode hat ihre Vor- und Nachteile:

- Die **Finite-Differenzen-Diskretisierung (FD)** ist sehr anschaulich und wird nachfolgend verwendet, um das Prinzip der Diskretisierung zu zeigen. Sie verwendet die Erhaltungsgleichungen in Differentialform (siehe Kapitel 2). Die Stützstellen liegen an den Ecken des Volumenelements (Zelleckpunktschema).
- Die **Finite-Volumen-Diskretisierung (FV)** ist sehr genau bei Unstetigkeiten wie Stößen, weshalb moderne CFD-Programme meistens diese Methode verwenden. Bei ihr werden die Erhaltungsgleichungen in Integralform verwendet und die Integrale werden durch Summen ersetzt. Die Stützstellen liegen entweder im Inneren des Volumenelements (Zellzentrumsschema) oder wie bei der FD-Diskretisierung an den Ecken (Zelleckpunktschema).
- Die **Finite-Elemente-Methode (FE)** wird von Mathematikern bevorzugt, da sie mathematisch gut darstellbar ist. Bei ihr werden für die Differentiale durch mathematische Gleichungen wie Geraden- oder Parabelgleichungen eingesetzt.

Bild 3-2 zeigt, dass Finite-Differenzen-Methoden (FD) die höchste Genauigkeit und Finite-Elemente-Methoden (FE) die höchste Flexibilität haben. In der Praxis haben sich bei den kommerziellen CFD-Programmen die Finite-Volumen-Methoden (FV) durchgesetzt, da sie eine gute Genauigkeit und Flexibilität aufweisen.

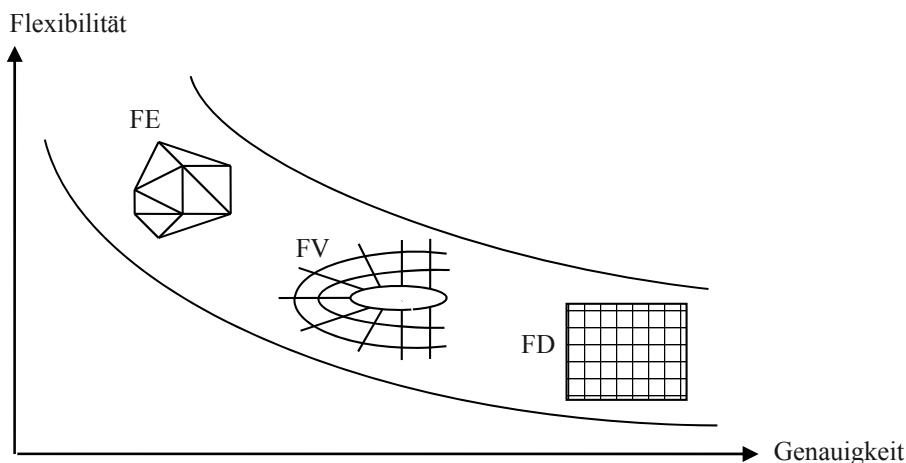


Bild 3-2 Einteilung der Diskretisierungsmethoden [nach 4]

Nachfolgend wird die Diskretisierung der in Kapitel 2 erwähnten Differentialgleichungen näher beschrieben. Aus Gründen der Anschaulichkeit geschieht dies am Beispiel der Finite-Differenzen-Methode. Da die Diskretisierungsmethoden unterschiedlich sind, wird zwischen der Diskretisierung der räumlichen Ableitungen und zeitlichen Ableitung unterschieden.

3.3 Räumliche Diskretisierung

3.3.1 Diskretisierung der 1. Ableitungen

Die räumliche Diskretisierung betrifft die Umwandlung der partiellen Ableitungen (Differentiale) $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ und $\partial/\partial z$ in finite Differenzen $\Delta/\Delta x$, $\Delta/\Delta y$ und $\Delta/\Delta z$. Am Beispiel der partiellen räumlichen Ableitung $\partial U/\partial x$ werden die Umformungsmöglichkeiten in finite Differenzen gezeigt, wobei hier U stellvertretend für jede beliebige Strömungsgröße steht.

Schaut man sich Bild 3-3 an, so gibt es drei Möglichkeiten, diese Ableitung am Punkt P zu bilden:

- die Vorwärtendifferenz $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x}$
- die Rückwärtendifferenz $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{x_{i,j} - x_{i-1,j}} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}$
- die zentrale Differenz $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x}$

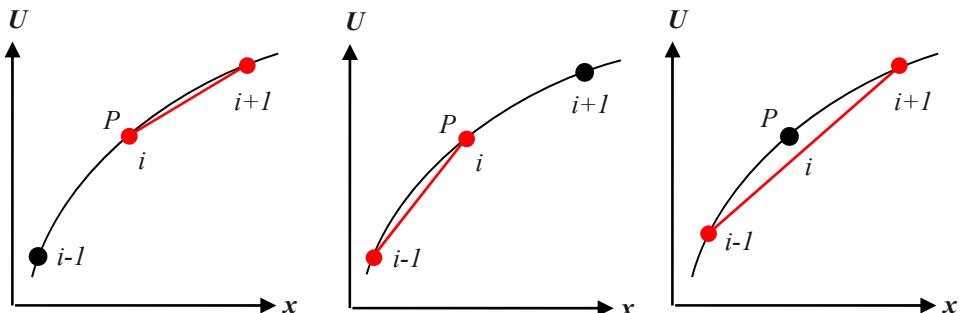


Bild 3-3 Vorwärts-, Rückwärts- und zentrale räumliche Differenz

Die Frage ist nun, worin liegt der Unterschied und welche Differenz soll verwendet werden? Der Unterschied ergibt sich, wenn versucht wird, das Ungleichzeichen durch ein Gleichheitszeichen zu ersetzen. Hierfür muss der so genannte Abbruchfehler eingeführt werden, der besagt, mit welcher Größenordnung die Differenz das Differential annähert d. h. approximiert.

Hierfür wird die klassische Taylor-Reihenentwicklung verwendet

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + (\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots \quad (3.1)$$

Aufgelöst ergibt sich für die 1. Ableitung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \underbrace{\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x}}_{\text{Finite Differenz}} - \underbrace{\frac{(\Delta x)}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j}}_{\text{Abbruchfehler}} - \dots$$

Die Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt und als Abbruchfehler bezeichnet. Hieraus ergibt sich nun die Diskretisierung des Differentials durch die **Vorwärtsdifferenz 1. Ordnung**

$$\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)} \quad (3.2)$$

Da das (Δx) im größten Term des Abbruchfehlers in erster Potenz vorkommt, spricht man von einem Abbruchfehler 1. Ordnung $O(\Delta x)$ bzw. von einer Diskretisierung von 1. Ordnung Genauigkeit.

Für die Rückwärtsdifferenz ergibt sich dieselbe Genauigkeitsordnung aus der Taylor-Reihenentwicklung

$$U_{i-1,j} = U_{i,j} - \Delta x \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots \quad (3.3)$$

Aufgelöst lautet die 1. Ableitung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \underbrace{\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x}}_{\text{Finite Differenz}} + \underbrace{\frac{(\Delta x)}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j}}_{\text{Abbruchfehler}} + \dots$$

Mit dem Abbruchfehler ergibt sich die **Rückwärtsdifferenz 1. Ordnung**

$$\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)} \quad (3.4)$$

Dies bedeutet, dass diese Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen nur 1. Ordnung genau sind. Diese Genauigkeitsordnung reicht für stetige Lösungen nicht aus.

Dagegen ist die zentrale Differenz von 2. Ordnung genau. Wird die Differenz von Gleichung 3.1 und 3.3 gebildet, so ergibt sich

$$U_{i+1,j} - U_{i-1,j} = 2 \cdot (\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + 2 \cdot \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots$$

Aufgelöst nach der gesuchten partiellen Ableitung ergibt sich die **zentrale Differenz 2. Ordnung**

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.5)$$

Sie ist 2. Ordnung genau, da der größte Abbruchfehlerterm mit $(\Delta x)^2$ vorkommt.

Auch die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen können mit einer Genauigkeit von 2. Ordnung gebildet werden, indem 3 Punkte einbezogen werden. Für die **Vorwärtsdifferenz 2. Ordnung** ergibt sich

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{-3 \cdot U_{i,j} + 4 \cdot U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.6)$$

und für die **Rückwärtendifferenz 2. Ordnung** analog

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{3 \cdot U_{i,j} - 4 \cdot U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.7)$$

Zusammengefasst ergeben sich für die Diskretisierung der 1. Ableitung in x-Richtung die folgenden Möglichkeiten für die Differenzenbildung

$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} = \begin{cases} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{Vorwärts 1. Ordnung} \\ \frac{-3 \cdot U_{i,j} + 4 \cdot U_{i+1,j} - U_{i+2,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 & \text{Vorwärts 2. Ordnung} \\ \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) & \text{Rückwärts 1. Ordnung} \\ \frac{3 \cdot U_{i,j} - 4 \cdot U_{i-1,j} + U_{i-2,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 & \text{Rückwärts 2. Ordnung} \\ \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 & \text{Zentral 2. Ordnung} \end{cases}$	
--	--

und entsprechend in y-Richtung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{i,j} = \begin{cases} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) & \text{Vorwärts 1. Ordnung} \\ \frac{-3 \cdot U_{i,j} + 4 \cdot U_{i,j+1} - U_{i,j+2}}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 & \text{Vorwärts 2. Ordnung} \\ \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) & \text{Rückwärts 1. Ordnung} \\ \frac{3 \cdot U_{i,j} - 4 \cdot U_{i,j-1} + U_{i,j-2}}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 & \text{Rückwärts 2. Ordnung} \\ \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 & \text{Zentral 2. Ordnung} \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3.2 Diskretisierung der 2. Ableitungen

In den Navier-Stokes-Gleichungen gibt es auch 2. Ableitungen in den Impulsgleichungen und der Energiegleichung. Werden z. B. die Ausdrücke für die Spannungen aus den Gleichungen 2.39 bis 2.37 in die x-Impulsgleichung Gl. 2.10 eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot u \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot u \cdot w) + \frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ & = \rho \cdot g_x \end{aligned}$$

Werden die Reibungsterme bei konstantem μ zusammengefasst

$$\mu \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial z} \right) - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \cdot \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial y} \right) \right]$$

so ergeben sich die 2. Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y}$ usw.

Die finiten Differenzen für diese 2. Ableitungen lassen sich wieder aus den Taylor-Reihenentwicklungen der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen ableiten. Werden Gleichung 3.1 und 3.3 addiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} U_{i+1,j} + U_{i-1,j} &= U_{i,j} + (\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots \\ &+ U_{i,j} - (\Delta x) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{i,j} + \dots \end{aligned}$$

oder

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} = 2 \cdot U_{i,j} + (\Delta x)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \cdot \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{i,j} + \dots$$

Aufgelöst ergibt sich für die **2. Ableitung in x-Richtung**

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.10)$$

Analog hierzu ergeben sich für die **2. Ableitung in y-Richtung**

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{U_{i,j+1} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \quad (3.11)$$

und für die **gemischten 2. Ableitungen**

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} \right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (3.12)$$

Anmerkungen zur räumlichen Diskretisierung

- Es gibt auch Differenzen-Ausdrücke mit höherer Genauigkeitsordnung. Es sind dann aber mehr Netzpunkte einbezogen.
- Eine Genauigkeitsordnung von zwei ist in der Regel ausreichend und in kommerziellen CFD-Programmen Standard. Deshalb werden in der Regel für die 1. Ableitungen zentrale räumliche Differenzen, die von 2. Ordnung genau sind, verwendet.
- Anders sieht es jedoch aus, wenn in der Strömung Unstetigkeiten wie Verdichtungsstöße auftreten. Dann führen die zentralen räumlichen Differenzen zu einem Fehler, da sie einen stetigen Verlauf der Strömungsgrößen voraussetzen. Moderne CFD-Verfahren schalten deshalb automatisch in Stoßumgebung auf einseitige Differenzen von 1. oder 2. Ordnung um. Man spricht dann von der Upwind-Diskretisierung. Upwind bedeutet, dass die Diskretisierungsrichtung (vorwärts oder rückwärts) entsprechend der physikalischen Ausbreitungsrichtung von Störungen gewählt wird. Hierzu mehr in den Kapiteln 3.5.4 und 5.4.
- An den Rändern des Rechengebietes wie am Zuström-, Abström- und Festkörperrand können nur einseitige Differenzen verwendet werden, da Punkte außerhalb des Netzbereiches fehlen (Bild 3-4). Die Vorwärtsdifferenz lautet nach Gleichung 3.2 hier

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_1 = \frac{U_2 - U_1}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (3.13)$$

Diese Differenz ist jedoch nur von 1. Ordnung genau. Um eine 2. Genauigkeitsordnung zu erhalten, werden höhere einseitige Differenzen verwendet. Die einseitige Vorwärtsdifferenz von 2. Ordnung lautet dann analog zu Gleichung 3.6 z. B.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_1 = \frac{-3 \cdot U_1 + 4 \cdot U_2 - U_3}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.14)$$

wobei jetzt nicht mehr zwei sondern drei Netzpunkte verwendet werden.

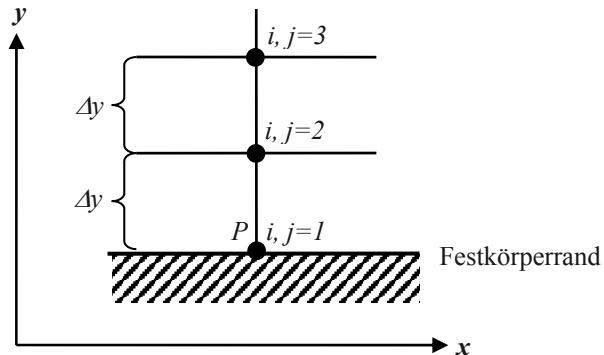


Bild 3-4 Netzpunkte am Festkörperrand

3.4 Zeitliche Diskretisierung

Die zeitliche Diskretisierung der partiellen Ableitung $\partial/\partial t$ erfolgt ähnlich wie die räumliche Diskretisierung. Bild 3-5 zeigt drei unterschiedliche Zeitebenen $n-1, n, n+1$, wobei die Lösung zum Zeitpunkt $n+1$ gesucht ist und alle vorherigen Lösungen zu den Zeitpunkten $n, n-1, n-2$ usw. bekannt sind.

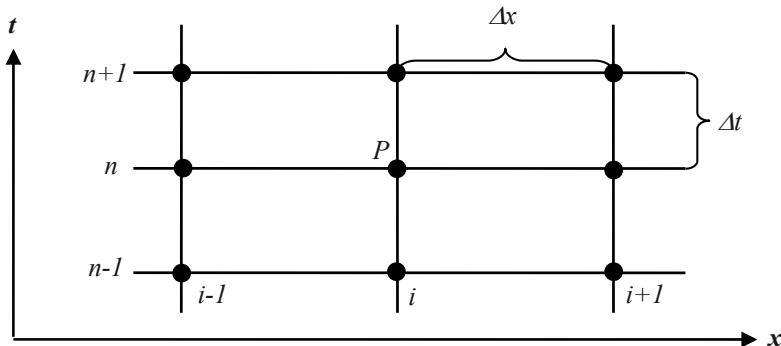


Bild 3-5 Die Zeitebenen n für die zeitliche Diskretisierung

Für die zeitliche Diskretisierung kann analog zu den räumlichen Differenzen eine **zeitliche Vorwärtsdifferenz mit 1. Ordnung** Genauigkeit

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.15)$$

oder eine **zeitliche zentrale Differenz von 2. Ordnung** Genauigkeit gewählt werden

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n = \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} + O(\Delta t)^2 \quad (3.16)$$

Eine Rückwärtsdifferenz ist nicht möglich, da ja die Lösung zum Zeitpunkt $n+1$ gesucht ist.

Welche zeitliche Diskretisierung verwendet wird, hängt davon ab, ob die zeitliche Genauigkeit wichtig ist oder nicht. Man unterscheidet zwischen:

- einer zeitasymptotischen bzw. stationären Lösung (Gl. 3.15)
- und einer zeitgenauen bzw. instationären Lösung (Gl. 3.16).

3.4.1 Zeitasymptotische bzw. stationäre Lösungen

Die fünf Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie enthalten auch die zeitlichen Ableitungen. Bei stationären Vorgängen könnten sie eigentlich vernachlässigt werden, so dass nur noch die stationären Erhaltungsgleichungen mit den räumlichen Ableitungen übrig bleiben. Dies hat aber den Nachteil, dass für Unterschall- und Überschallgebiete unterschiedliche Lösungsverfahren verwendet werden müssten, da die Differentialgleichungen ihren Typus ändern (elliptisch, hyperbolisch) je nachdem ob eine Unterschall- oder Überschallströmung existiert.

Deshalb hat es sich als zweckmäßig erwiesen, auch bei stationären Problemen die instationären Erhaltungsgleichungen zu lösen. Sie bleiben dann immer hyperbolisch und können sowohl für Unterschall- als auch Überschallgebiete mit einem einzigen Lösungsverfahren gelöst werden. Die zeitliche Ableitung dient dann nicht mehr dazu, die Physik zu jedem Zeitpunkt aufzulösen, sondern wird nur noch zur numerischen Lösung der stationären Erhaltungsgleichungen verwendet. Es reicht deshalb eine Genauigkeit von 1. Ordnung aus und Gleichung 3.15 kann verwendet werden.

Ausgehend von einer noch relativ ungenauen Anfangslösung zum Zeitpunkt $t=0$ bzw. zum Zeitlevel $n=0$ wird immer wieder eine Lösung zum nächsten Zeitlevel $n+1$ berechnet, bis sich die Lösungen bei zwei aufeinander folgenden Zeitschritten nicht mehr unterscheiden. Man spricht dann von einer auskonvergierten Lösung. Ist dies der Fall, so ist

$$U_i^{n+1} \approx U_i^n$$

und die zeitliche Ableitung wird

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_i^n = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \approx 0.$$

d. h. die stationären Erhaltungsgleichungen sind erfüllt.

Da nur die Lösung im konvergierten Zustand von Interesse ist und die Zwischenlösungen nicht interessieren, kann der Zeitschritt so groß gewählt werden, dass das Lösungsverfahren möglichst schnell konvergiert. Der Zeitschritt hat (fast) nichts mit der Physik zu tun, sondern ist ein rein numerischer Wert ($\Delta t_{num.}$). Moderne CFD-Programme berechnen ihn automatisch, meistens sogar für jede Netzzelle lokal, um ein optimales Konvergenzverhalten zu erzielen.

3.4.2 Zeitgenaue bzw. instationäre Lösungen

Anders verhält es sich, wenn instationäre Effekte aufgelöst werden müssen. Da die zeitliche Genauigkeit (wie die räumliche) mindestens von 2. Ordnung sein soll, muss Gleichung 3.16 verwendet werden. Der Zeitschritt muss dann so gewählt werden, dass er dem physikalischen Problem entspricht ($\Delta t_{phys.}$), d. h. die interessierenden zeitlichen Änderungen noch erfasst. Der physikalische Zeitschritt muss vom Benutzer vorgegeben werden.

Die Rechenzeiten und der Speicherplatzbedarf sind bei instationären Lösungen oftmals sehr groß. Zum einen müssen die Zeitschritte meistens klein sein, um die zeitlichen Änderungen aufzulösen zu können und zum anderen muss die Lösung zu jedem Zeitpunkt abgespeichert werden.

Die meisten kommerziellen Programme können sowohl stationäre als auch instationäre Vorgänge berechnen, es muss nur ein Eingabeparameter geändert werden. Das Programm wählt dann die richtige Vorwärtsdifferenz aus.

3.5 Differenzengleichungen

3.5.1 Herleitung

Differenzengleichungen ergeben sich aus den Differentialgleichungen, wenn für die räumlichen und zeitlichen Ableitungen die Differenzenausdrücke eingesetzt werden. Z. B. ergibt sich aus der Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichung in Vektorform (Gl. 2.18), wobei die Vektorenpfiele der Einfachheit halber jetzt weggelassen werden

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} E + \frac{\partial}{\partial y} F + \frac{\partial}{\partial z} G = Q$$

mit zentralen räumlichen Differenzen in die drei Raumrichtungen analog zu Gleichung 3.5

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} E \right)_{i,j,k} = \frac{E_{i+1,j,k} - E_{i-1,j,k}}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} F \right)_{i,j,k} = \frac{F_{i,j+1,k} - F_{i,j-1,k}}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} G \right)_{i,j,k} = \frac{G_{i,j,k+1} - G_{i,j,k-1}}{2 \cdot \Delta z} + O(\Delta z)^2 \quad (3.19)$$

und der einseitigen zeitlichen Vorwärtsdifferenz aus Gleichung 3.15

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} U \right)_{i,j,k}^n = \frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

folgende Differenzengleichung

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i,j,k}^{n+1} - U_{i,j,k}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) + \frac{E_{i+1,j,k}^n - E_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + O(\Delta x)^2 \\ & + \frac{F_{i,j+1,k}^n - F_{i,j-1,k}^n}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 + \frac{G_{i,j,k+1}^n - G_{i,j,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} + O(\Delta z)^2 = Q_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wie an den Abbruchfehlern $O(\Delta t)$ und $O(\Delta x)^2, O(\Delta y)^2, O(\Delta z)^2$ ersichtlich, ist diese Gleichung 1. Ordnung genau in der Zeit und 2. Ordnung genau im Raum. Die Abbruchfehlerterme werden fortan weggelassen, da sie nur dazu dienen, die Genauigkeitsordnung aufzuzeigen.

Wird Gleichung 3.20 nach der unbekannten Größe zum Zeitpunkt $n+1$ aufgelöst, so ergibt sich die **Differenzengleichung**

$$\boxed{U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - \Delta t \cdot \left[\frac{E_{i+1,j,k}^n - E_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{F_{i,j+1,k}^n - F_{i,j-1,k}^n}{2 \cdot \Delta y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{G_{i,j,k+1}^n - G_{i,j,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} - Q_{i,j,k}^n \right] \right]} \quad (3.21)$$

Die Erhaltungsgröße U am Netzpunkt i,j,k zum Zeitpunkt $n+1$ kann mit Gleichung 3.21 prinzipiell berechnet werden, da die Flussgrößen E, F, G und der Quellterm Q zum Zeitpunkt n bekannt sind.

Leider führt Gleichung 3.21 zu keiner stabilen Lösung, da der Abbruchfehler von Zeitschritt zu Zeitschritt immer größer wird bzw. die Schwankungen der Strömungsgröße U zunehmen, wie Bild 3-6 zeigt.

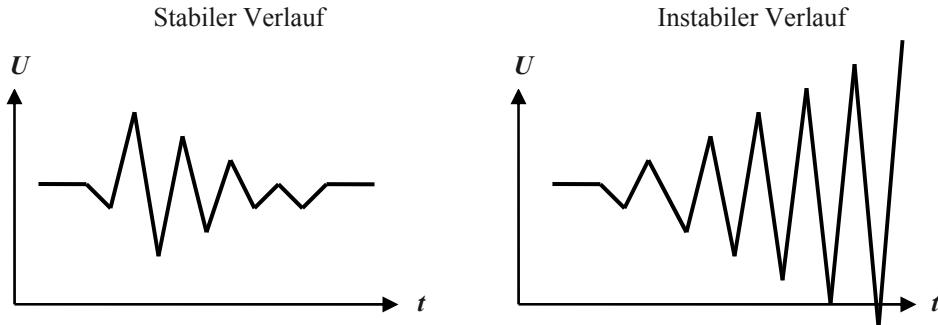


Bild 3-6 Verlauf der Strömungsgröße u über der Zeit für eine stabile und eine instabile Lösung

Deshalb muss die Stabilität der Differenzengleichung 3.21 verbessert werden. Was ist nun eine stabile Lösung und wie erreiche ich sie? Um diese Frage beantworten zu können, müssen zuerst die folgenden drei Begriffe erklärt werden.

3.5.2 Konsistenz, Stabilität und Konvergenz

Konsistenz

Die Differenzengleichungen sind konsistent, wenn sie für $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ in die Differentialgleichungen übergehen bzw. wenn ihre Abbruchfehler $O(\Delta t), O(\Delta x), O(\Delta x)^2, O(\Delta y)^2, O(\Delta z)^2$ usw. für $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ zu Null werden. Damit ist sichergestellt, dass die Differenzengleichungen auch die physikalischen Differentialgleichungen repräsentieren und keine Terme fehlen oder zu viel sind.

Stabilität

Ein numerisches Lösungsverfahren ist dann stabil, wenn die Abbruchfehler, die ja bei der numerischen Lösung vernachlässigt werden, immer kleiner werden. Die numerische Lösung erfüllt dann die Differenzengleichungen. In der Mathematik gibt es zahlreiche Methoden zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von Differentialgleichungen. Am bekanntesten ist die Von Neumann Stabilitätsanalyse, bei der untersucht wird, ob kleine Störungen gedämpft oder angefacht werden.

Konvergenz

Eine numerische Lösung ist konvergent, wenn sie die Differentialgleichungen erfüllt. Dies wird z. B. bei Zeitschrittverfahren anhand des so genannten Residuums überprüft. Das Residuum ist

ein Zahlenwert für jede Erhaltungsgleichung, der angibt, in wie weit die stationäre Erhaltungsgleichung erfüllt ist. Ist es um 4-5 Größenordnungen gesunken, so spricht man in der Praxis von einer konvergenten Lösung (theoretisch müsste das Residuum exakt Null sein).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es für eine physikalische Lösung mindestens notwendig ist, dass

- die Diskretisierung konsistent
- das Lösungsverfahren stabil
- und die Lösung konvergent ist.

Bild 3-7 zeigt diese Zusammenhänge nochmals grafisch.

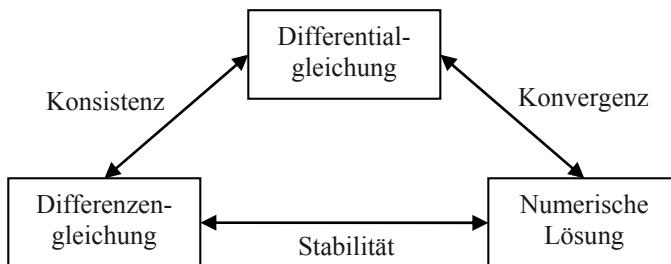


Bild 3-7 Beziehungen zwischen Konsistenz, Stabilität und Konvergenz

Wie kann man nun die Differenzengleichung 3.21 so ändern, dass das Lösungsverfahren stabil wird? Drei Möglichkeiten werden in der Praxis angewendet:

1. durch die Einführung einer additiven numerischen Viskosität werden die Abbruchfehler gedämpft und das Lösungsverfahren wird stabil.
2. Anstelle der zentralen räumlichen Differenzen werden einseitige räumliche Differenzen verwendet (Upwind-Verfahren).
3. Die räumlichen Ableitungen werden nicht zum Zeitpunkt n (explizite Verfahren) gebildet, sondern zum Zeitpunkt $n+1$ (implizites Verfahren).

3.5.3 Additive numerische Viskosität

Die Einführung der additiven numerischen Viskosität lässt sich am besten anhand der eindimensionalen Differenzengleichung ohne Quellterm zeigen, die sich aus Gleichung 3.21 ergibt:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot [E_{i+1}^n - E_{i-1}^n] \quad (3.22)$$

Wie schon oben erwähnt, ist diese Differenzengleichung mit einer zentralen räumlichen Differenz nicht stabil, sondern es muss ein zusätzlicher Term addiert werden, die so genannte numerische Viskosität. Sie wird auch künstliche Viskosität oder numerische Dämpfung bzw. numerische Dissipation genannt im Unterschied zur physikalischen Viskosität in den Reibungstermen der Navier-Stokes-Gleichungen.

Bild 3-8 zeigt den prinzipiellen Verlauf des statischen Drucks an einem Verdichtungsstoß mit und ohne additive numerische Viskosität im Vergleich zur exakten Lösung. Ohne numerische Viskosität oszilliert die Lösung, da das Verfahren am Stoß instabil wird. Diese Oszillationen werden von der numerischen Viskosität unterdrückt.

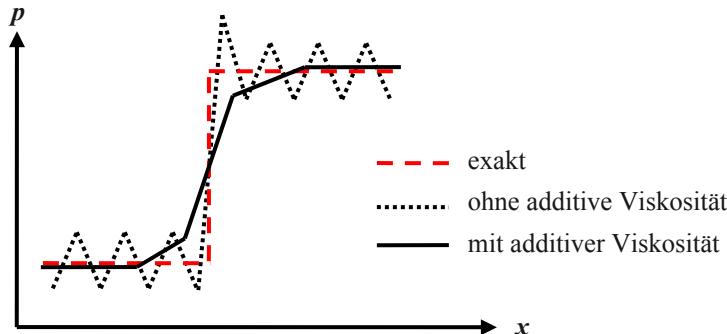


Bild 3-8 Prinzipieller Druckverlauf an einem Verdichtungsstoß (exakt, ohne und mit additiver numerischer Viskosität)

Die **additive numerische Viskosität** ist ein Term, der einer zweiten und vierten Ableitung entspricht und ähnlich wie die physikalische Viskosität aussieht

$$\begin{aligned}
 U_i^{n+1} = & U_i^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot [E_{i+1}^n - E_{i-1}^n] - \underbrace{\varepsilon_2 \cdot [U_{i+1}^n - 2 \cdot U_i^n + U_{i-1}^n]}_{\text{Numerische Viskosität 2.Ordnung}} \\
 & - \underbrace{\varepsilon_4 \cdot [U_{i+2}^n - 4 \cdot U_{i+1}^n + 6 \cdot U_i^n - 4 \cdot U_{i-1}^n + U_{i-2}^n]}_{\text{Numerische Viskosität 4.Ordnung}}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Vorfaktoren ε_2 und ε_4 sind vorzugeben. Sie müssen klein genug sein, um die Lösung nicht merklich zu verfälschen, aber groß genug um das Verfahren stabil zu machen, also genügend zu dämpfen. Typische Werte sind $\varepsilon_2 \approx 1/4$ und $\varepsilon_4 \approx 1/256$.

Während die numerische Viskosität 4. Ordnung die Störungen im gesamten Rechengebiet dämpft und damit die Differenzengleichung stabil macht, wirkt die numerische Viskosität 2. Ordnung eher im Bereich von Unstetigkeiten wie Verdichtungsstößen. Sie sorgt dafür, dass die Oszillationen vor und nach dem Stoß deutlich reduziert werden und der Stoß schärfer aufgelöst wird bzw. weniger verschmiert. Am Stoß wird deshalb meistens der Term 4. Ordnung ausgeschaltet, während der Term 2. Ordnung nur am Stoß wirkt. Gesteuert wird dies über einen Term, der vom Druckgradienten abhängt und am Stoß groß, im restlichen Rechengebiet aber klein ist.

3.5.4 Upwind-Diskretisierung

Eine andere Möglichkeit, die Differenzengleichung stabil zu machen, ist die so genannte Upwind-Diskretisierung. Bei ihr werden anstelle der zentralen räumlichen Diskretisierung einseitige Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen verwendet. Hierdurch wird die Addition der numerischen Viskosität überflüssig. Es kann mathematisch gezeigt werden, dass die Upwind-Diskretisierung in eine zentrale Diskretisierung plus additive numerische Viskosität umgerechnet werden kann.

Das Besondere der Upwind-Diskretisierung ist, dass die Ausbreitungsrichtung von physikalischen Störungen wie Schallwellen oder Verdichtungsstöße berücksichtigt wird. Je nachdem, ob die Störung von stromauf oder stromab kommt, werden einseitige Vorwärts- oder Rückwärts-Differenzen verwendet. Die Diskretisierung erfolgt somit immer in Strömungsrichtung, daher der Name „Upwind“.

Werden die einseitigen räumlichen Differenzen verwendet, so ergeben sich folgende **Upwind-Differenzengleichungen 1. Ordnung**

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot [E_{i+1}^n - E_i^n] \quad (3.24)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot [E_i^n - E_{i-1}^n] \quad (3.25)$$

Gleichung 3.24 verwendet die Vorwärtsdifferenz 1. Ordnung, während Gleichung 3.25 die Rückwärtsdifferenz 1. Ordnung verwendet. Um zu entscheiden, welche der beiden Gleichungen verwendet werden muss, wird zuerst die Ausbreitungsrichtung der Strömung z. B. mittels Charakteristiken-Theorie berechnet. Deshalb ist der Rechenaufwand höher als bei der zentralen räumlichen Differenz.

Leider ist die Genauigkeit 1. Ordnung meistens nicht genau genug, weshalb bei genaueren Verfahren einseitige **Upwind-Differenzengleichungen 2. Ordnung** verwendet werden

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot [-3 \cdot E_i^n + 4 \cdot E_{i+1}^n - E_{i+2}^n] \quad (3.26)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot [3 \cdot E_i^n - 4 \cdot E_{i-1}^n + E_{i-2}^n] \quad (3.27)$$

Gleichung 3.26 ist wieder eine Vorwärtsdifferenz, jetzt aber 2. Ordnung, während Gleichung 3.27 die Rückwärtsdifferenz 2. Ordnung ist.

Diese Verfahren nennt man auch High-Resolution-Verfahren, da sie Upwind-Verfahren von 2. Ordnung Genauigkeit sind. Die Stoßauflösung ist bei ihnen nicht mehr ganz so gut wie bei den Upwind-Verfahren 1. Ordnung, dafür ist die Genauigkeit im restlichen Strömungsfeld deutlich besser, mehr hierzu in Kapitel 5.5.

3.5.5 Explizite und implizite Diskretisierung

Die Berechnung der Flussterme kann explizit oder implizit erfolgen, je nachdem, auf welcher Zeitebene diese gebildet werden. Der Unterschied ist anhand der eindimensionalen Differenzengleichung 3.22 ersichtlich. Beim **expliziten Differenzenschema** werden die Flussterme E zum Zeitpunkt n gebildet

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot [E_{i+1}^n - E_{i-1}^n]$$

Deshalb kann die gesuchte Größe U_i^{n+1} zum Zeitpunkt $n+1$ direkt, d. h. explizit aus den bekannten Werten zum Zeitpunkt n berechnet werden. Dieses so genannte explizite Differenzenschema ist in Bild 3-9 schematisch dargestellt.

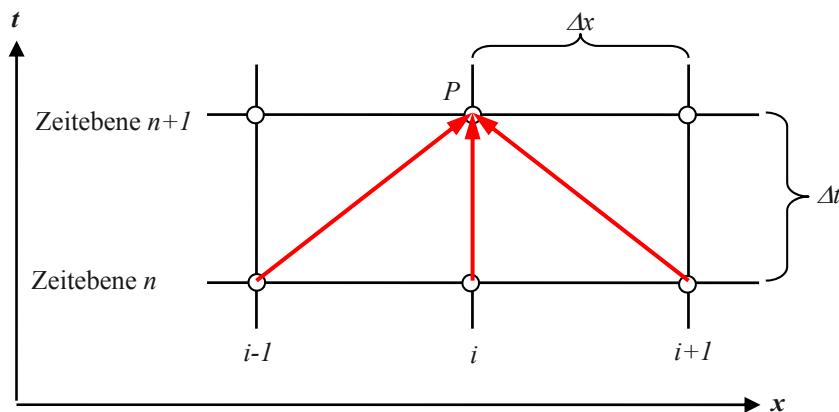


Bild 3-9 Ein explizites zeitliches Differenzenschema

Im Gegensatz hierzu werden beim so genannten **impliziten Differenzenschema** die Flussterme E zum noch unbekannten Zeitpunkt $n+1$ gebildet

$$U_i^{n+1} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}}_c \cdot [E_{i+1}^{n+1} - E_{i-1}^{n+1}] = U_i^n \quad (3.28)$$

Die interessierende Erhaltungsgröße U_i^{n+1} kann jetzt nicht mehr direkt zum Zeitpunkt $n+1$ berechnet werden, da die Flussgrößen E_{i+1}^{n+1} und E_{i-1}^{n+1} zum Zeitpunkt $n+1$ noch unbekannt sind. Das implizite Differenzenschema ist in Bild 3-10 schematisch dargestellt.

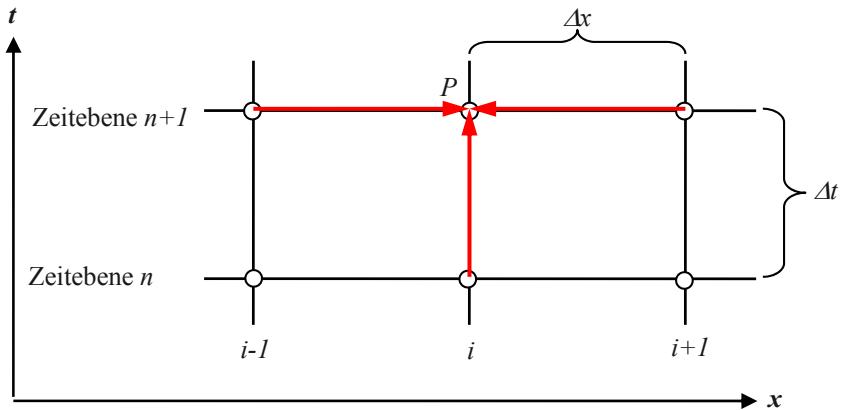


Bild 3-10 Ein implizites zeitliches Differenzenschema

U_i^{n+1} am Netzpunkt i zum Zeitpunkt $n+1$ kann jetzt nur berechnet werden, wenn solche Gleichungen für alle Netzpunkte aufgestellt werden und das entstehende Gleichungssystem gelöst wird

$$\begin{aligned} & \vdots \\ c \cdot E_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1} - c \cdot E_{i+1}^{n+1} &= U_i^n \\ c \cdot E_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1} - c \cdot E_{i+2}^{n+1} &= U_{i+1}^n \\ c \cdot E_{i+1}^{n+1} + U_{i+2}^{n+1} - c \cdot E_{i+3}^{n+1} &= U_{i+2}^n \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dies führt bei zentraler räumlicher Diskretisierung auf ein so genanntes tridiagonales Gleichungssystem, da nur die Hauptdiagonale und die beiden links und rechts angrenzenden Diagonalen der Matrix M besetzt sind und alle anderen Werte Null sind

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ c \cdot \frac{E_{i-1}^{n+1}}{U_{i-1}^{n+1}} & 1 & & & & \\ & c \cdot \frac{E_{i+1}^{n+1}}{U_{i+1}^{n+1}} & 0 & & & \\ & & 1 & c \cdot \frac{E_{i+2}^{n+1}}{U_{i+2}^{n+1}} & 0 & \\ & & & 1 & c \cdot \frac{E_{i+3}^{n+1}}{U_{i+3}^{n+1}} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ U_i^{n+1} \\ U_{i+1}^{n+1} \\ U_{i+2}^{n+1} \\ U_{i+3}^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ U_i^n \\ U_{i+1}^n \\ U_{i+2}^n \\ U_{i+3}^n \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

M

Um dieses Gleichungssystem lösen zu können, müssen zum einen die Terme E_i^{n+1}/U_i^{n+1} in der Matrix M so umgeformt werden, dass sie aus Werten, die bereits bekannt sind, berechnet werden

können. Dies erreicht man durch die so genannte Linearisierung, deren mathematische Formulierung der Fachliteratur wie z. B. [3] zu entnehmen ist.

Zum anderen muss die Matrix M invertiert werden oder das Gleichungssystem muss iterativ mittels eines Relaxationsverfahrens gelöst werden. Beides ist relativ aufwendig und die Rechenzeit pro Zeitschritt Δt wird größer als bei expliziten Verfahren.

Dafür brauchen implizite Verfahren deutlich weniger Iterationen bis zur konvergenten Lösung, da sie stabiler sind und deutlich größere Zeitschritte verwenden können. Hierdurch sind die Gesamtrechenzeiten impliziter Verfahren trotz der höheren Rechenzeit pro Iteration oftmals niedriger als bei expliziten Verfahren.

Bei modernen CFD-Verfahren wird jedoch meistens die explizite Diskretisierung verwendet, da sie einfacher und flexibler ist und inzwischen zahlreiche Methoden zur Konvergenzbeschleunigung vorhanden sind, wie z. B. die lokale Zeitschrittsteuerung und die Mehrgittertechnik.

Erwähnt werden muss noch, dass die implizite Diskretisierung zwar für lineare Probleme stabil ist, jedoch für nichtlineare Probleme wie z. B. Strömungen mit Verdichtungsstößen instabil werden kann. Deshalb wird auch bei impliziten Lösungsverfahren eine additive numerische Viskosität oder die Upwind-Diskretisierung verwendet, um auch für stoßbehaftete Strömungen eine gute Stabilität und eine gute Stoßauflösung erzielen zu können.

CFL-Zahl

Gl. 3.28 enthält das Verhältnis von Zeitschritt Δt zum Rechennetzabstand Δx . Aus einer Stabilitätsuntersuchung [3] ergibt sich, dass dieses Verhältnis $\Delta t / \Delta x$ nicht beliebig gewählt werden darf, da ansonsten die Abbruchfehler zu groß werden und das Verfahren instabil wird.

Physikalisch lässt sich dies mit der Ausbreitungsrichtung von Störungen, den so genannten Charakteristiken, erklären. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen im Rechennetz muss immer kleiner sein als die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung wie z. B. einer Schallwelle. Deshalb geht auch noch die Schallgeschwindigkeit mit ein. Hieraus ergibt sich die so genannte **Courant-Friedrichs-Levy-Zahl (CFL)**, die wie folgt definiert ist:

$$\boxed{CFL = a \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (3.31)$$

Der Zeitschritt Δt ist an die Rechennetzmaschenweite Δx und die Schallgeschwindigkeit a gekoppelt. Bei kleinen Maschenweiten muss der Zeitschritt bzw. die CFL-Zahl somit kleiner sein als bei großen Maschenweiten.

Aus einer Stabilitätsuntersuchung ergibt sich, dass bei rein expliziten Verfahren die CFL-Zahl immer kleiner 1 sein muss, um eine stabile und konvergente Lösung zu erzielen. Im Gegensatz hierzu sind implizite Verfahren auch noch bei weit größeren CFL-Zahlen stabil (z. B. 10-1000 je nach Lösungsverfahren und Komplexität des Strömungsproblems).

3.5.6 Zusammenfassung

Abschließend zu Kapitel 3 erfolgt noch eine Zusammenfassung der wichtigsten Diskretisierungsmöglichkeiten und deren Vor- und Nachteile in den Tabelle 3.1 und 3.2:

Tabelle 3.1 Wichtigste Eigenschaften der räumlichen Diskretisierung

Räumliche Diskretisierung	
Upwind 1. Ordnung genau	Einseitige Differenzen 1. Ordnung Genauigkeit schlecht, da nur 1. Ordnung Stöße zu stark gedämpft Sehr stabil
Zentral 2. Ordnung genau	Zentrale Differenzen 2. Ordnung Genauigkeit gut, da 2. Ordnung Oszillationen an Stößen Stabil durch Addition der numerischen Viskosität
High Resolution 2. Ordnung genau	Einseitige Differenzen 2. Ordnung Genauigkeit gut, da 2. Ordnung Stoßauflösung gut Stabil

Tabelle 3.2 Wichtigste Eigenschaften der zeitlichen Diskretisierung

Zeitliche Diskretisierung	
1. Ordnung genau	Für stationäre Probleme ausreichend
2. Ordnung genau	Für instationäre Probleme notwendig
Explizites Verfahren	Flussterme werden zum Zeitpunkt n gebildet Gesuchte Größe kann explizit ausgerechnet werden Zeitschritt pro Iteration muss aus Stabilitätsgründen klein sein ($CFL < 1$), deshalb sind viele Zeitschritte notwendig bis zur konvergenten Lösung
Implizites Verfahren	Flussterme werden zum Zeitpunkt $n+1$ berechnet Gesuchte Größe kann nur über ein Gleichungssystem (implizit) berechnet werden, dessen Matrix invertiert werden muss (höhere Rechenzeit pro Iteration) Zeitschritt pro Iteration ist aber größer ($CFL >> 1$), deshalb weniger Zeitschritte notwendig bis zur konvergenten Lösung

4 Rechennetze

4.1 Ziel dieses Kapitels

Die diskretisierten Erhaltungsgleichungen können nur an definierten Stützstellen gelöst werden. Hierfür ist ein Rechennetz notwendig, das das Gebiet, in dem die Strömung berechnet werden soll, ausfüllt. Von der Qualität des Rechennetzes hängen entscheidend das Konvergenzverhalten der Rechnung und die Genauigkeit der Lösung ab. So fein wie nötig, so grob wie möglich, lautet hier die Devise. Einerseits sollen wichtige Strömungsdetails genau erfasst werden, andererseits sollen die Rechenzeiten akzeptabel sein. Oftmals wird die Netzpunktzahl bei komplexeren Anwendungen gerade so groß gewählt, dass der am Nachmittag abgeschickte Rechenlauf am nächsten Vormittag ausgewertet werden kann.

Obwohl moderne Programme zur Rechennetzerzeugung immer benutzerfreundlicher werden, muss der Anwender doch einige Erfahrung mitbringen, um die globalen und lokalen Verdichtungsparameter so einzustellen, dass die Anforderungen an die Genauigkeit und die Rechenzeit erfüllt werden. In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Rechennetzerzeugung vorgestellt.

Folgende Fragen sollten Sie anschließend beantworten können:

1. Welche Anforderungen soll ein gutes Rechennetz erfüllen?
2. Was ist der Vorteil von schiefwinkligen Rechennetzen?
3. Was versteht man unter einem O-, C-, H-Rechennetz? Was sind ihre Vor- und Nachteile?
4. Warum werden Rechennetze am Festkörperrand verdichtet? Was geschieht bei reibungsfreier Rechnung?
5. Was ist der Vorteil blockstrukturierter Rechennetze?
6. Was versteht man unter adaptiven Rechennetzen?
7. Welchen Vorteil haben unstrukturierte Rechennetze?
8. Wie soll eine ideale Netzzelle sein, eher rechtwinklig oder eher schiefwinklig?

4.2 Übersicht

Die diskretisierten Differentialgleichungen ergeben die so genannte Differenzengleichung, die in Kapitel 3 hergeleitet wurde (Gl. 3.21):

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^n - \Delta t \cdot \left[\frac{E_{i+1,j,k}^n - E_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot \Delta x} + \frac{F_{i,j+1,k}^n - F_{i,j-1,k}^n}{2 \cdot \Delta y} + \frac{G_{i,j,k+1}^n - G_{i,j,k-1}^n}{2 \cdot \Delta z} - Q_{i,j,k}^n \right]$$

Um sie lösen zu können, müssen der Erhaltungsvektor U , die Flussterme E, F, G und der Quellterm Q an den Stützstellen (i, j, k) , $(i+1, j, k)$, $(i-1, j, k)$ usw. bekannt sein. Hierfür ist ein Rechennetz notwendig. Es füllt das Gebiet aus, in dem die Strömung berechnet werden soll.

Bild 4-1 zeigt solch ein Rechennetz schematisch mit der Geometrie und einigen Rändern.

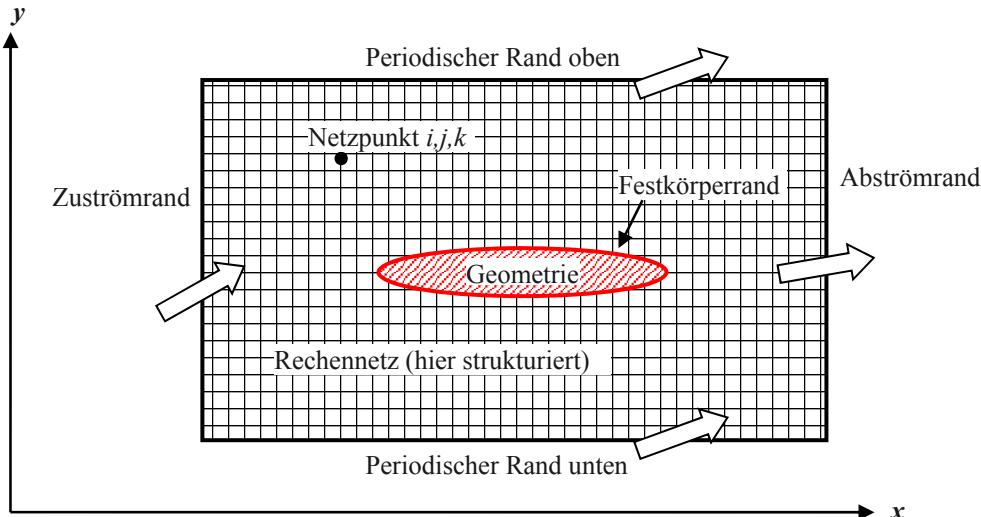


Bild 4-1 Definitionen zum Rechennetz

Die Geometrie wie z. B. das Fahrzeug oder der Flugzeugflügel wird üblicherweise aus einem CAD-Programm eingelesen. Moderne kommerzielle CFD-Programme haben Schnittstellen zu allen gängigen CAD-Programmen. Für einfache Geometrien kann sie auch als Punktmenge oder als analytische Funktion vorgegeben werden. Z. B. werden oftmals Tragflügelprofile als analytische Form vorgegeben, da sie dann anhand weniger Parameter verändert und optimiert werden können. Praktische Tipps hierzu werden in Kapitel 6 angegeben.

Nachdem die Geometriedaten eingelesen wurden, müssen die Ränder des Rechengebiets definiert werden. Oftmals können Symmetrieebenen ausgenutzt werden, um Netzpunkte und Rechenzeit sparen zu können. Der so genannte Festkörperrand ist die Oberfläche der Geometrie, die für die Strömung undurchlässig ist. Des Weiteren müssen die Zu- und Abströmränder und

die periodische Ränder definiert werden. An ihnen tritt die Strömung in das Rechengebiet ein oder aus.

Erst jetzt kann die eigentliche Erzeugung des Rechennetzes erfolgen. Hierbei gibt es unterschiedliche Netzformen, die in diesem Kapitel einschließlich ihrer Vor- und Nachteile näher beschrieben werden.

Den Abschluss bildet die Netzadaption, bei der das Netz an die Gradienten der Strömung (z. B. Grenzschicht, Verdichtungsstöße) und der Geometrie (z. B. starke Krümmungen an Knicken und Kanten) angepasst wird. Bild 4-2 gibt eine Übersicht über den Ablauf der Netzgenerierung.

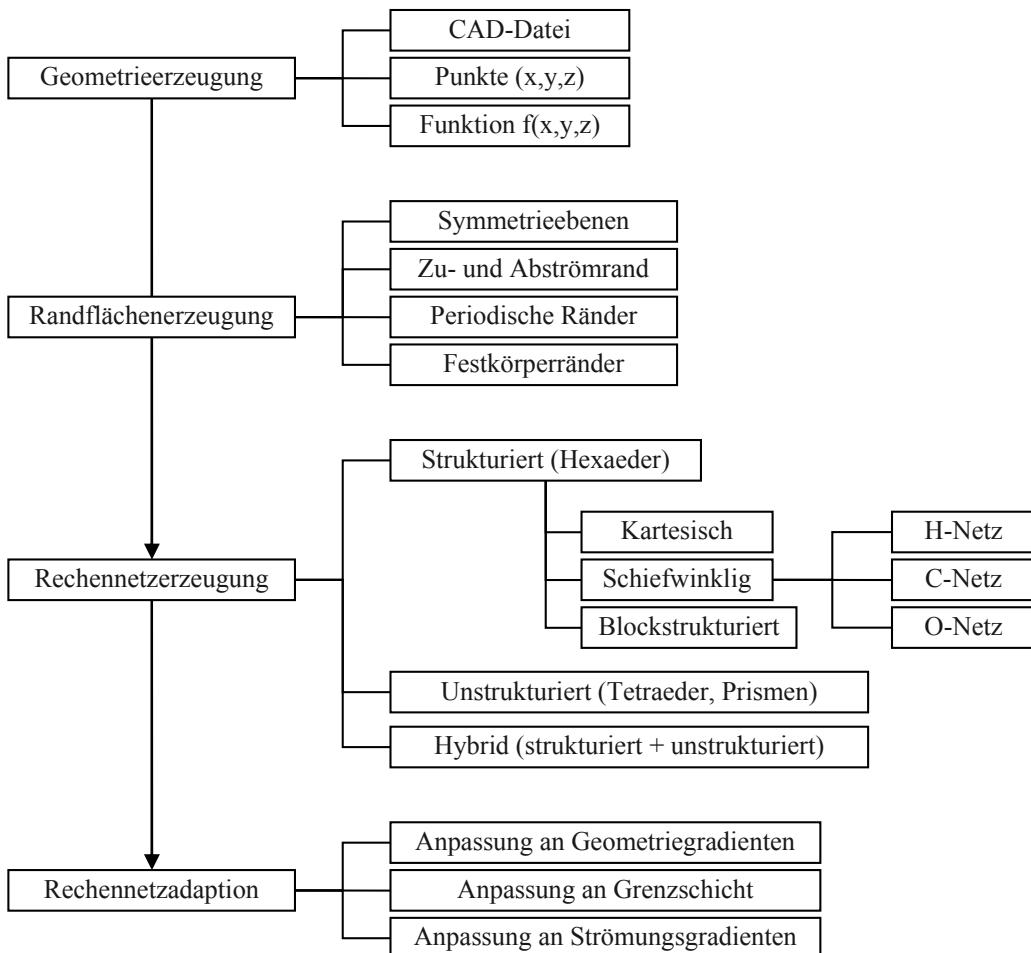


Bild 4-2 Übersicht über den Ablauf der Netzgenerierung

4.3 Strukturierte Rechennetze

4.3.1 Kartesische Rechennetze

Kartesische Rechennetze lassen sich sehr einfach erzeugen und haben rechtwinklige Zellen, die zu einem kleinen Abbruchfehler und damit zu einer guten Genauigkeit führen. Bild 4-3 zeigt eine Geometrie mit einem rechtwinkligen kartesischen Rechennetz. Was fällt auf? Einige Netzpunkte liegen innerhalb der Geometrie im gepunkteten Bereich, wo gar keine Strömung ist. Hier können keine Strömungsgrößen berechnet werden. Auf der Oberfläche der Geometrie liegen nur wenige oder keine Netzpunkte, die auch noch eher zufällig verteilt sind. Dies ist schlecht, da ja gerade die Strömungsgrößen auf der Oberfläche des Profils interessieren.

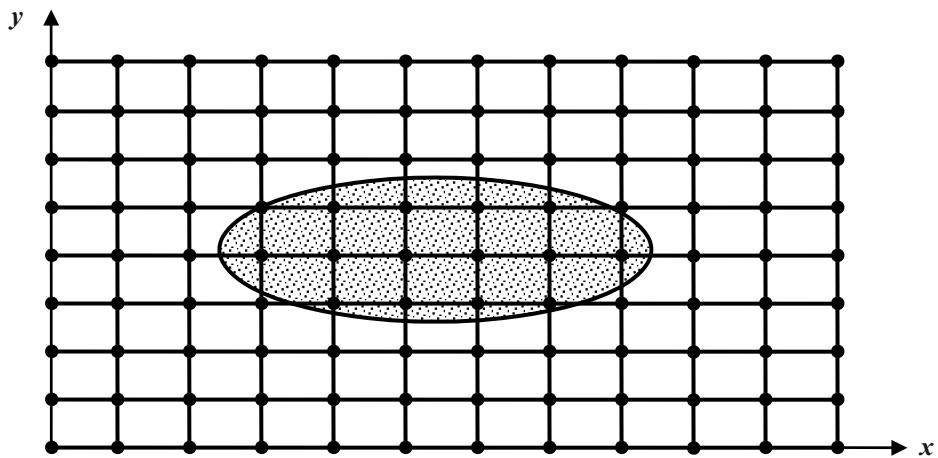


Bild 4-3 Schema eines kartesischen Rechennetzes

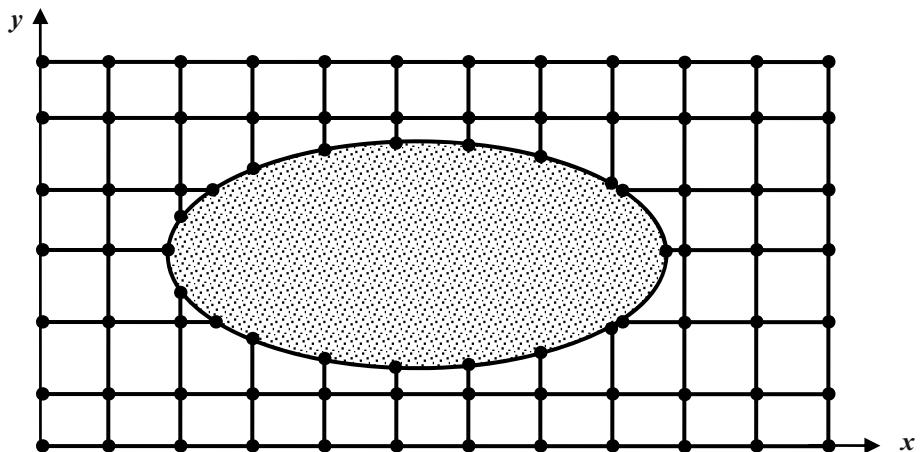


Bild 4-4 Schema eines kartesischen Rechennetzes mit konturangepassten Randzellen

Deshalb ist ein rein kartesisches Rechennetz nicht geeignet, die Strömung um beliebige Geometrien zu berechnen. Durch die Verwendung konturangepasster Randzellen lässt sich dieser Nachteil jedoch beheben. Bild 4-4 zeigt ein solches Rechennetz. Während die Zellen im Rechengebiet rein rechtwinklig sind, werden die wandnahen Zellen an die Kontur angepasst. Hierdurch entstehen jedoch unregelmäßige Zellen mit drei-, vier oder fünf Ecken. Dies muss beim Lösungsalgorithmus und bei den Randbedingungen berücksichtigt werden.

Die meisten numerischen Strömungsberechnungsverfahren verwenden jedoch schiefwinkelige Rechennetze. Sie lassen sich wesentlich besser an komplexere Geometrien anpassen, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

4.3.2 Schiefwinkelige Rechennetze

Bei schiefwinkeligen Rechennetzen passen sich die Rechennetzlinien der Wandkontur an. Das Koordinatensystem ist jetzt nicht mehr kartesisch x, y, z , sondern schiefwinklig ξ, η, ζ . Je nach der Form der Netzlinien unterscheidet man zwischen O-, C- und H-Rechennetzen.

Beim in Bild 4-5 gezeigten **O-Rechennetz** laufen die Netzlinien $\xi = \text{konstant}$ um die Geometrie herum. Die Netzlinien $\eta = \text{konstant}$ laufen sternförmig von der Geometrie weg und stehen in etwa senkrecht auf den Netzlinien $\xi = \text{konstant}$. Ein Vorteil der O-Rechennetze ist, dass die Grenzschicht an der Geometrie selbst sehr gut aufgelöst werden kann. Bei quer angestromten Flügelprofilen ist allerdings die Auflösung des Strömungsnachlaufs stromab der Hinterkante nicht so gut und es entstehen schiefwinkelige Netzzellen, die zu einem höheren Abbruchfehler und zu einer reduzierten Genauigkeit führen. O-Rechennetze eignen sich eher für dicke runde Hinterkanten wie bei Turbinenprofilen.

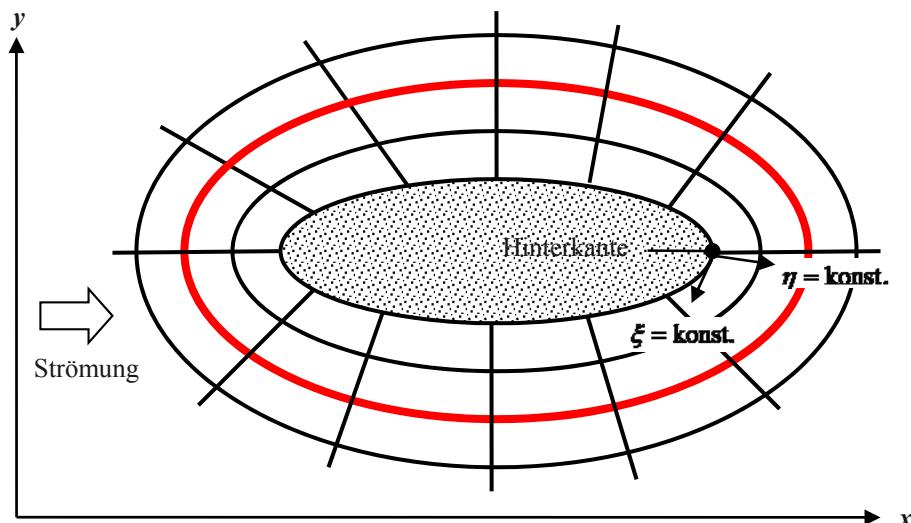


Bild 4-5 Schema eines schiefwinkeligen O-Rechennetzes

Bild 4-6 zeigt ein konturangepasstes schiefwinkeliges **C-Rechennetz**. Die Netzlinien $\xi = \text{konstant}$ laufen zwischen Abströmrand und Abströmrand um die Geometrie herum. Die Netzlinien $\eta = \text{konstant}$ laufen von der Geometrie weg. Beim C-Rechennetz kann sowohl die

Profilgrenzschicht als auch der Profilnachlauf stromab der Hinterkante gut aufgelöst werden. Es eignet sich deshalb eher für spitze Hinterkanten wie bei Verdichterprofilen.

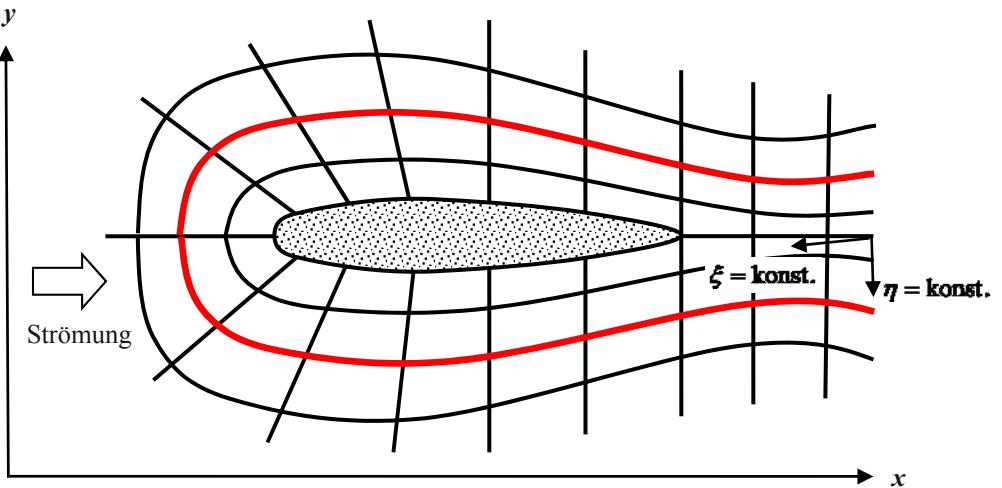


Bild 4-6 Schema eines schiefwinkligen C-Rechennetzes

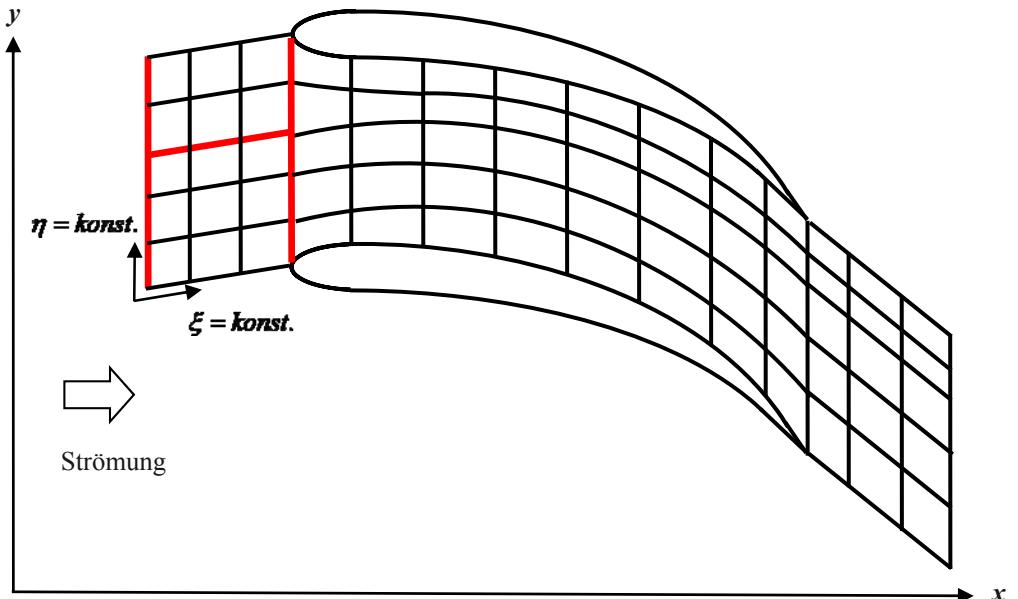


Bild 4-7 Schema eines schiefwinkligen H-Rechennetzes

Beim **H-Rechennetz** (Bild 4-7) laufen die Netzlinien $\xi = \text{konstant}$ vom Zuströmrand entlang dem Profil zum Abströmrand. Die anderen Netzlinien $\eta = \text{konstant}$ verlaufen vom unteren periodischen Rand zum oberen periodischen Rand. Am Profil wird das Rechennetz in der Regel verdichtet, um die Grenzschicht gut auflösen zu können. Diese verdichteten Netzlinien erstrecken sich auch stromauf der Vorderkante und stromab der Hinterkante. Letzteres ist gewünscht, um den Nachlauf gut auflösen zu können. Dagegen ist die Verdichtung in der Zuströmung stromauf der Vorderkante unnötig, da dort die Strömung sehr gleichmäßig ist.

4.3.3 Die Koordinatentransformation in schiefwinklige Koordinaten

Auf diesen schiefwinkligen Rechennetzen lässt sich die kartesische Differenzengleichung (Gl. 3.21) nicht mehr lösen, da das Gitter nicht mehr kartesisch ist. Deshalb muss eine Koordinatentransformation durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z, t) \\ \eta &= \eta(x, y, z, t) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z, t) \\ \tau &= \tau(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Die drei neuen Raumkoordinaten ξ, η, ζ sind Funktionen der drei kartesischen Raumkoordinaten x, y, z . Bei bewegten Rechennetzen sind sie auch noch eine Funktion der Zeit τ , wobei gilt $\tau = t$. Diese Koordinatentransformation wird analytisch mit der Differentialgleichung aus Kapitel 2 durchgeführt, da dann keine Fehler entstehen. Dies kann am Beispiel der zweidimensionalen stationären Transformation relativ einfach gezeigt werden

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Für die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ ergeben sich dann folgende Ausdrücke mit der Ableitung nach jeder der beiden Variablen ξ, η

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Diese partiellen Ableitungen für $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ nach Gleichung 4.3 könnten nun einfach in die Differentialgleichungen eingesetzt werden, wodurch sich Differentialgleichungen in schiefwinkligen Koordinaten mit den partiellen Ableitungen $\partial/\partial \xi$, $\partial/\partial \eta$ ergeben würden. Leider können die so genannten metrischen Ableitungen $\partial \xi / \partial x$, $\partial \eta / \partial x$, $\partial \xi / \partial y$, $\partial \eta / \partial y$ nicht berechnet werden, da die schiefwinkligen Koordinaten ξ, η in der Regel nicht bekannt sind. (Sie sind nur bekannt, wenn es analytische Beziehungen zwischen ξ, η und x, y gibt.)

Hingegen können die Umkehrableitungen $\partial x/\partial\xi$, $\partial y/\partial\xi$, $\partial x/\partial\eta$, $\partial y/\partial\eta$ berechnet werden, da die kartesischen Koordinaten bekannt sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \cdot \left[- \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.4)$$

mit der so genannten Jacoby-Determinante

$$J = \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)\quad (4.5)$$

Für Interessierte folgt nun ein kurzer Beweis, dass die Gleichungen 4.4 und 4.3 gleich sind. Weniger Interessierte können direkt zu Gl. 4.15 gehen.

Für die Transformation $\xi = \xi(x, y)$ und $\eta = \eta(x, y)$ lauten die totalen Differentiale

$$\begin{aligned}d\xi &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cdot dy \\ d\eta &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot dx + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \cdot dy\end{aligned}\quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}\quad (4.6)$$

Analog werden die totalen Differentiale für die Umkehrtransformation $x = x(\xi, \eta)$ und $y = y(\xi, \eta)$ gebildet

$$\begin{aligned}dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot d\eta \\ dy &= \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \cdot d\eta\end{aligned}\quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}\quad (4.7)$$

Wird nun Gleichung 4.7 invertiert bzw. nach $d\xi$ und $d\eta$ aufgelöst, so ergibt sich mit den Regeln der Matrizeninvertierung

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}\quad (4.8)$$

mit der so genannten Jacoby-Determinante J nach Gleichung 4.5.

Ein Vergleich der einzelnen Terme von Gleichungen 4.8 und 4.6 ergibt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.12)$$

womit bewiesen wäre, dass die Gleichungen 4.4 und 4.3 identisch sind.

Die meisten numerischen Strömungsberechnungsverfahren verwenden diese Transformation von kartesischen auf schiefwinklige Koordinaten, weil für beliebige Geometrien schiefwinklige Rechennetze verwendet werden. Nachfolgend wird diese Transformation am Beispiel der Erhaltungsgleichungen in Vektorform gezeigt. Sie lauten in kartesischen Koordinaten entsprechend der Gleichung 2.18

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{E} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{F} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{G} = \vec{Q}$$

Das Prinzip der Transformation lässt sich einfacher zeigen, wenn auf die dritte Dimension, den Quellterm und das Vektorsymbol verzichtet wird

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} E + \frac{\partial}{\partial y} F = 0 \quad (4.13)$$

Werden die partiellen Ableitungen in Gleichung 4.13 durch die metrischen Beziehungen nach Gleichung 4.4 ersetzt, so ergibt sich mit $t = \tau$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{J} \cdot \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{J} \cdot \left[- \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] = 0$$

und mit J multipliziert

$$J \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Um die konservative Form zu erhalten, müssen alle Terme unter die Ableitung gebracht werden. Die Differentialregeln hierzu lauten

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(J \cdot U) = J \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + U \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial \tau} \right) \Rightarrow J \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau}(J \cdot U) - U \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial \tau} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) + E \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E \right) - E \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + F \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \right) - F \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + E \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E \right) - E \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + F \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \right) - F \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

Eingesetzt in Gleichung 4.14 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(J \cdot U) - U \cdot \frac{\partial J}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E \right) - E \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \right) - F \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E \right) - E \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \right) - F \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Werden die konservativen und nicht-konservativen Terme zusammengefasst, so zeigt sich, dass der letzte Term in eckiger Klammer zu Null wird, da die Ableitungen der metrischen Ableitungen in die anderen Raumrichtungen und die zeitliche Ableitung der Jacoby-Determinante verschwinden

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau}(J \cdot U) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \right) \\ & - \underbrace{\left[U \cdot \frac{\partial J}{\partial \tau} + E \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - F \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) - E \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + F \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right]}_0 = 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die konservative Form der Erhaltungsgleichungen in schiefwinkligen Koordinaten zu

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{(J \cdot U)}_{\hat{U}} + \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \right)}_{\hat{E}} + \frac{\partial}{\partial \eta} \underbrace{\left(-\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \right)}_{\hat{F}} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{U} + \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{E} + \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{F} = 0 \quad (4.15)$$

mit den neuen Vektoren

$$\hat{U} = J \cdot U \quad (4.16)$$

$$\hat{E} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot E - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot F \quad (4.17)$$

$$\hat{F} = -\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot E + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot F \quad (4.18)$$

Gleichung 4.15 ist die zu diskretisierende Form der Erhaltungsgleichung in schiefwinkligen Koordinaten. Die Diskretisierung der partiellen Ableitungen $\partial/\partial\xi$ und $\partial/\partial\eta$ erfolgt identisch zu $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ mit zentralen Differenzen oder den einseitigen Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen.

4.3.4 Blockstrukturierte Rechennetze

Blockstrukturierte Rechennetze setzen sich aus mehreren, in der Regel strukturierten Netzböcken zusammen. Bild 4-8 zeigt das Schema eines kombinierten O-H-Rechennetzes. Um die Geometrie wurde ein O-Rechennetz gelegt, um die Grenzschicht optimal aufzulösen. Im restlichen Feld wird ein H-Rechennetz verwendet. Durch diese Kombination wird die Schiefwinkelheit der Netzzellen reduziert. Die Abbruchfehler werden klein und die Genauigkeit der numerischen Lösung wird verbessert.

Wichtig ist, dass die Strömungsgrößen an den Blockgrenzen richtig übergeben werden. Sind die Netzpunkte der beiden Blöcke an den Rändern identisch, so können die Strömungsgrößen von einem Rand an den anderen einfach übergeben werden. Sind die Netzpunkte der beiden Blöcke an den Rändern nicht identisch, so müssen die Werte des einen Blockrandes auf die Netzpunkte des anderen Blockrandes interpoliert werden.

In Bild 4-9 ist ein blockstrukturiertes O-H-Rechennetz um ein Tragflügelprofil zu sehen, das mit ICEM-CFD erzeugt wurde. Das Netz besteht aus insgesamt neun Blöcken (acht H-Rechennetzblöcken 1-8 und ein O-Rechennetz-Block 9) um das Profil. Die Punkte an den Blockrändern zwischen den Netzböcken fallen hier zusammen, so dass keine Interpolation notwendig ist.

Blockstrukturierte Netze werden häufig auch bei komplexeren Geometrien, die sich aus mehreren Teilen zusammensetzen, verwendet. Typisches Beispiel ist die Strömungsberechnung durch eine oder mehrere Stufen eines Verdichters oder einer Turbine. Hier werden oftmals für das Lauf- und das Leitrad separate Netze erzeugt, die dann anschließend zusammengesetzt werden (Bild 4-10).

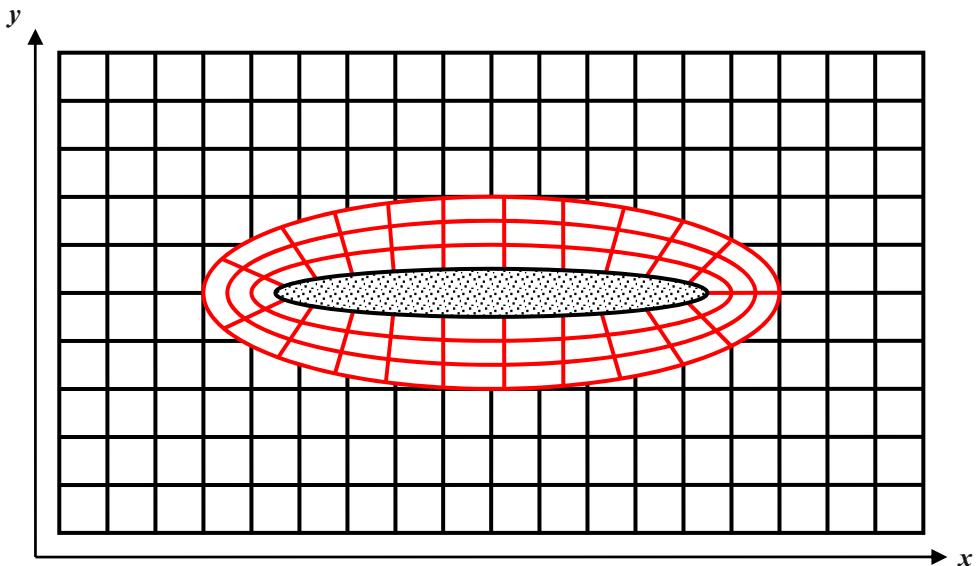


Bild 4-8 Schema eines blockstrukturierten O-H-Rechennetzes (O-Rechennetz rot, H-Rechennetz schwarz)

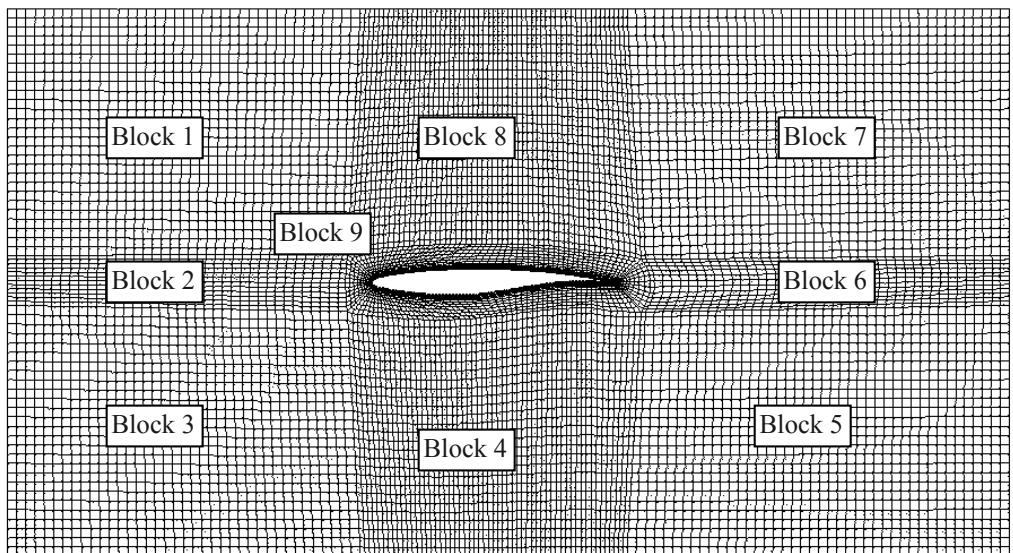


Bild 4-9 Blockstrukturiertes Rechennetz um ein Tragflügelprofil

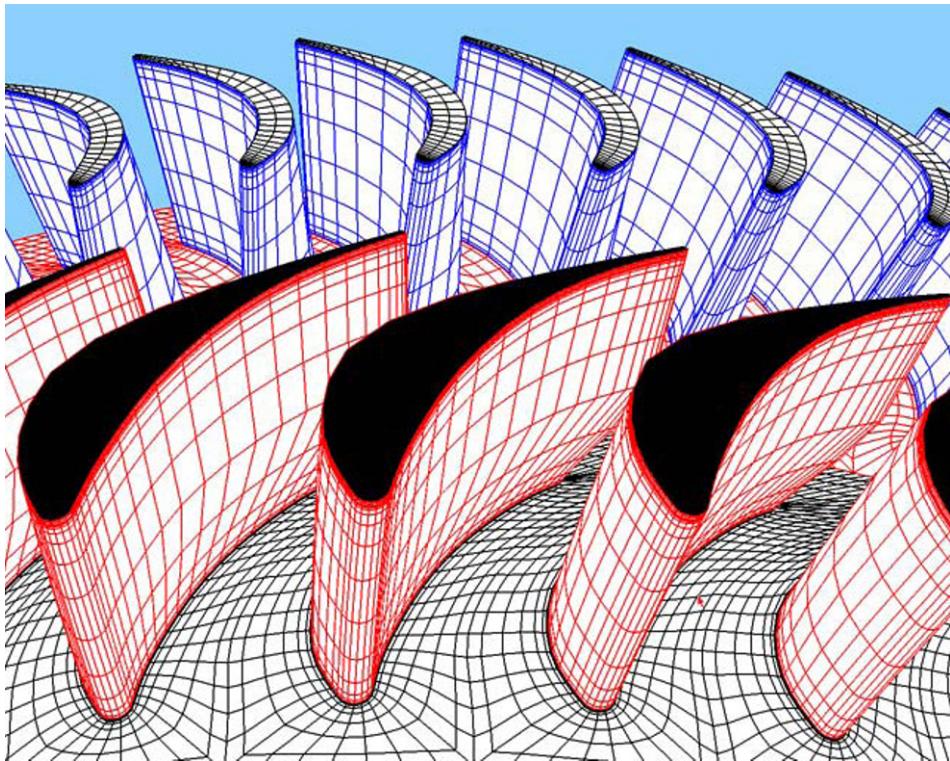


Bild 4-10 Blockstrukturiertes Rechennetz um die Schaufelprofile einer Turbinenstufe [9]

4.4 Unstrukturierte Rechennetze

In Kapitel 4.3 wurden strukturierte Rechennetze behandelt. Strukturiert bedeutet, dass sie eine Regelmäßigkeit besitzen. Die Netzlinien derselben Variablen wie z. B. $\xi = \text{konstant}$ überschneiden sich nie, genauso wenig wie die Linien $\eta = \text{konstant}$ und $\zeta = \text{konstant}$. Jedem Netzpunkt wird ein aufsteigender Index i, j, k zugeordnet. Die Netzzellen sind in der Regel **Hexaeder** (Bild 4-11 links). Die Finite-Differenzen-Operatoren brauchen strukturierte Rechennetze, da sie z. B. bei der zentralen räumlichen Differenz die Netzpunkte $i-1, i$ und $i+1$ miteinander verbinden.

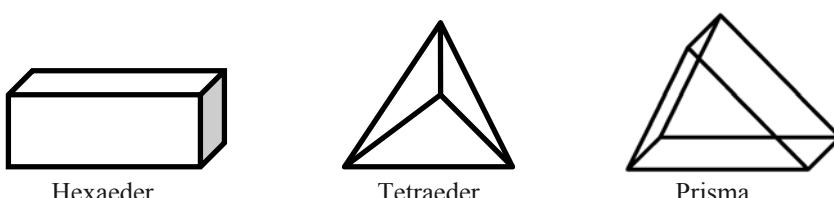


Bild 4-11 Typische Volumenelemente eines Rechennetzes

Diese Struktur ist bei der Finite-Volumen-Diskretisierung nicht nötig. Die Berechnung findet direkt im physikalischen Raum statt. Eine Transformation in den Rechenraum ist nicht notwendig. Deshalb können bei Finite-Volumen-Verfahren auch unstrukturierte Rechennetze verwendet werden. Unstrukturierte Netze haben eine sehr große Flexibilität. Sie lassen sich an komplexe Geometrien aus mehreren Körpern und mit scharfkantigen Ecken problemlos anpassen. Hier sind die Netzzellen in der Regel **Tetraeder** (Bild 4-11 Mitte) oder **Prismen** (Bild 4-11 rechts), es können jedoch auch andere beliebige Volumenelemente sein.

Bild 4-12 zeigt das Schema eines unstrukturierten Rechennetzes um die drei rot markierten Körper.

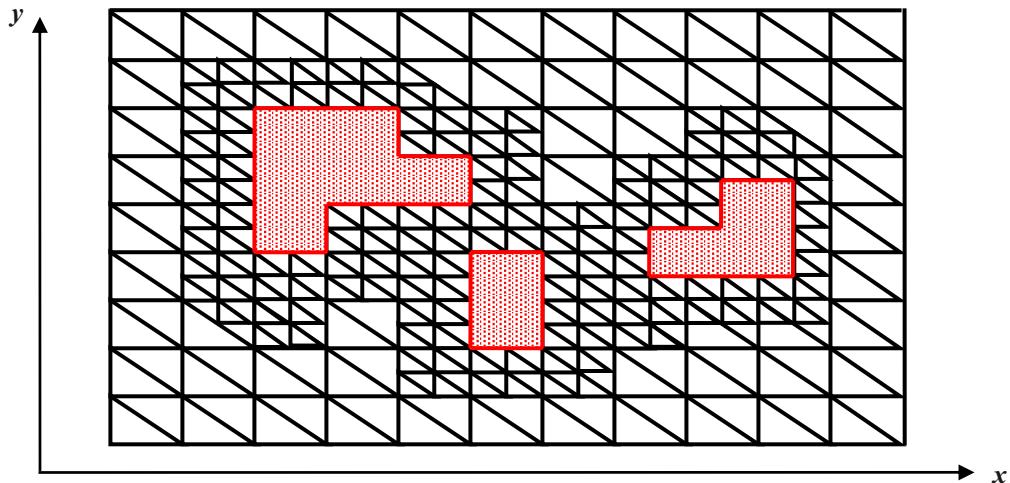


Bild 4-12 Schema eines unstrukturierten Rechennetzes

Unstrukturierte Netze können einfach an Gebiete mit starken Strömungsgradienten wie Grenzschichten, Nachläufe oder Verdichtungsstöße adaptiert werden. Entweder werden vorhandene Zellen einfach unterteilt oder die Zellen werden in diese Gebiete verschoben.

Ein Nachteil der unstrukturierten Rechennetze ist die aufwändigere Logistik des Netzes. Für jedes Volumenelement müssen dem Programm die Nachbarelemente und -punkte bekannt sein, um die räumlichen Differenzen bilden zu können.

4.5 Rechennetzadaption

4.5.1 Die Netzverdichtung

Am Festkörperrand ist bei reibungsbehafteter Strömung die Geschwindigkeit Null (Haftbedingung) und es stellt sich ein Grenzschichtprofil für die Geschwindigkeit u ein, wie in Bild 4-13 links dargestellt. Dieses Grenzschichtprofil muss aufgelöst werden, um die Kräfte und Momente und eventuelle Ablösungen richtig berechnen zu können. Hierzu wird das Rechennetz bei der reibungsbehafteten Rechnung zum Festkörperrand hin verdichtet (Bild 4-13 rechts). Die Grenzschicht sollte für eine gute Genauigkeit mit mindestens zehn Netzpunkten normal zum Rand, hier also in y-Richtung aufgelöst werden. Ihre Dicke kann vor der Netzverdichtung anhand der Theorie abgeschätzt werden.

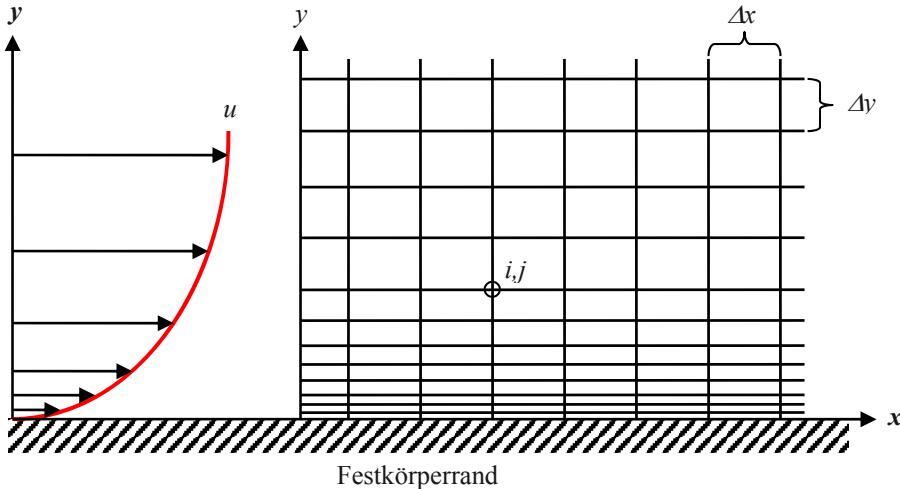


Bild 4-13 Netzverdichtung am Festkörperrand

Bei modernen Netzerzeugungsprogrammen wird die Netzverdichtung am Festkörperrand zur Auflösung der Grenzschicht meistens automatisch durchgeführt. Ebenso verdichten sie automatisch in Gebieten, in denen die Geometrie stark gekrümmt ist, wie z. B. an Knicken oder Kanten wie Tragflügelvorder- und -hinterkanten.

Bild 4-14 zeigt solch ein an der Wand und an der Vorder- und Hinterkante verdichtetes Rechennetz für ein Tragflügelprofil. Zur Auflösung der Wandgrenzschicht wird hier ein strukturiertes O-Rechennetz mit rechteckigen Flächen verwendet. Hierdurch werden die Diskretisierungsfehler reduziert und die Genauigkeit der numerischen Lösung ist erfahrungsgemäß besser als mit einem unstrukturierten Netz in der Grenzschicht. Dies liegt daran, dass die Schiefwinkligkeit bei rechteckigen Flächen kleiner ist als bei dreieckigen Flächen.

Deutlich sichtbar sind auch die Netzverdichtungen im Vorder- und Hinterkantenzonenbereich. Durch die starke Krümmung der Geometrie ergeben sich stärkere Strömungsgradienten, die aufgelöst werden müssen, um eine gute Genauigkeit zu erhalten.

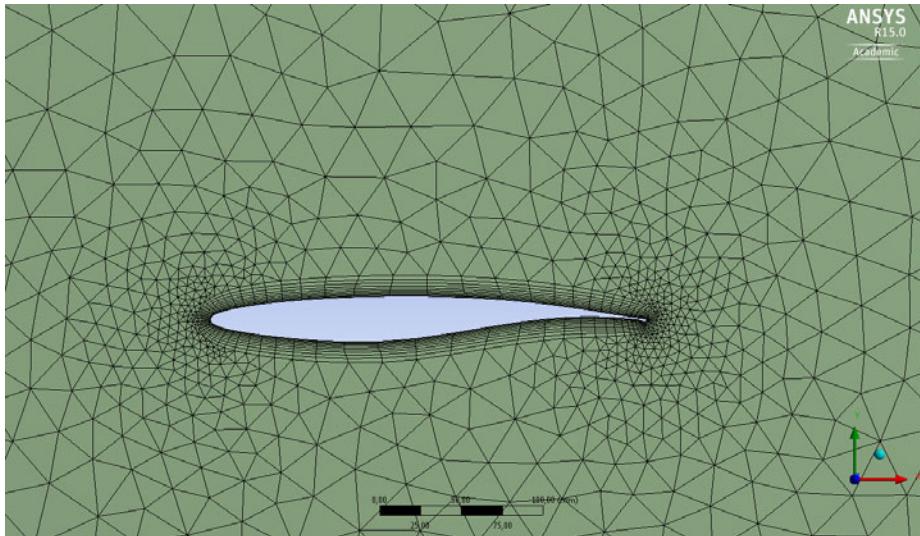


Bild 4-14 Verdichtetes unstrukturiertes Rechennetz um ein Tragflügelprofil mit strukturiertem O-Rechennetz in der Grenzschicht

4.5.2 Adaptive Rechennetze

Um Strömungsgradienten wie z. B. die Strömungsgrenzschicht gut auflösen zu können, müssen viele Netzpunkte in der Grenzschicht liegen. Da die ungefähre Lage der Grenzschicht schon vor der Rechnung bekannt ist, kann das Rechennetz schon bei der Rechennetzerzeugung am Festkörperrand verdichtet werden. Schwieriger wird es, wenn sich starke Strömungsgradienten erst bei der Berechnung ergeben. Z. B. ist die Lage von Verdichtungsstößen anfangs noch nicht bekannt. Hier ist es vorteilhaft, wenn das Strömungsberechnungsprogramm die Lage von Stößen erkennt und an diesen Stellen das Rechennetz automatisch verdichtet.

Durch diese so genannten adaptiven Rechennetze kann die Berechnung genau und effizient durchgeführt werden. In Gebieten mit geringen Strömungsgradienten wird das Netz ausgedünnt, um Rechenzeit zu sparen und in Gebieten mit starken Strömungsgradienten wird das Netz verdichtet, um eine gute Genauigkeit zu erzielen. Die Netzverdichtung wird üblicherweise über einen Strömungsgradienten wie z. B. den statischen Druck gesteuert.

Bild 4-15 zeigt ein kartesisches Rechennetz mit einer Netzverdichtung am Verdichtungsstoß (rote Linie). Im restlichen Strömungsfeld, wo die Strömungsgradienten klein sind, ist das Rechennetz größer. Somit ergibt sich eine gute Genauigkeit am Stoß und eine kürzere Rechenzeit als bei konstant hoher Auflösung im gesamten Rechengebiet (auf die Verdichtung am Festkörperrand zur Auflösung der Grenzschicht wurde hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet).

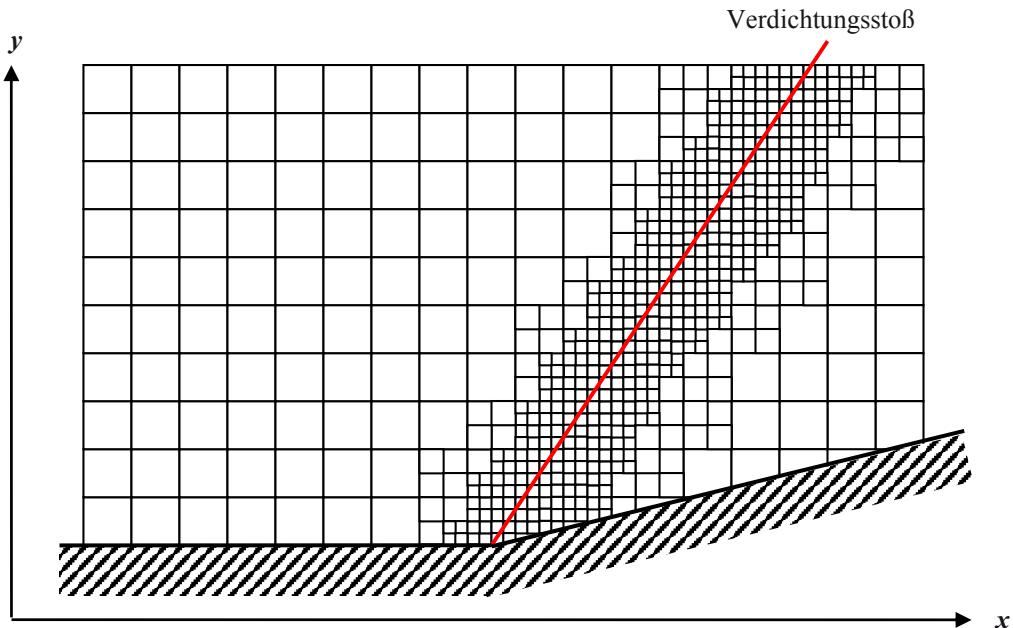


Bild 4-15 Schema eines adaptierten Rechennetzes um einen schrägen Verdichtungsstoß

5 Lösungsverfahren

5.1 Ziel dieses Kapitels

Wie können die Differenzengleichungen, also die diskretisierten Differentialgleichungen nun auf dem Rechennetz gelöst werden? Hierfür gibt es zahlreiche Lösungsalgorithmen, die im Laufe der Zeit und mit zunehmender Computerleistung immer genauer und schneller wurden. Die Entwicklung ging hierbei von den zentralen Verfahren über die Upwind-Verfahren zu den High-Resolution-Verfahren.

Während die klassischen zentralen Verfahren für Unterschallströmungen gute Ergebnisse liefern, haben sie oftmals bei Über- und Hyperschallströmungen mit starken Stößen, wie sie z. B. beim Wiedereintritt eines Raumfahrzeugs in die Atmosphäre auftreten, Probleme. Sie konvergieren schlecht und berechnen die Verdichtungsstöße zu ungenau. Dagegen sind die sog. Upwind-Verfahren sehr stabil und im Bereich des Verdichtungsstoßes genau, aber im restlichen Strömungsfeld zu ungenau. Erst durch die Entwicklung der modernen, sog. High-Resolution-Verfahren konnten beide Vorteile miteinander verbunden werden. Sie erreichen eine gute Stabilität und eine gute Genauigkeit im gesamten Strömungsgebiet sowohl für stoßfreie als auch für stoßbehaftete Strömungen.

Diese Lösungsverfahren zusammen mit ihren Vor- und Nachteilen sind Inhalt dieses Kapitels. Nach der Lektüre sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

1. Welche drei Klassen von Lösungsverfahren gibt es?
2. Was ist der Unterschied zwischen diesen drei Klassen?
3. Nennen Sie drei Gruppen von Lösungsverfahren, die die zentrale räumliche Diskretisierung verwenden.
4. Nennen Sie je einen Vor- und Nachteil der Upwind-Verfahren.
5. Welche Eigenschaft erfüllt ein monotoner Lösungsverfahren?
6. Kann ein Verfahren mit einer räumlichen Genauigkeit 2. Ordnung monoton sein?
7. Warum wurde die TVD-Bedingung eingeführt?
8. Welche Bedingung muss ein TVD-Verfahren zusätzlich noch erfüllen, um eine physikalische Lösung zu erhalten?
9. Wofür sind Limiter-Funktionen gut?
10. Wie heißen die Verfahren die sowohl bei stetigem als auch bei unstetigem Verlauf der Strömungsgrößen genaue Lösungen liefern?

5.2 Übersicht

Bei den Lösungsverfahren werden drei Klassen unterschieden (Bild 5-1):

- die **zentralen Verfahren** mit zentraler räumlicher Diskretisierung mit einer räumlichen Genauigkeit von 2. Ordnung.
- Die **Upwind-Verfahren** einseitiger räumlicher Diskretisierung und einer räumlichen Genauigkeit von 1. Ordnung.
- Die **High-Resolution-Verfahren** mit einseitiger oder zentraler räumlicher Diskretisierung und einer räumlichen Genauigkeit von 2. Ordnung. Sie werden auch TVD-Verfahren genannt.

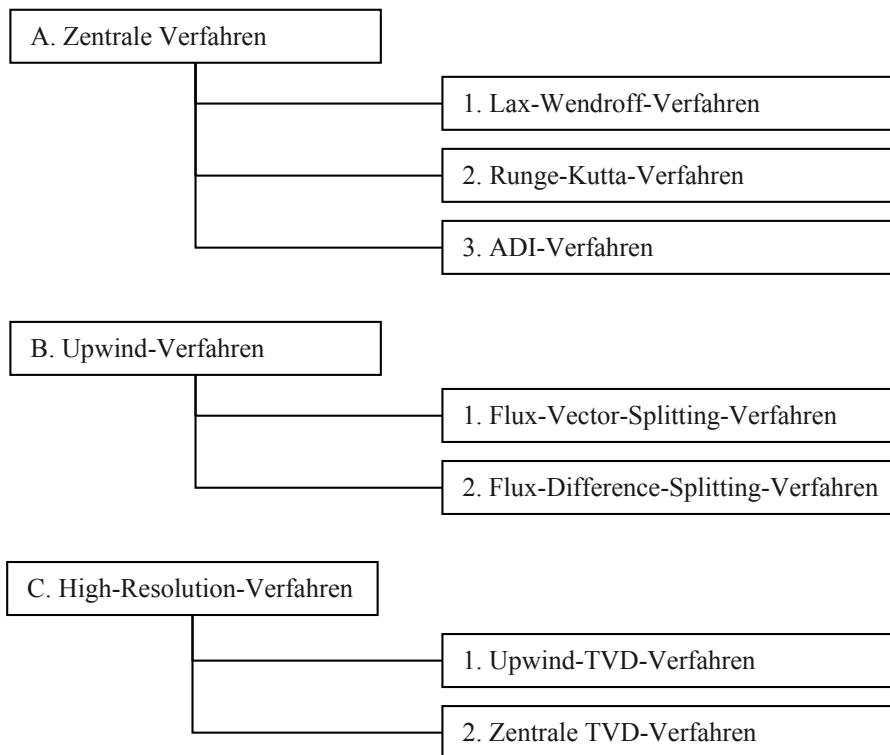


Bild 5-1 Übersicht über die drei Klassen der Lösungsverfahren

Was diese Begriffe bedeuten, wird in den nächsten Kapiteln bei den jeweiligen Verfahren erklärt.

5.3 Zentrale Verfahren

5.3.1 Übersicht

Zentrale Verfahren zeichnen sich durch eine zentrale Diskretisierung der räumlichen Ableitungen aus. Dies führt auf eine gute räumliche Genauigkeit von 2. Ordnung (vgl. Kapitel 3.3.1). Bei starken Verdichtungsstößen haben diese Verfahren oftmals Konvergenzprobleme. Bild 5-2 zeigt die wichtigsten zentralen Verfahren und ihre Namensgeber in der Übersicht.

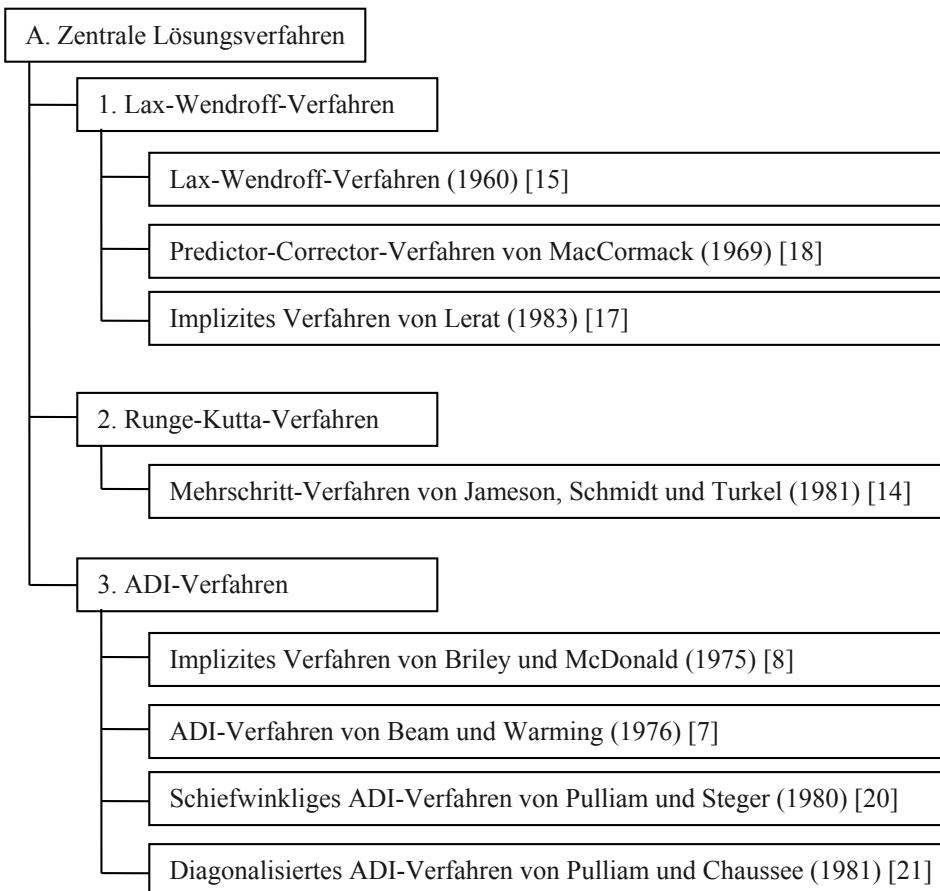


Bild 5-2 Übersicht über die wichtigsten zentralen Lösungsverfahren

5.3.2 Lax-Wendroff-Verfahren

Zwischen 1957 und 1964 entwickelten Peter Lax und Burton Wendroff ein Lösungsverfahren für die instationären Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen, welches zu einem Meilenstein für die moderne numerische Strömungsberechnung wurde [15]. Es war das erste zentrale Verfahren zur Lösung der Euler-Gleichungen. Inzwischen gibt es zahlreiche Varianten, die jedoch folgende Eigenschaften gemeinsam haben:

- die räumliche Diskretisierung erfolgt zentral.
- Lax-Wendroff-Verfahren sind von 2. Ordnung genau, sowohl in der Zeit als auch im Raum. Sie können deshalb sowohl für zeitgenaue als auch für zeit-asymptotische Lösungen eingesetzt werden.
- Die Lösung erfolgt für die zeitlichen und räumlichen Ableitungen kombiniert. Dies hat allerdings den Nachteil, dass die stationäre Lösung vom gewählten Zeitschritt abhängt.
- Die zeitliche Diskretisierung ist in der Regel explizit, es gibt jedoch auch implizite Varianten.
- Lax-Wendroff-Verfahren sind auch ohne eine additive numerische Viskosität stabil aufgrund ihrer kombinierten zeitlichen und räumlichen Diskretisierung 2. Ordnung. Allerdings ergeben sich in der Lösung Oszillationen an Unstetigkeitsstellen wie z. B. Verdichtungsstößen.

Beim klassischen Lax-Wendroff-Verfahren werden auch die zweiten Ableitungen der Taylorreihen-Entwicklung diskretisiert. Dies bedeutet, dass die Algebra relativ aufwendig ist und deshalb leicht Fehler beim Programmieren gemacht werden können. Deswegen wurden über die Jahre zahlreiche Varianten entwickelt. Die bekanntesten sind:

- Das Predictor-Corrector-Verfahren von Robert W. MacCormack [18]. Es ist deutlich einfacher und programmierfreundlicher. Im Predictor-Schritt werden Vorwärtsdifferenzen 1. Ordnung verwendet, die eigentlich instabil für Überschallgebiete sind. Im nachfolgenden Corrector-Schritt werden Rückwärtsdifferenzen 1. Ordnung verwendet, die eigentlich für Unterschallströmungen instabil sind. Trotzdem ist die Kombination stabil und sogar von 2. Ordnung genau, da sich die Abbruchfehler beider Schritte aufheben.
- Das implizite Lax-Wendroff-Verfahren nach Alain Lerat [17] ist auch für größere Zeitschritte bzw. CFL-Zahlen stabil und löst Verdichtungsstöße auch ohne additive numerische Viskosität sehr gut auf.

5.3.3 Runge-Kutta-Mehrschritt-Verfahren

Im Unterschied zu den Lax-Wendroff-Verfahren wird bei den Runge-Kutta-Mehrschritt-Verfahren die zeitliche Lösung unabhängig von der räumlichen Diskretisierung durchgeführt. Dies hat den Vorteil, dass die stationäre Lösung unabhängig vom Zeitschritt ist. Diese Methode wurde von Antony Jameson, W. Schmidt und E. Turkel 1981 für Finite-Volumen-Verfahren verwendet, das sehr effizient und genau ist [14]. Die wesentlichen Eigenschaften sind:

- zentrale räumliche Differenzen mit 2. Ordnung Genauigkeit.
- Die explizite zeitliche Integration erfolgt in der Regel über vier Zwischenschritte. Die zeitliche Genauigkeit kann von 1. bis 4. Ordnung gewählt werden, je nach den gewählten Vorfaktoren der Zwischenschritte.

Beim Runge-Kutta-Mehrschritt-Verfahren können zahlreiche Maßnahmen zur Beschleunigung der Konvergenz eingesetzt werden, wenn nur zeit-asymptotische Lösungen gesucht sind. Somit können stationäre Lösungen wesentlich schneller als mit rein expliziten Verfahren erreicht werden. Die gebräuchlichsten Maßnahmen sind:

- bei der lokalen Zeitschrittsteuerung wird für jede Netzzelle ein eigener, lokaler Zeitschritt verwendet, der die lokale CFL-Bedingung der Netzzelle erfüllt. Für große Netzzellen können deshalb große Zeitschritte verwendet werden. Zwar hat jede Zelle dann ein eigenes Zeitniveau, was aber für die stationäre Lösung keine Rolle spielt.
- Bei der Enthalpiedämpfung wird die Energiegleichung zusätzlich gedämpft, indem ein Enthalpieterm addiert wird, der bei der konvergenten Lösung wieder verschwindet.
- Die Residuenglättung ermöglicht größere CFL-Zahlen als bei rein expliziten Verfahren und geht somit in Richtung implizite zeitliche Diskretisierung. Bei der Residuenglättung werden die hochfrequenten Störungen im Residuum geglättet.
- Die Mehrgittertechnik verwendet Lösungen auf unterschiedlich feinen Netzen. Die Lösung wird von einem feineren Netz auf ein gröberes Netz übertragen. Dies beschleunigt die Konvergenz zur stationären Lösung, da auf gröberen Netzen größere Zeitschritte verwendet werden können. Die grobe Lösung wird anschließend wieder auf das feine Rechennetz interpoliert. Hierdurch werden die hochfrequenten Fehler schneller eliminiert.

5.3.4 ADI-Verfahren

Bei den ADI-Verfahren wird wie bei den Runge-Kutta-Verfahren die zeitliche Lösung unabhängig von der räumlichen Diskretisierung durchgeführt, womit die stationäre Lösung unabhängig vom Zeitschritt ist. Die ADI-Verfahren (ADI = Alternating Direction Implicit) wurden 1975 von W. R. Briley und Henry McDonald [8] und 1976 von Richard M. Beam und Robert F. Warming entwickelt [7] und haben folgende generellen Eigenschaften:

- Durch die implizite zeitliche Diskretisierung können wesentlich größere Zeitschritte bzw. CFL-Zahlen verwendet werden. Allerdings muss durch die implizite Formulierung ein Gleichungssystem für alle Netzpunkte gelöst werden. Dies erhöht den Rechenaufwand pro Iteration, reduziert aber die notwendige Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz beträchtlich.
- Um das Gleichungssystem effizient lösen zu können, wird auf der impliziten Seite jede Raumrichtung separat gelöst. Hierdurch ergeben sich drei eindimensionale Gleichungssysteme die mittels Matrizeninvertierungs-Algorithmen gelöst werden müssen. Durch die zentrale räumliche Diskretisierung sind die eindimensionalen Gleichungssysteme nur auf den drei zentralen Diagonalen besetzt und man spricht von einer tridiagonalen Matrix (siehe Gl. 3-30). Für sie existieren effiziente Invertierungs-Algorithmen.
- Zur Erhöhung der Stabilität und besseren Stoßauflösung wird ebenfalls eine numerische Viskosität auf der expliziten Seite addiert. Sie enthält in der Regel Terme 2. Ordnung für die Stoßauflösung und Terme 4. Ordnung für die Dämpfung in stetigen Regionen. Mittels eines Druckgradienten-Schalters wird die additive Viskosität 2. Ordnung am Stoß aktiviert. Zusätzlich wird auch auf der impliziten Seite eine additive numerische Viskosität 2. Ordnung addiert, um die Stabilität zu verbessern und größere Zeitschritte zu ermöglichen.

Auch bei den ADI-Verfahren gibt es weitere Varianten:

- Thomas H. Pulliam und Joseph L. Steger transformierten das ADI-Verfahren in schiefwinklige Koordinaten und entwickelten leistungsstarke Programme zur Lösung der Thin-Layer und der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen [20].
- Bei der diagonalen Variante von Thomas H. Pulliam und Denny S. Chaussee [21] werden die block-tridiagonalen Matrizen (5×5 in 3D, 4×4 in 2D, 3×3 in 1D) auf der impliziten Seite so umgeformt, dass nur noch eine skalare Größe übrig bleibt. Hierdurch verringert sich der Rechenaufwand für die Matrizeninvertierung beträchtlich, jedoch müssen aus Stabilitätsgründen auch die CFL-Zahlen wieder reduziert werden.
- Der Autor selbst entwickelte während seiner Promotion eine Variante des ADI-Verfahrens mit impliziten charakteristischen Randbedingungen [16]. Durch die charakteristischen Randbedingungen wird eine gute Genauigkeit an den Rändern erzielt, während die implizite Formulierung der Randbedingungen große CFL-Zahlen bzw. Zeitschritte erlaubt und damit kurze Rechenzeiten ermöglicht.

5.4 Upwind-Verfahren

5.4.1 Übersicht

Die Lösungsverfahren im vorherigen Kapitel basieren auf der zentralen räumlichen Diskretisierung. Sie verknüpft Netzpunkte aus allen Raumrichtungen ohne die physikalische Ausbreitungsrichtung von Störungen zu berücksichtigen. Sie basieren auf der Annahme, dass die Strömungsgrößen stetig sind und durch eine Taylor-Reihenentwicklung approximiert werden können.

Da diese Annahme an Unstetigkeitsstellen wie z. B. Verdichtungsstöße nicht mehr gilt, entstehen dort Oszillationen bzw. das Verfahren kann komplett instabil werden. Deshalb muss eine so genannte numerische oder künstliche Viskosität hinzu addiert werden. Nur dann sind zentrale Verfahren für nichtlineare Vorgänge wie z. B. Verdichtungsstöße stabil und Oszillationen in Stoßumgebung werden deutlich reduziert.

Wie viel numerische Dämpfung hinzugefügt werden muss, hängt allerdings vom Strömungsproblem ab und wird über einen Eingabewert vom Benutzer vorgegeben. Die numerische Dämpfung sollte groß genug sein, um für eine gute Konvergenz zu sorgen, andererseits aber klein genug sein, um die Lösung nicht zu stark zu verfälschen. Deshalb sollte dieser Eingabewert an das jeweilige Strömungsproblem angepasst werden, z. B. sollte er beim Auftreten von starken Unstetigkeiten höher sein als bei reinen Unterschallströmungen.

Um diese Unsicherheit über die Größe des Eingabewerts zu reduzieren, kamen bereits 1952 Richard Courant, E. Isaacson und M. Reeves [10] auf die Idee, die so genannten Upwind-Verfahren zu entwickeln. Diese berücksichtigen bereits bei der Diskretisierung die physikalischen Vorgänge in der Strömung, nämlich die Ausbreitungsrichtung von Störungen entlang den Charakteristiken. Upwind-Verfahren besitzen demnach eine inhärente physikalische Dämpfung, die sich automatisch den Strömungsgradienten anpasst. Bei starken Stößen wird sie größer als bei reiner Unterschallströmung. Die Addition einer numerischen Dämpfung wie bei zentralen Verfahren ist nicht notwendig und die Willkür bei der Größe des Eingabewertes entfällt.

Upwind-Verfahren sind deshalb sehr stabile Lösungsverfahren. Verdichtungsstöße werden mit wenigen Netzpunkten gut und ohne Oszillationen aufgelöst. Allerdings verwenden die reinen Upwind-Verfahren nur Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen 1. Ordnung, so dass sie nur eine räumliche Genauigkeit von 1. Ordnung aufweisen. Üblicherweise wird für technische Anwendungen aber eine Genauigkeit 2. Ordnung gefordert. Abhilfe schaffen hier die Upwind-Verfahren 2. Ordnung, die auch unter dem Begriff High-Resolution- oder TVD-Verfahren bekannt sind. Diese werden in Kapitel 5.5 behandelt.

Bild 5-3 zeigt eine Übersicht über die wichtigsten Upwind-Verfahren.

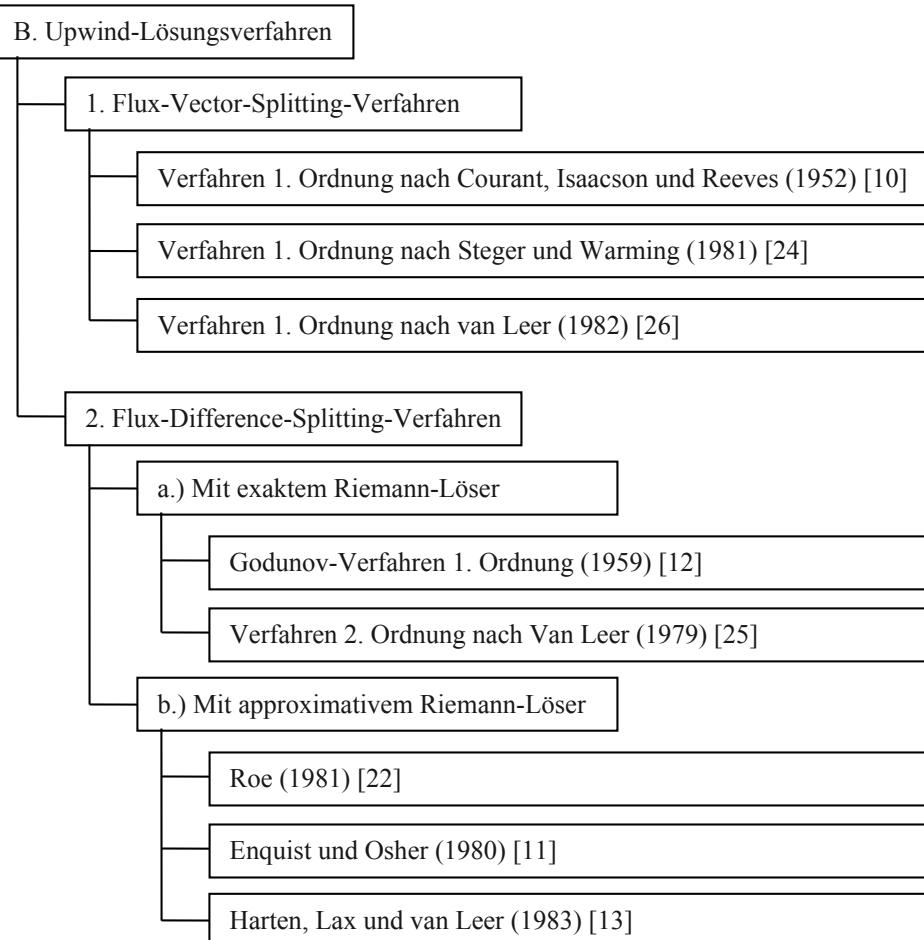


Bild 5-3 Übersicht über die wichtigsten Upwind-Lösungsverfahren

Zwei generelle Eigenschaften von Upwind-Verfahren seien zur Einführung festgehalten:

- Upwind-Verfahren sind **monotone Verfahren**. Das bedeutet, dass sie keine neuen Extrema und unphysikalische Diskontinuitäten erlauben bzw. erzeugen. Diese Eigenschaft verhindert Oszillationen und unphysikalische Lösungen. Leider sind monotone Verfahren aber höchstens von 1. Ordnung genau.
- Upwind-Verfahren 1. Ordnung entsprechen zentralen Verfahren mit einer additiven Viskosität 2. Ordnung. Man kann sie mathematisch ineinander umformen. Dies bedeutet aber auch, dass auch Verfahren mit zentraler räumlicher Diskretisierung und einer numerischen Viskosität 2. Ordnung nur 1. Ordnung genau sind (wie die Upwind-Verfahren). Erst bei Addition einer numerischen Viskosität 4. Ordnung werden zentrale Verfahren von 2. Ordnung genau. Allerdings haben sie dann wieder die Probleme mit Oszillationen am Stoß.

Es gibt zahlreiche Varianten von Upwind-Verfahren 1. Ordnung, die sich aber alle folgenden zwei Methoden zuordnen lassen:

- Die **Flux-Vector-Splitting-Verfahren** 1. Ordnung. Bei ihnen werden die räumlichen Flussterme nach dem Vorzeichen der Eigenwerte aufgespalten.
- Das **Flux-Difference-Splitting-Verfahren** 1. Ordnung mit dem Riemann-Löser. Sie sind auch als Godunov-Verfahren bekannt nach Sergei K. Godunov, der 1959 diesen Vorschlag machte. Sie sind genauer aber auch aufwendiger als die Flux-Vector-Splitting-Verfahren, da sie an jeder Zellgrenze das so genannte Stoßwellen- oder Riemann-Problem lösen.

5.4.2 Flux-Vector-Splitting-Verfahren

Bei den Flux-Vector-Splitting-Verfahren werden die Flussterme nach dem Vorzeichen der Eigenwerte aufgespalten. Die eindimensionale Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

lautet dann z. B.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E^+}{\partial x} + \frac{\partial E^-}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

- $\frac{\partial E^+}{\partial x}$ enthält nur die Terme mit positiven Eigenwerten, also die stromabwärts laufenden Charakteristiken bzw. Informationen $(u, u+a)$, wobei u die Strömungsgeschwindigkeit und a die Schallgeschwindigkeit ist. Diese werden mit einer Rückwärtsdifferenz diskretisiert.
- $\frac{\partial E^-}{\partial x}$ enthält nur die Terme mit negativen Eigenwerten, also die stromaufwärts laufenden Charakteristiken bzw. Informationen $(u-a)$. Diese werden mit einer Vorwärtsdifferenz diskretisiert.

Die Aufspaltung nach den Vorzeichen der Eigenwerte hat den Nachteil, dass die exakte Formulierung nicht mehr konservativ ist. Dies würde bedeuten, dass Verdichtungsstöße nicht mehr automatisch erfasst und richtig berechnet werden würden. Deshalb wurden zahlreiche Maßnahmen unternommen, um sowohl die Konservativität zu erhalten als auch die Ausbreitungsrichtung der Informationen (Charakteristiken) möglichst genau zu berücksichtigen. Die bekanntesten Verfahren sind

- das Flux-Vector-Splitting-Verfahren von Joseph L. Steger und Robert F. Warming [24]
- das Flux-Vector-Splitting-Verfahren von Bram van Leer [26].

In Kapitel 5.6 werden die Lösungen aller in Kapitel 5 erwähnten Verfahren miteinander verglichen.

5.4.3 Flux-Difference-Splitting-Verfahren

Die Klasse der so genannten Flux-Difference-Splitting-Verfahren basiert auf einer Methode von Sergei K. Godunov, die besagt, dass die Lösung in der Zelle konstant ist, am Zellrand aber gemäß der exakten Eulerlösung springt [12]. Die Flux-Difference-Splitting-Verfahren werden deshalb auch Godunov-Verfahren genannt. An den Zellrändern muss das so genannte Stoßwellen- oder Riemann-Problem mit dem Expansionsfächern, der Kontaktfläche und der Stoßwelle gelöst werden. Die Bilder 5-4 bis 5-6 zeigen die drei Schritte zur Berechnung von u_i^{n+1} zum nächsten Zeitschritt für ein so genanntes Zellzentrums-Verfahren, bei dem die Strömungsgrößen im Zellzentrum abgespeichert werden.

Im ersten Schritt sind die Strömungsgrößen $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$ usw. in allen Zellen konstant. An den Zellrändern $i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}$ usw. treten Sprünge bzw. Unstetigkeiten auf.

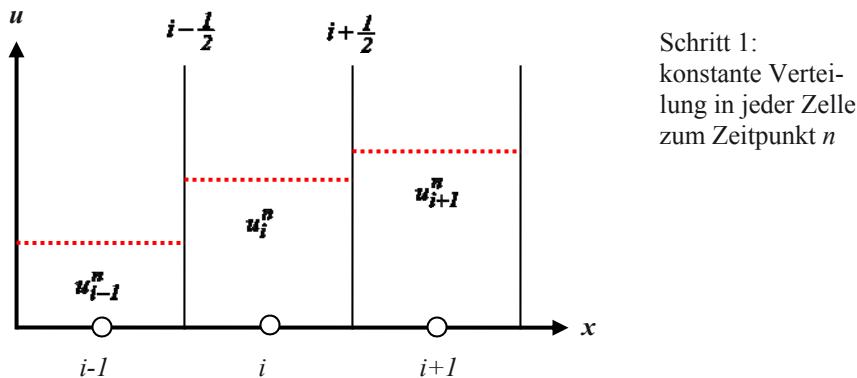


Bild 5-4 1. Schritt des Flux-Difference-Splitting-Verfahrens

Im zweiten Schritt wird an allen Zellrändern $i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}$ usw. das so genannte Riemann-Problem gelöst. Es beschreibt die Strömung an Unstetigkeitsstellen mittels eines Expansionsfächers, einer Kontaktfläche und eines Verdichtungsstoßes. Dies kann exakt (exakter Riemann-Löser) oder um Rechenzeit zu sparen, angenähert (angenäherter Riemann-Löser) erfolgen. Es ergeben sich neue Werte für den linken und für den rechten Zellrand.

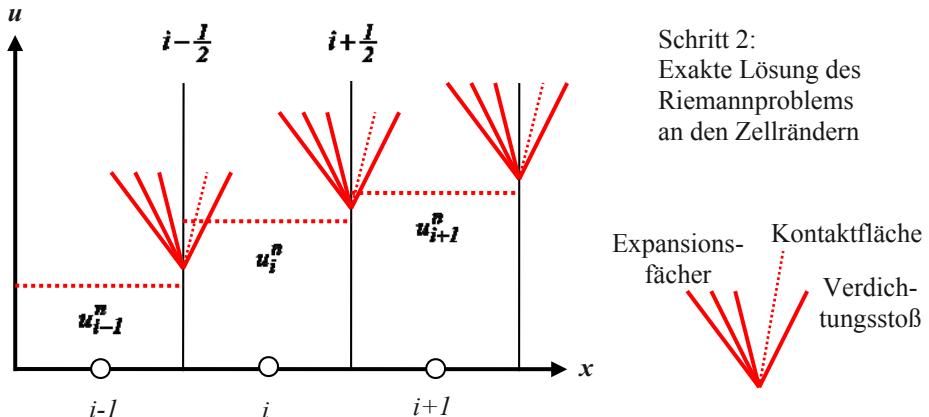


Bild 5-5 2. Schritt des Flux-Difference-Splitting-Verfahrens

Im dritten Schritt werden die Zustände vom linken und rechten Zellrand gemittelt, um wieder konstante Strömungsgrößen zum neuen Zeitpunkt $n+1$ in jeder Zelle zu erhalten.

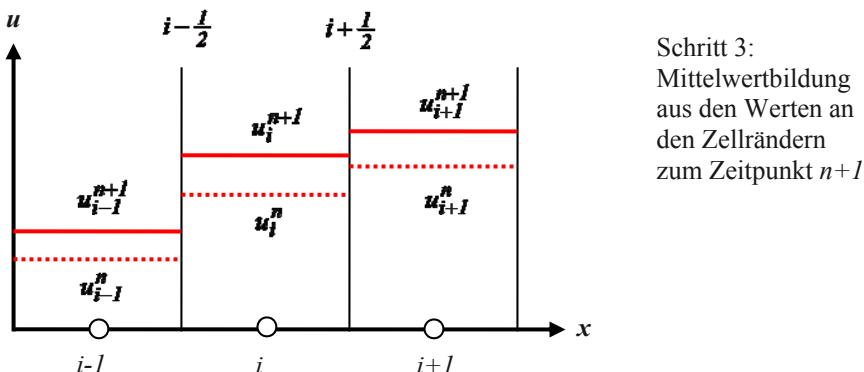


Bild 5-6 3. Schritt des Flux-Difference-Splitting-Verfahrens

Durch die Lösung des Riemann-Problems beinhalten Flux-Difference-Splitting-Verfahren viel Physik:

- sie sind konservativ, d. h. Stöße werden automatisch erfasst.
- sie sind sehr stabil und monoton, d. h. sie vermeiden neue Extrema und Oszillationen
- sie weisen eine sehr gute Stoßauflösung auf.
- leider sind auch sie nur 1. Ordnung genau.

Auch bei den Flux-Difference-Splitting-Verfahren gibt es mehrere Varianten:

- das Godunov-Verfahren mit einem exakten Riemann-Löser [12]
- das Enquist-Osher-Verfahren mit einem angenäherten Riemann-Löser [11]
- das Roe-Verfahren ebenfalls mit einem angenäherten Riemann-Löser [22].

Rechenergebnisse und Vergleiche mit den anderen Lösungsverfahren werden in Kapitel 5.6 gezeigt.

5.4.4 Zusammenfassung

Alle Upwind-Verfahren 1. Ordnung können in einer einheitlichen diskreten Schreibweise formuliert werden:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(E_{i+\frac{1}{2}}^* - E_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \quad (5.3)$$

mit den Flusstermen E an den Zellwänden $i+\frac{1}{2}$ und $i-\frac{1}{2}$ als Funktion des Erhaltungsvektors U an den Zellzentren $i-1$, i und $i+1$

$$E_{i+\frac{1}{2}}^* = f(U_i, U_{i+1}) \quad \text{und} \quad E_{i-\frac{1}{2}}^* = f(U_{i-1}, U_i) \quad (5.4)$$

Die Flussterme lauten für die unterschiedlichen Verfahren:

- Flux-Vector-Splitting-Verfahren

$$E_{i+\frac{1}{2}}^* = E^-(U_{i+1}) + E^+(U_i) \quad (5.5)$$

- Godunov-Verfahren

$$E_{i+\frac{1}{2}}^* = E \left[U_{i+\frac{1}{2}}^{(R)}(0, U_i, U_{i+1}) \right] \quad (5.6)$$

- Osher-Verfahren

$$E_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} \cdot (E_i + E_{i+1}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_j \int_{\Gamma(j)} |\lambda_{(j)}| \cdot r^{(j)} \cdot dw \quad (5.7)$$

- Roe-Verfahren

$$E_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} \cdot (E_i + E_{i+1}) - \frac{1}{2} \cdot \sum_j |\bar{\lambda}_{(j)}| \hat{w}_j \cdot \bar{r}^{(j)} \quad (5.8)$$

mit λ als Eigenwert, r als Eigenvektor und w als charakteristische Variable der Wellenausbreitung. Die Details und Formeln sind der weiterführenden Literatur wie z. B. [3] zu entnehmen, da sie den Rahmen dieses Buches sprengen würden.

5.5 High-Resolution-Verfahren

5.5.1 Übersicht

Zentrale Verfahren sind 2. Ordnung genau, führen aber an Unstetigkeiten zu Oszillationen in der Lösung, die ohne eine numerische Dämpfung zur Instabilität führen. Upwind-Verfahren sind dagegen sehr stabil aber leider nur 1. Ordnung genau. Abhilfe schaffen hier die High-Resolution- oder TVD-Verfahren, die 2. Ordnung genau sind und die Entstehung von Oszillationen an Unstetigkeitsstellen verhindern. Bild 5-7 gibt eine Übersicht über die wichtigsten Verfahren dieser Klasse.

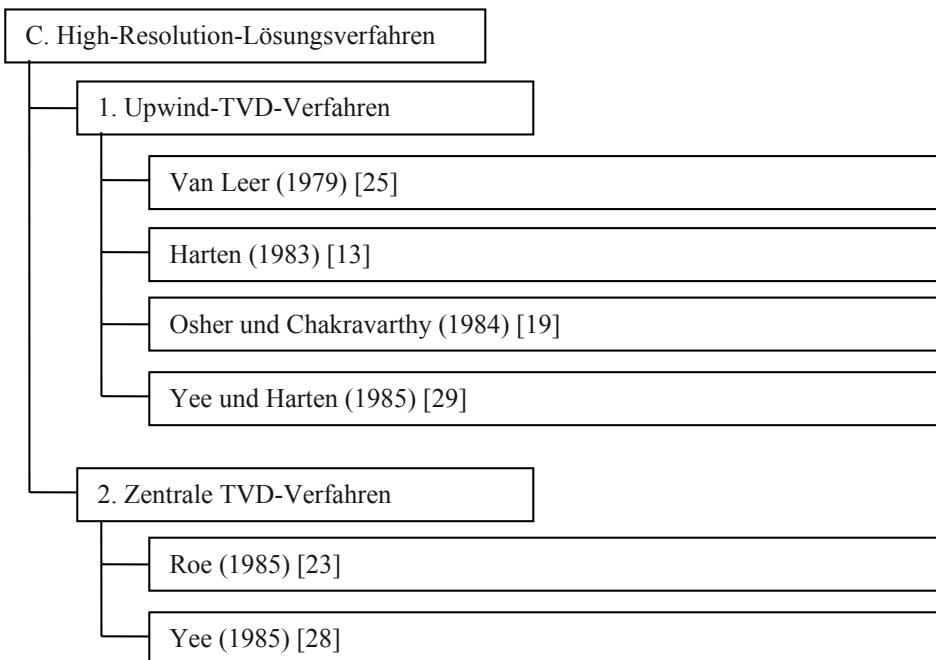


Bild 5-7 Übersicht über die wichtigsten High-Resolution-Lösungsverfahren

5.5.2 Monotonie-, TVD- und Entropiebedingung

Die im Kapitel 5.4 vorgestellten Upwind-Verfahren haben den Vorteil, dass sie eine gute Stoßauflösung ohne Oszillationen erreichen. Ihre Genauigkeit ist allerdings nur von 1. Ordnung. Um eine Genauigkeit von 2. Ordnung zu erzielen, kann man anstelle der konstanten Verteilung innerhalb der Zelle (siehe Bild 5-4) eine lineare Verteilung verwenden (Bild 5-8).

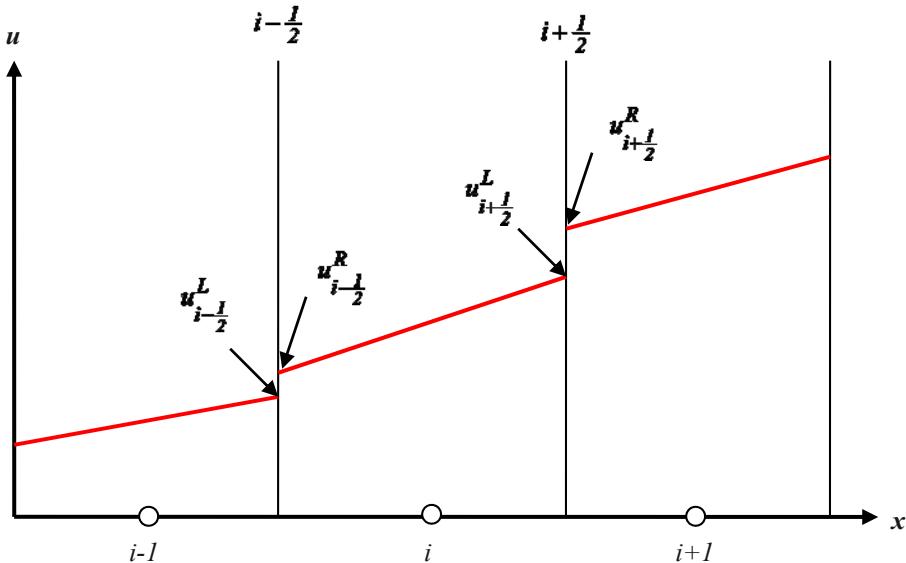


Bild 5-8 Lineare Verteilung in den Zellen als Basis der High-Resolution-Verfahren

Es zeigt sich aber, dass die Lösungen der so gebildeten Upwind-Verfahren 2. Ordnung auch Oszillationen an Unstetigkeitsstellen aufweisen wie die zentralen Verfahren 2. Ordnung. Abhilfe könnte hier die Monotonie-Bedingung schaffen, da sie keine oszillierenden Lösungen erlaubt. Leider erfüllen nur Verfahren 1. Ordnung diese Monotonie-Bedingung. Bei Verfahren 2. Ordnung kann sie aber durch zwei ähnliche Bedingungen ersetzt werden:

- Die **TVD-Bedingung** (Total Variation Diminishing, Abnahme der totalen Variation) besagt, dass die totale Variation einer Lösung bei der zeitlichen Iteration abnehmen muss. Sie ist eine abgeschwächte Monotonie-Bedingung für Verfahren von 2. Ordnung Genauigkeit und führt auch zu oszillationsfreien Lösungen. Allerdings erlaubt die TVD-Bedingung unphysikalische Lösungen.
- Um dies zu verhindern, wird zusätzlich noch die **Entropiebedingung** eingeführt. Sie sorgt dafür, dass die Lösung physikalisch ist, d. h. die Entropie darf nicht abnehmen.

Mit diesen beiden Bedingungen lassen sich nun Verfahren mit 2. Ordnung Genauigkeit und ohne Oszillationen erzielen. Diese Verfahren werden High-Resolution-Verfahren oder auch TVD-Verfahren genannt.

5.5.3 Limiter-Funktionen

Damit die High-Resolution-Verfahren die TVD- und Entropiebedingung erfüllen, müssen nicht-lineare Korrekturfaktoren eingeführt werden, die so genannten Limiter. Sie sorgen dafür, dass z. B. an Unstetigkeitsstellen wie Verdichtungsstößen die Steigungen der Zellgrößen nicht unbegrenzt ansteigen, sondern limitiert werden. Bild 5-9 zeigt in der Zelle i eine lineare Verteilung ohne Limiter (gestrichelt) und die durch den Limiter begrenzte Steigung (durchgezogen). Hierdurch werden Überschwinger und Oszillationen verhindert.

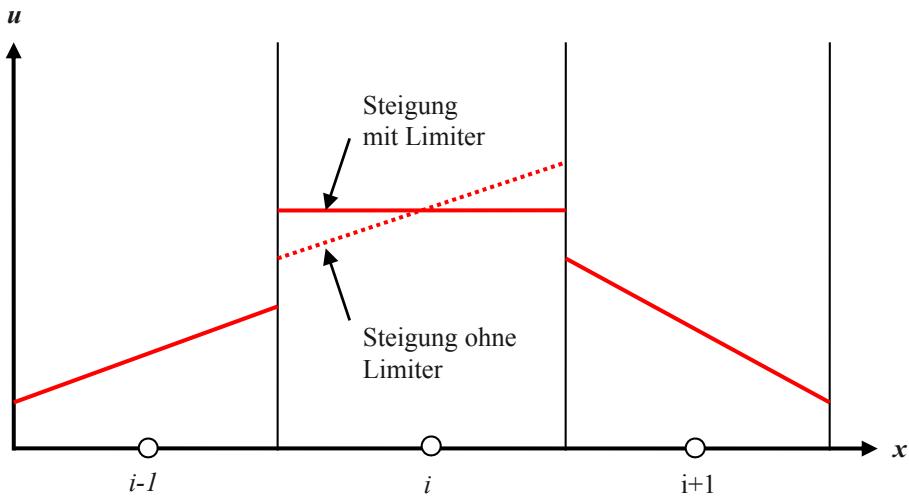


Bild 5-9 Limitierung der Steigungen an Wendepunkten durch Limiter

In der Literatur werden zahlreiche Varianten von solchen Limiter-Funktionen angegeben. Die wichtigsten seien an dieser Stelle erwähnt:

- Van-Leer-Limiter
- Minmod-Limiter
- Roe-Superbee-Limiter
- Chakravarthy-Osher-Limiter.

In den Beispielen in Kapitel 5.6 werden z. B. Lösungen mit dem Minmod- und dem Superbee-Limiter gezeigt. Details sind wieder der Literatur wie z. B. [3] zu entnehmen.

5.5.4 Zusammenfassung

Abschließend nochmals im Überblick die bisherige Vorgehensweise zur Generierung von TVD-Verfahren mit der Upwind-Diskretisierung:

- Basis ist ein monotonen Upwind-Verfahren von 1. Ordnung Genauigkeit.
- Erweiterung des Verfahrens auf 2. Ordnung Genauigkeit, z. B. durch eine lineare Verteilung innerhalb der Netzzellen anstelle der konstanten Verteilung.
- Verhinderung der Entstehung von Oszillationen durch Erfüllung der TVD-Bedingung, d. h. die Amplitude von Gradienten wird durch Limiter begrenzt.
- Vermeidung von unphysikalischen Lösungen durch die Überprüfung der Entropiebedingung für das TVD-Verfahren 2. Ordnung mit den Limitern. Das bedeutet, dass Lösungen, bei denen die Entropie abnimmt, ausgeschlossen werden.

In Bild 5-10 sind die wichtigsten Eigenschaften dieser drei Klassen von Lösungsverfahren dargestellt. Sie werden in den nächsten Kapiteln näher erklärt.

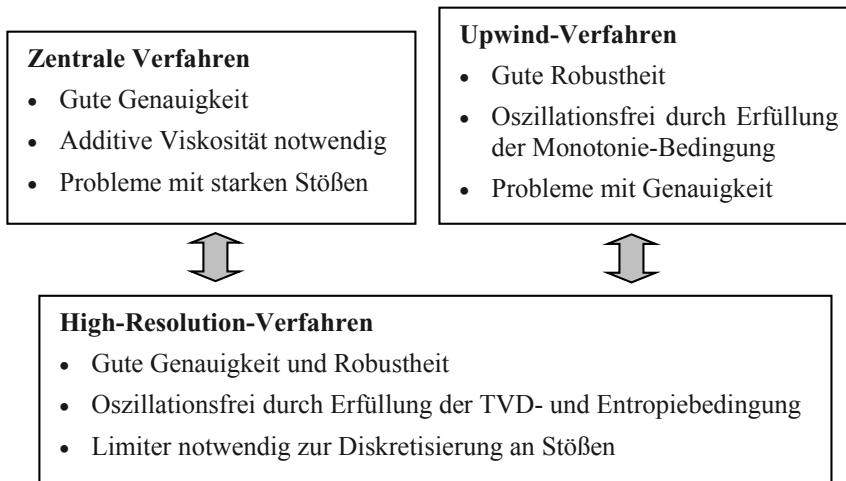


Bild 5-10 Übersicht über die wichtigsten Eigenschaften der drei Klassen von Lösungsverfahren

Ein interessantes Ergebnis bei der Entwicklung der TVD-Verfahren für die Upwind-Diskretisierung ist, dass das TVD-Prinzip auch auf Verfahren mit zentraler räumlicher Diskretisierung angewendet werden kann [28]. Hierdurch ergibt sich eine nichtlineare numerische Viskosität ohne empirische Eingabewerte, die ebenfalls zu Lösungen von 2. Ordnung Genauigkeit ohne Oszillationen führt. Ein Vorteil der zentralen TVD-Verfahren ist, dass existierende Lösungsverfahren mit zentralen räumlichen Differenzen wie die Lax-Wendroff- oder Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden können. Es muss nur die additive numerische Viskosität so formuliert werden, dass sie die TVD- und die Entropiebedingung erfüllt.

5.6 Vergleich der Verfahren

Nachfolgend werden Ergebnisse der wichtigsten Lösungsverfahren an zwei Beispielen vorgestellt und verglichen, die [3] entnommen sind:

- die stationäre Strömung durch eine divergente Düse. Hier geht es um die Auflösung des Verdichtungsstoßes.
- Die instationäre Strömung in einem Stoßwellenrohr nach ca. 6 ms. Diese komplexere Strömung beinhaltet drei Unstetigkeiten, einen Verdichtungsstoß, einen Expansionsfänger und eine Kontaktunstetigkeit.

5.6.1 Stationäre Strömung durch eine divergente Düse

Dieses Beispiel ist durch folgende dimensionslosen Eigenschaften charakterisiert:

- Divergente Düse mit dem Querschnittsflächenverhältnis

$$A(x) = 1.398 + 0.347 \cdot \tanh[0.8 \cdot (x - 4)] \quad \text{für } 0 \leq x \leq 10$$
- Engster Querschnittsfläche $A^* = 0.8$
- Überschall-Zuströmung
- Stationäre transsonische Strömung mit einem Verdichtungsstoß bei $x=4$.

Für diese Strömung gibt es eine theoretische Lösung, die in den Bildern 5-11 bis 5-13 als rote Linie dargestellt ist. Gezeigt werden jeweils drei Verläufe entlang der dimensionslosen Düsenkontur von $x=0$ bis $x=10$ mit der Unstetigkeit (Verdichtungsstoß) bei $x=4$:

- die Machzahl als typische Strömungsgröße, die am Stoß unstetig ist und vom Überschall in den Unterschall wechselt.
- Die Entropie bezogen auf die Gaskonstante R als typisches Maß für Verluste, die am Stoß sprunghaft zunehmen.
- Der Massenstromfehler als Größe für die Erfüllung der Massenerhaltungsgleichung.

Mit dieser theoretischen Lösung werden die numerischen Lösungen der folgenden Verfahren verglichen:

1. Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack ohne numerische Dämpfung (Bild 5-11 links)
2. Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack mit numerischer Dämpfung nach MacCormack und Baldwin (Bild 5-11 rechts)
3. Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Vector-Splitting nach Steger und Warming (Bild 5-12 links)
4. Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Vector-Splitting nach Van Leer (Bild 5-12 rechts)
5. Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Difference-Splitting nach Roe (Bild 5-13 links)
6. High-Resolution-Verfahren 2. Ordnung mit Minmod-Limiter nach Roe (Bild 5-13 rechts)

Die numerischen Lösungen sind als schwarze Linie mit Kreisen dargestellt.

Die ersten beiden Lösungen in Bild 5-11 links und rechts wurden mit dem zentralen Verfahren nach MacCormack erzielt. Es ist 2. Ordnung genau, neigt aber zu instabilem Verhalten und zu Oszillationen. Durch eine geeignete numerische Dämpfung können diese stark vermindert werden, so dass sich gute numerische Lösungen ergeben:

- Bild 5-11 links zeigt die numerische Lösung ohne numerische Dämpfung. Deutlich sichtbar sind die Unter- und Überschwinger vor und nach dem Stoß. Die unstetige Änderung der Machzahl am Stoß wird nur unzureichend erfasst. Auch bei der Entropie sind deutliche Abweichungen und Oszillationen im Stoßbereich sichtbar. Der Massenstromfehler schwankt sehr stark im Stoßbereich.
- Durch die Addition einer geeigneten numerischen Dämpfung werden die Ergebnisse deutlich besser (Bild 5-11 rechts). Für die Auflösung des Stoßes werden nur noch drei Netzpunkte benötigt und die Spitze zu Stoßbeginn wird gut erfasst. Die Entropie zeigt noch kleiner Unterschwinger vor dem Stoß. Beim Massenstromfehler werden die Oszillationen am Stoß geringer. Der Fehler von 10 % am Stoßbeginn bleibt allerdings bestehen.

Die folgenden drei Lösungen in Bild 5-12 links und rechts und im Bild 5-13 links wurden mit Upwind-Verfahren erzielt. Diese sind nur 1. Ordnung genau, verhindern aber durch ihre Monotonie-Eigenschaft Oszillationen schon bei der Entstehung:

- Beim Flux-Vector-Splitting-Verfahren nach Steger und Warming sind die Oszillationen am Stoß verschwunden (Bild 5-12 links). Allerdings ist die Lösung in Stoßumgebung ungenau. Sowohl die Machzahl als auch die Entropie weichen deutlich von der exakten Lösung ab. Der Verdichtungsstoß ist verschmiert und mit mindestens fünf Punkten aufgelöst. Dies zeigt, dass dieses Verfahren zu stark dämpft.
- Etwas besser ist das Flux-Vector-Splitting-Verfahren nach Van Leer (Bild 5-12 rechts). Vor allem die Auflösung des Verdichtungsstoßes ist mit drei Punkten deutlich besser. Der Machzahlverlauf stimmt gut mit der exakten Lösung überein. Lediglich die Entropie weicht am Stoß ab. Dieses Upwind-Verfahren ist weniger dissipativ (dämpfend) als das Flux-Vector-Splitting-Verfahren nach Steger und Warming.
- Eine weitere Verbesserung ergibt sich mit dem Flux-Difference-Splitting-Verfahren nach Roe (Bild 5-13 links). Der Stoß ist sehr gut aufgelöst. Lediglich die Entropie weicht am Stoß von der exakten Lösung ab.

Die genaueste Lösung lässt sich erwartungsgemäß mit dem High-Resolution-Verfahren nach Roe erzielen (Bild 5-13 rechts). Es ist 2. Ordnung genau, aber ohne Oszillationen, da es einen Minmod-Limiter verwendet und damit die die TVD-Bedingung erfüllt:

- Der Machzahlverlauf stimmt sehr genau mit der Theorie überein. Der Stoß wird mit drei Netzknoten erfasst. Die Entropie zeigt vor und nach dem Stoß allerdings noch Abweichungen und der Massenstromfehler ist bis auf den Überschwinger am Stoß gering.

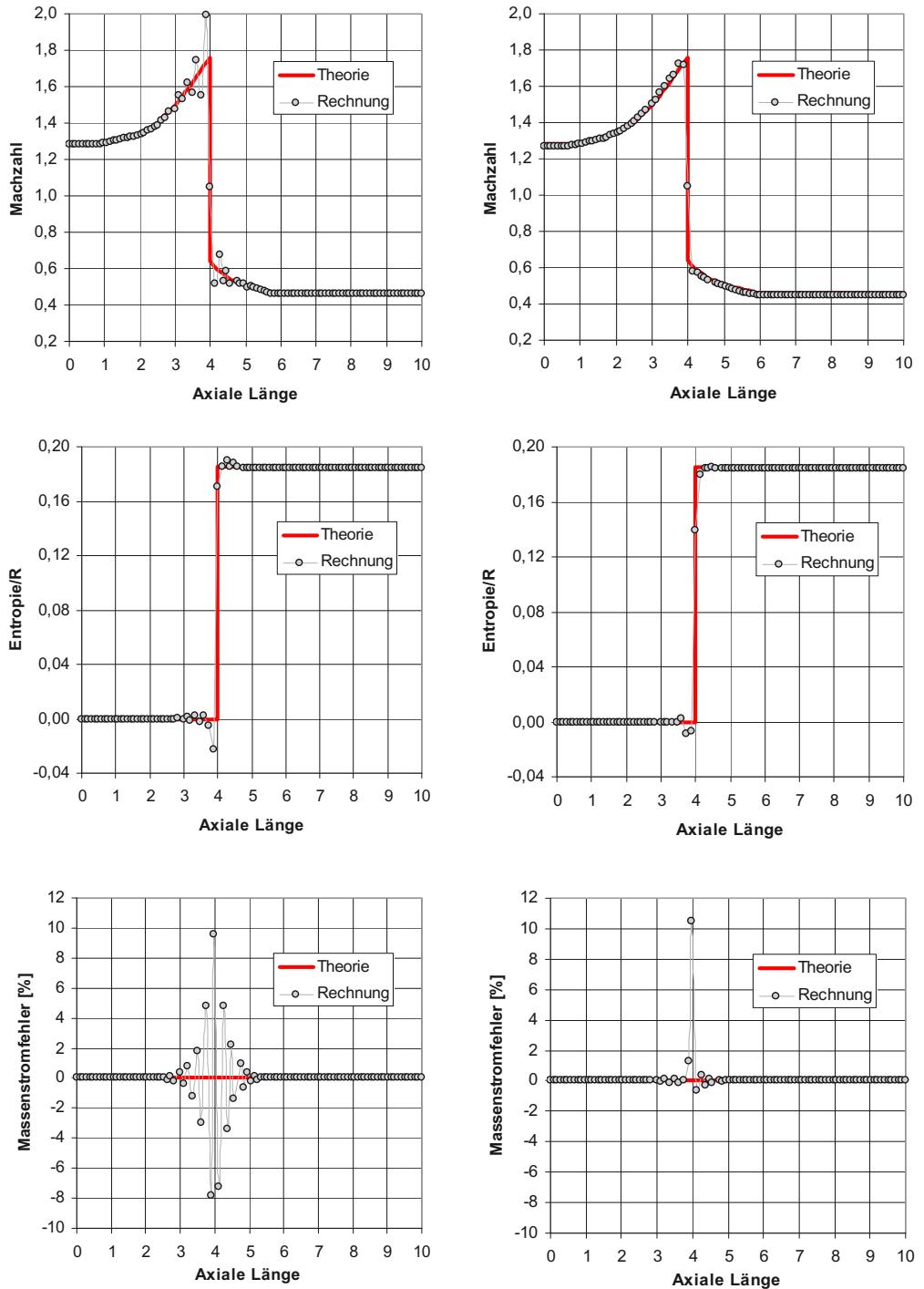


Bild 5-11 Überschalldüse: Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack, links ohne numerische Dämpfung, rechts mit numerischer Dämpfung

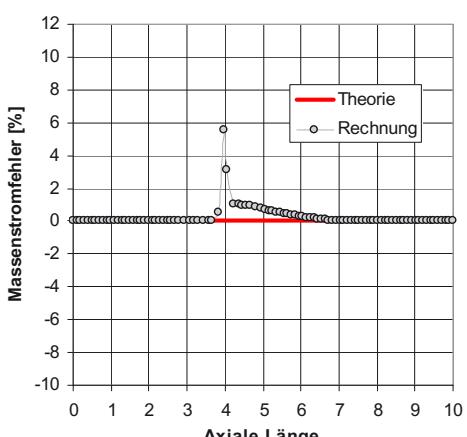
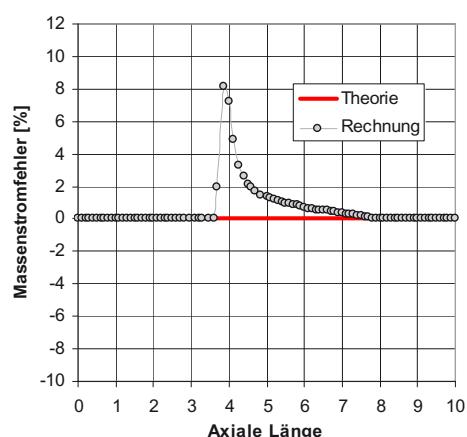
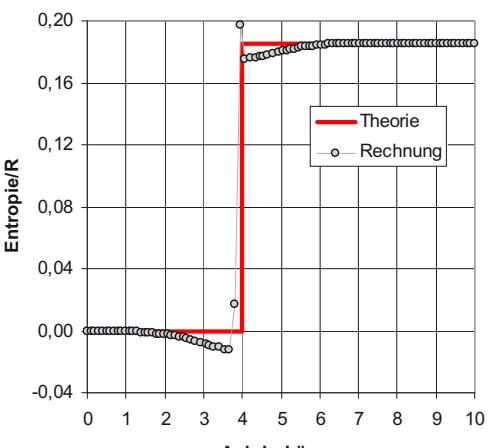
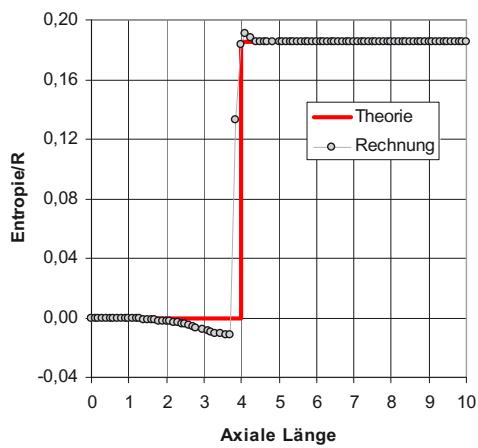
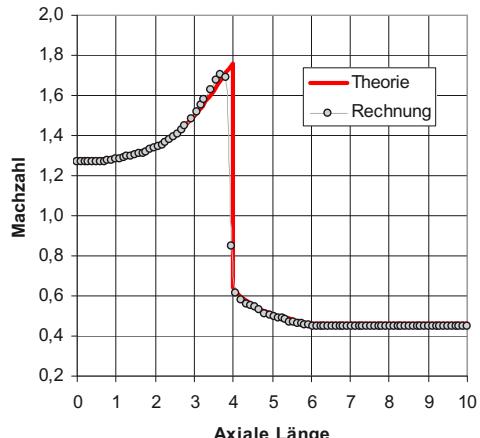
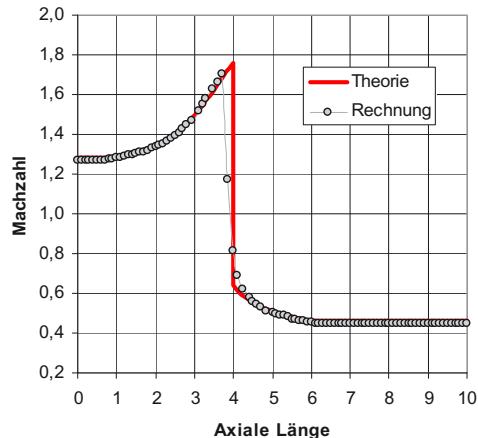


Bild 5-12 Überschalldüse: Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Vector-Splitting nach Steger und Warming (links) und nach Van Leer (rechts)

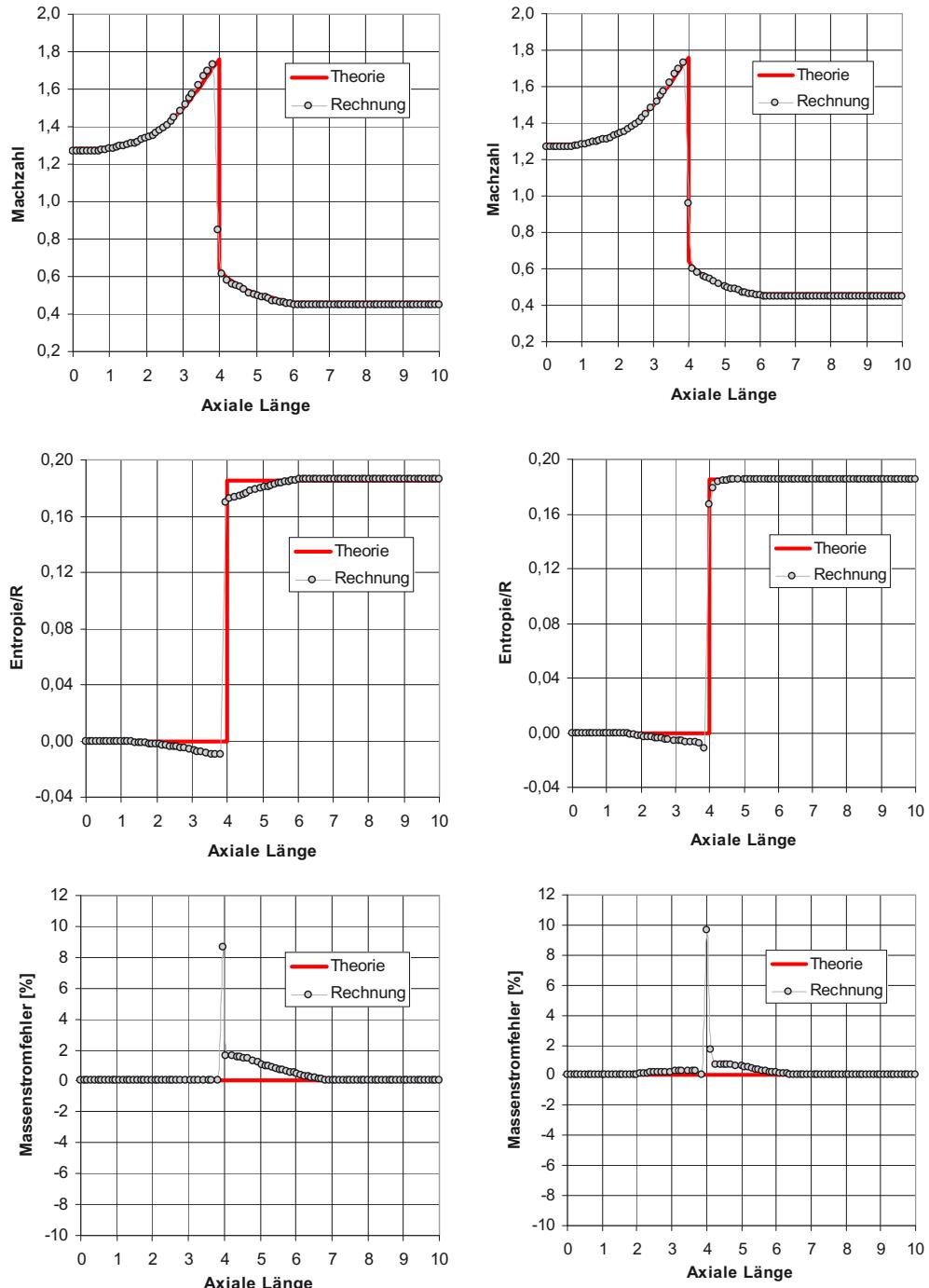


Bild 5-13 Überschalldüse: Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Difference-Splitting nach Roe (links) und High-Resolution-Verfahren 2. Ordnung mit Minmod-Limiter nach Roe (rechts)

5.6.2 Instationäre Strömung in einem Stoßwellenrohr

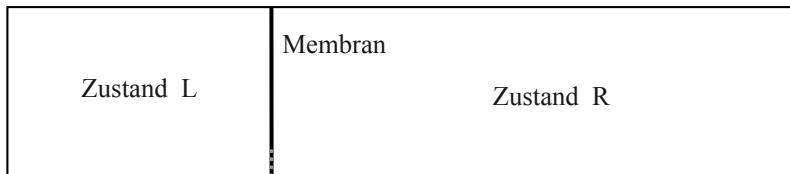
Ein Stoßwellenrohr ist ein mit Gas gefülltes Rohr, das durch eine Membran an der Stelle x_0 unterteilt ist. Zum Zeitpunkt $t=0$ gibt es zwei Zustände (Bild 5-14 oben):

- den linken Zustand L für $x < x_0$ mit hohem Druck $p_L = 10^5$ und hoher Dichte $\rho_L = 1$.
- Den rechten Zustand R für $x > x_0$ mit einem um den Faktor 10 niedrigeren Druck $p_R = 10^4$ und der achtfach niedrigeren Dichte $\rho_R = 0,125$.

Die Geschwindigkeiten sind zum Zeitpunkt $t=0$ auf beiden Seiten $u_L = u_R = 0$. Alle Größen sind dimensionslos.

Zum Zeitpunkt $t > 0$ (Bild 5-14 unten) platzt die Membran und das linke Hochdruckgebiet breitet sich in das rechte Niederdruckgebiet aus. Für $t > 0$ entstehen auf der rechten Seite eine Stoßwelle und eine Kontaktfläche. An ihnen springen die Strömungsgrößen unstetig. Gleichzeitig breitet sich auf der linken Seite ein Expansionsfächer aus, an dem sich die Strömungsgrößen stetig ändern.

Anfangszustand zum Zeitpunkt $t = 0$



Strömungszustand zum Zeitpunkt $t > 0$

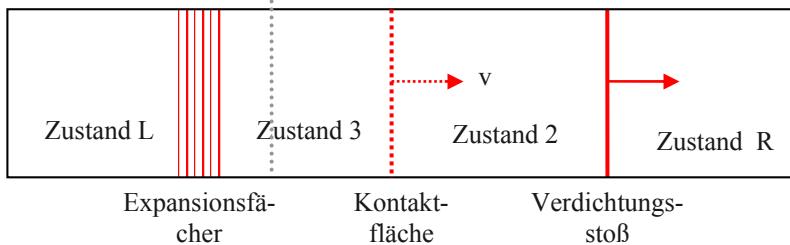


Bild 5-14 Schematische Darstellung des Stoßwellenproblems

Die sich ausbreitende instationäre Strömung in diesem Stoßwellenrohr lässt sich exakt berechnen unter der Annahme, dass die viskosen Effekte klein sind und dass das Rohr unendlich lang ist, damit keine Reflexionen an den beiden Rohrenden entstehen. Der Stoß und die Kontaktfläche breiten sich mit konstanten Geschwindigkeiten in Gebiete mit konstanten Zuständen aus.

Bild 5-15 zeigt die sich ausbreitenden Charakteristiken, die beiden Unstetigkeiten Stoß und Kontaktfläche sowie den Expansionsfächer im x-t-Diagramm. Es kann zwischen folgenden Gebieten unterschieden werden:

- ganz rechts der Zustand R beinhaltet das ungestörte Gas mit dem niedrigen Druck p_R .

- Es ist durch einen Verdichtungsstoß vom Zustand 2 getrennt, welcher das schon gestörte Gas mit niedrigem Druck enthält.
- Die Kontaktfläche trennt den Zustand 2 vom Zustand 3 mit hohem Druck, der durch den Expansionsfächer bereits gestört wurde.
- Im Expansionsfächер herrscht Zustand 5. In ihm variieren die Strömungsgrößen kontinuierlich.
- Ganz links gibt es noch das ungestörte Hochdruckgebiet mit dem Zustand L.

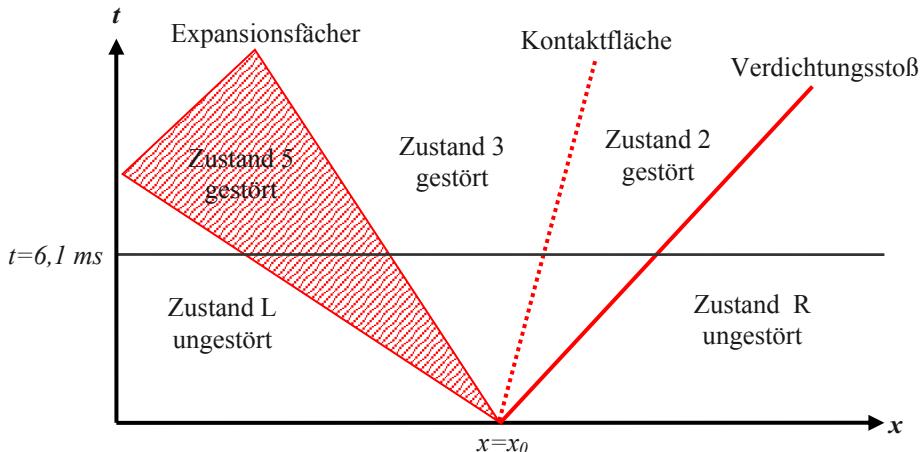


Bild 5-15 x-t-Diagramm für das Stoßwellenproblem mit der Ausbreitung des Verdichtungsstoßes, der Kontaktfläche und des Expansionsfächers

Dies ist ein anspruchsvoller Testfall für die numerischen Verfahren, da sie sowohl die Stoßwelle und Kontaktfläche mit ihren unstetigen Änderungen als auch der Expansionsfächer mit seiner stetigen Änderung der Strömungsgrößen auflösen müssen.

Für folgende Lösungsverfahren werden die numerischen Lösungen mit der theoretischen Lösung verglichen:

1. Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack ohne numerische Dämpfung (Bild 5-16 links)
2. Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack mit numerischer Dämpfung nach Neumann und Richtmyer (Bild 5-16 rechts)
3. Zentrales ADI-Verfahren 2. Ordnung nach Beam und Warming mit expliziter und impliziter numerischer Dämpfung (Bild 5-17 links)
4. Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Vector-Splitting nach Van Leer (Bild 5-17 rechts)
5. Upwind-Verfahren 2. Ordnung nach Van Leer (Bild 5-18 links)
6. High-Resolution-Verfahren 2. Ordnung nach Roe mit Superbee-Limiter (Bild 5-18 rechts)

Die Bilder 5-16 bis 5-18 zeigen als rote Linie die exakte theoretische Lösung zum Zeitpunkt $t = 6.1 \text{ ms}$. Dargestellt sind Machzahl, statischer Druck und die Entropie/Gaskonstante. Deutlich sichtbar sind:

- der Expansionsfänger zwischen $2,7 < x < 4,9$ mit einem stetigen Verlauf von Machzahl und Druck. Die Entropie bleibt konstant, da keine Verluste entstehen.
- Die Kontaktfläche bei $x \approx 6,8$. Hier ändern sich Machzahl und Entropie unstetig, während der Druck konstant bleibt.
- Den Verdichtungsstoß bei $x \approx 8,4$. Hier ändern sich alle drei Strömungsgrößen unstetig.

Die Ergebnisse der drei zentralen Verfahren 2. Ordnung sind im Bild 5-16 links und rechts und im Bild 5-17 links dargestellt:

- das MacCormack-Verfahren ohne numerische Dämpfung zeigt sehr große Unter- und Überschwinger am Expansionsfänger und eine verschmierte Auflösung der Unstetigkeiten an der Kontaktfläche und dem Verdichtungsstoß (Bild 5-16 links).
- Durch die Addition einer numerischen Dämpfung nach Neumann-Richtmyer [27] sind die Über- und Unterschwinger am Expansionsfänger zwar verschwunden (Bild 5-16 rechts), doch an der Kontaktfläche und am Verdichtungsstoß bleiben sie bestehen. Die Stoßauflösung ist mit sechs Netzenpunkten ziemlich verschmiert.
- Das ADI-Verfahren nach Beam und Warming mit expliziter und impliziter numerischer Dämpfung zeigt eine zu dissipative Lösung (Bild 5-17 links). Die Unstetigkeiten an der Trennfläche und am Verdichtungsstoß sind über viele Netzenpunkte verschmiert. Am Expansionsfänger ist trotzdem noch ein Überschwinger sichtbar.

Die Ergebnisse zweier Upwind-Verfahren zeigen Bild 5-17 rechts und Bild 5-18 links:

- Das Flux-Vector-Splitting-Verfahren 1. Ordnung nach Van Leer in Bild 5-17 rechts zeigt eine bessere Auflösung des Expansionsfängers und des Verdichtungsstoßes als das ADI-Verfahren auf der linken Seite von Bild 5-17. Die Kontaktfläche ist jedoch noch ziemlich verschmiert.
- Eine bessere Auflösung des Expansionsfängers ergibt sich mit dem Flux-Splitting-Verfahren 2. Ordnung nach Van Leer (Bild 5-18 links). Durch die höhere Genauigkeitsordnung entstehen allerdings wieder Über- und Unterschwinger an allen drei Strömungssphänomenen.

Die beste Lösung zeigt erwartungsgemäß wieder das High-Resolution-Verfahren in Bild 5-18 rechts:

- es zeigt eine gute Auflösung der Strömungsgradienten, da es 2. Ordnung genau ist. Zudem werden Über- oder Unterschwinger durch die TVD-Bedingung und den Superbee-Limiter schon bei der Entstehung verhindert.

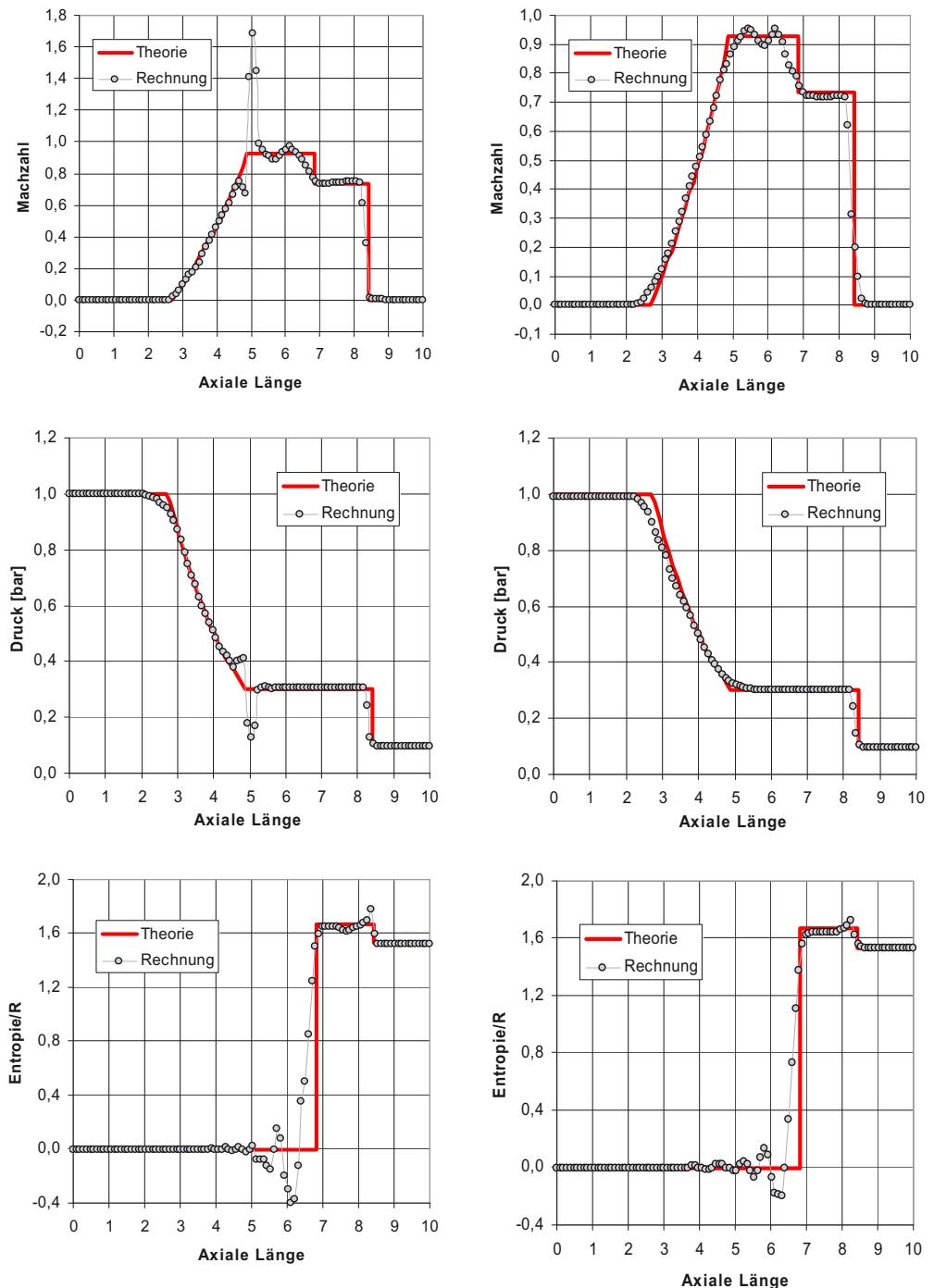


Bild 5-16 Stoßwellenproblem: Zentrales Verfahren 2. Ordnung nach MacCormack, links ohne numerische Dämpfung, rechts mit numerischer Dämpfung

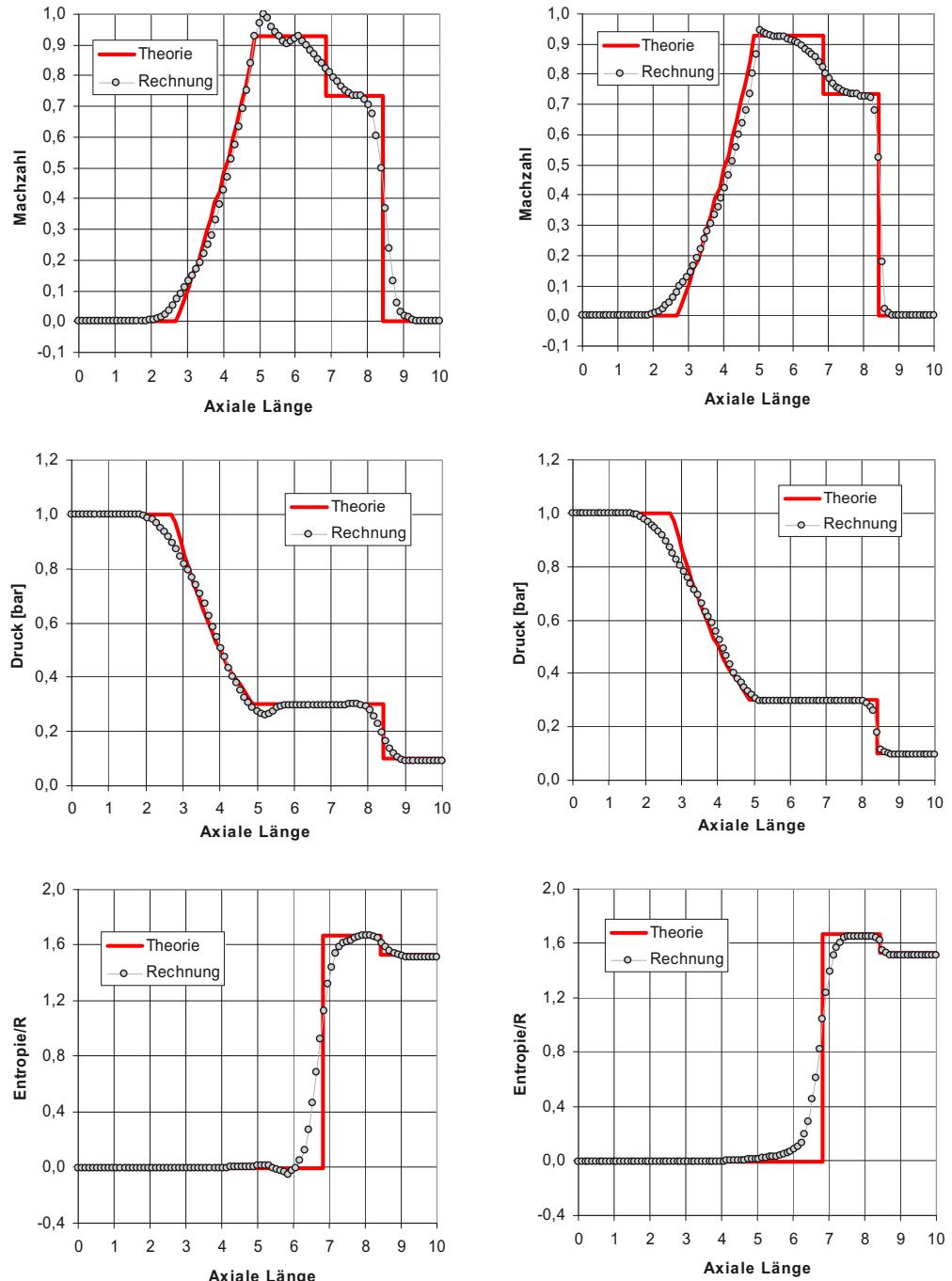


Bild 5-17 Stoßwellenproblem: Zentrales ADI-Verfahren 2. Ordnung nach Beam und Warming mit expliziter und impliziter numerischer Dämpfung (links) und Upwind-Verfahren 1. Ordnung mit Flux-Vector-Splitting nach Van Leer (rechts)

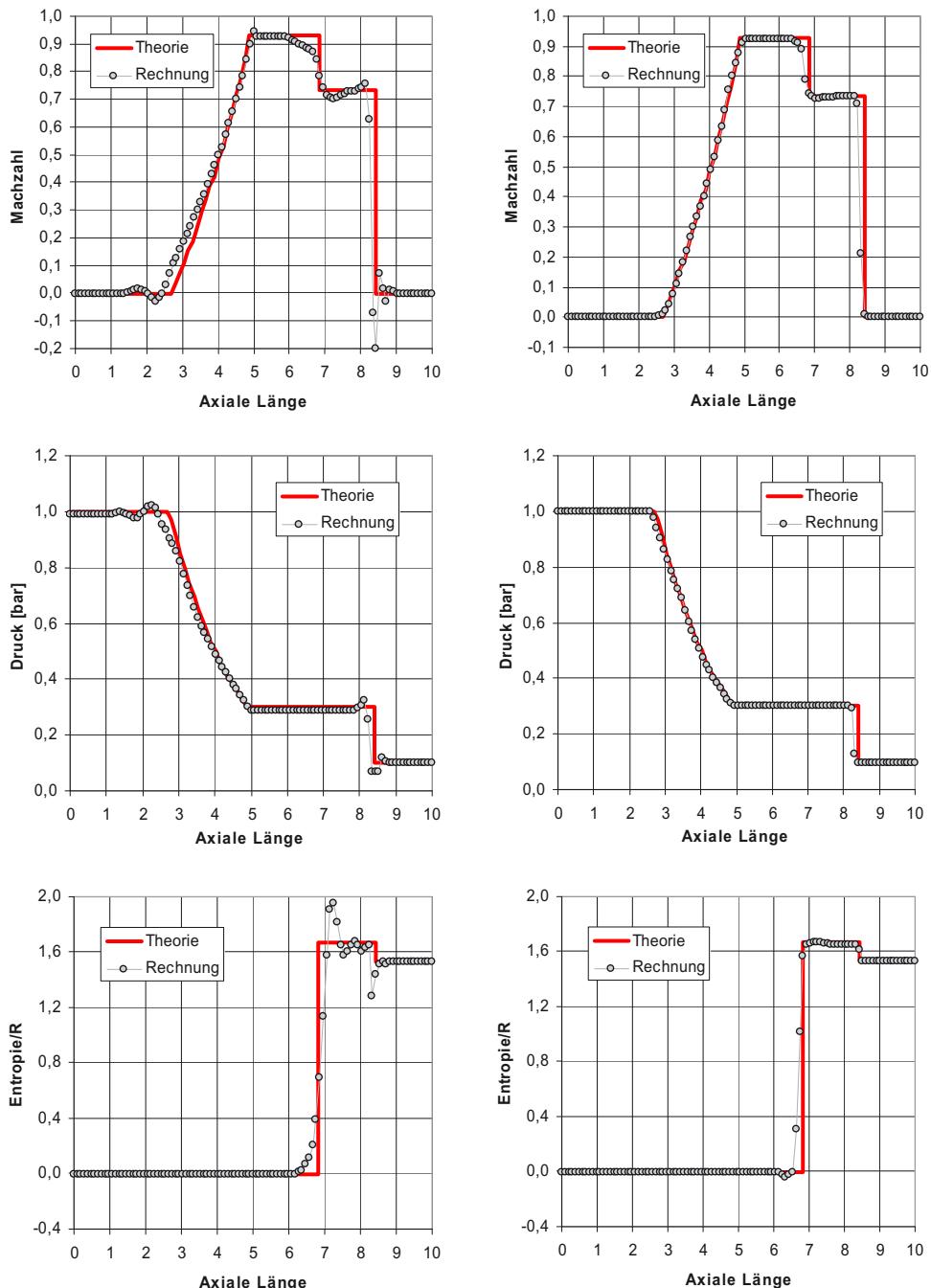


Bild 5-18 Stoßwellenproblem: Upwind-Verfahren 2. Ordnung mit Flux-Splitting nach Van Leer (links) und High-Resolution-Verfahren 2. Ordnung nach Roe (rechts)

6 Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung

6.1 Ziel dieses Kapitels

Dieses Kapitel zeigt den allgemeinen Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung. Hier können praktische Tipps und Erfahrungswerte nachgeschlagen werden, die für den Anwender von CFD-Programmen hilfreich sind, um CFD-Rechnungen effizient durchführen zu können und um genaue Ergebnisse erzielen zu können.

Im Anschluss an dieses Kapitel sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

1. Welche fünf Schritte müssen beim Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung durchgeführt werden?
2. Auf welche Arten kann die Geometrie eingelesen werden?
3. Welche Randarten begrenzen das Rechengebiet?
4. Warum helfen Symmetrieebenen, Rechenzeit zu sparen?
5. Wie weit sollen die Ränder des Rechengebiets vom der Geometrie weg sein? Warum?
6. Wo soll das Rechennetz verdichtet werden?
7. Was bedeutet Netzverfeinerungsstrategie?
8. Was versteht man unter einer Netzunabhängigkeitsstudie?
9. Was wird beim Pre-Processing gemacht?
10. Welche Startlösung sollte verwendet werden, die aus den Randbedingungen erzeugte oder die ähnlichste vorhandene Lösung? Warum?
11. Wie kann der Verlauf der Strömung sichtbar gemacht werden?
12. Was versteht man unter Validierung?
13. Was ist zu beachten, wenn CFD-Programme für neuartige Anwendungen verwendet werden?
14. In welchem Anstellwinkelbereich kann das CFD-Programm in Bild 6.5 mit guter Genauigkeit eingesetzt werden?
15. Warum ist die Berechnung größerer Ablösegebiete schwierig?

6.2 Übersicht

Der typische Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung am Beispiel von ANSYS CFX ist in Bild 6-1 dargestellt.

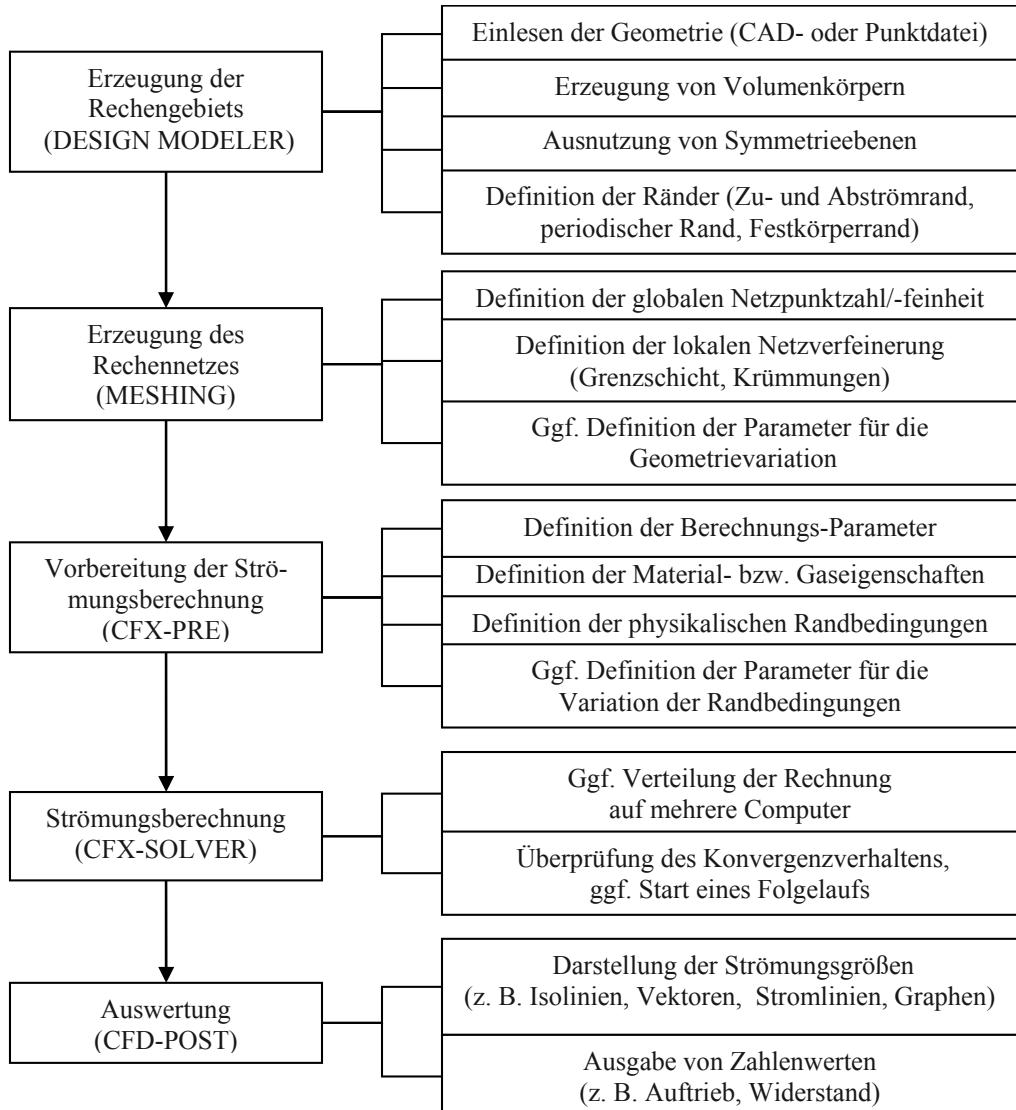


Bild 6-1 Übersicht über den typischen Ablauf einer numerischen Strömungsberechnung
(Programmbezeichnungen gelten für ANSYS CFX)

6.3 Einlesen der Geometrie

Die Geometrie kann auf unterschiedliche Arten bereitgestellt bzw. erzeugt werden:

- Üblicherweise wird sie in einem 3-D CAD-Format bereitgestellt. Gängige Formate sind in Tabelle 6.1 angegeben. 2-D Modelle können in der Regel nicht verarbeitet werden.

Tabelle 6.1 Übliche CAD-Einleseformate für CFD-Programme

ACIS (SAT)	.sat
Parasolid	.x_t, .xmt_txt, .x_b, .xmt_bin
CATIA	.CATPart, .CATProduct
IGES	.igs, .iges
STEP	.stp, .step
Solid Edge	.par, .asm, .psm, .pwd
SolidWorks	.SLDPRT, .SLDASM
Autodesk	.ipt, .iam
Pro/ENGINEER	.prt, .asm
Unigraphics	.prt
Mechanical Desktop	.dwg
OneSpace Designer	.pkg, .bdl, .ses, .sda

- Die zweite Möglichkeit ist das Einlesen von Koordinaten aus einer Text- oder Excel-Datei, wie z. B. für das Tragflügelprofil im ersten Beispiel in Kapitel 7. Solche Koordinaten kommen in der Regel von Auslegungsprogrammen oder aus Lasermessungen. Aus den Punkten muss dann zuerst ein Linienzug und eine Oberfläche erstellt werden. Der Nachteil von solchen Modellen ist, dass sehr viele Kanten vorhanden sind, die bei der Netzgenerierung zu Problemen führen können.
- Bei einfachen Geometrien gibt es eine dritte Möglichkeit, wie z. B. für das Wasserrohr im zweiten Beispiel in Kapitel 8 gezeigt. Sie können direkt in einem Geometrie-Programm wie z. B. dem DESIGN MODELER erstellt werden.

Für Turbomaschinen gibt es spezielle Geometrie-Programme, mit denen aus vorher ermittelten Parametern leicht ein Model erstellt werden kann, wie z. B. ANSYS BLADEGEN für Pumpen und Turbinenanwendungen.

6.4 Erzeugung des Rechengebiets

Das Rechengebiet ist der Bereich in dessen Innerem die Strömung berechnet werden soll. Es wird durch die Geometrie mit dem Festkörperrand und alle Außenränder begrenzt (siehe Bild 4-1). Auf diesen Rändern werden später im Pre-Processing die Randbedingungen vorgegeben, weshalb jeder Rand separat definiert werden muss.

Bei Außenströmungen wie dem Tragflügel in Kapitel 7 sind dies:

- die Zuströmränder, an denen die Strömung in das Rechengebiet eintritt.
- Die Abströmränder, an denen die Strömung das Rechengebiet verlässt. Zu- und Abströmränder müssen weit genug von der Geometrie entfernt sein, damit an ihnen konstante Strömungszustände herrschen und die Genauigkeit an der Geometrie nicht verfälscht wird. Üblicherweise sind dies drei axiale Längen der Geometrie, z. B. drei Sehnenlängen beim Tragflügel.
- Die periodischen Ränder, an den die Strömung periodisch in das Rechengebiet ein- und austritt. Dies bedeutet, dass die Strömung, die am einen periodischen Rand das Rechengebiet verlässt, am anderen periodischen Rand wieder in das Rechengebiet eintritt.
- Symmetrieebenen, an denen die Strömung symmetrisch ist.

Bei Innenströmungen wie der Rohrströmung in Kapitel 8 müssen als Außenränder nur die Zu- und Abströmränder definiert werden. Ihre Lage ist in der Regel durch die Geometrie bereits definiert.

Jede Randfläche kann auch unterteilt werden, damit man verschieden feine Netze auf jedem Teilbereich erzeugen kann oder unterschiedliche Randbedingungen wie z. B. adiabate Wand und Wand mit Wärmeübergang definieren kann.

Um Netzpunkte und Rechenzeit zu sparen, sollte das Rechengebiet nur so groß wie nötig sein. Deshalb sollten unnötige Bauteile entfernt, Festkörper weg geschnitten und Symmetrieebenen ausgenutzt werden:

- unnötige Bauteile sind z. B. Anbauteile außerhalb der Strömung. Sie beeinflussen die Strömungssimulation nicht und können aus den CAD-Modellen entfernt werden.
- Die Festkörper selbst können weg geschnitten werden, da für die Strömungsberechnung nur die Oberfläche zur Strömung, d.h. der Festkörperrand, nötig ist:
 - zum Beispiel wird beim Tragflügel in Kapitel 7 das Flügelinnere herausgeschnitten wird.
 - Bei Innenströmungen wie in Kapitel 8 wird das Rohr weggeschnitten.
 - Nur bei der Berechnung von Fluid-Struktur-Interaktionen (FSI) wie z. B. der Wärmedehnung von Bauteilen oder der Ausdehnung durch Druckbelastung sind beide Modelle notwendig, das Modell für die Struktursimulation (FE-Modell) und das Modell für die Strömungssimulation (CFD-Modell).
- Die Ränder des Rechengebietes sollen so weit von der Geometrie weg sein, dass dort eine konstante Strömung herrscht, damit die physikalischen Randbedingungen die Strömung an der Geometrie nicht verfälschen. Als Faustregel trifft dies bei einer Entfernung zu, die der dreifachen Geometrielänge entspricht.
- Des weiteren können Symmetrieebenen bezüglich der Strömung ausgenutzt werden:
 - die Spiegelsymmetrie (Bild 6-2 links). Hier kann an der Symmetrieebene geschnitten werden, so dass nur eine Hälfte verwendet wird, wie z. B. beim T-Stück.
 - Bei der Rotationssymmetrie in Bild 6-2 Mitte wird nur ein Tortenstück vernetzt und berechnet.
 - Die translatorische Symmetrie (Bild 6-2 rechts) kann bei sehr langen Bauteilen ausgenutzt werden. Sofern die Enden nicht betrachtet werden, kann eine dünne Scheibe für

die Simulation verwendet werden, wie z. B. beim unendlichen Tragflügel. Es muss aber mindestens ein Volumenelement vorhanden sein; eine rein zweidimensionale Geometrie ist aus rechentechnischen Gründen meistens nicht möglich.

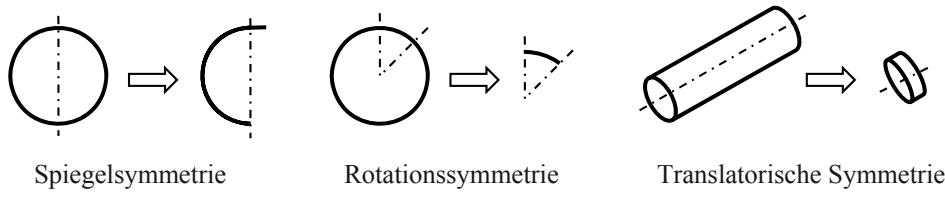


Bild 6-2 Beispiele von Symmetrieebenen

6.5 Erzeugung des Rechennetzes

Moderne Programme zur Rechennetzzerzeugung wie MESHING, ICEM-CFD, TURBOGRID, oder TGRID sind sehr leistungsfähig und erzeugen auch für komplexe Geometrien qualitativ hochwertige Netze mit vertretbarem Aufwand. Da die Genauigkeit der numerischen Lösung und das Konvergenzverhalten entscheidend von der Qualität und Feinheit des Rechennetzes abhängen, ist die Erzeugung eines guten Rechennetzes sehr wichtig. Sie erfordert in der Regel auch die meiste Arbeit für den CFD-Anwender. Folgende allgemeingültige Regeln sollten deshalb beachtet werden:

- Die Netzzellen sollen möglichst rechtwinklig und quadratisch sein und die Änderungsraten der Länge einer Netzzelle zur Nachbarzelle sollten nicht größer als 1,2 sein. Dann ist der Abbruchfehler am kleinsten und die Genauigkeit am größten.
- Das Rechennetz muss in Gebieten mit starken Gradienten verdichtet werden. Starke Gradienten treten an Knicken und starken Krümmungen auf, ebenso in der Wandgrenzschicht und bei Verdichtungsstößen. Erfahrungsgemäß soll die Wandgrenzschichten mit mindestens 10 Punkten aufgelöst werden.
- Strukturierte Rechennetze, die sich ein- bzw. zweimal halbieren lassen, sind für eine schnelle Konvergenz hilfreich. Zuerst rechnet man auf dem groben Netz. Die hochfrequenten Störungen werden hier nicht aufgelöst und somit schnell gedämpft. Dann interpoliert man auf das mittlere Netz und rechnet einige Iterationen, bevor man auf das feine Netz interpoliert, um die endgültige Lösung mit guter Auflösung zu erhalten. Durch diese Netzverfeinerungsstrategie lassen sich stationäre Lösungen schneller erzielen.

Die Netzerzeugung läuft normalerweise in mehreren Stufen ab:

- 1. Schritt: Überprüfung der CAD-Topologie
Um sicherzugehen, dass das Rechengebiet keine Fehler wie Löcher oder übereinander liegende Flächen hat, sollte als erstes die CAD-Topologie überprüft werden. Die meisten Programme bieten hierfür eine Option an. Zeigt die Überprüfung Fehler an, kann in der Regel kein Netz erzeugt werden.
- 2. Schritt: Erzeugung des Standardnetzes
Hierfür verwenden die meisten Netzerzeugungsprogramme Standard-Werte, die aus den Abmessungen des Rechengebiets automatisch berechnet werden. Diese Standard-Netze

sind aber meistens zu grob, weshalb sie manuell global und lokal verfeinert werden müssen.

- 3. Schritt: Globale Netzverfeinerung

Durch Veränderung der Eingabeparameter kann ein genügend feines Rechennetz erzeugt werden. Die richtigen Parameter erhält man in der Regel durch Ausprobieren oder anhand von Erfahrungswerten aus vorangegangen Rechnungen.

- 4. Schritt: Lokale Netzverfeinerung

Das Oberflächennetz wird in der Grenzschicht und an starken Krümmungen lokal verfeinert.

Bei neuen Anwendungen sollte zuerst eine Netzunabhängigkeitsstudie durchgeführt werden. Hierzu werden Rechnungen auf unterschiedlich feinen Rechennetzen durchgeführt und die Lösungen miteinander verglichen. Erst wenn sich die Lösung nicht mehr ändert, hat man ein ausreichend feines Rechennetz zur Verfügung:

- Bild 6-3 zeigt schematisch, dass erst das feinste Netz mit 300x50x50 Punkten einen Auftriebsbeiwert liefert, der sich nicht mehr merklich ändert.
- Bei den größeren Netzen mit 100x20x20 und 150x25x25 Punkten sind die Unterschiede noch zu groß und die Lösung damit zu ungenau.
- Für industrielle Anwendungen würde das Netz mit 200x35x35 Punkten ausreichen, da die Abweichung zum feinsten Netz noch akzeptabel, die Rechenzeit aber kürzer ist. Es stellt somit einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Aufwand dar.

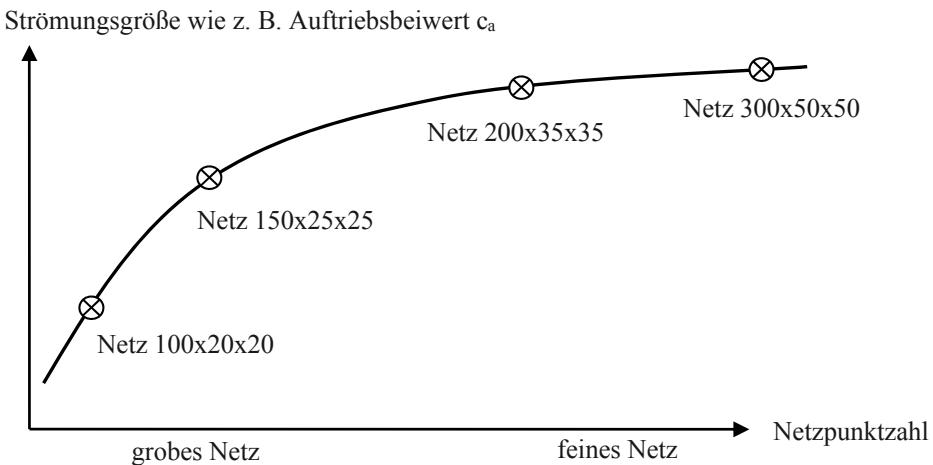


Bild 6-3 Schema einer Netzeinflussstudie

6.6 Vorbereitung der Strömungsberechnung

Im so genannten Pre-Processing erfolgt die Eingabe aller zur Lösung notwendigen Berechnungsparameter wie z. B.:

- die Strömungsart (stationär oder instationär)
- die Materialeigenschaften (Fluid oder Festkörper, Stoffwerte)
- das Turbulenzmodell
- der Zeitschritt
- und die Randbedingungen.

Des Weiteren werden hier die Konvergenzkriterien definiert:

- das Abbruchkriterium der Rechnung bei einer bestimmten Iterationszahl oder einer bestimmten Abbruchgenauigkeit.
- Auch zusätzliche Größen, wie z. B. der statische Druck an einem bestimmten Netzpunkt oder der Auftriebsbeiwert eines Flügelprofils können als weitere Konvergenzgrößen definiert werden. Diese Größen werden bei der Strömungsberechnung bei jedem Rechenschritt angezeigt.

Die Definition der Randbedingungen für die Randflächen erfordert vom Benutzer einige Vorüberlegungen. Die Eingabedaten sind so zu wählen, dass sie auf jeden Fall physikalisch sinnvoll sind. Die richtigen Massenströme, Drücke und Temperaturen müssen an den jeweiligen Rändern zuvor berechnet werden. Wird z. B. nur ein halbes Modell mit Symmetrieebene verwendet, ist auch der Massenstrom zu halbieren.

6.7 Strömungsberechnung

Zur Strömungsberechnung wird die vom Pre-Processing erzeugte Datei zusammen mit dem Rechennetz eingelesen.

Des Weiteren ist eine Startlösung notwendig. Diese wird bei der ersten Rechnung in der Regel vom CFD-Programm aus den Randbedingungen selbst erzeugt. Bei weiteren Rechnungen ist es sinnvoll, die „ähnlichste“ vorhandene Lösung als Startlösung zu verwenden, um Rechenzeit zu sparen.

Bei umfangreichen Rechenaufgaben können zur Verkürzung der Rechenzeit mehrere Prozessoren verwendet werden. Die Verteilung auf die Prozessoren erfolgt bei den meisten Programmen automatisch.

6.8 Auswertung

Beim so genannten Post-Processing stehen zahlreiche Auswertemöglichkeiten zur Verfügung:

- eine Visualisierung der Strömung in Form von Partikeln, die mit der Strömung mitschwimmen, von Stromlinien und von Strömungsvektoren. Dies kann auch in Form von Filmen (Movies) dargestellt werden.
- Darstellung von Strömungsgrößen auf Flächen (Isoflächen bzw. Konturen) wie z. B. Druck- oder Temperaturverteilungen auf der Wand.
- Darstellung von Strömungsgrößen entlang von Linien in Diagrammen, wie z. B. der Druckverlauf auf der Flügeloberfläche.
- Tabellen von Strömungsgrößen, auch als Export für andere Programme.
- Eindimensionale Kenngrößen wie z. B. die Kraft auf den Körper in x-Richtung.
- Einen automatisch erstellten Bericht über die durchgeführte Rechnung mit allen wichtigen Eingabedaten und den erzeugten Bildern und Diagrammen.

Wird eine Rechnung unter Ausnutzung von Symmetrien durchgeführt, so kann der Rest des Modells zur besseren Veranschaulichung der Ergebnisse wieder eingeblendet werden.

Alle Ansichten können in einem Grafikformat wie z. B. als JPG-Datei gespeichert werden.

Für die richtige Interpretation der Ergebnisse ist viel Erfahrung nötig. Letztendlich geht es um eine Optimierung der Geometrie im Hinblick auf die Erhöhung der Wirkungsgrade und die Reduzierung der Strömungsverluste. Gleichzeitig müssen die strukturmechanischen (wie z. B. Haltbarkeit, Lebensdauer, Resonanzfreiheit) und konstruktiven Randbedingungen (wie z. B. effiziente Fertigbarkeit, Kosten) eingehalten werden.

6.9 Validierung

Unter Validierung versteht man die Überprüfung der Genauigkeit der numerischen Rechnergebnisse. Wie gut stimmen sie mit Messungen, anderen Rechnungen oder der Theorie überein. Die Validierung ist sehr wichtig, wenn die Strömung für neue Anwendungen zum ersten Mal mit einem CFD-Programm berechnet werden soll.

Die Bilder 6-4 und 6-5 zeigen eine solche Validierung am Beispiel des Tragflügelsegments aus Kapitel 7. In Bild 6-4 ist der Vergleich der gemessenen und berechneten Druckverteilung bei einer Machzahl von $Ma=0,11$ und einem Anstellwinkel von $\alpha=8^\circ$ dargestellt (im Niedergeschwindigkeits-Windkanal war dies die maximal mögliche Machzahl). Die Übereinstimmung ist sehr gut, wobei im Vorderkantenzonenbereich nur wenige Messstellen zur Verfügung stehen.

Bild 6-5 zeigt den im Windkanal gemessenen und mit CFX berechneten Auftriebsbeiwert. Der berechnete Auftriebsbeiwert stimmt bis zu einem Anstellwinkel von $\alpha \leq 12^\circ$ recht gut mit der Messung überein. In diesem Bereich könnte das Programm zur Auslegung und Optimierung eingesetzt werden. Bei größeren Anstellwinkeln $\alpha > 12^\circ$ liefert die Rechnung einen zu großen Auftriebsbeiwert. Dies liegt daran, dass die Strömung auf der Saugseite bei der Rechnung weniger stark ablöst als beim Experiment. In diesem Bereich sollte das Rechenprogramm nicht mehr oder nur mit Vorsicht für die Auslegung verwendet werden.

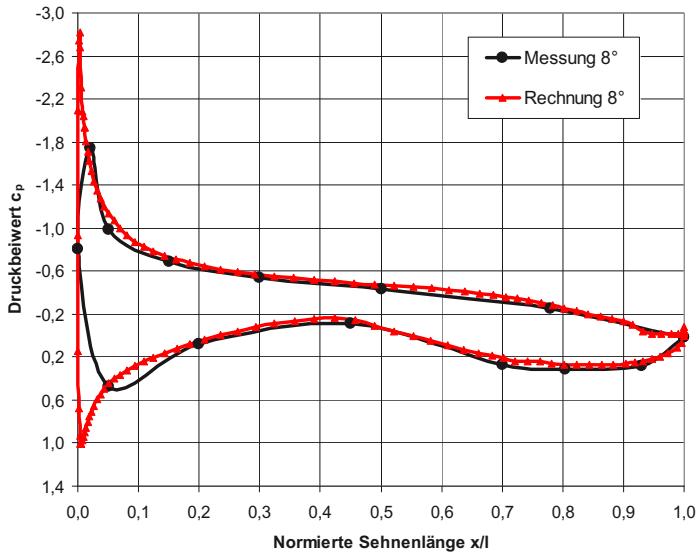


Bild 6-4 Vergleich der gemessenen und berechneten Druckverteilung an einem Tragflügelsegment bei einer Machzahl von $Ma=0,11$ und einem Anstellwinkel von $\alpha=8^\circ$

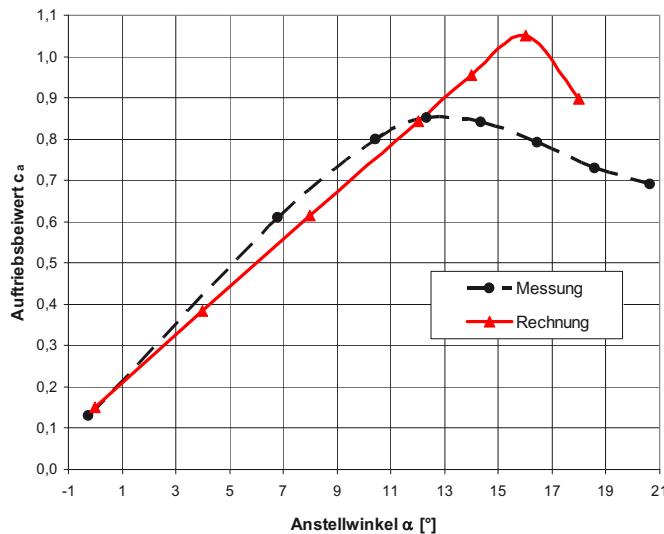


Bild 6-5 Vergleich des gemessenen und berechneten Auftriebsbeiwerts an einem Tragflügelsegment bei einer Machzahl von $Ma=0,11$

Generell ist die genaue stationäre Berechnung größerer Ablösegebiete schwierig. Zum einen wird die Strömung durch die größeren Wirbel instationär und kann nur mit einer instationären Rechnung richtig berechnet werden. Zum anderen sind die standardmäßig eingesetzten Turbulenzmodelle für größere Ablösegebiete noch zu ungenau.

6.10 Einführung in die Übungsbeispiele

In den Kapitel 7 bis 9 wird die Vorgehensweise bei der numerischen Strömungsberechnung an drei Beispielen ausführlich gezeigt. Die ersten beiden Beispiele sind als Einstieg gedacht und bewusst einfach gewählt. Das dritte Beispiel ist etwas komplexer, da es den Wärmedurchgang von einem warmen Fluid durch eine Rohrwand an ein kaltes Fluid behandelt. Für sie wurden die Programme von ANSYS CFX in der momentan aktuellsten Version 13 verwendet. Hier sind auch weitere Übungsbeispiele (Tutorials) verfügbar.

Beim ersten Beispiel in Kapitel 7 handelt es sich um den Tragflügelschnitt eines modernen Verkehrsflugzeugs in der Nähe der Flügelspitze. Die Luftströmung wird hier zweidimensional berechnet, um sie mit Ergebnissen aus Windkanalmessungen vergleichen zu können (siehe Kapitel 6.8). Bild 6-6 zeigt die Linien konstanter Machzahl (Iso-Machlinien) im Reiseflug bei einer Fluggeschwindigkeit von $Ma=0.75$ und einem Anstellwinkel von $\alpha=8^\circ$. Deutlich sichtbar sind das orange und rote Überschallgebiet ($Ma>1.0$) und das blaue Ablösegebiet ($Ma\approx 0$) auf der Saugseite.

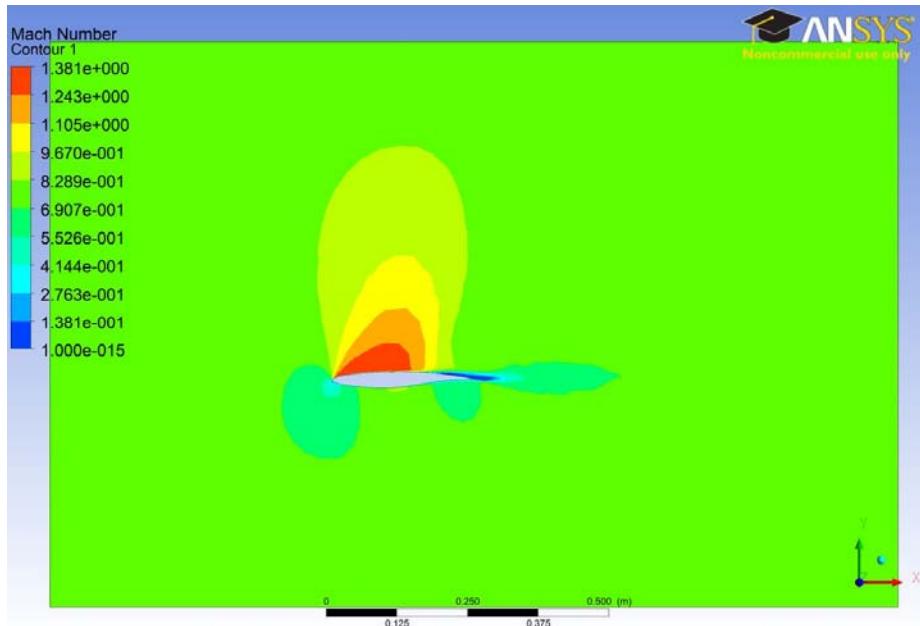


Bild 6-6 Iso-Linien konstanter Machzahl um einen Tragflügelschnitt bei $\alpha=8^\circ$ Anstellwinkel

Beim zweiten Beispiel in Kapitel 8 wird die Vermischung zweier unterschiedlich warmer Wasserröme in einem T-Rohrstück berechnet. Diese Innenströmung ist dreidimensional. Bild 6-7 zeigt die Linien konstanter Temperatur (Isothermen). Deutlich sichtbar ist das Eindringen des roten Warmwasserstroms von oben in den von links eintretenden blauen Kaltwasserstrom und die anschließende Vermischung bis zum Austritt rechts.

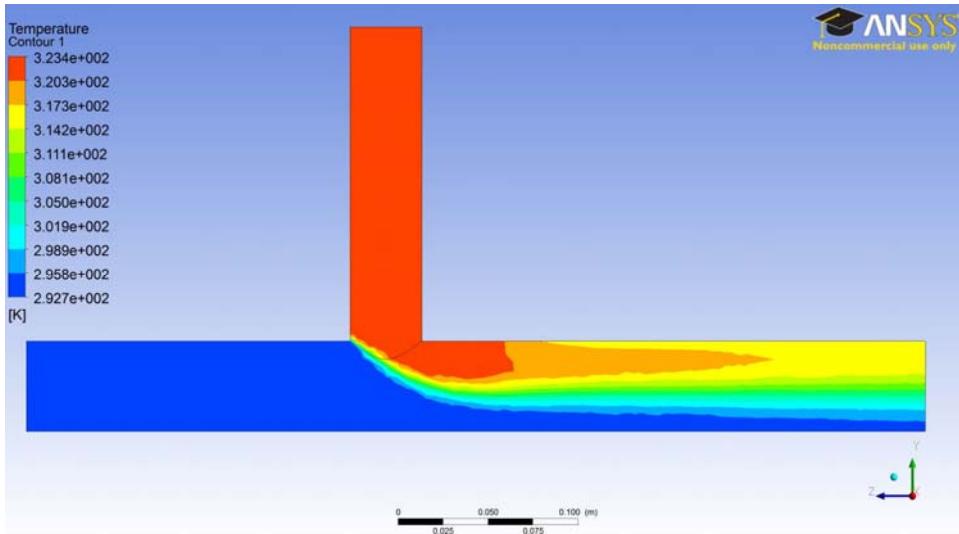


Bild 6-7 Iso-Linien konstanter Temperatur (Isothermen) bei der Vermischung in einem T-Rohr

Das dritte Beispiel in Kapitel 9 behandelt einen typischen Gegenstrom-Doppelrohr-Wärmeübertrager, bei dem die Wärme von einem heißen Fluid im Innenrohr durch die Rohrwand an das kalte Fluid im Außenrohr übertragen wird. Es werden sowohl die Strömung im inneren und äußerem Rohr als auch die Wärmeleitung im dazwischen liegenden Kupferrohr berechnet. Bild 6-8 zeigt die Isothermen am Eintritt des kalten Wasserstroms außen (blau) zusammen mit dem Austritt des warmen Wasserstroms innen (grün bis rot) und dem dazwischen liegenden Kupferrohr (hellblau).

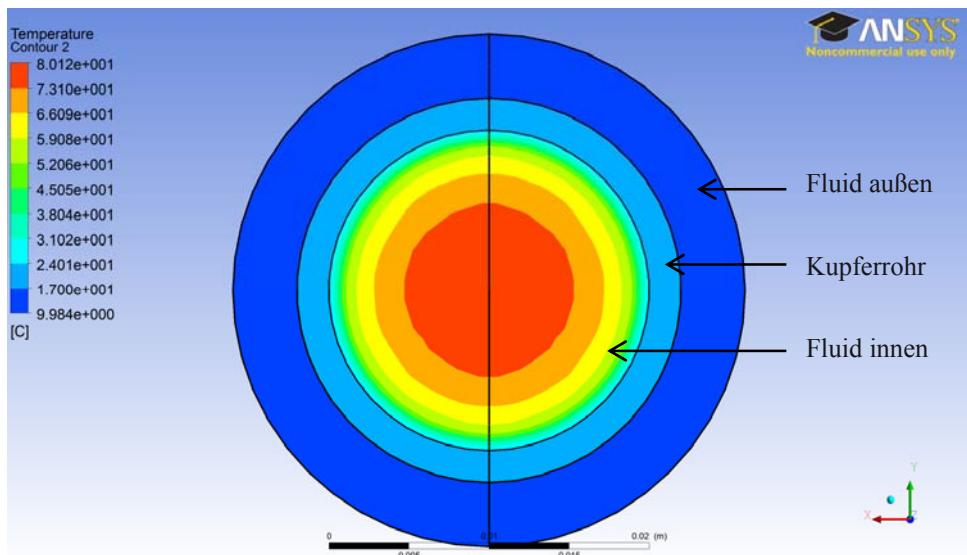


Bild 6-8 Iso-Linien konstanter Temperatur (Isothermen) bei einem Doppelrohr-Wärmeübertrager

6.11 Die Arbeitsumgebung ANSYS WORKBENCH

Für die nachfolgenden Beispiele wurde das Programmsystem ANSYS Version 15.0 verwendet, das zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Buches verfügbar war. Die Optionen und Aufrufe, die aktiviert bzw. angeklickt werden müssen, sind **fett** angegeben. Alle Programmnamen, wie z. B. DESIGN MODELER werden in Großbuchstaben geschrieben.

WORKBENCH ist die gemeinsame Benutzeroberfläche für alle ANSYS Programme von der Geometrieerstellung über die Netzgenerierung bis zur Strömungssimulation und Festigkeitsberechnung. Sie ermöglicht den Zugriff auf alle Dateien, die im Rahmen von WORKBENCH-Projekten erstellt wurden. Das Programm wird wie üblich gestartet über **Start, Alle Programme, ANSYS 15.0, WORKBENCH 15.0**.

Auf der linken Seite sind in der Toolbox die Analysesysteme aufgezählt. Für Strömungsberechnungen mit dem Programm CFX klicken Sie **Fluiddynamik (CFX)** an und ziehen es in das Fenster Projektschema. Den Namen können Sie nach Wunsch ändern z.B. in **Fluegel** (Bild 6-9). Die Projektstruktur wird in einer **wbdb-Datei** gespeichert.

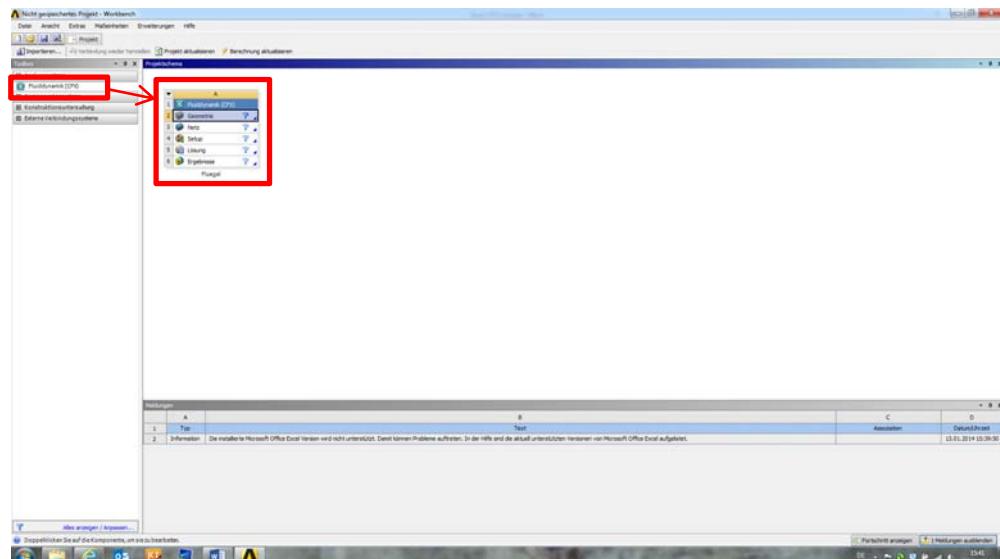


Bild 6-9 Die Arbeitsumgebung ANSYS WORKBENCH

Wichtige Hinweise:

- Für die Programme DESIGN MODELER und MESHING müssen **Dezimalzahlen mit Komma** eingegeben werden entsprechend der deutschen Schreibweise.
- Für die Programme CFX-PRE, CFX und CFD-POST müssen **Dezimalzahlen mit Punkt** eingegeben werden entsprechend der englischen Schreibweise.
- Keine Umlaute in Namen.

7 Übungsbeispiel Tragflügelumströmung

7.1 Erzeugung der Geometrie

7.1.1 Starten des Programms DESIGN MODELER

Zur Erzeugung der Geometrie klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Geometrie** doppelt an. Das Programm DESIGN MODELER startet und es wird die Benutzeroberfläche wie in Bild 7-1 dargestellt.

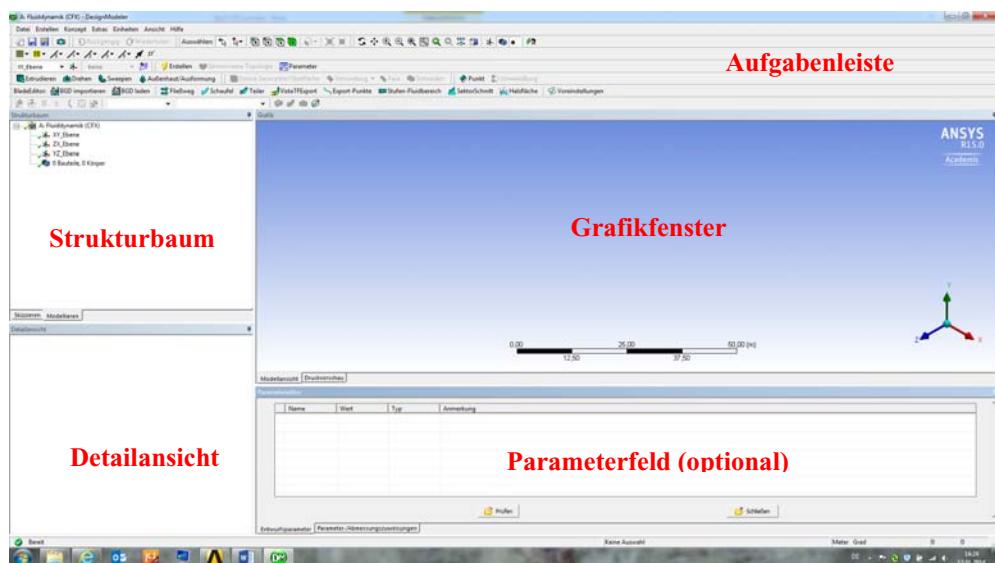


Bild 7-1 DESIGN MODELER: Startfenster

Im DESIGN MODELER gibt es wie bei den anderen ANSYS-Programmen fünf Bereiche:

- die Aufgabenleiste oben
- den Strukturbaum links oben
- die Detailansicht links unten
- und das Grafikfenster rechts.
- Optional kann ein Parameterfeld eingeblendet werden durch Anklicken von **Parameter** in der Aufgabenleiste. Er erscheint dann unterhalb des Grafikfensters.

7.1.2 Einlesen der Koordinaten als Kurve

Bei diesem Beispiel erfolgt das Einlesen der Koordinaten des Tragflügelschnitts aus einer Textdatei. Diese kann unter www.unibw.de/mb/fakultaet/we5/we51 aus dem Internet abgerufen werden. Je nach Programmversion (deutsch/englisch) muss die Datei **Fluegel_dt.txt** mit Dezimalkommas oder **Fluegel_en.txt** mit Dezimalpunkten verwendet werden.

Das Format der Koordinaten ist in Bild 7-2 angegeben:

- Die erste Spalte ist die Liniennummer, hier 1.
- Die zweite Spalte die Punktzahl von 1 bis 164.
- Dann folgen die kartesischen Koordinaten, hier in Millimeter für den Windkanal-Modellflügel (deutsch mit Komma oder englisch mit Punkt)
- Der letzte Punkt muss die Punktzahl 0 haben, um das Dateiende zu definieren.

Liniennummer	Punktzahl	x-Koordinate	y-Koordinate	z-Koordinate
1	1	266,701	-0,894	0,000
1	2	262,516	-0,313	0,000
1	3	258,321	0,193	0,000
:	:			
1	0			(zum Schließen der Kurve notwendig)

Bild 7-2 Das Koordinatenformat in der Textdatei Fluegel_dt.txt

Der Schnitt wird als Kurve definiert und wie folgt eingelesen (Bild 7-3):

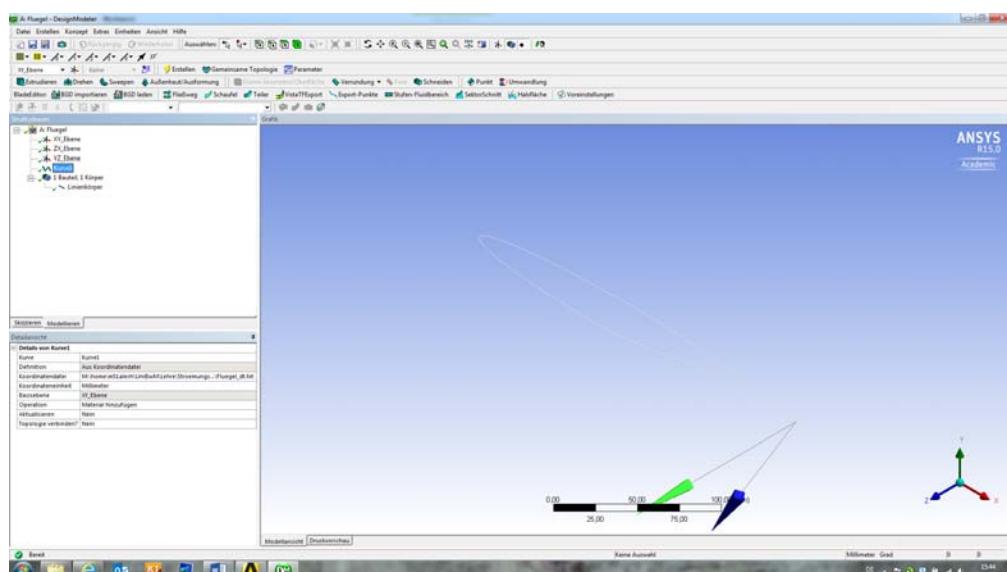


Bild 7-3 DESIGN MODELER: Nach dem Einlesen der Koordinaten als Kurve

- In der oberen Aufgabenleiste **Konzept** und **3D-Kurve** anklicken. Im Strukturbau erscheint standardmäßig Kurve1.
- In der Detailansicht kann die Kurve1 definiert werden:
 - Kurve: Name der Kurve. Er lautet standardmäßig Kurve1, kann aber auch verändert werden.
 - Definition: **aus Koordinatdatei**.
 - Koordinatdatei: Name der Koordinaten-Datei. Hierzu die **3 Punkte rechts** anklicken. Im neuen Fenster Öffnen das **Verzeichnis** und die **Text-Datei** auswählen wie z. B. **Fluegel_dt.txt**.
 - Koordinateneinheit: **Millimeter**, da die Koordinaten hier in mm gegeben sind
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken. Im Strukturbau erscheint dann ein grüner Haken vor Kurve1.

7.1.3 Erzeugung einer Oberfläche und Komponente

Aus den eingelesenen Punkten muss nun eine Komponente definiert werden. Hierfür muss im ersten Schritt aus der Kurve eine Oberfläche erzeugt werden:

- In der oberen Aufgabenleiste **Konzept** und **Oberfläche durch Kanten** angeklickt werden. Im Strukturbau erscheint standardmäßig Oberfläche1.
- Im Fenster Detailansicht erscheinen die Details von Oberfläche1:
 - Linienkörper-Werkzeug: Name der Oberfläche. Er lautet standardmäßig Oberfläche1. Der Name kann auch geändert werden.
 - Kanten: Hier muss die Kante definiert werden. Hierzu im rechten Grafikfenster die **Kurve1 mit linker Maustaste markieren**. Sie wird dann grün. Dann **Anwenden** anklicken. Es erscheint dann die Anzahl der Kanten, hier z. B. 1.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken. Im Strukturbau erscheint dann ein grüner Haken vor dem Element Oberflaeche1.

Im zweiten Schritt kann dann aus der Oberfläche eine Komponente erstellt werden (Bild 7-4):

- **Extras** und **Komponente** anklicken. Im Strukturbau erscheint Komponente1.
- Im Fenster Detailansicht erscheinen die Details von Komponente1:
 - Komponente: Name der Komponente. Er lautet standardmäßig Komponente1.
 - Geometrie: In rechten Grafikfenster die **Profiloberfläche mit linker Maustaste markieren**. Sie wird dann grün. Dann **Anwenden** anklicken. Es erscheint dann die Anzahl der Flächen, hier z. B. 1 Fläche.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken. Im Strukturbau erscheint dann ein grüner Haken vor Komponente1.

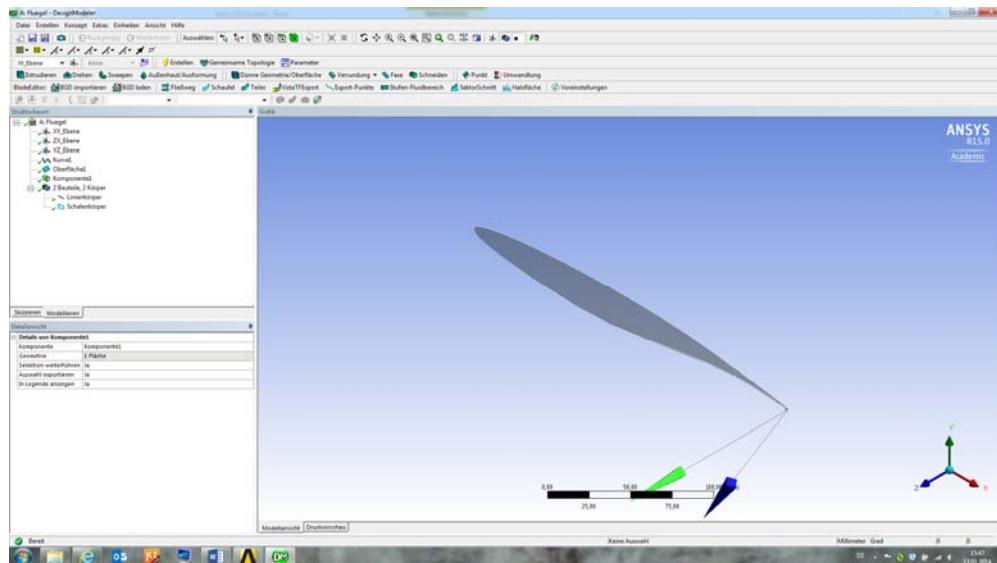


Bild 7-4 DESIGN MODELER: Nach der Erzeugung der Komponente

7.1.4 Erzeugung der Außenränder des Rechengebiets

Die Außenränder des Rechengebiets werden mittels eines Rechtecks um den Flügel definiert (Bild 7-5):

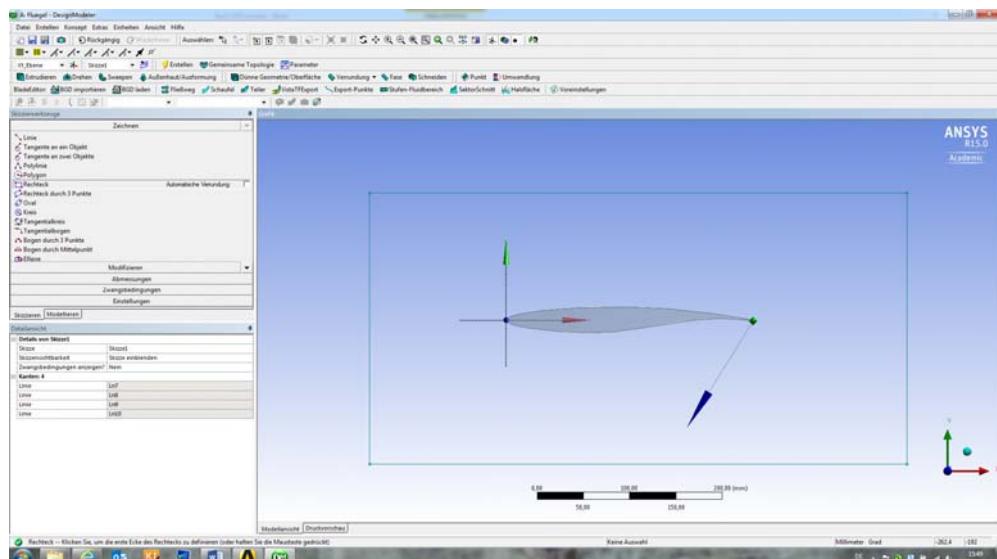


Bild 7-5 DESIGN MODELER: Nach der Erzeugung der Außenränder

- Im Grafikfenster die **z-Achse des Koordinatensystems** unten rechts **anklicken**. Das Profil wird dann als zweidimensionaler Schnitt in der xy-Ebene dargestellt. Anschließend mit dem **Scrollrad das Profil verkleinern**, damit ein Rechteck um den Tragflügelschnitt eingezeichnet werden kann.
- Dann im Strukturaum das Feld **Skizzieren** anklicken. Es erscheint die Tafel Zeichnen:
 - **Rechteck** markieren.
 - Im Grafikfenster ein beliebiges **Rechteck** um das Flügelprofil **mit der linken Maustaste** erzeugen.

7.1.5 Bemaßung der Außenränder des Rechengebiets

Nun können die horizontalen und vertikalen Abmessungen des Rechtecks definiert werden (Bild 7-6):

- Hierzu ist im Strukturaum im Feld Skizzieren die Tafel **Abmessungen** aufzurufen.
- Horizontal anklicken
 - Im Grafikfenster **Anfangs- und Endpunkt der horizontalen Abmessung H1 markieren**. H1 ist hier zwischen Zu- und Abströmrand definiert.
 - Im Grafikfenster **Anfangs- und Endpunkt der horizontalen Abmessung H2 markieren**. H2 wird hier zwischen Zuströmrund und y-Achse bzw. Vorderkante definiert.
- **Vertikal** anklicken
 - Im Grafikfenster **Anfangs- und Endpunkt der vertikalen Abmessung V3 markieren**. Die vertikale Linie V3 ist hier zwischen periodischem Rand oben und unten definiert.
 - Im Grafikfenster **Anfangs- und Endpunkt der vertikalen Abmessung V4 markieren**. V4 wird hier zwischen oberem periodischen Rand und der x-Achse bzw. Vorderkante definiert.
- Im Fenster Detailansicht können nun die gewünschten Längen für die Parameter H1, H2, V3 und V4 eingegeben werden. Die Ränder sollten weit genug vom Profil entfernt sein. Typische Werte für ein Profil mit einer Sehnenlänge von 266,7 mm sind:
 - **H1 = 1500 mm, H2 = 600 mm**
 - **V3 = 1000 mm , V4 = 600 mm**.
- Hinweis: Wird in der Detailansicht vor der Längenbezeichnung H1, H2, V3 oder V4 ein Haken gesetzt, so wird diese Abmessung als so genannter Parameter definiert, der über das Parameterfeld verwaltet werden kann. Dieser Parameter kann später automatisch variiert werden.
- Zum Abschluss im Strukturaum wieder das Feld **Modellieren** aufrufen.

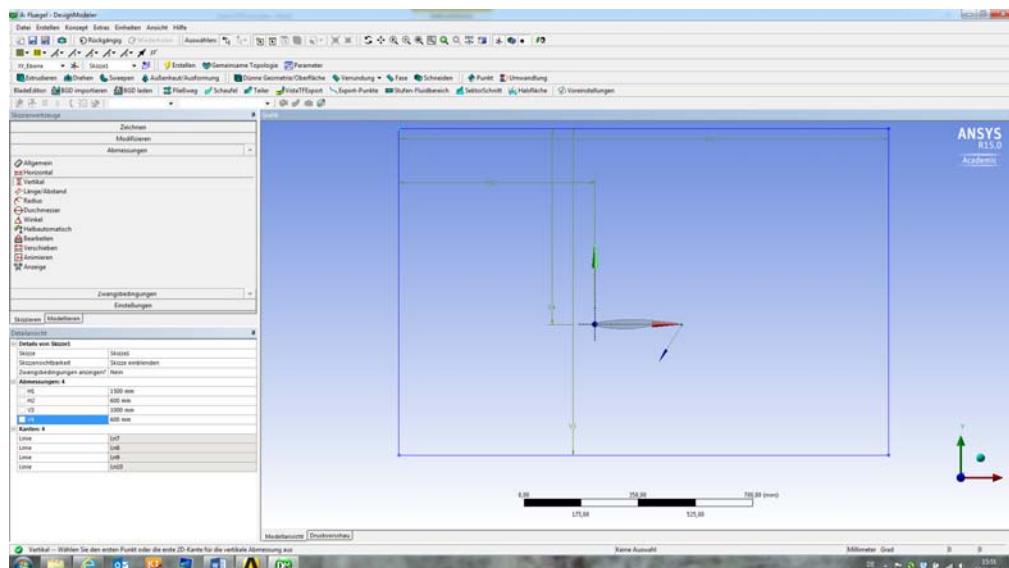


Bild 7-6 DESIGN MODELER: Nach der Bemaßung der Außenränder

7.1.6 Erzeugung eines Volumenkörpers

ANSYS CFX benötigt zur Strömungsberechnung Volumenelemente. Da es sich bei diesem Beispiel um einen zweidimensionalen Tragflügelschnitt handelt, muss aus der Fläche ein Volumen erzeugt werden. Hierzu wird der Tragflügelschnitt in Spannweitenrichtung (hier z-Richtung) ausgeweitet (extrudiert). Als Tiefe hat auf das Strömungsergebnis keinen Einfluss, geht aber bei der Auswertung in die Fläche ein, wenn der Auftriebs- und Widerstandsbeiwert berechnet werden soll. Die Vorgehensweise erfolgt in zwei Schritten:

1. Zuerst wird die Symmetrieebene zum Volumen ausgeweitet (extrudiert),
2. Dann wird der Tragflügel herausgeschnitten (eliminiert), da in seinem Inneren keine Strömung berechnet werden soll.

Die Ausweitung der Symmetrieebene zum Volumen geschieht wie folgt:

- In oberer Aufgabenleiste **Extrudieren** anklicken. Im Strukturbau wird Extrudieren1 angelegt.
- Im Fenster Detailansicht erscheinen dann die Details von Extrudieren1:
 - Extrudieren: Extrudieren1. Name der zu extrudierenden Ebene.
 - Geometrie: **Skizze1**. Hierzu **Skizze1** im Strukturbau oder im Grafikfenster auswählen und **Anwenden** anklicken.
 - Richtungsvektor: Ebenennormale. Hierzu die **XY_Ebene** im Strukturbau auswählen und **Anwenden** anklicken.
 - FD1, Tiefe (>0): **10 mm**. Hier kann die Tiefe des Volumens angeben werden.

- In oberer Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken. Im Strukturbaum erscheint dann ein grüner Haken vor Extrudieren1.

Jetzt kann der Tragflügel aus dem Rechengebiet herausgeschnitten werden:

- In oberer Aufgabenleiste **Extrudieren** anklicken. Im Strukturbaum wird Extrudieren2 angelegt.
- Im Fenster Detailansicht erscheinen die Details von Extrudieren2:
 - Extrudieren: Extrudieren2. Name der zu extrudierenden Ebene.
 - Geometrie: **Komponente1** im Fenster Strukturbaum auswählen und **Anwenden** anklicken. Es erscheint 1 Feature.
 - Operation: **Material wegschneiden**.
 - Richtungsvektor: Ebenennormale. Hierzu wieder im Strukturbaum die **XY_Ebene** auswählen und **Anwenden** anklicken.
 - FD1, Tiefe (>0): **10 mm**. Wieder dieselbe Tiefe angeben.
- In oberer Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken. Im Strukturbaum erscheint dann ein grüner Haken vor Extrudieren2.

Das dreidimensionale Rechengebiet ohne das Flügelinnere ist in Bild 7-7 dargestellt.

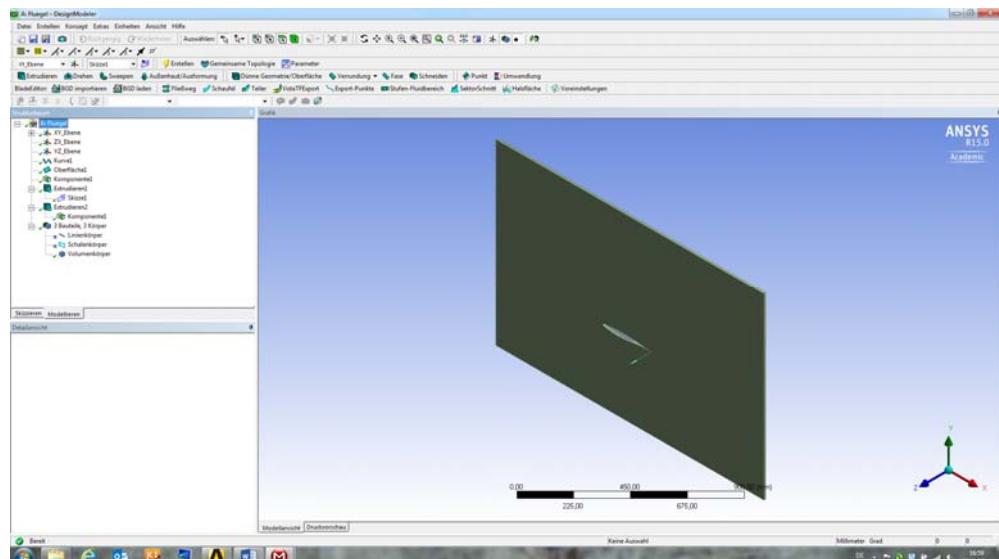


Bild 7-7 DESIGN MODELER: Nach der Erzeugung des 3-D Rechengebiets

Zum Schluss werden im Strukturbaum noch der **Linien- und der Schalenkörper unterdrückt**, da später nur noch der Volumenkörper benötigt wird. Diese erscheinen im Strukturbaum nach dem Aufklappen der Bauteile. Dann mit der rechten Maustaste den jeweiligen **Körper markieren** und **Körper unterdrücken** auswählen. Die Unterdrückung wird durch die schwarzen Kreuze vor dem Linien- und Schalenkörper angezeigt.

7.1.7 Beenden des Programms DESIGN MODELER

Falls gewünscht kann die Geometrie im Programm DESIGN MODELER als CAD-Datei abgelegt werden. Über die Aufgabenleiste **Datei** und **Exportieren** anklicken. Es stehen mehrere CAD-Formate zur Verfügung.

Durch das Schließen des Programms DESIGN MODELER werden die Geometriedaten automatisch in einer **agdb-Datei** abgespeichert. Sie stehen dann der anschließenden Netzerzeugung zur Verfügung. Im WORKBENCH Projektschema erscheint jetzt ein grüner Haken bei Geometrie.

7.2 Erzeugung des Rechennetzes

7.2.1 Erzeugung des Startnetzes mit dem Programm MESHING

Zur Erzeugung des Rechennetzes klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Netz** doppelt an. Das Programm MESHING startet. Durch Anklicken von **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste wird ein erstes unstrukturiertes Netz mit den vom Programm vorgegebenen Standardparametern erzeugt (Bild 7-8).

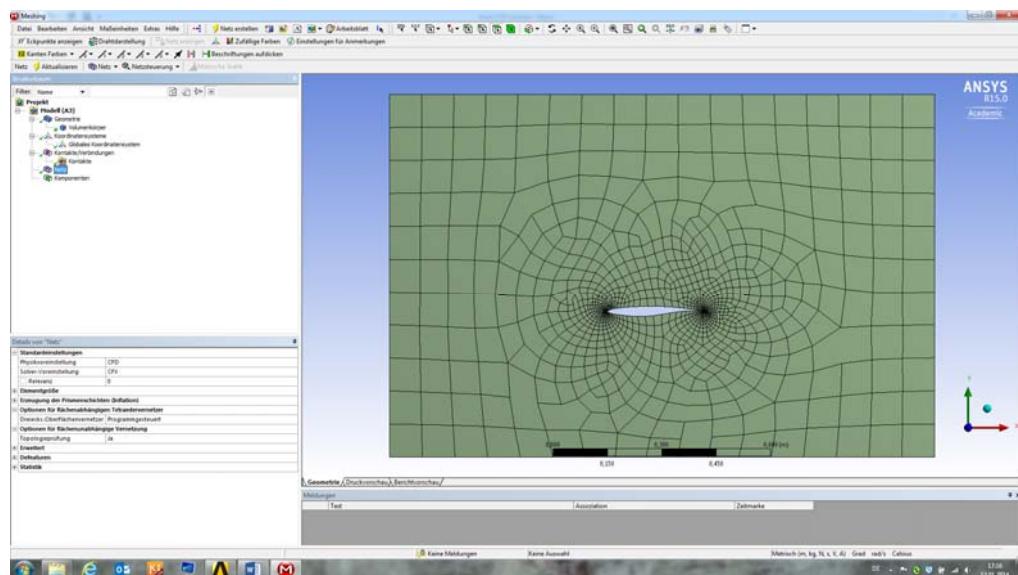


Bild 7-8 MESHING: Startnetz mit Standardparametern

7.2.2 Erzeugung eines verfeinerten Rechennetzes

Mit den Standardeinstellungen des Programms MESHING wird die Strömungsgrenzschicht am Profil nicht gut aufgelöst und es kann keine genaue Strömungslösung erwartet werden. Deshalb muss das Rechennetz am Flügelprofil verfeinert werden. Dies geschieht beim Programm MESHING durch die Einführung einer sog. Prismenschicht am Profil, einem lokalen O-Rechen-Netz aus Hexaedern. Bei Hexaedern ist zudem der Abbruchsfehler kleiner als bei Tetraedern wegen der geringeren Schiefwinkligkeit, was zusätzlich der Genauigkeit zu Gute kommt.

Der Ablauf ist wie folgt:

- Im Strukturbaum **Netz** mit rechter Maustaste anklicken, dann **Einfügen** und **Erzeugung der Prismenschichten (Inflation)**. In der Detailansicht können nun die Parameter eingegeben werden (um auf die richtige Detailansicht zugreifen zu können muss ev. im Strukturbaum die Erzeugung der Prismenschichten markiert werden).
- In der Detailansicht unter **Bereich** angeben:
 - Auswahlmethode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: 1 Körper
Ggf. in der Aufgabenleiste **Körper/Element anklicken** (grüner Würfel).
Im Grafikfenster den **Körper** auswählen, was in diesem Fall das gesamte Rechengebiet ist, da es nur einen Volumenkörper gibt.
Anwenden anklicken, es erscheint 1 Körper.
- In der Detailansicht unter **Definition** angeben:
 - Randbezug Methode: Geometrieauswahl
 - Begrenzung: 1 Fläche
Ggf. in der Aufgabenleiste **Fläche anklicken** (Würfel mit 1 grünen Fläche).
Im Grafikfenster die **Fläche** auswählen, um die die Prismenschicht gelegt werden soll.
In diesem Fall ist es die Innenseite des Tragflügelprofils.
Anwenden anklicken, es erscheint 1 Fläche.
 - Option zur Erzeugung der Prismenschichten: **Dicke der ersten Schicht**
 - Höhe der ersten Schicht: **0,5mm**. (Falls in der Aufgabenleiste unter Maßeinheiten m eingestellt ist auf mm umschalten oder Wert in m eingeben).
 - Maximale Anzahl der Schichten: **10**.
- In der Aufgabenleiste **Netz erstellen** anklicken.

Das verfeinerte Rechennetz wird erzeugt. In der Aufgabenleiste muss ggf. **Netz anzeigen** markiert werden, damit das Netz sichtbar ist. In Bild 7-9 ist die Prismenschicht um das Flügelprofil dargestellt. Das vollständige verfeinerte Rechennetz ist in Bild 7-10 zu sehen.

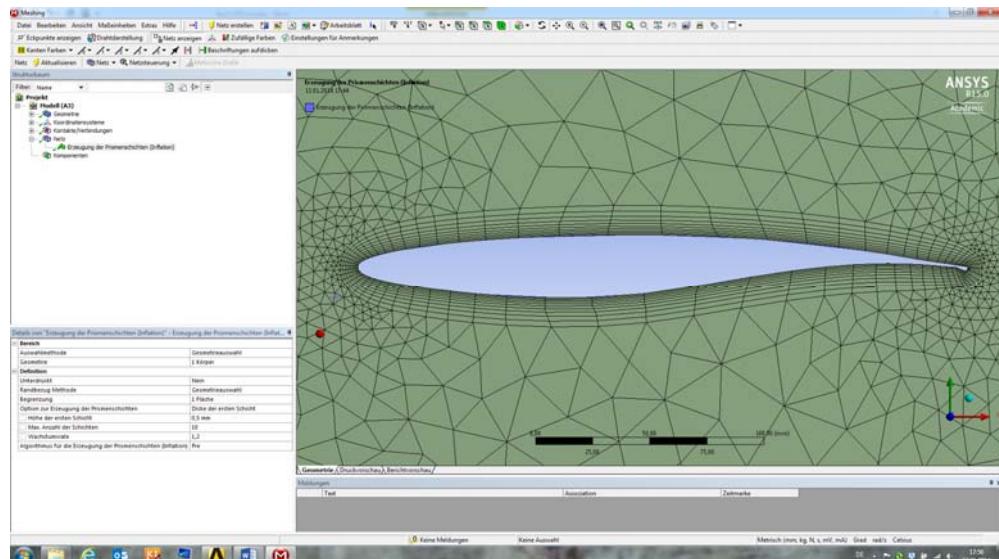


Bild 7-9 MESHING: Die Prismenschicht aus Hexaedern um das Flügelprofil

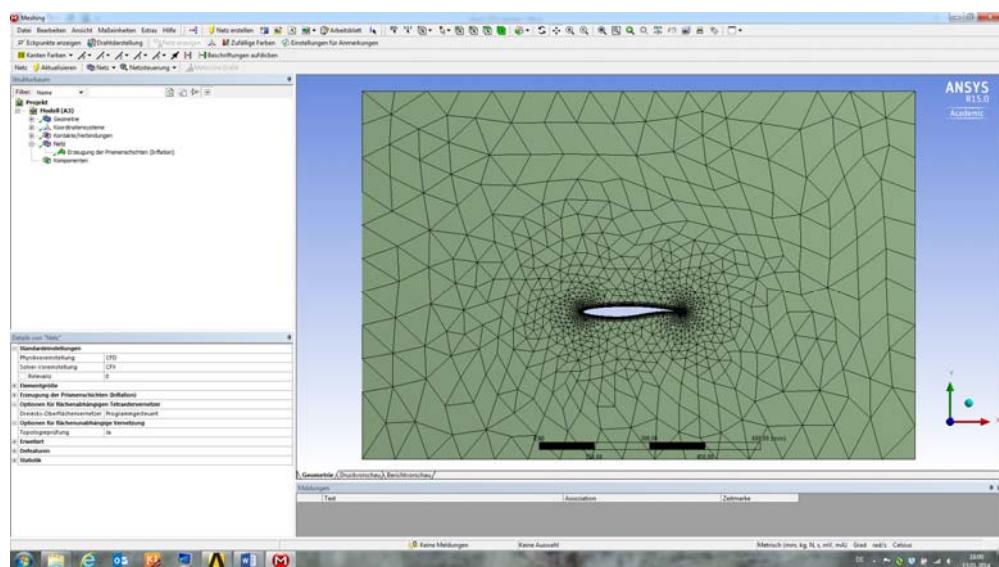


Bild 7-10 MESHING: Das verfeinerte Rechennetz mit der Prismenschicht am Flügelprofil

7.2.3 Benennung der Randflächen (Komponenten)

Alle Flächen haben standardmäßig Nummern als Namen. Um später im Programm CFX-PRE die richtigen Flächen für die Definition der physikalischen Randbedingungen zu finden, ist es vorteilhaft, wenn jede Randfläche separat als Komponente mit einem assoziativen Namen definiert wird. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

- In der Aufgabenleiste **Fläche markieren** (Würfel mit grüner Fläche).
- Im Grafikfenster eine **Randfläche markieren**, z. B. den Abströmrang rechts. Diese wird dann grün. Gegebenenfalls muss im Grafikfenster die Geometrie gedreht werden, bis diese Randfläche sichtbar wird und angeklickt werden kann.
- Mit rechter Maustaste **Komponente erstellen** auswählen.
- Die Komponente hat standardmäßig den Namen Auswahl. Diese mit rechter Maustaste im Strukturbau anklicken und **Umbenennen** z. B. in **Abstroemrand**.

Für folgende Randflächen müssen in diesem Beispiel Komponenten definiert werden: **Zustromrand**, **Abstroemrand**, **Profil**, **Periodisch_oben**, **Periodisch_unten**, **Symmetrie_vorne** und **Symmetrie_hinten**. Die Randflächen werden im Grafikfenster mit roten Pfeilen angezeigt, sofern sie im Strukturbau markiert sind (Bild 7-11).

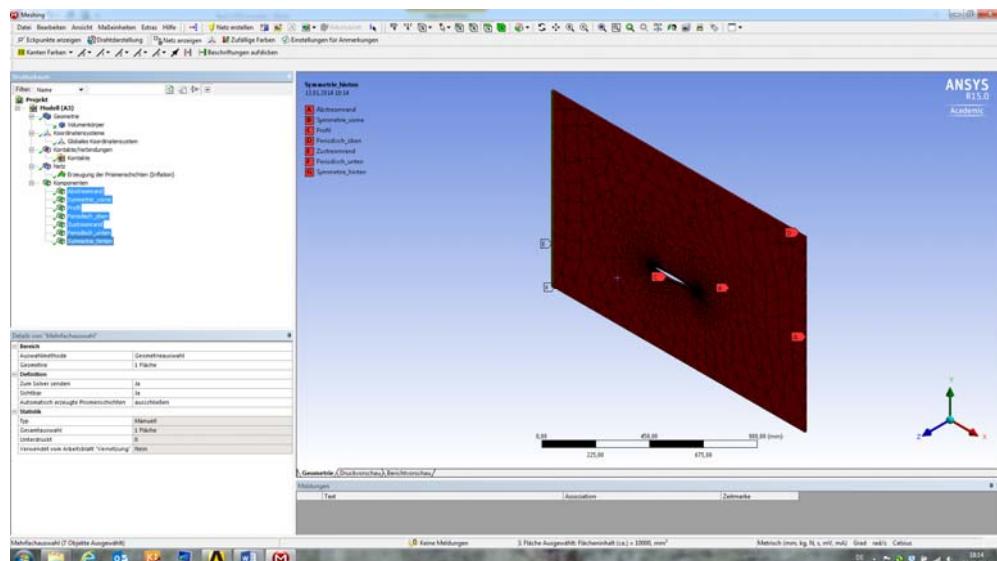


Bild 7-11 MESHING: Nach der Erzeugung der Komponenten

7.2.6 Beenden des Programms MESHING

Durch das Schließen des Programms MESHING werden die Netzdaten automatisch in einer **cmdb-Datei** abgespeichert. Sie stehen dann für die anschließende Vorbereitung der Rechnung zur Verfügung. Im WORKBENCH Projektschema erscheint jetzt ein grüner Haken bei Netz.

7.3 Vorbereitung der Rechnung

Achtung: ab hier müssen **Dezimalzahlen mit Punkt** eingegeben werden entsprechend der englischen Schreibweise.

7.3.1 Starten des Programms CFX-PRE

Zur Erzeugung der Eingabedaten für die Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Setup** doppelt an. Das Programm CFX-PRE startet (Bild 7-12).

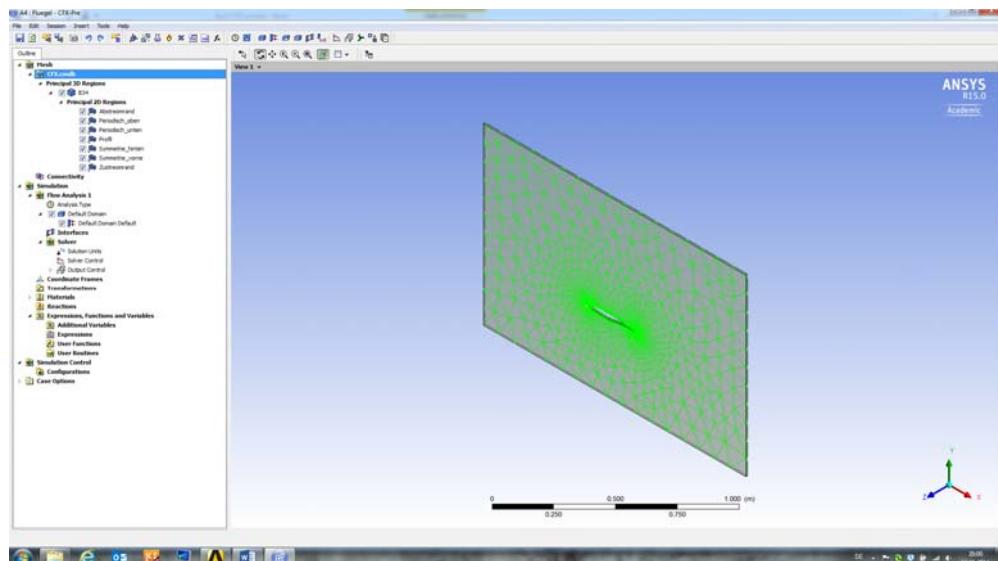


Bild 7-12 CFX-PRE: Startfenster

Das Rechennetz kann mit angezeigt werden, indem im Strukturbau die Netzdatei CFX.cmdb markiert wird.

7.3.2 Definition der Rechenparameter

Die meisten Rechenparameter sind bereits mit sinnvollen Standardwerten besetzt. Nachfolgend werden einige Parameter angegeben, die von allgemeiner Bedeutung sind oder geändert werden sollten:

- Im Strukturbau unter **Analysis Type** kann angegeben werden, ob eine stationäre (Steady State) oder instationäre (Transient) Strömung berechnet werden soll. Der Standardwert ist Steady State und wird auch für dieses Beispiel verwendet.
- Zum Schließen der Eingabefenster gibt es immer drei Optionen:
 - Wenn das Fenster kann mit **OK** geschlossen wird, so werden die Änderungen wirksam und das Fenster schließt sich.

- Wenn mit **Apply** geschlossen wird, so werden die Änderungen wirksam und das Fenster bleibt offen.
- Wird mit **Close** geschlossen so schließt sich das Fenster ohne dass Änderungen übernommen werden.
- Im Strukturaum unter **Default Domain / Basic Settings** sollten folgende Parameter definiert werden (Bild 7-13):
 - Domain Type: Fluid Domain für eine Strömungsberechnung (Standard)
 - Fluid Material: **Air Ideal Gas** für eine Rechnung mit idealem Gasverhalten.
 - Reference Pressure: **0 [Pa]**. Dann wird der Absolutdruck berechnet. (Beim Standardwert 1 atm würde der Relativdruck zu 1 atm berechnet.)

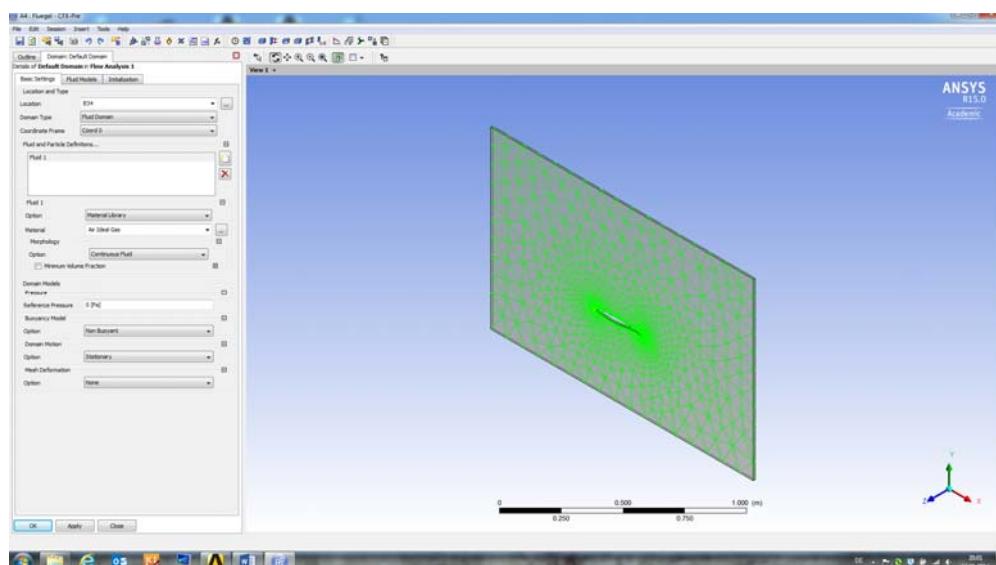


Bild 7-13 CFX-PRE: Default Domain / Basic Settings

- Ins Fenster **Default Domain /Fluid Models** wechseln, wo folgende Parameter gewählt werden sollten (Bild 7-14):
 - Heat Transfer Option: **Total Energy**. In der Energieerhaltungsgleichung wird die totale bzw. gesamte Energie berücksichtigt, die sich aus innerer, kinetischer und potentieller Energie (nur bei Flüssigkeiten) zusammensetzt. Die Option Viscous Work Term ist standardmäßig nicht aktiviert. Hierdurch werden die Reibungsterme bei der Energieerhaltungsgleichung nicht berücksichtigt. Dies beeinflusst die Genauigkeit in der Regel nur wenig, spart aber Rechenzeit und verbessert das Konvergenzverhalten.
 - Turbulence Option: **Shear Stress Transport** ist das empfohlene Turbulenzmodell in CFX. Es löst die $k-\epsilon$ -Gleichung und schaltet wandnah auf die $k-\omega$ -Gleichung um. Hierdurch ergibt sich eine gute Genauigkeit bei kurzen Rechenzeiten.
- Mit **OK** bestätigen. Das Fenster schließt sich.

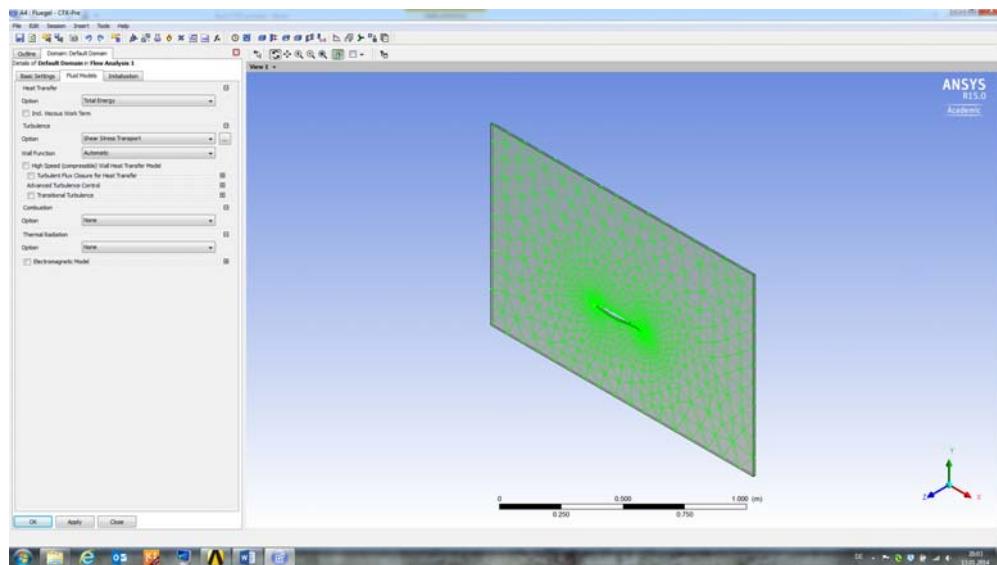


Bild 7-14 CFX-PRE: Default Domain / Fluid Models

Bei Bedarf kann im Strukturbau der Rechenlauf näher spezifiziert werden, sofern von den unten angegebenen Standardeinstellungen abgewichen werden soll:

- Hierzu im Strukturbau **Solver Control** doppelklicken. Es öffnet sich das Fenster Basic Settings. Unter **Basic Settings** sind folgende Standard-Parameter zu finden (Bild 7-15):
 - Advection Scheme Option: High Resolution. Dies ist der Lösungsalgorithmus, der eine gute Genauigkeit und Robustheit, auch an Stößen, liefert.
 - Max. Iterations: **300**. Wenn die Residuen nicht unter den Zielwert sinken, hört der Rechenlauf nach spätestens dieser Iterationszahl auf.
 - Timescale Control: Auto Timescale. Hier kann der Zeitschritt eingegeben werden. Bei stationären Rechnungen kann er automatisch berechnet werden.
 - Residual Target: $1.E-4$. Der Rechenlauf hört auf, wenn das Residuum kleiner als 10^{-4} wird. Dies bedeutet, dass alle Erhaltungsgleichungen bis auf einen Fehler von 10^{-4} erfüllt sein müssen.
- Mit **OK** bestätigen.

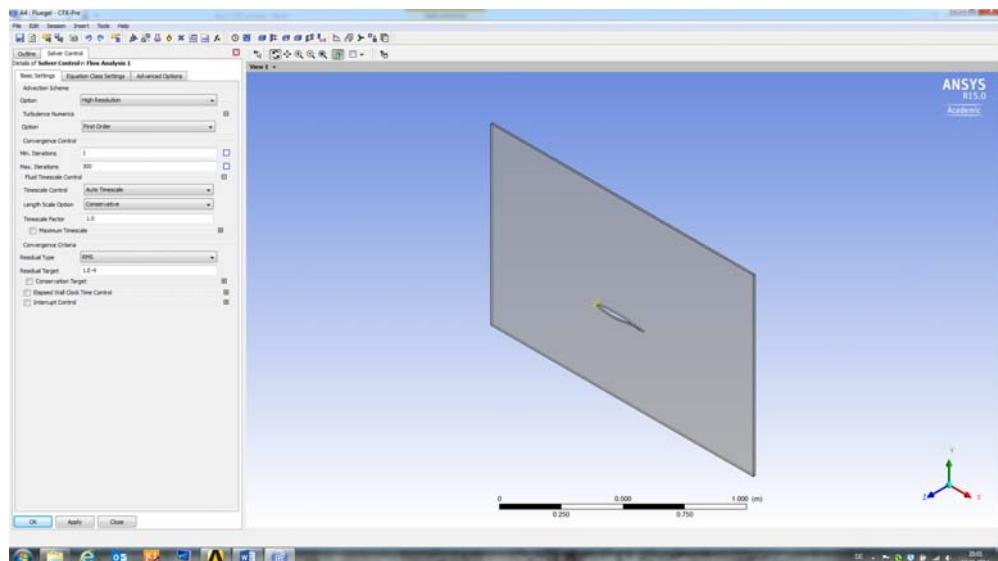


Bild 7-15 CFX-PRE: Solver Control / Basic Settings

Des Weiteren können noch zusätzliche Ausgabegrößen für den Rechenlauf definiert werden:

- Im Strukturbaum **Output Control** mit Doppelklick öffnen. Es erscheinen die drei Unterfenster Results, Backup und Monitor.
- Ins Fenster **Monitor** wechseln (Abb. 7-16). Hier können zusätzliche Konvergenzgrößen definiert werden, die während des Rechenlaufes zur Konvergenzkontrolle angezeigt werden.
- Das Kästchen **Monitor Objects aktivieren**. Es erscheinen sechs Optionen.
- Unter der Option **Monitor Points and Expressions** kann jetzt ein Netzpunkt und eine Strömungsgröße definiert werden.
- Das Feld **Add New Item** rechts daneben anklicken. Es erscheint das Fenster **Monitor Point**
 1. Mit **OK** bestätigen. Es wird dann ein Monitorpunkt angelegt, dessen Lage und Variable nun definiert werden können:
 - Option: **Cartesian Coordinates**
 - Output Variables List: **Absolute Pressure**
 - Cartesian Coordinates: **0 0 0**. Hier können die Koordinaten des Monitorpunktes angegeben werden, wie z. B. die Vorderkante. Alternativ kann der Punkt auch im Grafikfenster markiert werden.
- Mit **OK** bestätigen.

Bei der späteren Strömungsberechnung wird nun der Verlauf des statischen Drucks an der Vorderkante des Tragflügels als Konvergenzverlauf angezeigt. Die Strömung im Vorderkantenbereich konvergiert erfahrungsgemäß am langsamsten, da dort starke Gradienten herrschen und sich die richtige Lage des Staupunkts erst einstellen muss.

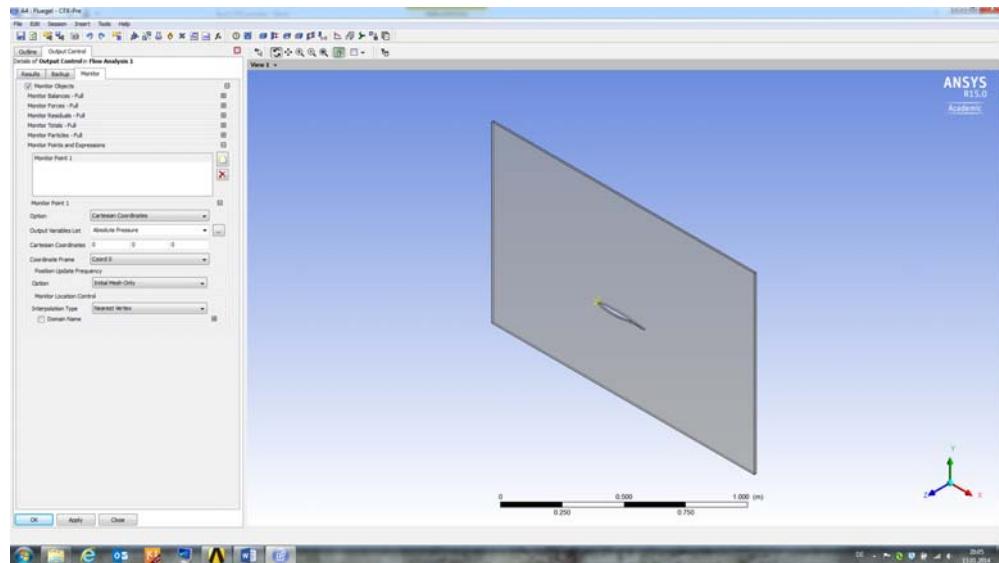


Bild 7-16 CFX-PRE: Output Control / Monitor

7.3.3 Definition der physikalischen Randbedingungen

An allen Rändern des Rechengebiets müssen Randbedingungen vorgegeben werden, damit sich die gewünschte Strömung einstellt. Die physikalischen Werte müssen zuvor berechnet werden. Für das Tragflügelprofil sind z. B. eine Reisefluggeschwindigkeit von $Ma=0,75$ und eine Reiseflughöhe von $h=11,2\text{ km}$ vorgegeben. Anhand der Normatmosphäre ergibt sich für diese Flughöhe ein statischer Druck von $p=22625\text{ Pa}$ und eine statische Temperatur von $T=216,5\text{ K}$. Hieraus ergeben sich für eine kompressible Luftströmung mit $\kappa=1,4$ der Totaldruck und die Totaltemperatur zu

$$p_t = p \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 32858 \text{ Pa} \quad (7.1)$$

$$T_t = T \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \right) = 241 \text{ K} \quad (7.2)$$

Und die Gesamtgeschwindigkeit zu

$$v_{ges} = Ma \cdot a = Ma \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = 221 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (7.3)$$

Hieraus lassen sich die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten u , v je nach dem Anstellwinkel α des Tragflügels berechnen (für diese rein zweidimensionale Strömung gilt $w=0$):

α	0°	4°	8°	12°	Grad
$u = v_{ges} \cdot \cos(\alpha)$	221,0	220,5	219,1	216,4	m/s
$v = v_{ges} \cdot \sin(\alpha)$	0,0	15,4	30,8	46,9	m/s

Die physikalischen Randbedingungen können auf zwei Arten erzeugt werden:

- entweder über die Aufgabenleiste mit dem Symbol **Boundary** (Symbol mit 2 Pfeilen nach links)
- oder über den Strukturabaum. Hierzu ist **Default Domain** mit der rechten Maustaste zu markieren. Über **Insert** und **Boundary** wird die Randbedingung erzeugt.

Es erscheint das Fenster Insert Boundary, wo ein sinnvoller Name für die Randbedingung eingegeben werden kann. Dies betrifft folgende Ränder:

- den Zuströmrand links
- den Abströmrand rechts
- den Festkörperrand am Tragflügelprofil
- die beiden Symmetrieebenen vorne und hinten
- und die beiden periodischen Ränder oben und unten.

Zuströmrand

- Für den Zuströmrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Inflow** eingegeben. Es erscheinen die zwei neuen Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wird die Randart definiert und eine Region zugeordnet:
 - Boundary Type: **Inlet**
 - Location: **Zustroemrand**
- Im Fenster **Boundary Details** werden die physikalischen Randbedingungen eingegeben:
 - Flow Regime: **Subsonic**
 - Mass and Momentum: **Total Pressure (Stable)**
 - Relative Pressure: **32858 Pa**
 - Flow Direction: **Cartesian Components**
 - X Component: **219.1 m/s** (für $\alpha = 8^\circ$)
 - Y Component: **30.8 m/s** (für $\alpha = 8^\circ$)
 - Z Component: **0 m/s**
 - Turbulence: **Medium (Intensity=5%)**
 - Heat Transfer: **Total Temperature**
 - Total Temperature: **241 K.**
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Bild 7-17 zeigt die Pfeile für die Zuströmung am Zuströmrand.

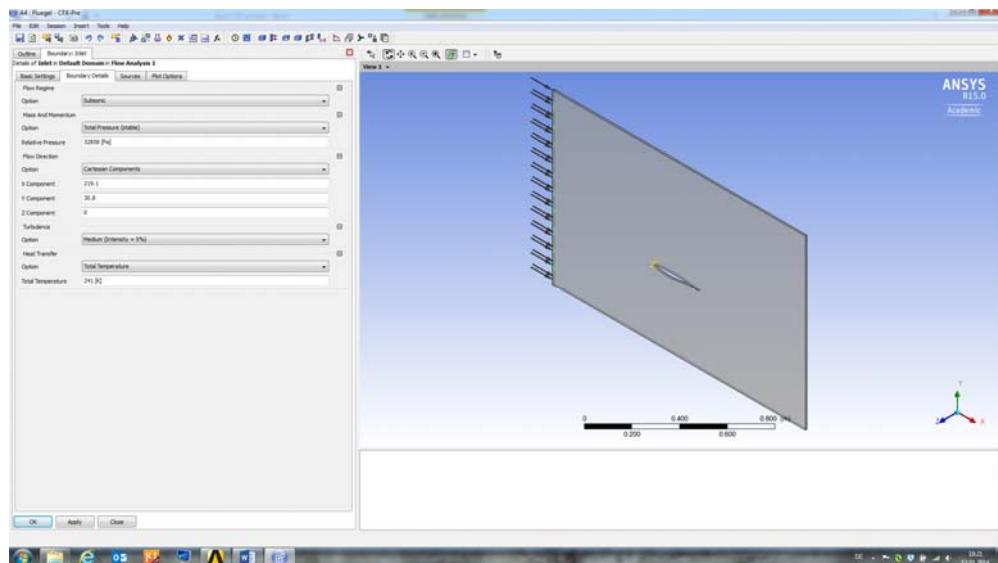


Bild 7-17 CFX-PRE: Nach Eingabe der Zuströmrandbedingungen

Abströmrand

- Für den Abströmrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Outflow** eingegeben. Es erscheinen wieder die beiden Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Die Eingabe im Fenster **Basic Settings** sieht wie folgt aus:
 - Boundary Type: **Outlet**
 - Location: **Outlet**.
- Im Fenster **Boundary Details** wird für eine Unterschallströmung eine physikalische Randbedingung vorgegeben:
 - Flow Regime: **Subsonic**
 - Mass and Momentum: **Static Pressure**
 - Relative Pressure: **22625 Pa**.
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Festkörperrand

- Für den Festkörperrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Solid** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** ist zu wählen:
 - Boundary Type: **Wall**
 - Location: **Profil**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Wall Influence on Flow: No Slip. Dies entspricht einer reibungsbehafteten Strömung an der Wand. (Free Slip entspricht einer reibungsfreien Strömung an der Wand.)

- Heat Transfer: Adiabatic. Dies entspricht einer Wand ohne Wärmeverlust.
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Symmetrieebenen

- Für die Definition der beiden Symmetrieebenen wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Symmetry** eingegeben. Es erscheinen wieder die beiden Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen:
 - Boundary Type: **Symmetry**.
 - Location: **Symmetrie_hinten**, **Symmetrie_vorne**. Die drei **Punkte rechts anklicken** und mit der **Strg-Taste beide Symmetrieebenen markieren**.
- Das Fenster Boundary Details erscheint hier nicht, da an Symmetrieebenen keine physikalischen Randbedingungen vorgegeben werden müssen.
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Periodische Randbedingungen

Die periodischen Randbedingungen werden von CFX-PRE formal nicht als Randbedingungen, sondern als so genannte Domain Interfaces behandelt.

- hierfür muss in der Aufgabenleiste das Symbol **Create a Domain Interface** (zwei blaue Gebiete mit Verbindungslienien) angeklickt werden.
- Es erscheint das Fenster **Insert Domain Interface**, wo der Name angegeben wie z. B. **Periodicity** angegeben werden kann.
- Im Fenster **Domain Interface** wählen:
 - Interface Type: **Fluid Fluid**
 - Interface Side1 Region List: **Periodisch_oben** für den oberen periodischen Rand
 - Interface Side2 Region List: **Periodisch_unten** für den unteren periodischen Rand
 - Interface Models Option: **Translational Periodicity**.
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Sind alle Ränder definiert, so verschwindet im Strukturbaum unter Outline der Begriff Default Domain Default. Im Grafikfenster sind die Randbedingungen für das Rechengebiet als Pfeile angedeutet, siehe Bild 7-18.

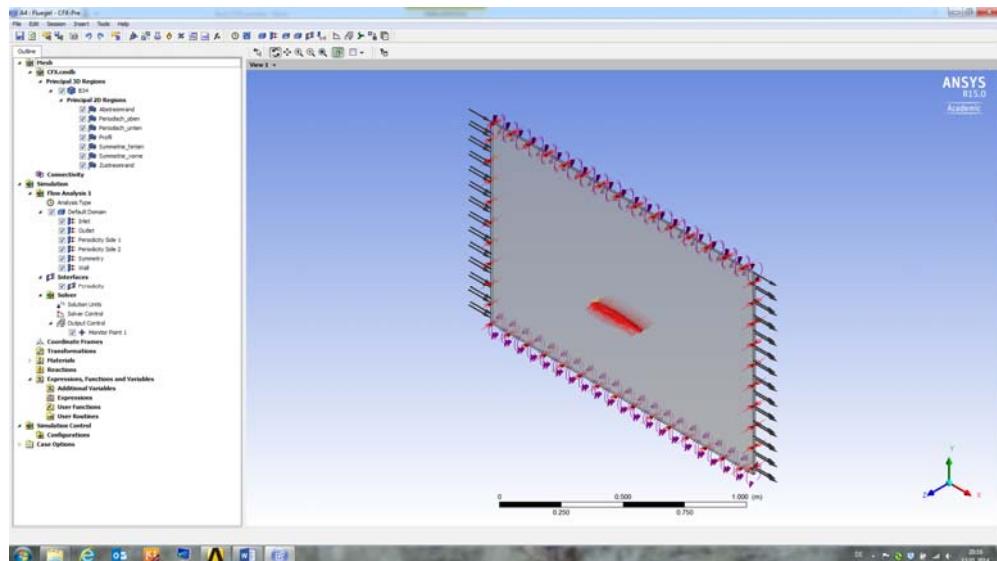


Bild 7-18 CFX-PRE: Nach Eingabe aller Randbedingungen

7.3.4 Beenden der Programms CFX-PRE

Die Daten der Vorbereitung der Strömungsrechnung werden beim Schließen von CFX-PRE in einer sog. **def-Datei** gespeichert.

7.4 Berechnung der Strömung

7.4.1 Starten des Programms CFX

Zum Starten der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Lösung** doppelt an. Der CFX-SOLVER MANAGER startet.

Im sich öffnenden Fenster Define Run (Bild 7-19) kann unter **Run Mode** noch angegeben werden, ob die Strömungsberechnung auf einem (Serial) oder auf mehreren Rechnern parallel durchgeführt werden soll (z.B. Intel MPI Local Parallel). Hierdurch lässt sich die Rechenzeit verkürzen.

Die Strömungsberechnung mit **Start Run** starten.

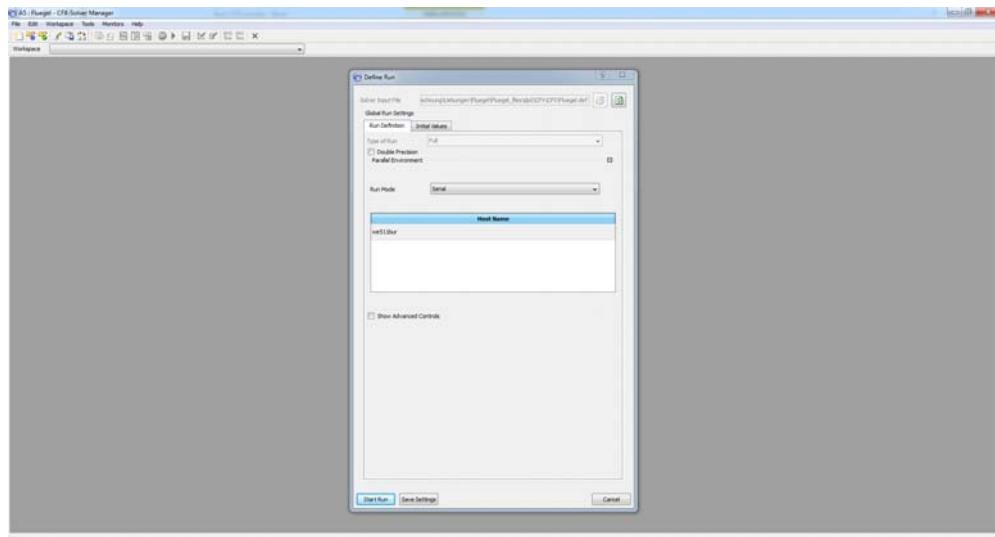


Bild 7-19 CFX-SOLVER: Startfenster für den Rechenlauf

7.4.2 Überwachung des Konvergenzverhaltens

Das Konvergenzverhalten während der Strömungsberechnung wird im Fenster CFX-SOLVER MANAGER dargestellt. Links sind mehrere Grafikfenster und rechts ein Textfeld sichtbar. Im rechten Textfenster werden die wichtigsten Größen des Rechenlaufes ausgegeben:

- die gewählten Eingabegrößen
- die Residuen für jede Erhaltungsgleichung bei jedem Iterationsschritt
- Warnungen und Fehlermeldungen
- und die Rechenzeit.

Im linken Grafikfenster werden die Konvergenzverläufe grafisch dargestellt:

- im Unterfenster **Momentum and Mass** für die Massen- und die drei Impulserhaltungsgleichungen in x-, y- und z-Richtung
- im Unterfenster **Heat Transfer** für die Energieerhaltungsgleichung
- im Unterfenster **Turbulence** für die Turbulenzmodelle
- und im Unterfenster **User Points** für den zuvor in CFX-PRE definierten Monitorpunkt.

Wurde der Rechenlauf erfolgreich beendet, so erscheint die Meldung **Solver Run Finished Normally**. Bei diesem Rechenlauf geschah dies nach 233 Iterationen, da dann alle Residuen kleiner als 10^{-4} sind, wie in CFX-PRE angegeben. Bild 7-20 zeigt die Verläufe der Residuen für die Massen-(rot), x-Impuls- (grün), y-Impuls- (blau) und z-Impulserhaltungsgleichung (gelb).

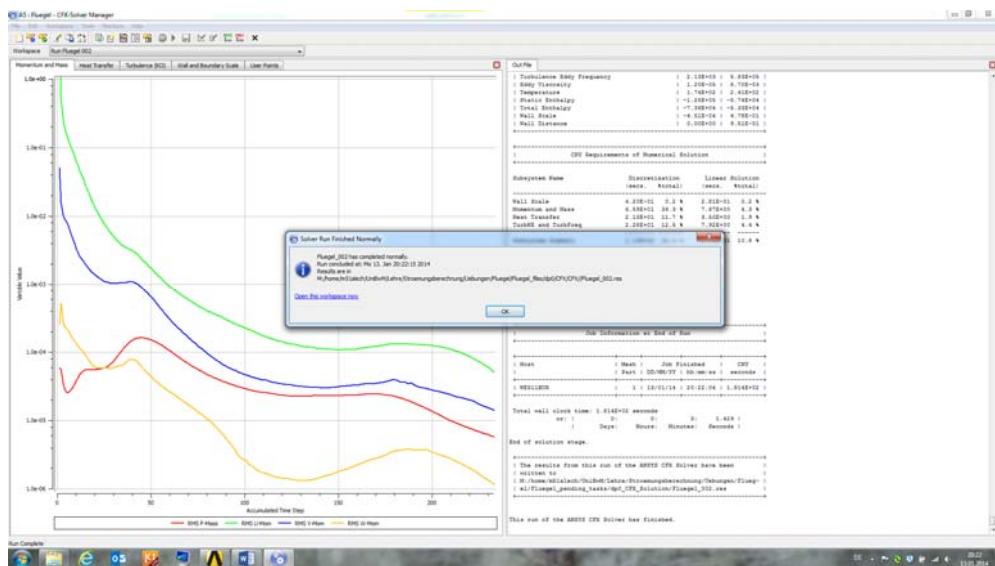


Bild 7-20 CFX-SOLVER: Nach der Beendigung des Rechenlaufs

Im Unterfenster **User Points** ist der zuvor in CFX-PRE definierte Monitorpunkt für den statischen Druck an der Tragflügelvorderkante über der Iterationszahl dargestellt (Bild 7-21). Die Rechnung ist konvergent, wenn sich dieser Wert nicht mehr merklich ändert. Dies ist hier in etwa erfüllt, da die y-Achse für den Druck sehr fein aufgelöst ist.

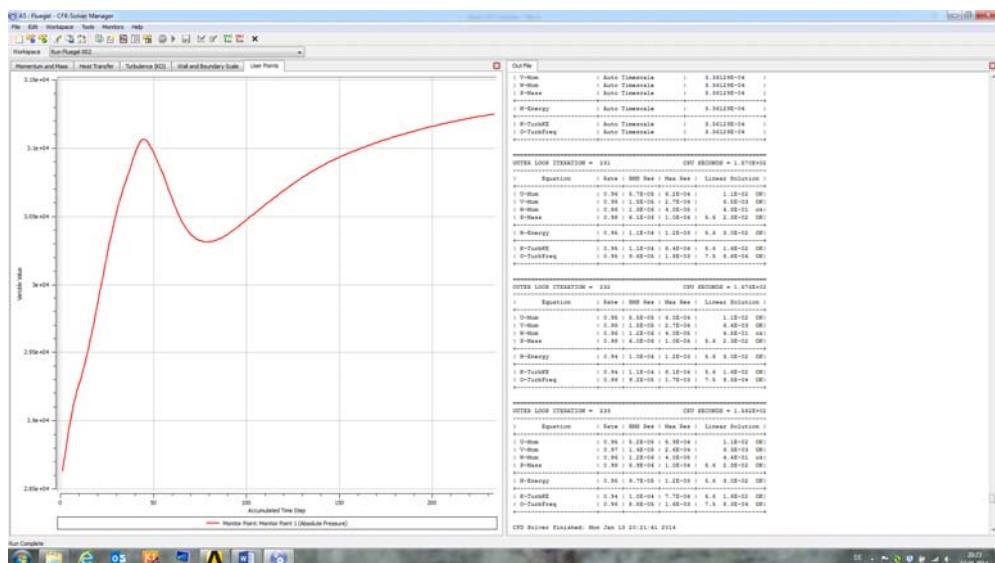


Bild 7-21 CFX-SOLVER: Konvergenzverhalten des Monitorpunkts

7.4.3 Speicherung der Ergebnis-Dateien

Es werden zwei Ergebnisdateien automatisch gespeichert:

- Die Ergebnisdatei wie z. B. **Fluegel_001.res**. Auf ihr stehen das Ergebnis und die Konvergenzverläufe. Das Ergebnis wird für Folgelaufe und die Auswertung in CFD-POST verwendet. Die Konvergenzverläufe können mit CFX-SOLVER nochmals dargestellt werden.
- Die Textdatei wie z. B. **Fluegel_001.out**. Sie enthält den im obigen rechten Fenster während der Rechnung angezeigten Text.
- Die Nummer **_001** ist die Nummer des Rechenlaufs. Bei einem Folgelauf wird der Zähler der Ergebnisdateien um eins auf Fluegel_002.res und Fluegel_002.out erhöht.

7.5 Auswertung der Ergebnisse

7.5.1 Starten des Programms CFD-POST

Zum Darstellen der Ergebnisse der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projekt schema das Feld **Ergebnisse** doppelt an. Das Auswerteprogramm CFD-POST startet (Bild 7-22). Unterhalb des Grafikfensters sind fünf Register sichtbar:

- 3D Viewer für 3D-Ansichten
- Table Viewer für Tabellen
- Chart Viewer für Diagramme
- Comment Viewer für Kommentare
- Report Viewer für automatisch erstellte Berichte.

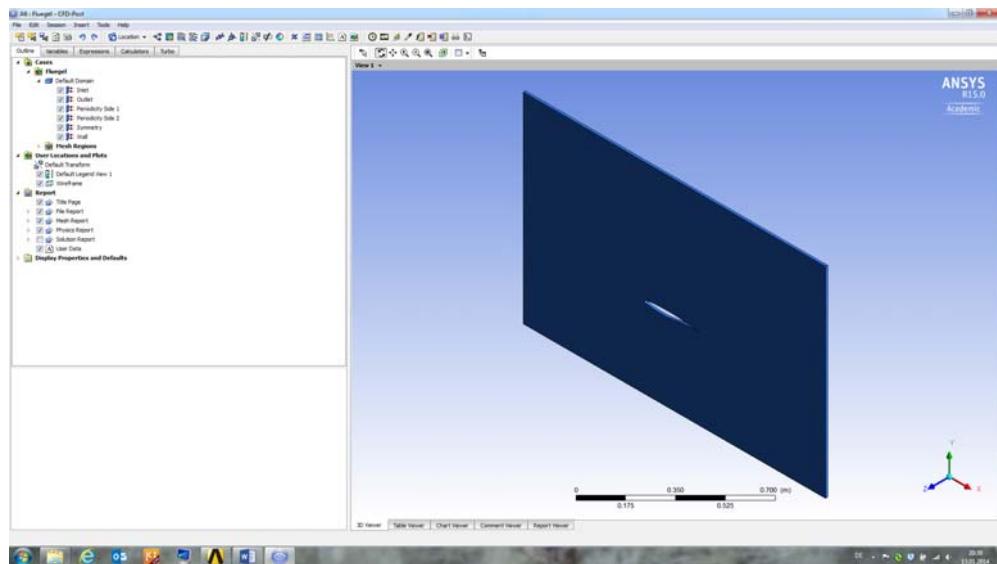


Bild 7-22 CFD-POST: Startfenster

Mit CFD-POST sind zahlreiche grafische und tabellarische Auswertungen möglich:

- Isolinien auf Flächen
- Strömungsvektoren auf Flächen
- Stromlinien und Teilchenbahnen auf Flächen
- Verläufe entlang von Linien
- Integralwerte wie z. B. Auftrieb und Widerstand
- Automatisch erzeugte Berichte über die durchgeführte Rechnung.

Zur Veränderung des Bildausschnitts stehen ebenfalls zahlreiche Möglichkeiten zur Verfügung. Sie können über den unteren Teil der Aufgabenleiste, die direkt über dem Grafikfenster liegt, aufgerufen werden, wie zum Beispiel:

- Drehen (zwei sich drehende Pfeile)
- Verschieben (vier Pfeile in alle vier Richtungen)
- Vergrößern oder Verkleinern (Lupe + und -). Alternativ kann das Vergrößern und Verkleinern des Bildausschnitts auch mit dem Zoomrad der Maus ausgeführt werden.

7.5.2 Erzeugung von Isolinien-Bildern

Für dieses zweidimensionale Beispiel ist vor allem die Darstellung auf der Symmetrieebene sinnvoll. Hierfür kann das Rechengebiet so gedreht werden, dass nur diese Ebene sichtbar ist:

- Im Grafikfenster die **Z-Achse anklicken** und die xy-Ebene wird angezeigt.

Zur Erzeugung von Isolinien-Bildern ist:

- in der Aufgabenleiste das Symbol Contour (Quadrat mit bunten Kreisen) anzuklicken.
- Im Fenster Insert Contour kann ein Name angegeben werden. Standardname ist Contour1.
- In der Detailansicht können nun die Ebene und die Variable der Isolinien angegeben werden. z.B. für die Machzahl auf der Symmetrieebene (Bild 7-23):
 - Locations: **Symmetry**
 - Variable: **Mach Number**
 - # of Contours: 11 ist die standardmäßige Anzahl von Isolinien.
- **Apply anklicken**. Contur1 erscheint dann im Strukturbaum links oben.

Als Variablen stehen zahlreiche Größen zur Verfügung wie Drücke, Temperaturen und Geschwindigkeiten. 16 Variablen können durch **Anklicken des nach unten gerichteten Dreiecks** ausgewählt werden, zahlreiche weitere durch Anklicken der **drei Punkte rechts** daneben.

Die Bilder können auch gespeichert werden. Hierfür in der Aufgabenleiste anklicken:

- File und Save Picture.
- Im neuen Fenster Print kann der Dateiname und das Ausgabeformat z. B. **Machzahl.jpeg** angegeben werden.

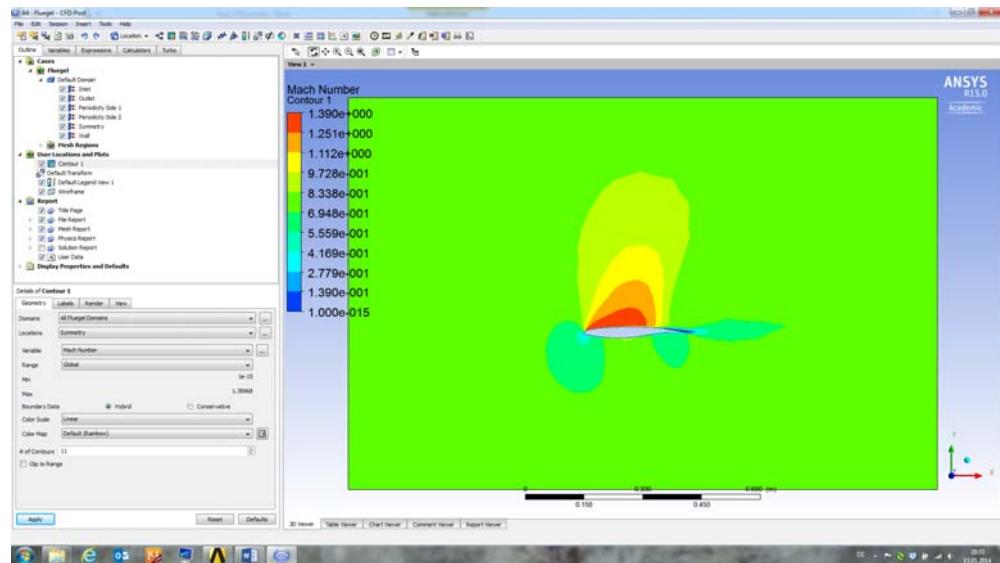


Bild 7-23 CFD-POST: Isolinien der Machzahl auf der Symmetrieebene

7.5.3 Erzeugung von Vektor-Bildern

Zur Erzeugung von Vektorbildern ist:

- in der Aufgabenleiste das Symbol **Vector** (3 Pfeile) anzuklicken.
- Im Fenster **Insert Vector** kann ein Name angegeben werden. Standardname ist **Vector1**.
- Im Strukturabaum sollte das **Isolinienbild Contour1 deaktiviert** werden. Ansonsten sind Isolinien und Vektoren überlagert im Grafikfenster dargestellt.
- In der Detailansicht ist einzugeben:
 - Locations: **Symmetry**
- **Apply** anklicken und **Vector1** erscheint im Strukturabaum links oben.

Bild 7-24 zeigt die Geschwindigkeitsvektoren um den Tragflügelschnitt.

Auf jeden Knoten wird ein Vektor gesetzt, dessen lokale Länge der Geschwindigkeit entspricht. Die globale Vektorlänge wird automatisch anhand der Netzfeinheit berechnet. Sie kann aber auch aus Gründen der Übersichtlichkeit manuell eingestellt werden:

- in der Detailansicht ins Register **Symbol** wechseln und
 - **Symbol Size: 0.2**. Die globale Vektorlänge wird auf 20% reduziert.

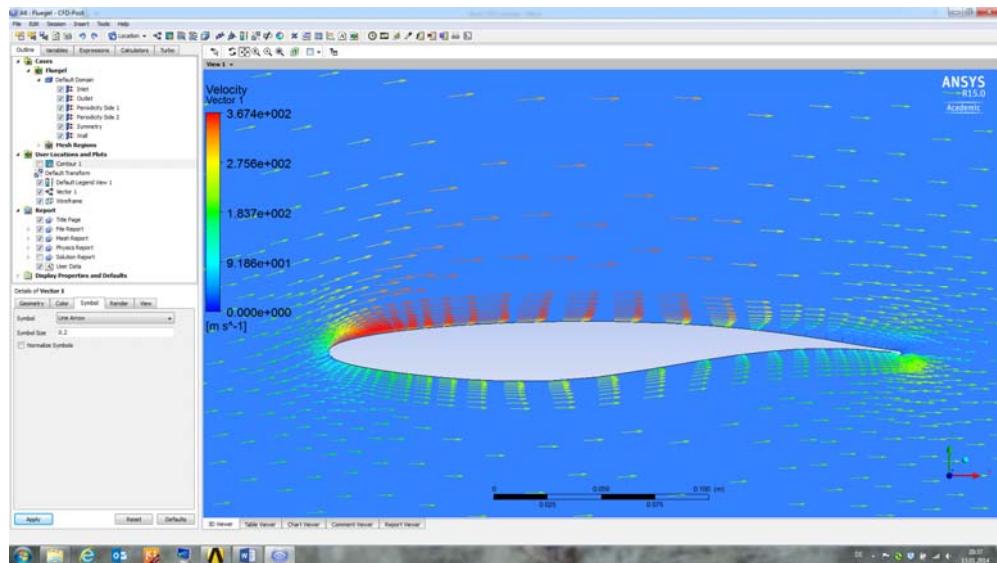


Bild 7-24 CFD-POST: Geschwindigkeitsvektoren auf der Symmetrieebene

7.5.4 Erzeugung von Stromlinien-Bildern

Zur Erzeugung von Stromlinienbildern ist:

- in der Aufgabenleiste das Symbol **Streamline** (Tragflügel mit Stromlinien) anzuklicken.
- Im Fenster **Insert Streamline** kann ein Name angegeben werden. Standardname ist **Streamline1**.
- Im Strukturbau sollte wiederum das **Isolinien- und das Vektorbild deaktiviert** werden.
- In der Detailansicht ist einzugeben:
 - Start From: **Inflow**
 - # of Points: 25. Standardmäßig sind 25 Stromlinien eingestellt.
- **Apply** anklicken und Streamline1 erscheint im Strukturbau links oben.

Bild 7-25 zeigt die Stromlinien um den Tragflügelschnitt.

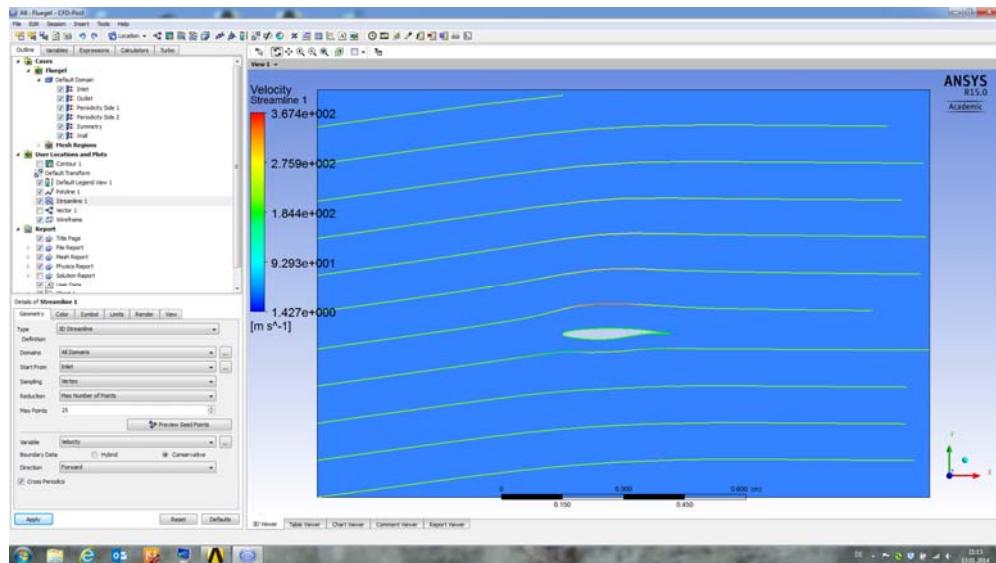


Bild 7-25 CFD-POST: Stromlinien auf der Symmetrieebene

7.5.5 Erzeugung von Diagrammen

Zur Erzeugung von Diagrammen muss zuerst die Linie definiert werden, auf der die Strömungsgröße dargestellt werden soll:

- hierzu in der Aufgabenleiste unter Insert und Location **Polyline** anklicken.
- Im Fenster Insert Polyline kann ein Name angegeben werden. Standardname ist **Polyline1**. Er erscheint dann im Strukturaum links oben.
- In der Detailansicht ist einzugeben:
 - Method: **Boundary Intersection**
 - Boundary List: **Wall**
 - Intersect with: **Symmetry**.

Hiermit ist die Linie zwischen dem Tragflügelprofil und der Symmetrieebene definiert.

Im zweiten Schritt wird das Diagramm definiert:

- In der Aufgabenleiste das Symbol **Chart** (xy-Diagramm mit 3 bunten Linien) anklicken.
- Im Fenster **Insert Chart** kann ein Name angegeben werden. Standardname ist **Chart1**.
- In der Detailansicht kann der Titel des Diagramms angegeben werden:
 - Title: **Druckverteilung auf Druck- und Saugseite**.
- In der Detailansicht werden nun die Details definiert:
 - im Register **Data Series** unter Location: **Polyline 1**
 - im Register **X Axis** unter Variable: **X**
 - im Register **Y Axis** unter Variable: **Pressure**.

- **Apply** anklicken und Chart1 erscheint im Strukturbau links oben.

Jetzt erscheint im Grafikfenster die Druckverteilung entlang Druck- und Saugseite im Register Chart Viewer (Bild 7-26).

Diese Werte können auch in einer Datei gespeichert werden für die spätere Verarbeitung z. B. in Excel. Hierfür muss in der Detailansicht:

- **Export** angeklickt werden.
- Im Export-Fenster kann der Dateityp gewählt werden wie z. B. ***.csv** oder ***.txt**.
- Nach der Eingabe des Dateinamens mit **Save** abspeichern.

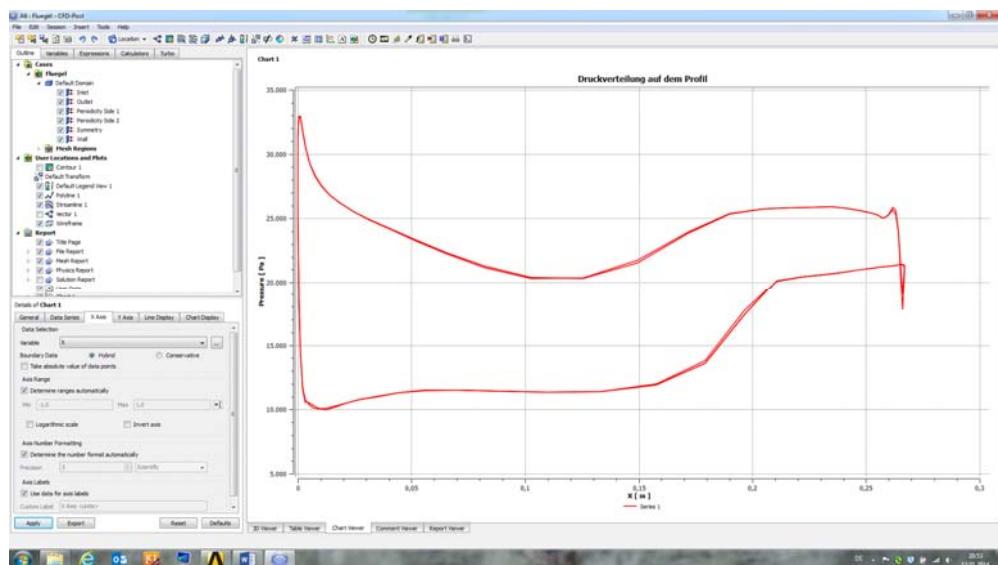


Bild 7-26 CFD-POST: Druckverteilung entlang dem Tragflügelschnitt

7.5.6 Berechnung von Integralwerten

In CFX-POST können auch Integralwerte wie z. B. die Kräfte am Tragflügel direkt ausgegeben werden:

- Hierzu in der Aufgabenleiste das Symbol **Function Calculator** (Taschenrechner mit Funktion f) anklicken. Alternativ kann auch im Strukturbau auf das Fenster **Tools** gewechselt werden, wo **Function Calculator** anzuklicken ist.
- In der Detailansicht eingeben:
 - Function **Force**
 - Location: **Wall**
 - Direction: **Global X** oder **Y**.
- Nach Anklicken von **Calculate** erscheint das Ergebnis im Feld Results:

- -0.05 [N] für die Kraft F_x in x-Richtung
- 25.6 [N] für die Kraft F_y in y-Richtung.

Diese Werte gelten für das Koordinatensystem des Tragflügels. Üblicherweise werden Auftriebs- und Widerstandskraft in Bezug auf die Zuströmung angegeben. Die Umrechnung geschieht wie folgt (bei einem Anströmwinkel von $\alpha = 8^\circ$):

$$F_a = F_y \cdot \cos(\alpha) - F_x \cdot \sin(\alpha) = 25.4 \text{ N} \quad (7.4)$$

$$F_w = F_y \cdot \sin(\alpha) + F_x \cdot \cos(\alpha) = 3.5 \text{ N} \quad (7.5)$$

Diese Kräfte gelten für die (willkürliche) Spannweite des Tragflügels von 10mm, welche bei der Erzeugung des Rechengebiets im DESIGN MODELER vorgegeben wurde. Erst die dimensionslosen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte c_a, c_w sind unabhängig von der Spannweite:

$$c_a = \frac{F_a}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot v_{ges,\infty}^2 \cdot A} \quad (7.6)$$

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot v_{ges,\infty}^2 \cdot A} \quad (7.7)$$

da durch die Flügelfläche A wieder dividiert wurde.

7.5.7 Erstellung eines Berichtes

Zur Dokumentation der Rechnung wird automatisch ein Bericht erstellt. Er ist im Grafikfenster im Register **Report Viewer** sichtbar. Kapitel des Berichts können auch im Strukturaum unter **Report** deaktiviert werden. Mit **Refresh Preview** in der Detailansicht wird der Bericht dann aktualisiert.

7.5.8 Speicherung der Einstellungen

Die Einstellungen des Programms CFD-POST werden beim Schließen des Programms CFD-POST automatisch in einer **cst-Datei** abgespeichert. Diese wird beim erneuten Aufruf von CFD-POST für andere Auswertungen wieder verwendet, wodurch wieder dieselben Bildarten (aber mit den neuen Ergebnissen) automatisch erzeugt werden.

8 Übungsbeispiel Rohrströmung

Nach dem **Starten der ANSYS WORKBENCH** (siehe Kapitel 6.9) wird wieder zuerst das Programm DESIGN MODELER gestartet durch Klicken auf das Feld **Geometrie** (siehe auch Kapitel 7.1.1). Die Geometrie kann entweder als CAD-Datei eingelesen werden oder im Programm DESIGN MODELER erzeugt werden. Anschließend werden beide Möglichkeiten beschrieben.

8.1 Einlesen der Geometrie

Existiert bereits eine CAD-Datei, so kann sie direkt in das Programm DESIGN MODELER importiert werden. Hierzu ist im Programm DESIGN MODELER in der oberen Aufgabenleiste auszuwählen:

- Datei und Externe Geometriedatei importieren.
- Im neuen Fenster den Pfad mit der Geometriedatei (z. B. **Rohr.igs**) auswählen und öffnen. Die gültigen CAD-Dateiformate sind in Kapitel 6.2 angegeben. Im Strukturaum erscheint Import1.
- Im linken Strukturaum **Import1** markieren damit die Detailansicht unten links sichtbar wird. Ggf. die richtige Basisebene (z.B. XY_Ebene) im Strukturaum auswählen und Anwenden anklicken, damit die Geometrie die gewünschte Lage im Koordinatensystem hat.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken.

Die CAD-Datei wird eingelesen und die gelben Haken im Strukturaum werden grün, wie in Bild 8-1 gezeigt.

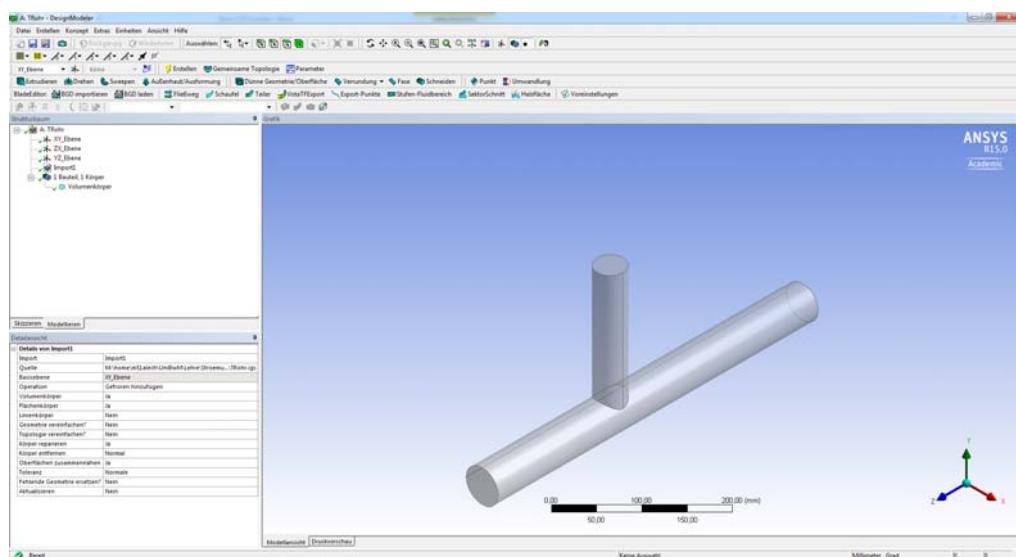


Bild 8-1

DESIGN MODELER: Nach dem Einlesen der CAD-Datei

8.2 Erzeugung der Geometrie

Einfachere Geometrien wie diese Rohrverzweigung können auch direkt im Programm DESIGN MODELER erstellt werden. Hierfür sollte vorher für die zu erstellende Geometrie eine Skizze mit Koordinaten angefertigt werden bevor das Programm DESIGN MODELER gestartet wird (siehe auch Kapitel 7.1.1).

8.2.1 Erstellung der Rohrstücke

Zuerst wird der erste Zylinder erzeugt:

- Hierfür ist in der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen. Es wird ein Zylinder erstellt mit dem Standardnamen Zylinder1.
- In der Detailansicht werden die Lage und die Abmessungen des Zylinders definiert:
 - Zylinder: Zylinder1
 - Ursprung x-Koordinate: 0 mm
 - Ursprung y-Koordinate: 0 mm
 - Ursprung z-Koordinate: **-300 mm**
 - Achse x-Komponente: 0 mm
 - Achse y-Komponente: 0 mm
 - Achse z-Komponente: **500 mm**
 - Radius: **25 mm**.
- Anschließend in der Aufgabenleiste auf **Erstellen** klicken.

Der erste Zylinder erscheint im Grafikfenster (Bild 8-2).

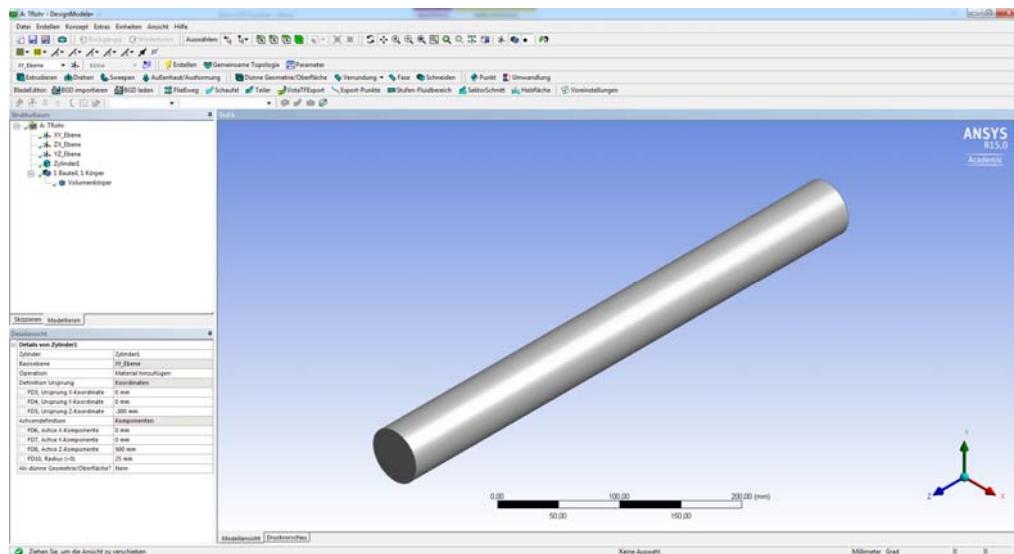


Bild 8-2

DESIGN MODELER: Nach der Erstellung des ersten Zylinders

Anschließend wird der zweite Zylinder auf dieselbe Art und Weise erzeugt:

- Wieder in der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen. Es wird ein Zylinder erstellt mit dem Standardnamen Zylinder2.
- In der Detailansicht werden die Lage und die Abmessungen definiert:
 - Zylinder: Zylinder2.
 - Ursprung x-Koordinate: 0 mm
 - Ursprung y-Koordinate: 0 mm
 - Ursprung z-Koordinate: 0 mm
 - Achse x-Komponente: 0 mm
 - Achse y-Komponente: **200 mm**
 - Achse z-Komponente: 0 mm
 - Radius: **20 mm**.
- Abschließend in der Aufgabenleiste wieder auf **Erstellen** klicken.

Beide Zylinder erscheinen jetzt im Grafikfenster (Bild 8-3).

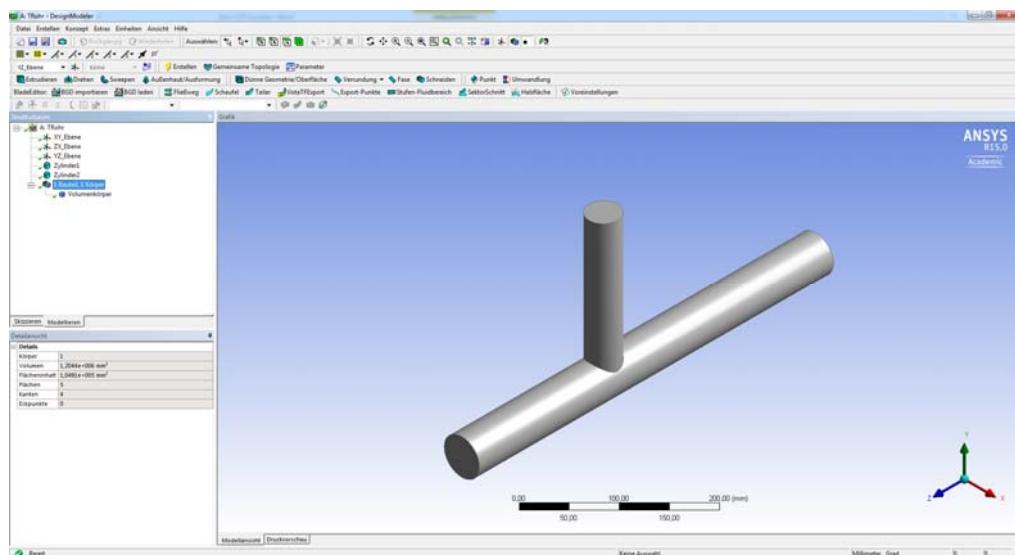


Bild 8-3 DESIGN MODELER: Nach der Erstellung des zweiten Zylinders

8.2.2 Halbierung des Rechenraums

Um bei der Strömungsberechnung Rechenzeit zu sparen, können Symmetrieebenen ausgenutzt werden (siehe Kapitel 6.3). Bei der vorliegenden Rohrströmung kann deshalb eine Hälfte weggeschnitten werden. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

- In der oberen Aufgabenleiste **Extras / Symmetrie** anklicken. Es wird der Standardnamen **Symmetrie1** im Strukturbau angelegt.
- Im linken Detailfenster wird für **Symmetrie1** die Ebene definiert:
 - Symmetrie: **Symmetrie1**
 - Symmetrieebene: **YZ_Ebene** im Strukturbau markieren und **Anwenden** anklicken.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken.

Der halbierte Rechenraum erscheint im Grafikfenster (Bild 8-4).

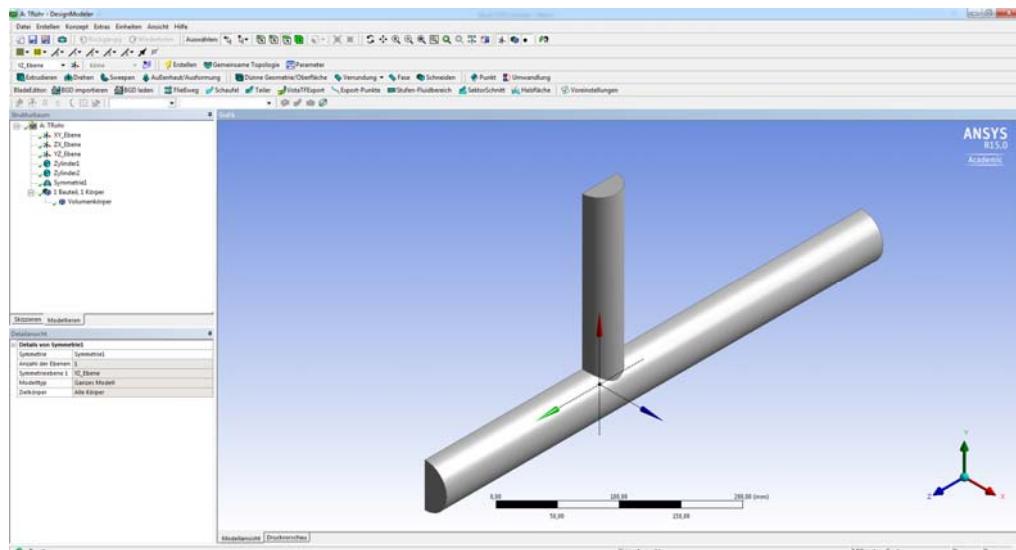


Bild 8-4 DESIGN MODELER: Nach der Halbierung des Rechenraums

8.2.3 Speicherung der Geometrie-Datei

Diese Geometriedatei wird automatisch beim Schließen des Programms DESIGN MODELER als **agdb-Datei** gespeichert. Alternativ kann das gesamte Projekt auch über die obere Aufgabenleiste mit **Datei** und **Projekt Speichern** gespeichert werden. Nach dem Schließen des Programms erscheint im WORKBENCH-Fenster Projektschema ein grüner Haken für die Geometrie.

8.3 Erzeugung des Rechennetzes

8.3.1 Starten des Programms MESHING

Das Rechennetz wird wieder mit dem Programm MESHING erzeugt. Hierzu im ANSYS WORKBENCH Projektschema **Netz** doppelt anklicken.

8.3.2 Erzeugung des Standardnetzes

Durch Anklicken von **Aktualisieren** oder **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste wird ein unstrukturiertes Rechennetz mit den Standardparametern erzeugt (Bild 8-5). Falls das Netz im Grafikfenster unsichtbar ist, kann es aktiviert werden durch Markieren von Netz im Strukturbau oder **Netz anzeigen** in der Aufgabenleiste

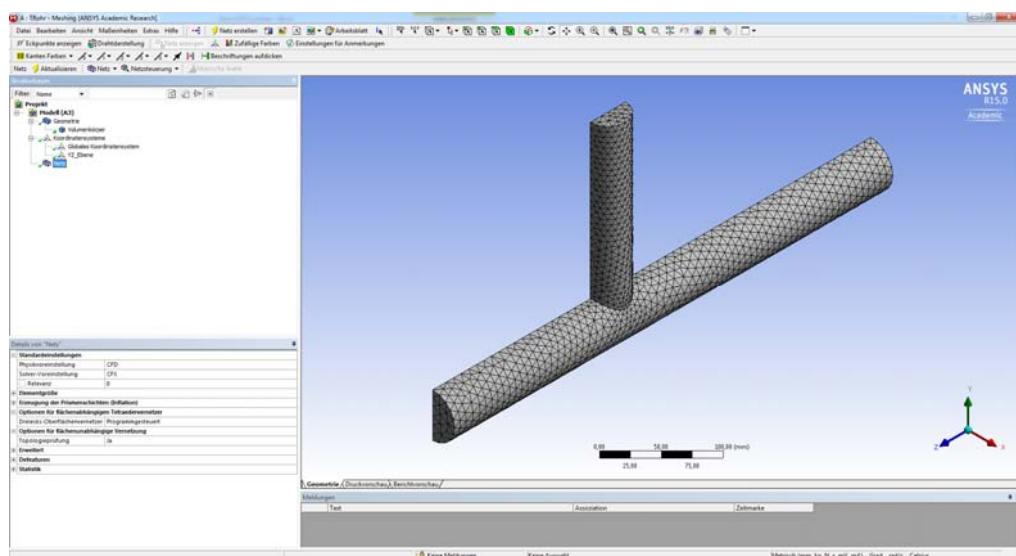


Bild 8-5 MESHING: Nach der Erzeugung des Standardnetzes

8.3.3 Verfeinerung des Netzes an den Rohrwänden

Zur Erhöhung der Genauigkeit in der Grenzschicht wird an den Rohrwänden eine Prismenschicht (Inflation) eingefügt. Hierzu wird im Strukturbau **Netz** mit rechter Maustaste markieren und **Einfügen** und **Erzeugung einer Prismenschicht (Inflation)** ausgewählt. Jetzt werden in der Detailansicht (im Strukturbau ggf. **Erzeugung der Prismenschichten markieren**) die Parameter der Prismenschicht definiert:

- In der Detailansicht unter **Bereich** angeben:
 - Auswahlmethode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: **1 Körper**
In der Aufgabenleiste **Körper anklicken** (grüner Würfel)
Im Grafikfenster den **Körper auswählen**, was in diesem Fall das gesamte Rechengebiet

ist, da es nur einen Volumenkörper gibt.

Anwenden anklicken, es erscheint 1 Körper.

- In der Detailansicht unter **Definition** angeben:

- Randbezug Methode: Geometrieauswahl
- Geometrie: **2 Flächen**

In der Aufgabenleiste **Fläche anklicken** (Würfel mit grüner Fläche)

Im Grafikfenster die **Flächen auswählen**, an die die Prismenschicht gelegt werden soll. In diesem Fall sind es die beiden Rohrwände. Mit der STRG-Taste können beide Flächen markiert werden.

Anwenden anklicken, es erscheint 2 Flächen.

- Option zur Erzeugung der Prismenschicht: **Gesamtdicke**
- Anzahl der Schichten: **15**
- Maximale Dicke: **10 mm**

Jetzt kann das Netz mit der Prismenschicht an den Wänden erstellt werden durch Anklicken von **Aktualisieren** oder **Netz erstellen** entweder in der Aufgabenleiste oder im Strukturbau durch Markieren von Netz mit der rechten Maustaste.

Bild 8-6 zeigt den das Rechennetz mit der Prismenschicht an den Rohrwänden.

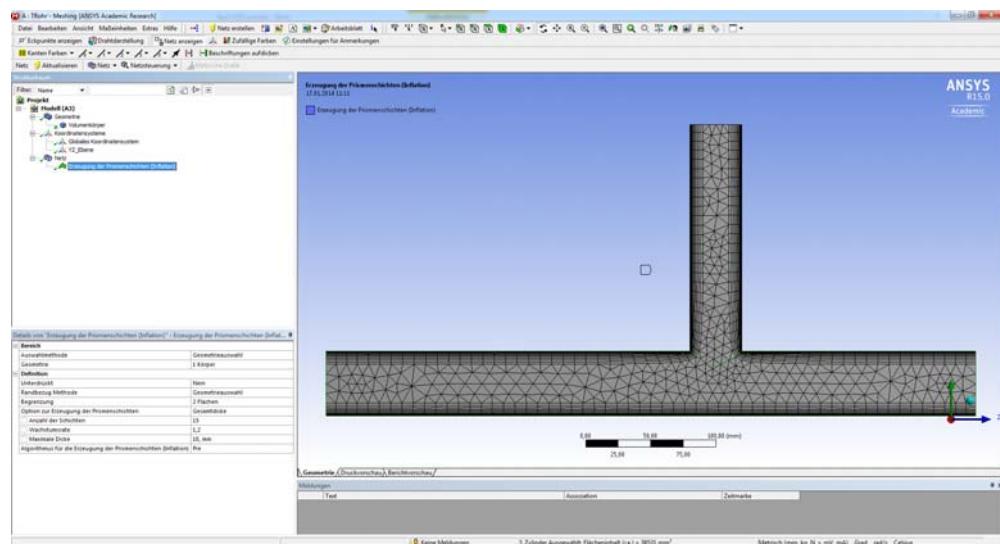


Bild 8-6 MESHING: Nach der Erzeugung des Netzes mit der Prismenschicht an den Rohrwänden

Hinweis: soll das Netz noch weiter verfeinert werden, so muss im Strukturbau Netz markiert werden und im dann sichtbaren Detailfenster von Netz die Elementgröße geöffnet werden (+-Zeichen anklicken). Hier kann z.B. der Winkel der Krümmungsnormalen oder die minimale Größe verkleinert werden.

8.3.4 Benennung der Randflächen (Komponenten)

Um später im Programm CFX-PRE die physikalischen Randbedingungen richtig definieren zu können, muss wieder jede Randfläche separat als Komponente definiert werden. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

- In der Aufgabenleiste **Fläche markieren** (Würfel mit grüner Fläche).
- Im Grafikfenster eine **Randfläche markieren**, z.B. den Zuströmrund links. Diese wird dann grün. Gegebenenfalls muss im Grafikfenster die Geometrie gedreht werden, bis diese Randfläche sichtbar wird und angeklickt werden kann.
- Mit rechter Maustaste **Einfügen** und **Komponente** auswählen.
- Die Komponente hat standardmäßig den Namen Auswahl. Diese mit rechter Maustaste im Strukturbaum anklicken und **Umbenennen** z.B. in **Zustroemrand_vorne**.

Für folgende Randflächen müssen in diesem Beispiel Komponenten definiert werden:

1. Zustroemrand_vorne
2. Zustroemrand_oben
3. Abstroemrand
4. Symmetrie
5. Wand. Mehrere Flächen können durch Halten der Strg-Taste markiert werden.

Die Randflächen werden im Grafikfenster mit roten Pfeilen angezeigt (Bild 8-7).

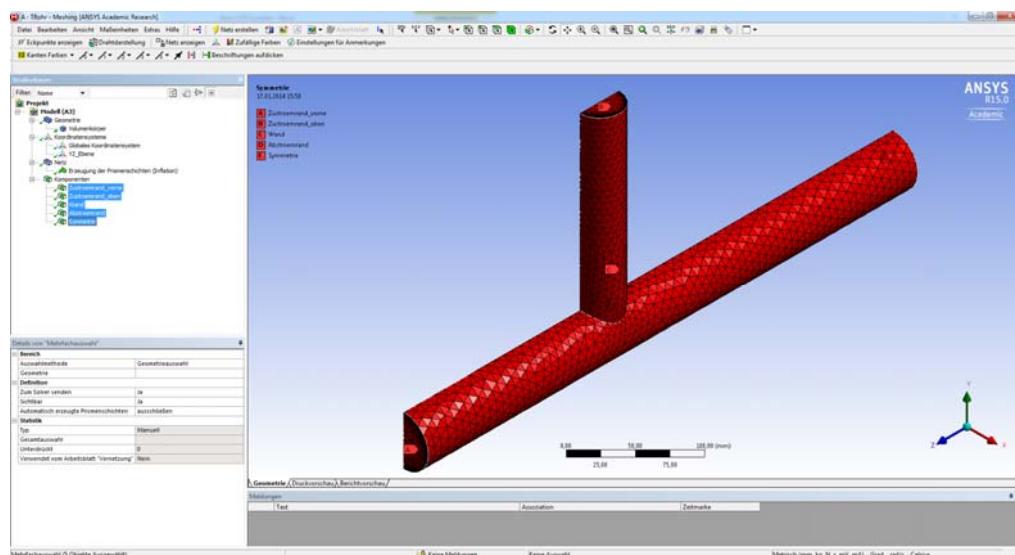


Bild 8-7 MESHING: Nach der Erzeugung der Komponenten

8.3.5 Beenden des Programms MESHING

Diese Netzdatei wird wieder automatisch beim Schließen des Programms MESHING als **cmdb-Datei** gespeichert. Alternativ kann das gesamte Projekt auch über die obere Aufgabenleiste mit **Datei** und **Projekt Speichern** gespeichert werden. Nach dem Schließen des Programms erscheint im WORKBENCH-Fenster Projektschema ein grüner Haken für das Netz.

8.4 Vorbereitung der Rechnung

Achtung: ab hier müssen **Dezimalzahlen mit Punkt** eingegeben werden entsprechend der englischen Schreibweise.

8.4.1 Starten des Programms CFX-PRE

Zur Erzeugung der Eingabedaten für die Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Setup** doppelt an. Das Programm CFX-PRE startet.

Das Rechennetz kann mit angezeigt werden, indem im Strukturbaum die Netzdatei CFX.cmdb markiert wird.

8.4.2 Definition der Rechenparameter

Die Rechenparameter sind bereits mit sinnvollen Standardwerten besetzt. Nachfolgend werden nur diejenigen angegeben, die im **linken Strukturbaum** geändert werden sollten:

- Default Domain anklicken. Es öffnet sich das Fenster Basic Settings:
 - Material: **Water**
 - Reference Pressure: **0 Pa**. Es wird der Absolutdruck berechnet. (Bei 1 atm würde der Relativdruck zu 1 atm berechnet.)
- Jetzt das Fenster **Fluid Models** öffnen:
 - Heat Transfer Option: **Total Energy**
 - Turbulence Option: **Shear Stress Transport**.
- Mit **OK** speichern.

8.4.3 Definition der physikalischen Randbedingungen

An den Rändern des Rechengebiets müssen physikalische Randbedingungen vorgegeben werden. Bei diesem Beispiel werden folgende Randbedingungen verwendet:

- An den Zuströmrändern werden Massenströme vorgegeben. Es ist zu beachten, dass beim halbierten Rohr auch nur der halbe Massenstrom vorgegeben werden darf.
- Am Abströmrand wird der gemittelte statische Druck vorgegeben. Dies hat den Vorteil, dass der statische Druck selbst nicht konstant sein muss am Abströmrand. Hierdurch kann der Abströmbereich verkürzt werden ohne dass die Strömung beeinflusst wird.
- An der Rohrwand werden ein Wärmeübergangskoeffizient und die Umgebungstemperatur vorgegeben.

Generell muss zuvor immer überprüft werden, ob die Größen physikalisch sinnvoll sind und richtig umgerechnet wurden!

Die Randbedingungen können wieder auf zwei Arten erzeugt werden:

1. entweder über die Aufgabenleiste mit dem Symbol **Boundary** (Symbol mit 2 Pfeilen nach links)
2. oder über den Strukturabaum. Hierzu ist **Default Domain mit der rechten Maustaste zu markieren**. Über **Insert** und **Boundary** wird die Randbedingung erzeugt.

Zuströmrand vorne

- Für den Zuströmrand vorne wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Inlet1** eingegeben. Es erscheinen die zwei neuen Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Inlet**
 - Location: **Zustroemrand_vorne**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Flow Regime Option: Subsonic
 - Mass and Momentum Option: **Mass Flow Rate**
 - Mass Flow Rate: **5 kg/s** (für das halbe Rohr)
 - Flow Direction: Normal to Boundary Condition
 - Heat Transfer Option: **Static Temperature**
 - Static Temperature: **20°C**.
- Mit **OK** speichern.

Zuströmrand oben

- Für den Zuströmrand oben wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Inlet2** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Inlet**
 - Location: **Zustroemrand_oben**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Flow Regime Option: Subsonic
 - Mass and Momentum Option: **Mass Flow Rate**
 - Mass Flow Rate: **3 kg/s** (für das halbe Rohr)
 - Flow Direction Option: Normal to Boundary Condition
 - Heat Transfer Option: **Static Temperature**
 - Static Temperature: **50°C**.
- Mit **OK** speichern.

Abströmrand

- Für den Abströmrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Outlet** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Outlet**
 - Location: **Abstroemrand**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Flow Regime Option: Subsonic
 - Mass and Momentum Option: **Average Static Pressure**.
 - Relative Pressure: **2 bar**
 - Pressure Profile Blend: 0.05
 - Pressure Averaging Option: Averaging over whole outlet
- Mit **OK** speichern.

Festkörperrand

- Für den Festkörperrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Wall** eingegeben. Es erscheinen wieder die zwei neuen Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Wall**
 - Location: **Wand**
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Mass and Momentum Option: No Slip Wall
 - Wall Roughness: Smooth Wall
 - Heat Transfer Option: **Heat Transfer Coefficient**
 - Heat Transfer Coefficient: **400 W/m²/K**
 - Outside Temperature: **15°C**.
- Mit **OK** speichern.

Symmetrieebene

- Für die Symmetrieebene wird im Fenster Insert Boundary z. B. **Symmetry** eingegeben. Es erscheinen die zwei neuen Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Symmetry**
 - Location: **Symmetrie**
- Mit **OK** speichern.

Sind alle Randbedingungen definiert, so verschwindet Default Domain Default im Strukturabaum und die Randbedingungen sind mit Pfeilen im Grafikfenster sichtbar, wie in Bild 8-8 gezeigt.

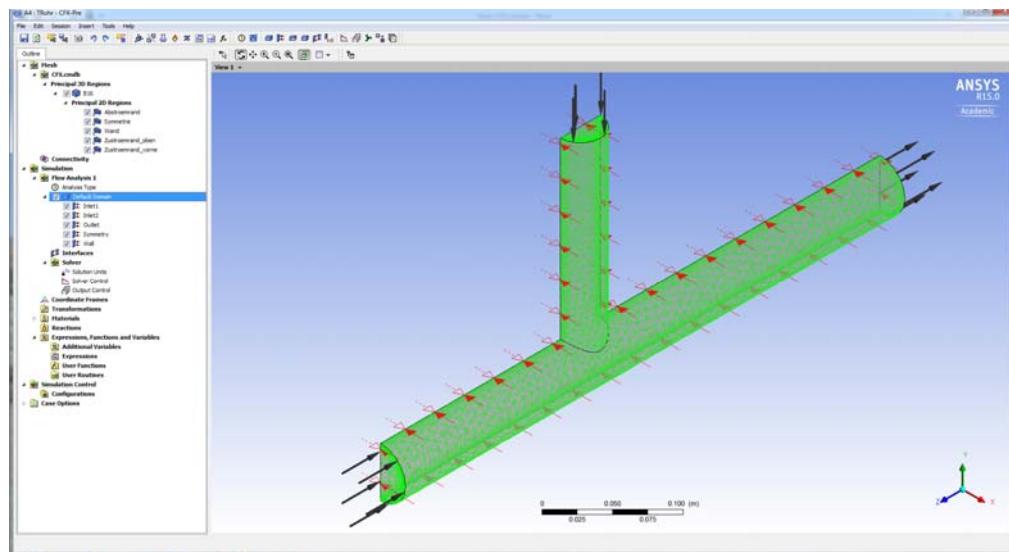


Bild 8-8 CFX-PRE: Nach der Eingabe aller Randbedingungen

8.4.4 Speichern der CFX-PRE-Datei

Diese Parameterdatei wird wieder automatisch beim Schließen des Programms CFX-PRE als **cfx-Datei** gespeichert. Alternativ kann das gesamte Projekt auch über die obere Aufgabenleiste mit **Datei** und **Projekt Speichern** gespeichert werden. Nach dem Schließen des Programms erscheint im WORKBENCH-Fenster Projektschema ein grüner Haken für das Setup.

8.5 Berechnung der Strömung

8.5.1 Start des Programms CFX-SOLVER

Zum Starten der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Lösung** doppelt an. Der CFX-SOLVER MANAGER startet.

Im sich öffnenden Fenster Define Run die Strömungsberechnung mit **Start Run** starten.

8.5.2 Überwachung des Konvergenzverhaltens

Nach dem Start des Rechenlaufes erscheint das Register CFX-Solver. Neben der oberen Aufgabenleiste gibt es links wieder das Grafikfenster und auf der rechten Seite die Ausgabeliste.

Im linken Grafikfenster werden die Verläufe der Residuen für jeden Zeitschritt dargestellt:

- das Unterfenster **Momentum and Mass** zeigt die Erfüllung der Massen- und der drei Impulserhaltungsgleichungen
- Das Unterfenster **Heat Transfer** zeigt die Erfüllung der Energieerhaltungsgleichung.
- Das Unterfenster **Turbulence** zeigt die Erfüllung der Turbulenzmodelle.

- Falls Monitorpunkte in CFD-PRE definiert wurden, so werden sie im Unterfenster **User Points** angezeigt.

In der rechten Ausgabeliste werden angegeben:

- Kontrolldaten der Ein- und Ausgabe
- Warnungen und Fehlermeldungen
- Die Residuen zu jedem Zeitschritt
- Rechenzeiten.

Die Rechnung wird beendet, wenn entweder:

- Die Residuen der Erhaltungsgleichungen kleiner als der in CFX-PRE definierte Wert werden (hier 10^{-4}).
- Die in CFX-PRE angegebene maximale Anzahl der Zeitschritte erreicht wird (hier 100).
- Der Benutzer die Rechnung manuell abbricht. Hierzu ist in der Aufgabenleiste das **Stop-Zeichen** anzuklicken.

In diesem Beispiel sind die Residuen aller Erhaltungsgleichungen nach 45 Iterationen kleiner als 10^{-4} , womit der Rechenlauf automatisch beendet wird. Bild 8-9 zeigt die Konvergenzverläufe für die Massenerhaltungsgleichung (rot) und die drei Impulserhaltungsgleichungen (x: grün, y: blau, z: gelb).

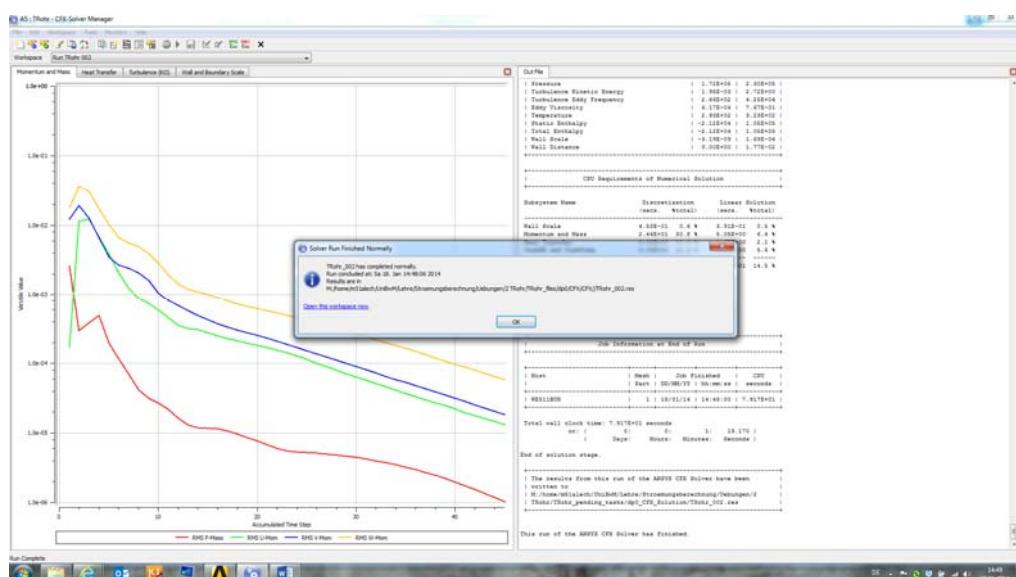


Bild 8-9 CFX-SOLVER: Nach der Beendigung des Rechenlaufs

8.5.3 Speicherung der Ergebnis-Dateien

Es werden wieder zwei Ergebnisdateien automatisch gespeichert:

- Die Ergebnisdatei wie z. B. **TRohr_001.res**. Auf ihr stehen das Ergebnis und die Konvergenzverläufe:
 - das Ergebnis wird für Folgeläufe und die Auswertung in CFD-POST verwendet.
 - Die Konvergenzverläufe können mit CFX-SOLVER nochmals dargestellt werden.
- Die Textdatei wie z. B. **TRohr_001.out**. Sie enthält den im obigen rechten Fenster während der Rechnung angezeigten Text.
- Die Nummer _001 ist die Nummer des Rechenlaufs. Bei einem Folgelauf wird der Zähler der Ergebnisdateien um eins auf TRohr_002.res und TRohr_002.out erhöht.

8.6 Auswertung der Ergebnisse

8.6.1 Starten des Programms CFD-POST

Zum Darstellen der Ergebnisse der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Ergebnisse** doppelt an. Das Auswerteprogramm CFD-POST startet.

8.6.2 Erzeugung von Isolinien-Bildern

Für dieses Beispiel werden 3 Bilder mit Temperatur-Isolinien erzeugt und zwar für die Symmetrieebene und für den Abströmrand, bestehend aus der berechneten Hälfte und einer gespiegelten Hälfte:

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Contour** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den bunten Kreisen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Contour1.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Locations: **Symmetry**
 - Variable: **Temperature**
 - # of Contours: 11.
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour1 im Strukturbau links oben.

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Contour** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den bunten Kreisen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Contour2.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Locations: **Outlet**
 - Variable: **Temperature**
 - # of Contours: 11.
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour2 im Strukturbau links oben.

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Contour** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den bunten Kreisen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Contour3.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Locations: **Outlet**
 - Variable: **Temperature**
 - # of Contours: 11.
- In der Detailansicht unter **View** eingeben:
 - Den Haken vor **Apply Reflection/Mirroring** aktivieren
 - Method: **YZ-Plane**
 - X: 0.0 [m].
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour3 im Strukturbau links oben.

Bild 8-10 zeigt die Isothermen auf der Symmetrieebene und am Abströmrand. Von links kommt die kältere Zuströmung in blau und von oben die wärmere Zuströmung in Rot. Deutlich sichtbar ist der Mischungsbereich in der rechten Rohrhälft. Am Abströmrand rechts ist die Temperaturverteilung noch nicht gleichmäßig.

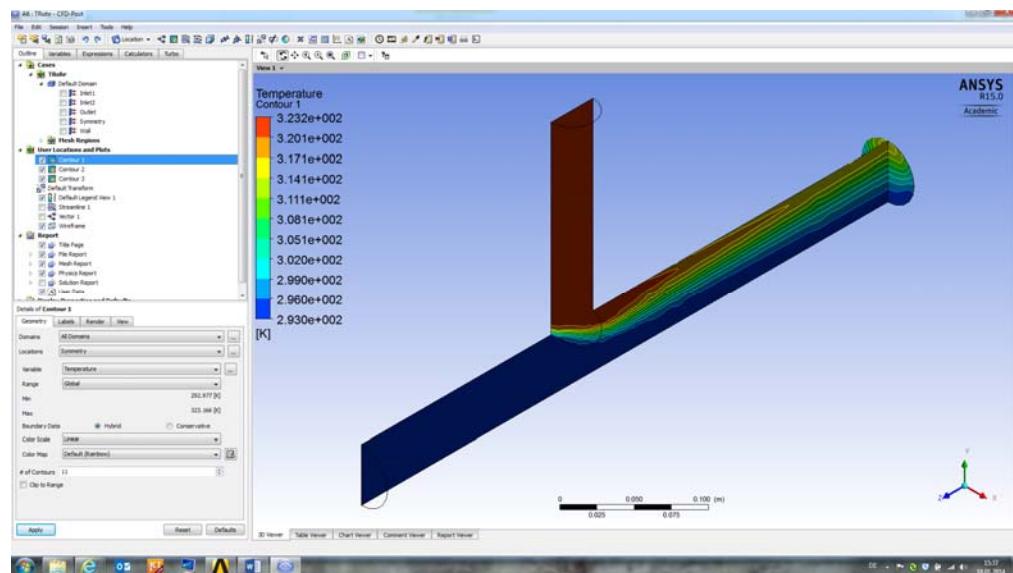


Bild 8-10 CFX-POST: Isolinien der Temperatur auf der Symmetrieebene und am Abströmrand

Es können auch zahlreiche andere Größen auf neuen Flächen dargestellt werden. Hierfür muss z. B. eine neue Schnittebene definiert werden über die Aufgabenleiste mit:

- Plane unter Insert und Location.

8.6.3 Erzeugung von Vektor-Bildern

Geschwindigkeitsvektoren werden wie folgt erzeugt:

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Vector** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den drei Pfeilen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Vector1.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Locations: **Symmetry**.
- In der Detailansicht unter **Symbol** eingeben:
 - Symbol Size: **0.4**. Hierdurch kann die globale Länge der Vektoren gegenüber dem Standardwert von 1.0 angepasst werden, falls sie zu lange für eine übersichtliche Darstellung sind.
- **Apply** anklicken.
- Im Strukturabaum die anderen Bilder wie z. B. **Contour1** deaktivieren, da ansonsten die Bilder überlagert dargestellt werden.

Man erkennt hier das Rückströmgebiet nach der Mischung im oberen Bereich der rechten Rohrhälfte (Bild 8-11).

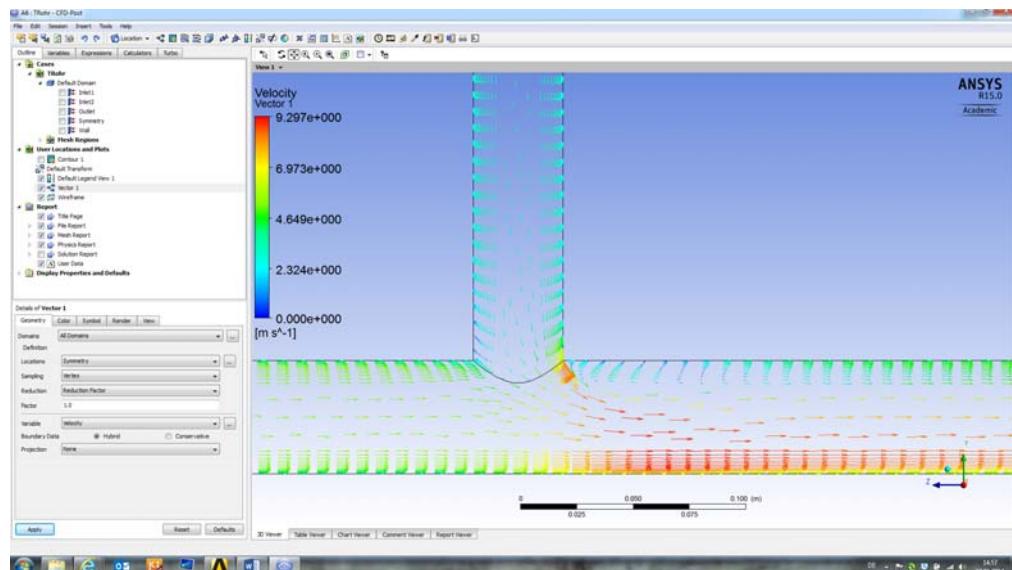


Bild 8-11 CFX-POST: Geschwindigkeitsvektoren auf der Symmetrieebene

8.6.4 Erzeugung von Stromlinien-Bildern

Auch die Stromlinien werden wieder analog zu Kapitel 7.7.4 erzeugt:

- in der Aufgabenleiste **Insert** und **Streamline** anklicken oder alternativ das Profil mit den drei Stromlinien.
- Den Namen eingeben. Standard ist Streamline1.
- In der Detailansicht unter Geometry eingeben:
 - Start from: **Inflow1**, **Inflow2**. Es können mehrere Flächen eingegeben werden, indem die **drei Punkte** rechts daneben angeklickt werden und die entsprechenden Flächen mit der **STRG-Taste** markiert werden.
 - # of Points: 25.
- **Apply** anklicken.
- Im Strukturabaum die anderen Bilder wie z. B. **Vector1** und **Contour1** deaktivieren, da ansonsten die Bilder überlagert dargestellt werden.

Auch hier ist das Totwassergebiet ohne Stromlinien nach der Vermischung im oberen rechten Rohrbereich sichtbar (Bild 8-12).

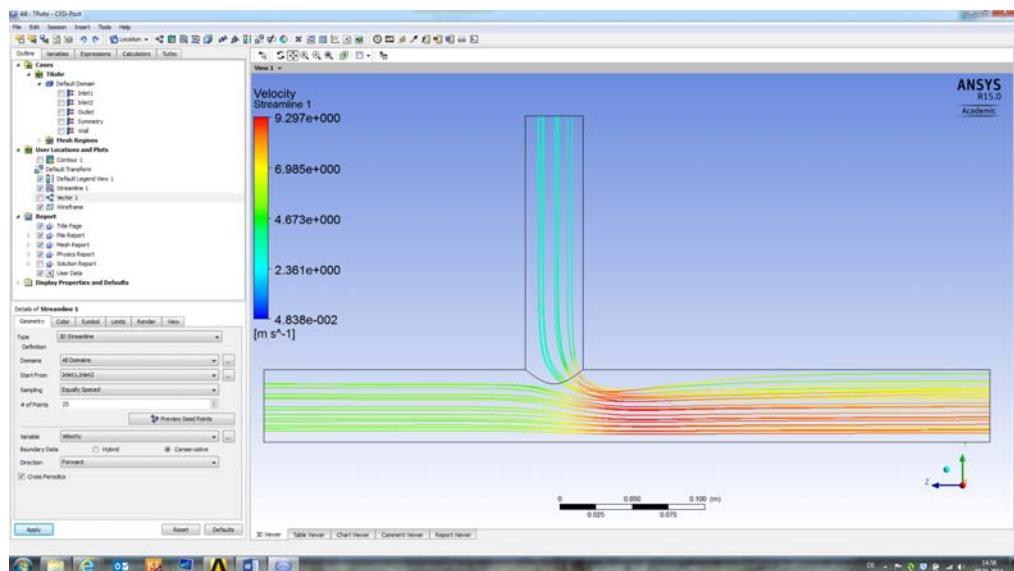


Bild 8-12 CFX-POST: Stromlinien auf der Symmetrieebene

9 Übungsbeispiel Doppelrohr-Wärmeübertrager

Nach dem **Starten der ANSYS WORKBENCH** (siehe Kapitel 6.9) wird wieder zuerst das Programm DESIGN MODELER gestartet durch Klicken auf das Feld **Geometrie** (siehe auch Kapitel 7.1.1).

9.1 Erzeugung der Geometrie

Die Geometrie des Doppelrohr-Wärmeübertrager wird auch bei diesem Beispiel im Programm DESIGN MODELER erzeugt. Die Rohrlänge wird hier als Geometrie-Parameter **Laenge** definiert. Dies hat den Vorteil, dass diese später einfach variiert werden kann und die Programme anschließend automatisch ausgeführt werden (siehe Kapitel 9.6).

9.1.1 Erstellung der Geometrie des inneren Fluides

Das innere Fluid besteht aus einem Vollzylinder mit dem Außenradius 10 mm:

- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen.
- In der Detailansicht werden ein assoziativer Namen, die Länge und der Radius des Zylinders definiert :
 - Zylinder: **Fluid_innen_Ra**
 - Achse z-Komponente: **500 mm**. Um sie als Parameter zu definieren, wird das **Kästchen markiert**. Es erscheint ein D im Kästchen. Als Parametername **Laenge** im neu erscheinenden Fenster eingeben.
 - Radius: **10 mm**.
- Abschließend in der Aufgabenleiste auf **Erstellen** klicken.
- In der oberen Aufgabenleiste **Extras / Frieren** auswählen. Im Strukturbau erscheint Frieren1. Dies verhindert, dass sich die Geometrie automatisch wieder mit der nächsten Geometrie verschmelzen würde, sobald sich beide berühren.
- Der Körper sollte im Strukturbau noch in **Fluid_innen** umbenannt werden, damit er für die weiteren Anwendungen einen sinnvollen Namen hat.

Bild 9-1 zeigt das Rechengebiet für das innere Fluid. Es zeigt auch den geöffneten Parameter-Manager, in dem die gewählten Parameter zur Kontrolle angezeigt werden können. Zum Öffnen in der Aufgabenleiste rechts oben das Feld **Parameter** anklicken. Unterhalb des Grafikfensters öffnet sich der Parameter-Manager mit den Registern:

- Entwurfsparameter
- Parameter-/Abmessungszuweisungen

Hier werden die definierten Geometrieparameter angezeigt und der Entwurfsparameter kann verändert werden.

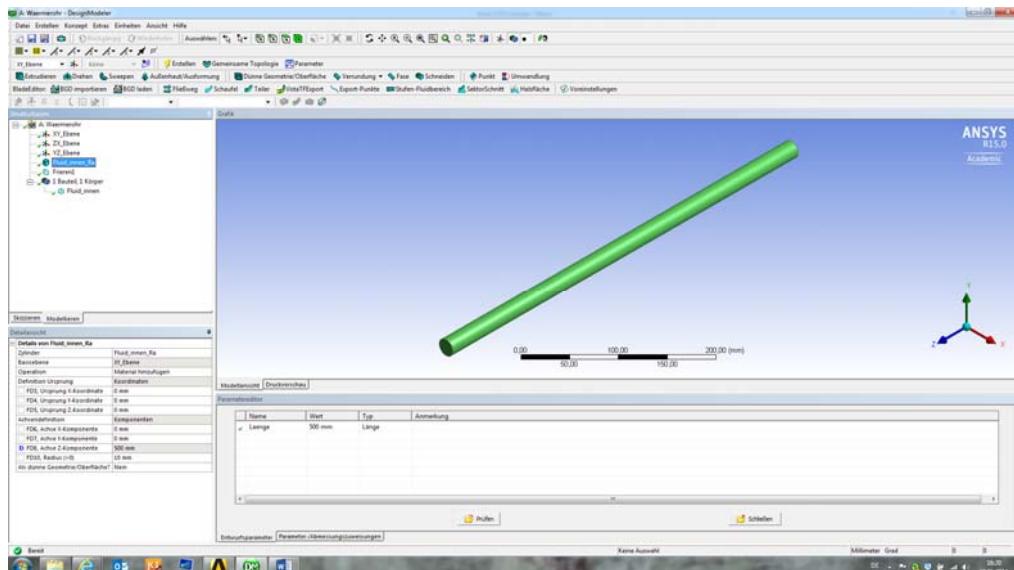


Bild 9-1 DESIGN MODELER: Nach der Erstellung des Fluid-Zylinders innen

9.1.2 Erstellung der Geometrie des Rohrs

Das Rohr, durch das die Wärme vom inneren Fluid auf das äußere Fluid übertragen wird, besteht aus zwei Zylindern mit den Radien 12mm und 10mm. Es wird zuerst der äußere Zylinder erzeugt und dann der innere Zylinder wegschnitten:

- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen.
- In der Detailansicht den äußeren Zylinder des Zwischenrohrs definieren:
 - Zylinder: **Rohr_Ra**
 - Achse z-Komponente: **500 mm**. Als **Parameter markieren**, es erscheint ein D. Den Parameternamen wieder in **Laenge** umbenennen, damit später nur ein Parameter für die Länge des kompletten Doppelrohrs erscheint.
 - Radius: **12 mm**.
- Abschließend in der Aufgabenleiste wieder auf **Erstellen** klicken. Das Rohr erscheint als Vollzylinder.

- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen.
- In der Detailansicht werden die Details des inneren Zylinders definiert:
 - Zylinder: **Rohr_Ri**
 - Operation: **Material wegschneiden**
 - Achse z-Komponente: **500 mm**. Das **Kästchen markieren**. Es erscheint ein D. Den Namen des Parameters wieder auf **Laenge** ändern.
 - Radius: **10 mm**.
- Anschließend in der Aufgabenleiste auf **Erstellen** klicken.

- In der oberen Aufgabenleiste **Extras / Frieren** auswählen. Im Strukturaum erscheint Frieren2.
- Der Körper sollte im Strukturaum wieder umbenannt werden, z.B. in **Rohr**. Bild 9-2 zeigt das Rechengebiet für das Rohr.

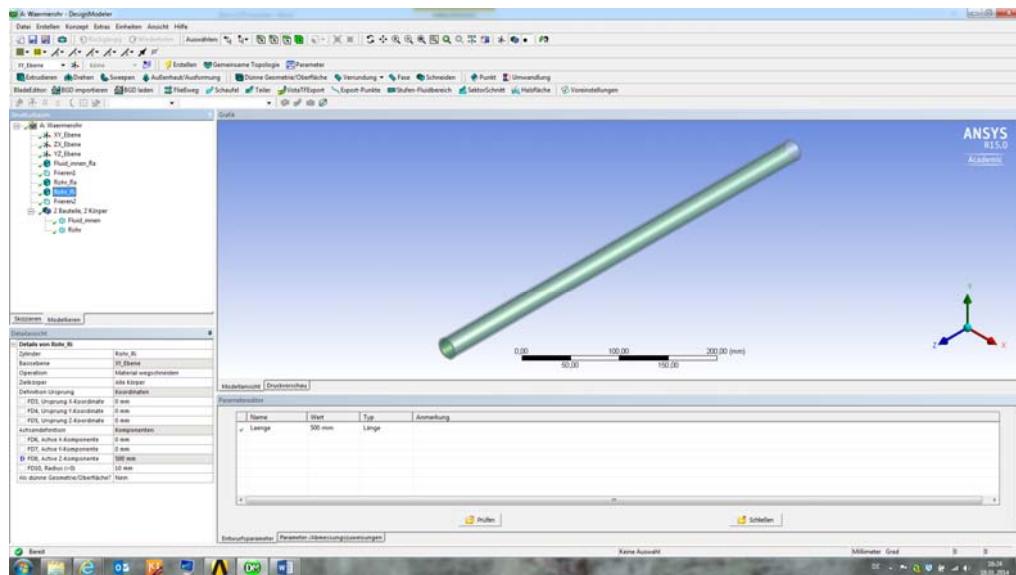


Bild 9-2 DESIGN MODELER: Nach der Erstellung des Rohrs

9.1.3 Erstellung der Geometrie des äußeren Fluides

Die Geometrie des äußeren Fluids wird durch zwei Zylinder mit den Radien 16mm und 12mm definiert. Es wird wieder zuerst der äußere Zylinder erzeugt und dann der innere Zylinder weggeschnitten:

- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen. Es wird der äußere Zylinder erstellt.
- In der Detailansicht werden ein assoziativer Name, die Länge und der Radius des äußeren Zylinders definiert:
 - Zylinder: **Fluid_aussen_Ra**
 - Achse z-Komponente: **500 mm**. Um sie als Parameter zu definieren, wird das **Kästchen markiert**. Wieder als Parametername **Laenge** eingeben.
 - Radius: **16 mm**.
- Anschließend in der Aufgabenleiste auf **Erstellen** klicken. Der äußere Zylinder erscheint im Grafikfenster als Vollrohr.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen / Grundelemente / Zylinder** auszuwählen. Es wird der innere Zylinder erstellt.

- In der Detailansicht werden wieder die Details definiert:
 - Zylinder: **Fluid_aussen_Ri**
 - Operation: **Material wegschneiden**
 - Achse z-Komponente: **500 mm**. Das **Kästchen markieren**. Es erscheint ein D. Parametername ist wieder **Laenge**.
 - Radius: **12 mm**.
- Anschließend in der Aufgabenleiste auf **Erstellen** klicken.
- Der Körper sollte im Strukturbau noch in **Fluid_aussen** umbenannt werden.

Bild 9-3 zeigt das Rechengebiet für das äußere Fluid.

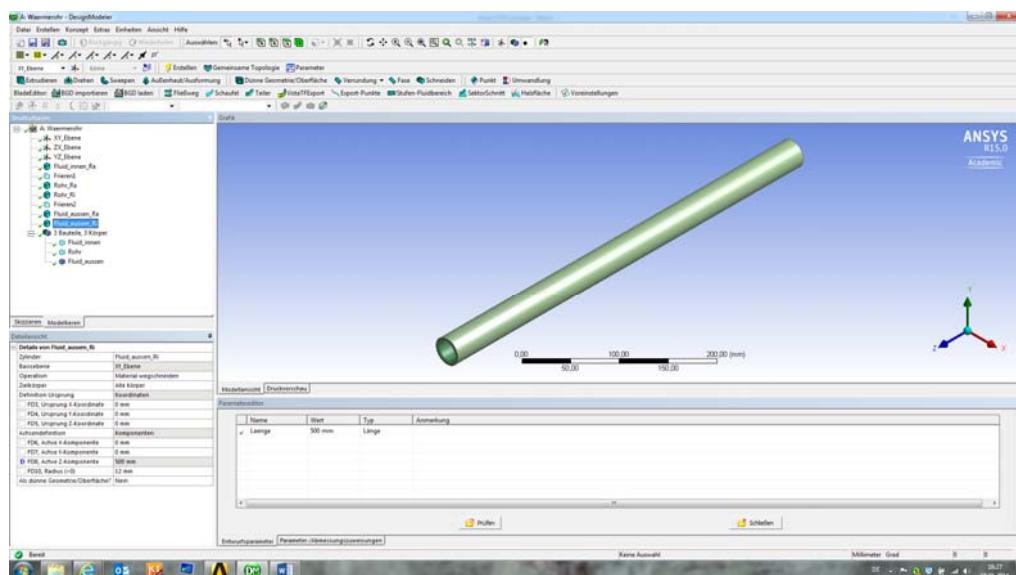


Bild 9-3 DESIGN MODELER: Nach der Erstellung des Fluid-Zylinders außen

9.1.4 Halbierung des Rechenraums

Um bei der Strömungsberechnung Rechenzeit zu sparen, können Symmetrieebenen ausgenutzt werden (siehe Kapitel 6.3). Hierzu wird das ganze Rohr zu einem halben Rohr umgewandelt:

- In der oberen Aufgabenleiste **Extras** und **Symmetrie** anklicken. Es wird der Standardnamen **Symmetrie1** im Strukturbau angelegt.
- Im linken Detailfenster wird für **Symmetrie1** die Ebene definiert:
 - Symmetrie: **Symmetrie1**
 - Symmetrieebene: **YZ_Ebene** im Strukturbau markieren und **Anwenden** anklicken.
- In der oberen Aufgabenleiste **Erstellen** anklicken.

Der halbierte Rechenraum erscheint im Grafikfenster (Bild 9-4).

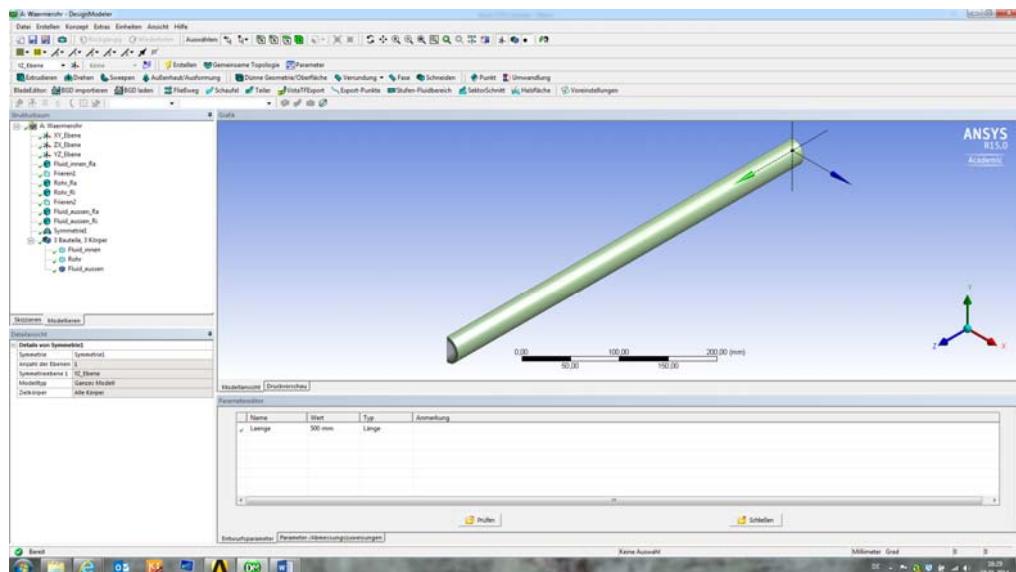


Bild 9-4 DESIGN MODELER: Nach der Halbierung des Rechenraums

9.1.5 Erzeugung eines Bauteils

Die drei Körper werden noch zu einem Bauteil zusammengefasst. Dies ist vorteilhaft, da für das gesamte Bauteil ein gemeinsames Rechennetz erzeugt wird und die Netzpunkte an den Körperfäßen identisch sind. Hierdurch erhöht sich die Genauigkeit bei der Strömungsberechnung:

1. Im Strukturbau die drei Körper **Fluid_aussen**, **Rohr** und **Fluid_innen** mit der **Strg-Taste** zusammen **markieren**.
2. Rechte Maustaste drücken und **Bauteilgruppe erzeugen** auswählen. Es wird Bauteil 1 erzeugt.

In Bild 9-5 ist im linken Strukturbau das Bauteil1, bestehend sichtbar.

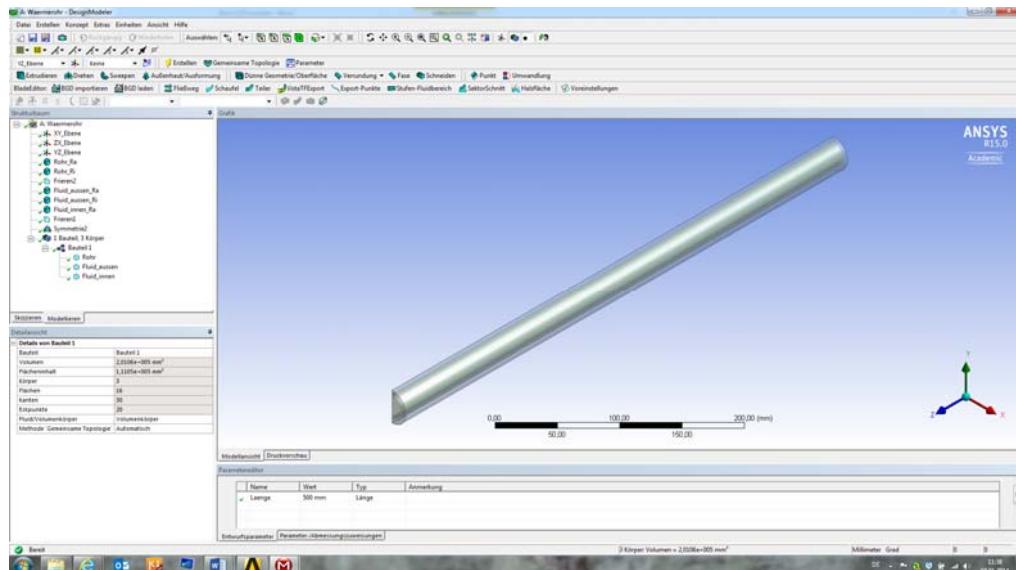


Bild 9-5 DESIGN MODELER: Nach der Erzeugung des Bauteils

9.1.6 Beenden des Programms DESIGN-MODELER

Beim Schließen des Programms wird die Geometrie automatisch in einer **agdb-Datei** gespeichert. Im WORKBENCH-Fenster Projektschema erscheint ein grüner Haken für die Geometrie.

9.2 Erzeugung des Rechennetzes

9.2.1 Erzeugung des Standardnetzes mit dem Programm MESHING

Das Rechennetz wird wieder mit dem Programm MESHING erzeugt. Hierzu im ANSYS WORKBENCH Projektschema **Netz** doppelt anklicken. Das Programm MESHING startet und liest die zuvor erzeugte Geometrie ein.

Durch Anklicken von **Netz erstellen** in der Aufgabeleiste wird das unstrukturierte Standardnetz erstellt (Bild 9-6). Falls das Netz im Grafikfenster unsichtbar ist, kann es aktiviert werden durch Markieren von Netz im Strukturabaum.

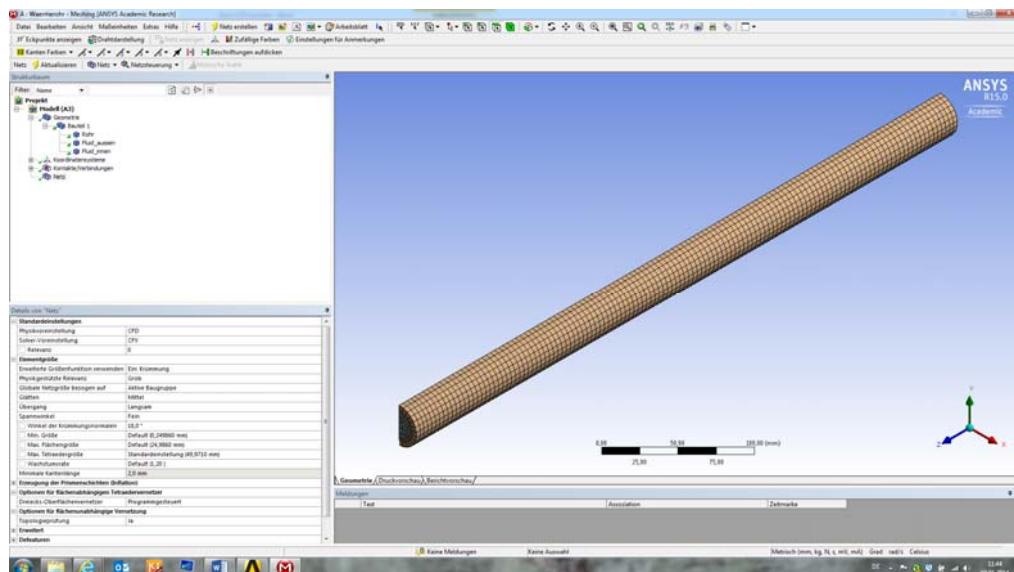


Bild 9-6 MESHING: Nach der Erzeugung des Standardnetzes

9.2.2 Erzeugung der Prismenschicht innen

Zur Erhöhung der Genauigkeit in der Grenzschicht wird zuerst für das innere Fluid eine Prismenschicht zur Rohrinnenwand hin erzeugt.

Hierfür ist es vorteilhaft, die anderen beiden Körper **Rohr** und **Fluid_aussen** im Strukturbau unter Geometrie **auszublenden**. Dann liegt die Außenfläche des inneren Fluids frei und kann später einfach markiert werden.

- Im Strukturbau **Netz** mit rechter Maustaste markieren.
- Einfügen und Erzeugung einer Prismenschicht (Inflation) auswählen.
- In der Detailansicht unter **Bereich** angeben:
 - Auswahlmethode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster den entsprechenden Volumenkörper auswählen, hier **Fluid_innen**. **Anwenden anklicken**, es erscheint 1 Körper.
- In der Detailansicht unter **Definition** angeben:
 - Randbezug Methode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster die Fläche auswählen, an die die Prismenschicht gelegt werden soll, hier die die Außenfläche des inneren Fluidbereichs. **Anwenden anklicken**, es erscheint jeweils 1 Fläche.
 - Option zur Erzeugung der Prismenschicht: **Gesamtdicke**
 - Anzahl der Schichten: **10**
 - Maximale Dicke: **2 mm**
- **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste anklicken
- Die Prismenschicht sinnvoll **umbenennen** in z.B. Prismenschicht1

Bild 9-7 zeigt den Zuströmrand mit der Prismenschicht im inneren Fluid an der Rohrinnenwand.

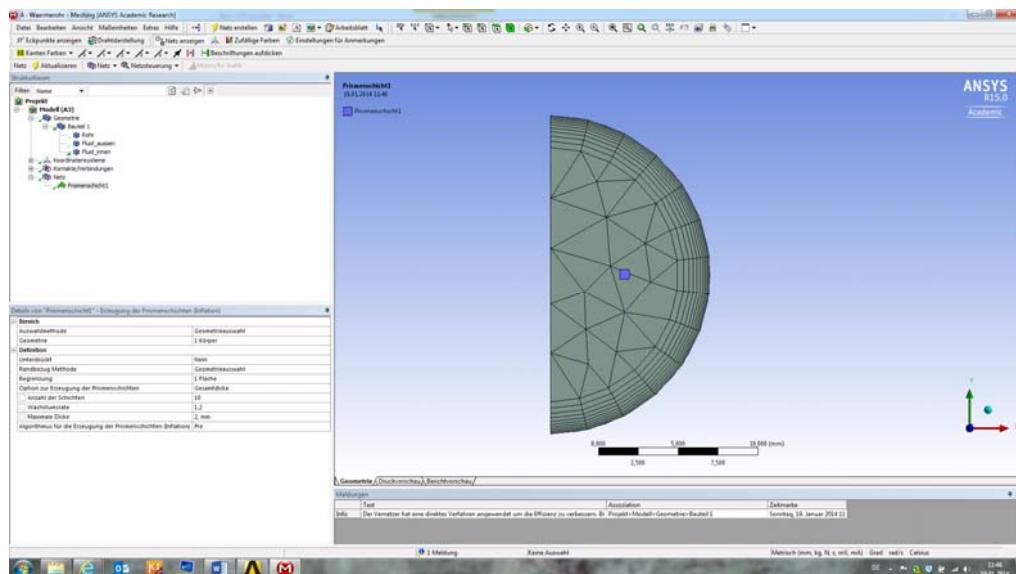


Bild 9-7 MESHING: Nach der Erzeugung der inneren Prismenschicht

9.2.3 Erzeugung der beiden Prismenschichten für das äußere Fluid

Nun werden für das äußere Fluid zwei Prismenschichten erzeugt, eine innere zum Zwischenrohr und eine äußere zum (gedachten) Mantelrohr.

Hierfür ist es jetzt vorteilhaft, die Körper **Fluid_innen** und **Rohr** im Strukturabaum unter Geometrie **auszublenden**. Dann liegt die Innenfläche des äußeren Fluids frei und kann später einfach markiert werden.

- Im Strukturabaum **Netz** mit rechter Maustaste markieren.
- Einfügen und Erzeugung einer Prismenschicht (Inflation) auswählen.
- In der Detailansicht unter **Bereich** angeben:
 - Auswahlmethode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster den entsprechenden Volumenkörper auswählen, hier **Fluid_außen**. **Anwenden anklicken**, es erscheint 1 Körper.
- In der Detailansicht unter **Definition** angeben:
 - Randbezug Methode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster die Fläche auswählen, an die die Prismenschicht gelegt werden soll, hier die die Innenfläche des äußeren Fluidbereichs. **Anwenden anklicken**, es erscheint jeweils 1 Fläche.
 - Option zur Erzeugung der Prismenschicht: **Gesamtdicke**
 - Anzahl der Schichten: **10**
 - Maximale Dicke: **1,5 mm**

- **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste anklicken
- Die Prismenschicht sinnvoll **umbenennen** in z.B. Prismenschicht2
- Im Strukturabaum wieder **Netz** mit rechter Maustaste markieren.
- Einfügen und Erzeugung einer Prismenschicht (Inflation) auswählen.
- In der Detailansicht unter **Bereich** angeben:
 - Auswahlmethode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster den entsprechenden Volumenkörper auswählen, hier **Fluid_außen. Anwenden anklicken**, es erscheint 1 Körper.
- In der Detailansicht unter **Definition** angeben:
 - Randbezug Methode: Geometrieauswahl
 - Geometrie: im Grafikfenster die Fläche auswählen, an die die Prismenschicht gelegt werden soll, hier die die Außenfläche des äußeren Fluidbereichs. **Anwenden anklicken**, es erscheint jeweils 1 Fläche.
 - Option zur Erzeugung der Prismenschicht: **Gesamtdicke**
 - Anzahl der Schichten: **10**
 - Maximale Dicke: **1,5 mm**
- **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste anklicken
- Die Prismenschicht sinnvoll **umbenennen** in z.B. Prismenschicht3

Jetzt müssen wieder alle Körper eingeblendet werden. Bild 9-8 zeigt den Zuströmrand mit allen drei Prismenschichten.

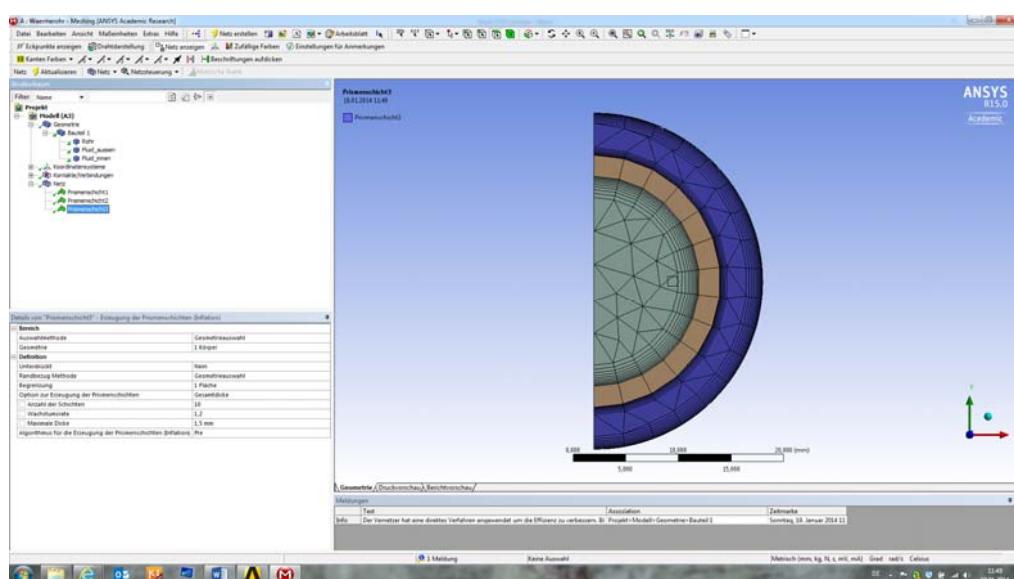


Bild 9-8 MESHING: Nach der Erzeugung des Netzes mit allen drei Prismenschichten

9.2.4 Verfeinerung des gesamten Netzes

Die Auflösung des äußeren Fluids außerhalb der Prismenschichten ist noch zu grob. Deshalb wird das gesamte Netz noch verfeinert.

- Im Strukturbau **Netz** mit rechter Maustaste markieren.
- In der Detailansicht die **Elementgröße aufklappen** (+ anklicken):
 - Winkel der Krümmungsnormalen: **6°**
- **Netz erstellen** in der Aufgabenleiste anklicken.

Bild 9-9 zeigt das verfeinerte Netz am Zuströmrand.

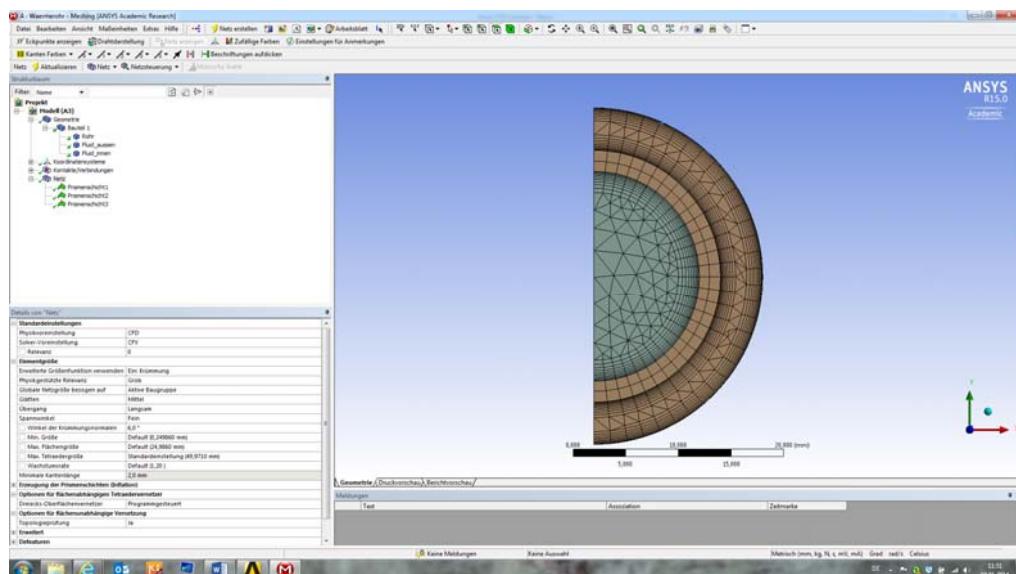


Bild 9-9 MESHING: Nach der Erzeugung des verfeinerten Netzes

9.2.5 Benennung der Randflächen (Komponenten)

Alle Flächen haben standardmäßig eine Nummer. An dieser Stelle ist es sinnvoll, die Nummern in sinnvolle Namen umzuwandeln, damit sie im Programm CFX-PRE bei der Zuordnung der Randbedingungen einfach gefunden werden können. Hierfür werden für alle Randflächen wieder Komponenten angelegt. Um innere Flächen wie z.B. die Wand zwischen Fluid innen und Rohr sichtbar zu machen, müssen die anderen Körper ausgeblendet werden.

Beim inneren Fluid gibt es vier Randflächen (Inlet, Outlet, Symmetry, Wall) für die Komponenten eingefügt werden:

- Im Strukturbau zuerst die Körper **Rohr** und **Fluid_aussen** mit der rechten Maustaste markieren und **Körper ausblenden** auswählen. Es ist dann nur noch der Körper **Fluid_innen** sichtbar.
- In der Aufgabenleiste **Fläche** markieren (Würfel mit grüner Fläche).

- Im Grafikfenster eine **Randfläche markieren**. Diese wird dann grün. Gegebenenfalls muss im Grafikfenster die Geometrie gedreht werden, bis diese Randfläche sichtbar wird und angeklickt werden kann.
- Mit rechter Maustaste **Einfügen** und **Komponente erstellen** auswählen.
- Die Komponente mit dem Standardnamen Auswahl **umbenennen** in einen sinnvollen Namen wie z.B. **IF_Inlet**, **IF_Outlet**, **IF_Symmetry** und **IF_Wall**.

Für das Rohr gibt es fünf Randflächen (Inlet, Outlet, Symmetry, Inner Wall, Outer Wall):

- Im Strukturabaum die Körper **Fluid_innen** und **Fluid_aussen** mit der rechten Maustaste markieren und **Körper ausblenden** auswählen. Es ist dann nur noch der Körper Rohr sichtbar.
- In der Aufgabenleiste **Fläche** markieren (Würfel mit grüner Fläche).
- Im Grafikfenster eine **Randfläche markieren**. Diese wird dann grün. Gegebenenfalls muss im Grafikfenster die Geometrie gedreht werden, bis diese Randfläche sichtbar wird und angeklickt werden kann.
- Mit rechter Maustaste **Einfügen** und **Komponente erstellen** auswählen.
- Die Komponente mit dem Standardnamen Auswahl **umbenennen** einen sinnvollen Namen wie z.B. **PI_Inlet**, **PI_Outlet**, **PI_Symmetry**, **PI_Innerwall** und **PI_Outerwall**.

Und beim äußeren Fluid gibt es ebenfalls die fünf Randflächen (Inlet, Outlet, Symmetry, Inner Wall, Outer Wall):

- Im Strukturabaum die Körper **Fluid_innen** und **Rohr** mit der rechten Maustaste markieren und **Körper ausblenden** auswählen. Es ist dann nur noch der Körper **Fluid_aussen** sichtbar.
- In der Aufgabenleiste **Fläche** markieren (Würfel mit grüner Fläche).
- Im Grafikfenster eine **Randfläche markieren**. Diese wird dann grün. Gegebenenfalls muss im Grafikfenster die Geometrie gedreht werden, bis diese Randfläche sichtbar wird und angeklickt werden kann.
- Mit rechter Maustaste **Einfügen** und **Komponente erstellen** auswählen.
- Die Komponente mit dem Standardnamen Auswahl **umbenennen** einen sinnvollen Namen wie z.B. **OF_Inlet**, **OF_Outlet**, **OF_Symmetry**, **OF_Innerwall** und **OF_Outerwall**.

Da es sich in diesem Beispiel um einen Gegenstrom-Wärmeübertrager handeln soll, liegen die Zuströmränder auf gegenüberliegenden Seiten, beim inneren Fluid links ($z=500\text{mm}$) und beim äußeren Fluid rechts ($z=0\text{m}$).

Die Randflächen werden im Grafikfenster mit roten Pfeilen angezeigt (Bild 9-10).

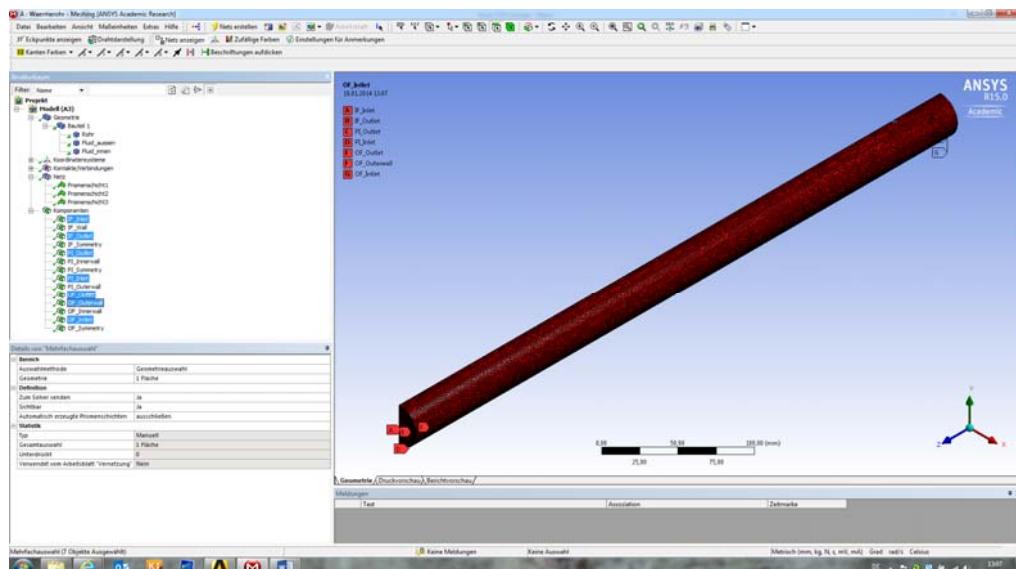


Bild 9-10 MESHING: Nach der Erzeugung der Komponenten

9.2.6 Beenden des Programms MESHING

Die Netzdatei wird wieder automatisch beim Schließen des Programms MESHING als **cmdb-Datei** gespeichert. Alternativ kann das gesamte Projekt auch über die obere Aufgabenleiste mit **Datei** und **Projekt Speichern** gespeichert werden. Nach dem Schließen des Programms erscheint im WORKBENCH-Fenster Projektschema ein grüner Haken für das Netz.

9.3 Vorbereitung der Rechnung

Achtung: ab hier müssen wieder **Dezimalzahlen mit Punkt** eingegeben werden entsprechend der englischen Schreibweise.

9.3.1 Starten des Programms CFX-PRE

Zur Erzeugung der Eingabedaten für die Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Setup** doppelt an. Das Programm CFX-PRE startet. Das Rechennetz kann mit angezeigt werden, indem im Strukturbau die Netzdatei CFX.cmdb markiert wird.

9.3.2 Definition der Rechenparameter

Bei diesem Beispiel besteht das rechengebiet aus drei Teilen: Fluidgebiet mit Wasser innen, ein Fluidgebiet mit Wasser außen (kann auch zusammengefasst werden) und ein Festkörpergebiet (Solid) für das dazwischen liegende Kupferrohr. Für jedes Rechengebiet (Domain) sind die Rechenparameter anzugeben. Sie sind bereits mit sinnvollen Standardwerten besetzt. Nachfolgend werden diejenigen angegeben, die wichtig sind. Die in **fett** angegeben Werte sind zu ändern.

Für das innere Fluidgebiet IF mit Wasser gilt:

- Im Strukturbau **Flow Analysis 1** mit rechter Maustaste markieren.
- **Insert / Domain** auswählen oder in der Aufgabenleiste Insert Domain (blauer Quader) auswählen. Sinnvollen Namen angeben wie z.B. **IF** für Inner Fluid.
- Im linken Strukturbau das Rechengebiet **IF** öffnen mit Doppelklick.
- Im Register **Basic Settings** angeben (siehe Bild 9-11):
 - Location: IF
 - Domain Type: Fluid Domain
 - Material: **Water**
 - Reference Pressure: 1 atm
- Im Register **Fluid Models**:
 - Heat Transfer Option: **Total Energy**
 - Turbulence Option: **Shear Stress Transport**.
- Mit **OK** speichern.

Das äußere Fluidgebiet OF erhält automatisch dieselben Parameter, sofern es auch als Fluid definiert wird. Sollen unterschiedliche Fluide berechnet werden, wie z.B. Wasser und Luft, so muss dies wie folgt aktiviert werden:

- In der Aufgabenleiste Edit und Options auswählen
- CFX-Pre und General anklicken
- Den Haken vor Enable Beta Features aktivieren
- Den Haken vor Constant Domain Physics deaktivieren.

Für das Festkörpergebiet PI werden die Werte für Kupfer eingestellt:

- Im Strukturbau **Flow Analysis 1** mit rechter Maustaste markieren.
- **Insert / Domain** auswählen oder in der Aufgabenleiste Insert Domain (blauer Quader) auswählen. Sinnvollen Namen angeben wie z.B. **PI** für Pipe.
- Im linken Strukturbau das Rechengebiet **PI** öffnen mit Doppelklick.
- Im Register **Basic Settings** angeben:
 - Location: PI
 - Domain Type: **Solid Domain**
 - Material: **Copper**
- Im Register **Solid Models**:
 - Heat Transfer Option: Thermal Energy
- Mit **OK** speichern.

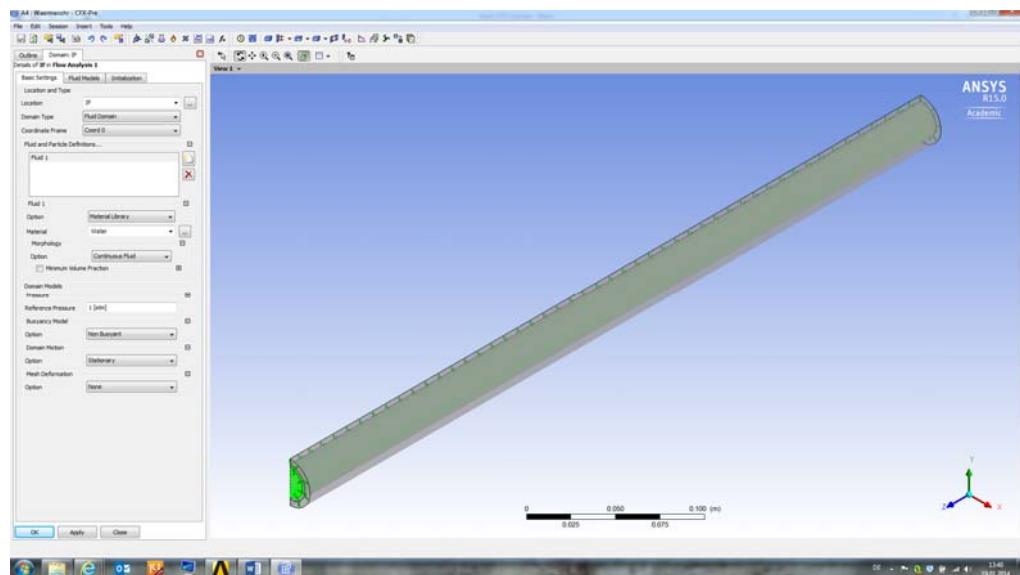


Bild 9-11 CFX-PRE: Default Domain / Basic Settings

Ist eine höhere Genauigkeit als der Standardwert von 10^{-4} gewünscht, so kann dies im Strukturbaum unter **Solver Control / Basic Settings** definiert werden:

- Max. Iterations: 200. Wenn die Residuen nicht unter den Zielwert sinken, hört der Rechenlauf nach spätestens dieser Iterationszahl auf.
- Residual Target: 0.00001. Der Rechenlauf hört auf, wenn das Residuum kleiner als 10^{-5} wird. Dies bedeutet, dass alle Erhaltungsgleichungen bis auf einen Fehler von 10^{-5} erfüllt sein müssen.
- Mit **OK** bestätigen.

9.3.3 Definition der physikalischen Randbedingungen

An den Rändern des Rechengebiets müssen physikalische Randbedingungen vorgegeben werden. Bei diesem Beispiel werden folgende Randbedingungen verwendet:

- An den beiden Zuströmrändern werden Massenströme ($0.01 \text{ kg/s} \geq 36 \text{ l/h}$) und Temperaturen (80°C und 10°C) vorgegeben. Es ist zu beachten, dass beim halbierten Rohr auch nur der halbe Massenstrom, also 0.005 kg/s vorgegeben werden darf.
- An den beiden Abströmrändern wird der gemittelte statische Druck von 0 Pa vorgegeben als Abweichung zum Referenzdruck von 1 atm. Die Mittelung hat den Vorteil, dass der statische Druck selbst nicht konstant sein muss am Abströmrand. Hierdurch kann der Abströmbereich verkürzt werden ohne dass die Strömung beeinflusst wird.
- An den beiden Stirnseiten des Kupferrohrs und für die Außenwand des äußeren Fluides wird eine adiabate Wand (kein Wärmestrom) vorgegeben.
- Im Kupferrohr soll die Wärmeleitung mitgerechnet werden. Deshalb müssen hier keine Randbedingungen vorgegeben werden, sondern sog. Interface-Ebenen definiert werden.

Generell muss zuvor immer überprüft werden, ob die Größen physikalisch sinnvoll sind und richtig umgerechnet wurden!

Die Randbedingungen können wieder auf zwei Arten erzeugt werden, entweder über die Aufgabenleiste mit dem Symbol **Boundary** (Symbol mit 2 Pfeilen nach links) oder über den Strukturbaum. Hierzu ist das jeweilige **Rechengebiet (hier IF, PI, OF) mit der rechten Maustaste zu markieren**. Über **Insert** und **Boundary** wird die Randbedingung erzeugt.

Zuströmränder für Fluid Innen und Fluid Außen

- Für die Zuströmränder des Innen- bzw. Außenrohrs wird im Fenster Insert Boundary z. B. **IF_Inlet** bzw. **OF_Inlet** eingegeben. Es erscheinen die zwei neuen Fenster Basic Settings und Boundary Details.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Inlet**
 - Location: **IF_Inlet** bzw. **OF_Inlet**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Flow Regime Option: Subsonic
 - Mass and Momentum Option: **Mass Flow Rate**
 - Mass Flow Rate: **0.005 kg/s** (für das halbe Rohr)
 - Flow Direction: Normal to Boundary Condition
 - Heat Transfer Option: **Static Temperature**
 - Static Temperature: **80°C** für das Fluid innen bzw. **10°C** für das Fluid außen.
- Mit **OK** speichern.

Abströmränder für Fluid Innen und Fluid Außen

- Für den Abströmrand wird im Fenster Insert Boundary z. B. **IF_Outlet** bzw. **OF_Outlet** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Outlet**
 - Location: **IF_Outlet** bzw. **OF_Outlet**.
- Im Fenster **Boundary Details** wählen:
 - Flow Regime Option: Subsonic
 - Mass and Momentum Option: **Average Static Pressure**.
 - Relative Pressure: **0 Pa** (bezogen auf den Referenzdruck von 1 atm)
 - Pressure Profile Blend: 0.05
 - Pressure Averaging Option: Averaging over whole outlet
- Mit **OK** speichern.

Festkörperrand für Fluid Außen und Rohr Stirnseiten

- Für den Festkörperrand des äußeren Fluidbereichs und die Stirnseiten des Rohrs werden im Fenster Insert Boundary z. B. **OF_Wall** bzw. **PI_InOut** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Wall**
 - Location: **OF_Outerwall** bzw. **PI_Inlet**, **PI_Outlet** (mit Strg-Taste)
- Im Fenster **Boundary Details** ist bereits ausgewählt:
 - Mass and Momentum Option: No Slip Wall
 - Wall Roughness: Smooth Wall
 - Heat Transfer Option: Adiabatic
- Mit **OK** speichern.

Symmetrieebenen für Fluid Innen, Fluid Außen und Rohr

- Für die Symmetrieebene wird im Fenster Insert Boundary z. B. **IF_Symmetry** bzw. **OF_Symmetry** bzw. **PI_Symmetry** eingegeben.
- Im Fenster **Basic Settings** wählen
 - Boundary Type: **Symmetry**
 - Location: **IF_Symmetry** für das Fluid Innen
OF_Symmetry1 und **OF_Symmetry2** für das Fluid Außen
PI_Symmetry1 und **PI_Symmetry2** für das Rohr
Mit der Strg-Taste können mehrere Flächen markiert werden.
- Mit **OK** speichern.

Interface-Ebenen zwischen Fluid und Rohr

Die Verbindungsebenen zwischen den Rechengebieten Fluid und Festkörper werden als Domain Interfaces behandelt:

- Hierfür muss in der Aufgabenleiste das Symbol **Create a Domain Interface** (zwei blaue Gebiete mit Verbindungslien) angeklickt werden.
- Es erscheint das Fenster **Insert Domain Interface**, wo der Name angegeben werden kann wie z. B. **IF_PI** bzw. **OF_PI**:
- Im Fenster **Domain Interface** wählen:
 - Interface Type: **Fluid Solid**
 - Interface Side 1 Domain: **IF** bzw. **OF**
 - Interface Side 1 Region List: **IF_Outerwall** bzw. **OF_Innerwall**
 - Interface Side 2 Domain: **PI**
 - Interface Side 2 Region List: **PI_Innerwall** bzw. **PI_Outerwall**
 - Interface Models Option: General Connection.
- Über **OK** werden die eingegebenen Werte gespeichert.

Sind alle Randbedingungen definiert, so verschwindet Default Domain Default im Strukturabaum und die Randbedingungen sind mit Pfeilen im Grafikfenster sichtbar, wie in Bild 9-12 gezeigt.

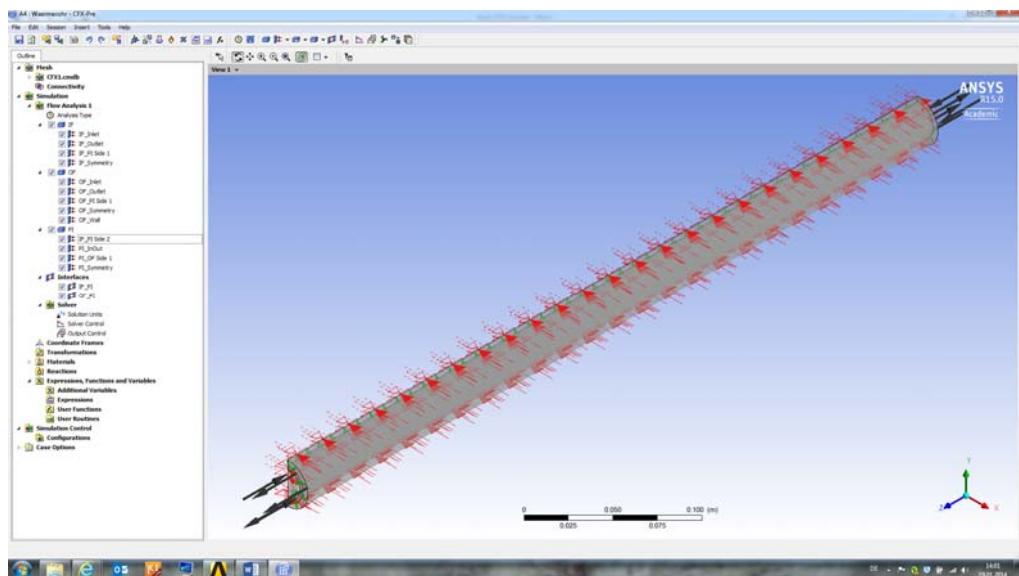


Bild 9-12 CFX-PRE: Nach der Eingabe aller Randbedingungen

9.3.4 Speichern der CFX-PRE-Datei

Diese Parameterdatei wird wieder automatisch beim Schließen des Programms CFX-PRE als **cfx-Datei** gespeichert. Alternativ kann das gesamte Projekt auch über die obere Aufgabenleiste mit **Datei** und **Projekt Speichern** gespeichert werden. Nach dem Schließen des Programms erscheint im WORKBENCH-Fenster Projektschema ein grüner Haken für das Setup.

9.4 Berechnung der Strömung

9.4.1 Start des Programms CFX

Zum Starten der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Lösung** doppelt an. Der CFX-SOLVER MANAGER startet. Im sich öffnenden Fenster Define Run die Strömungsberechnung mit **Start Run** starten.

Die dort angegebenen Parameter bedeuten:

- Solver Input File: die Eingabedatei für CFX. Standardmäßig ist dies die zuletzt erzeugte Setup-Datei wie z. B. Waermerohr.def.
- Initialization Option: Current Solution Data (if possible). Für die erste Rechnung berechnet sich das Programm die Startlösung aus den Randbedingungen. Für Folgeläufe wird die letzte Lösung verwendet.

9.4.2 Überwachung des Konvergenzverhaltens

Nach dem Start des Rechenlaufes erscheint der CFX-SOLVER-MANAGER mit dem Grafikfenster links und der Ausgabeliste rechts. In diesem Beispiel sind die Residuen aller Erhaltungsgleichungen nach 72 Iterationen kleiner als 10^{-4} , womit der Rechenlauf automatisch beendet wird. Im linken Grafikfenster werden die Verläufe der Residuen für jeden Zeitschritt dargestellt:

- In den Unterfenstern **Momentum and Mass-1** und **-2** wird die Erfüllung der Massen- und der drei Impulserhaltungsgleichungen für das innere und äußere Fluid gezeigt.
- Das Unterfenster **Heat Transfer** zeigt die Erfüllung der Energieerhaltungsgleichung. Bei diesem Beispiel mit Wärmetübertragung von einem warmen inneren Fluid durch die Rohrwand an das andere kalte äußere Fluid werden drei Energieerhaltungsgleichungen gelöst, eine im inneren Fluid (rot), eine im äußeren Fluid (grün) und eine im Festkörper (blau), siehe Bild 9-13.
- Die Unterfenster **Turbulence-1** und **-2** zeigen die Erfüllung der Turbulenzmodelle für das innere und das äußere Fluid.

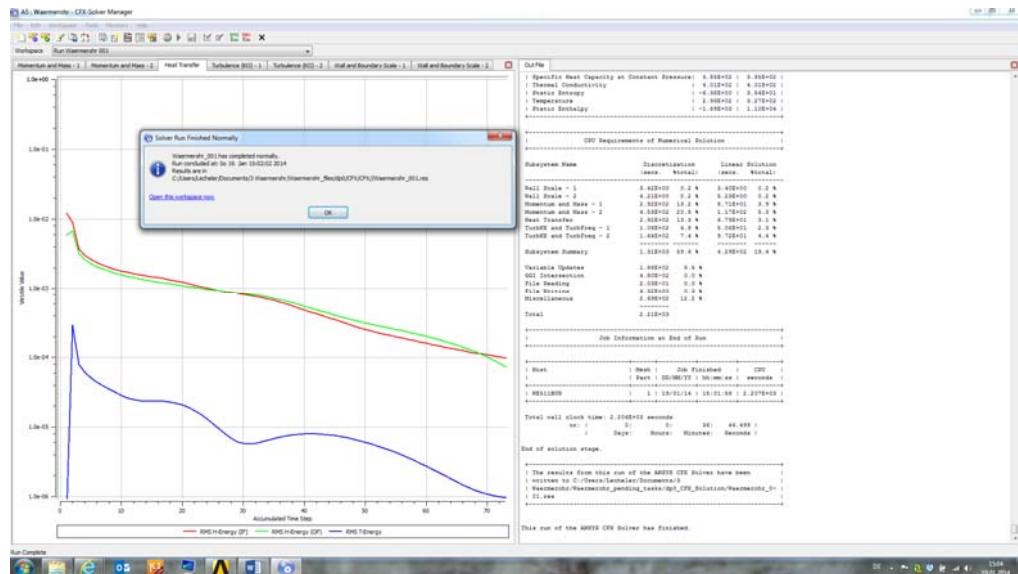


Bild 9-13 CFX-SOLVER: Nach der Beendigung des Rechenlaufs

9.4.3 Speicherung der Ergebnis-Dateien

Es werden wieder zwei Ergebnisdateien automatisch gespeichert:

- Die Ergebnisdatei wie z. B. **Waermerohr_001.res**. Auf ihr stehen das Ergebnis und die Konvergenzverläufe.
- Die Textdatei wie z. B. **Waermerohr_001.out**. Sie enthält den im obigen rechten Fenster während der Rechnung angezeigten Text.
- Die Nummer **_001** ist die Nummer des Rechenlaufes. Bei einem Folgelauf wird der Zähler der Ergebnisdateien um eins auf **Waermerohr_002.res** und **Waermerohr_002.out** erhöht.

9.5 Auswertung der Ergebnisse

9.5.1 Starten des Programms CFD-POST

Zum Darstellen der Ergebnisse der Strömungsberechnung klicken Sie im WORKBENCH Projektschema das Feld **Ergebnisse** doppelt an. Das Auswerteprogramm CFD-POST startet.

9.5.2 Erzeugung von Isolinien-Bildern

Bild 9-14 zeigt die Isothermen auf der Symmetrieebene. Das warme Wasser innen (rot) gibt Wärme durch das Kupferrohr an das kalte Wasser außen (blau) ab. Bei dem gewählten Massenstrom kühlte das warme Wasser um ca. 4°C ab, während das kalte Wasser sich um ca. 9°C erwärmt. Wie beim Beispiel in Kapitel 7.5.2 ist die Vorgehensweise wie folgt:

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Contour** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den bunten Kreisen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Contour1.
- In der Detailansicht unter Geometry eingeben:
 - Domains: **All Domains**
 - Locations: **IF_Symmetry, OF_Symmetry, PI_Symmetry** (mit Strg-Taste)
 - Variable: **Temperature**
 - # of Contours: 11.
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour1 im Strukturabaum links oben.

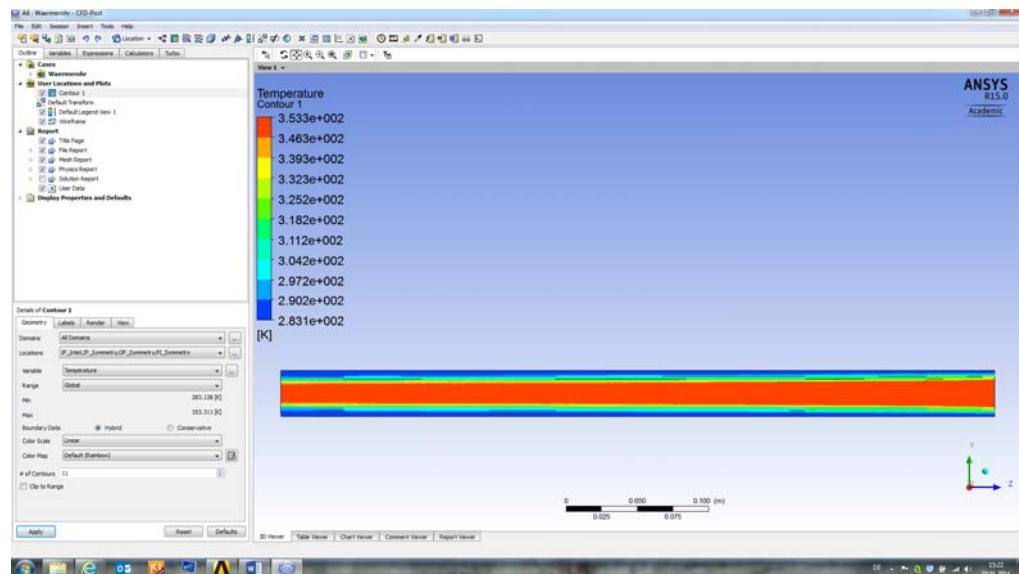


Bild 9-14 CFX-POST: Isolinien der Temperatur auf der Symmetrieebene

Die Isothermen an den Zu- und Abströmrändern sind in Bild 9-15 und 9-16 dargestellt. Zur besseren Übersicht wurde der Halbkreis an der Symmetrieebene gespiegelt um wieder einen Vollkreis zu erhalten.

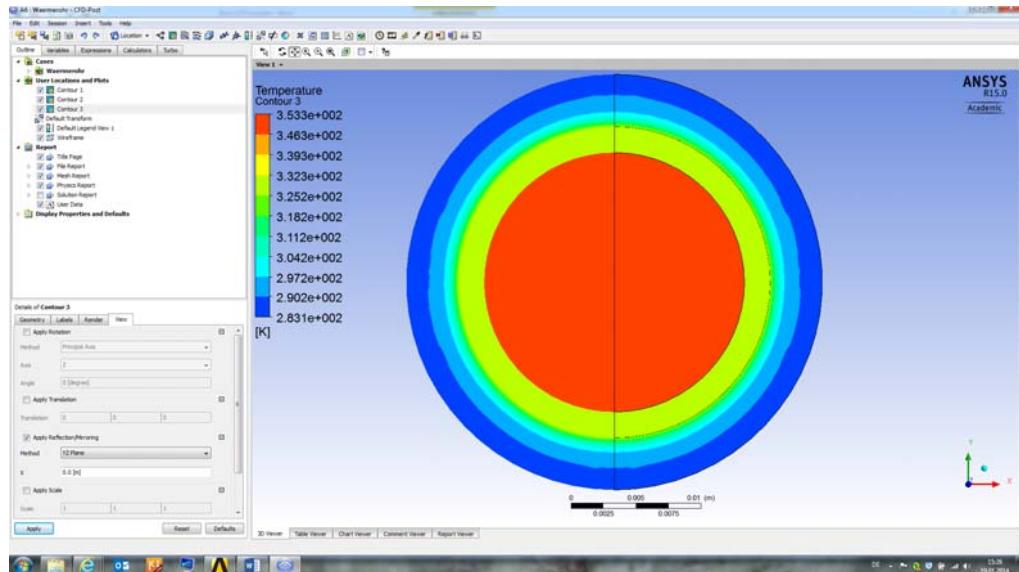


Bild 9-15 CFX-POST: Isolinien der Temperatur bei z=500mm (warme Zuströmung innen)

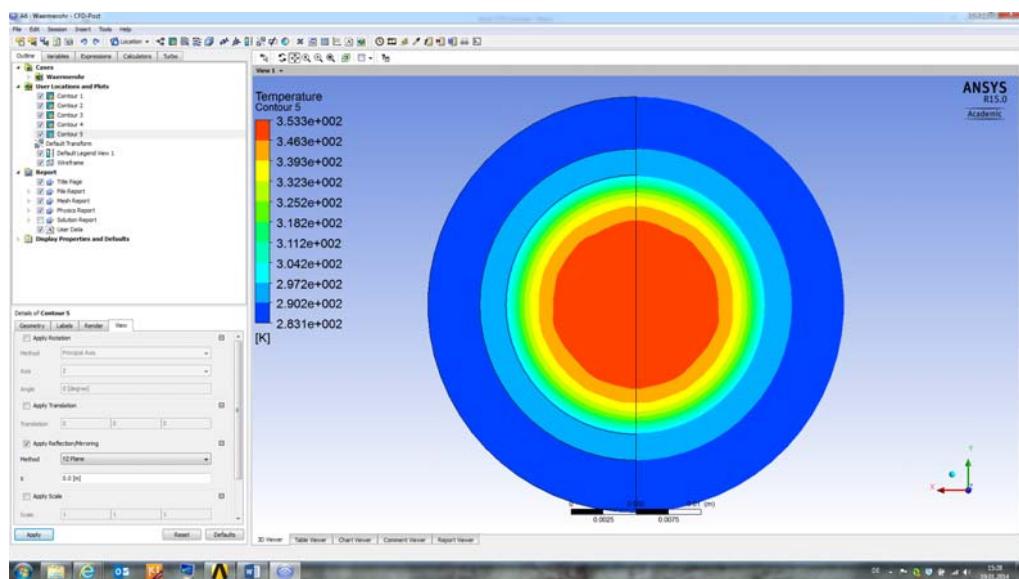


Bild 9-16 CFX-POST: Isolinien der Temperatur bei z=0mm (kalte Zuströmung außen)

Die Vorgehensweise für ist folgt:

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Contour** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den bunten Kreisen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Contour2.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Domains: All Domains
 - Locations: **IF_Inlet, IF_Outlet, OF_Inlet, OF_Outlet, PI_InOut**
 - Variable: **Temperature**
 - # of Contours: 11.
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour2 im Strukturbau links oben.
- Im Strukturbau **Contour2** mit der rechten Maustaste markieren und **Duplicate** anklicken. Es entsteht Contour3.
- In der Detailansicht von **Contour3** unter **View** eingeben:
 - Den Haken vor **Apply Reflection/Mirroring** aktivieren
 - Method: **YZ-Plane**
 - X: 0.0 [m].
- **Apply** anklicken. Es erscheint Contour3 im Strukturbau links oben.

Es können auch zahlreiche andere Größen auf neuen Flächen dargestellt werden. Hierfür muss z. B. eine neue Schnittebene definiert werden über die Aufgabenleiste mit **Location / Plane**.

9.5.3 Erzeugung von Vektor-Bildern

Geschwindigkeitsvektoren werden wie folgt erzeugt:

- In der Aufgabenleiste **Insert** und **Vector** anklicken oder alternativ das Quadrat mit den drei Pfeilen.
- Den Namen eingeben. Standard ist Vector1.
- In der Detailansicht unter **Geometry** eingeben:
 - Domains: All Domains
 - Locations: **IF_Symmetry, OF_Symmetry, PI_Symmetry**.
- In der Detailansicht unter **Symbol** eingeben:
 - Symbol Size: **0.1**. Hierdurch kann die globale Länge der Vektoren gegenüber dem Standardwert von 1.0 angepasst werden, falls sie zu lange für eine übersichtliche Darstellung sind.
- **Apply** anklicken.
- Im Strukturbau die anderen Bilder wie z. B. **Contour1 deaktivieren**, da ansonsten die Bilder überlagert dargestellt werden.

Man erkennt hier das ausströmende innere Fluid und das einströmende äußere Fluid mit den Grenzschichten an den Rohrwänden (Bild 9-17).

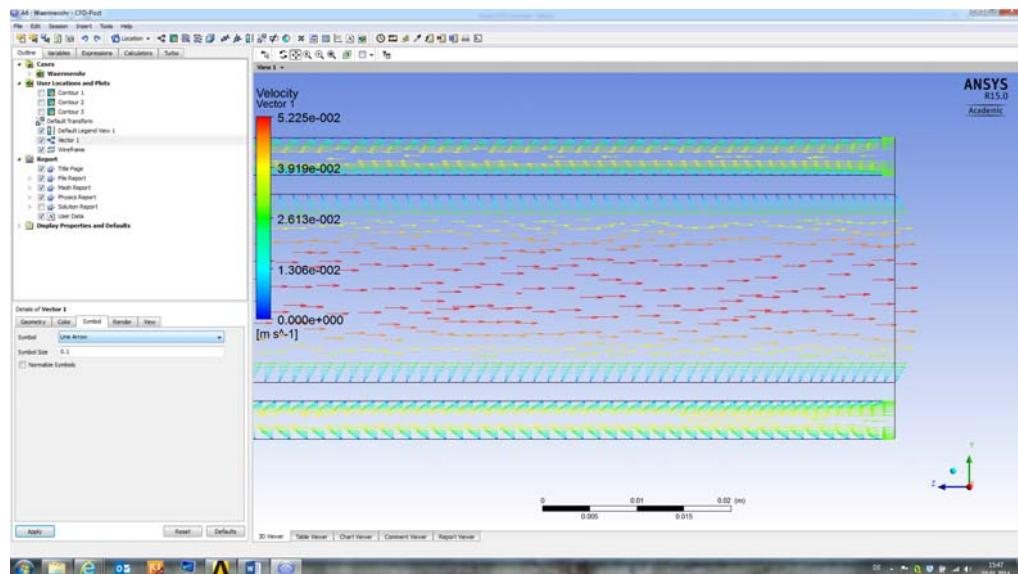


Bild 9-17 CFX-POST: Geschwindigkeitsvektoren auf der Symmetrieebene bei $z=0\text{mm}$

9.5.4 Erzeugung von Diagrammen

Um die Temperaturverläufe entlang der Z-Achse von $z_1=0\text{m}$ bis $z_2=0.5\text{m}$ darstellen zu können, werden zwei Linien bei $x=0$ definiert, die für das warme innere Fluid beim Radius von $y=0.005\text{m}$ und die für das kältere äußere Fluid beim Radius von $y=0.014\text{m}$:

- Hierzu in der Aufgabenleiste unter **Location / Line** anklicken.
- Im Fenster Insert Line kann ein Name angegeben werden. Standardname ist Line1. Er erscheint dann im Strukturbau links oben.
- In der Detailansicht von Line1 ist einzugeben:
 - Domains: **IF**
 - Method: **Two Points**
 - Point 1: **0 0.005 0**
 - Point 2: **0 0.005 0.5**
- Mit **Apply** bestätigen.
- Im Strukturbau **Line1** mit der rechten Maustaste markieren und **Duplicate** anklicken. Es entsteht Line2.
- In der Detailansicht von Line2 ist einzugeben:
 - Domains: **OF**
 - Method: **Two Points**
 - Point 1: **0 0.0014 0**
 - Point 2: **0 0.0014 0.5**
- Mit **Apply** bestätigen.

Jetzt sind die beiden Linien entlang der Z-Achse für das innere und äußere Fluid definiert.

Im zweiten Schritt wird das Diagramm definiert:

- In der Aufgabenleiste das Symbol **Chart** (xy-Diagramm mit 3 bunten Linien) anklicken.
- Im Fenster **Insert Chart** kann ein Name angegeben werden. Standardname ist Chart1.
- In der Detailansicht von Chart1 werden folgende Daten angegeben:
 - Register General / Title: **Inner Fluid Temperatur**
 - Register Data Series / Location: **Line 1**
 - Register X Axis / Data Selection / Variable: **Z**
 - **Invert Axis** anklicken, damit der Zuströmrand mit $80^{\circ}\text{C}=353.13\text{K}$ links liegt
 - Register Y Axis / Data Selection / Variable: **Temperature**.
- **Apply** anklicken und Chart1 erscheint im Strukturbau links oben.
- Im Strukturbau **Chart 1** mit der rechten Maustaste markieren und **Duplicate** anklicken. Es entsteht Chart2.
- In der Detailansicht von Chart2 lauten die Daten dann:
 - Register General / Title: **Outer Fluid Temperature**.
 - Register Data Series / Location: **Line 2**
- **Apply** anklicken und Chart 2 erscheinen im Strukturbau links oben.

Jetzt erscheint im Grafikfenster der Temperaturverlauf entlang der Strömung für das innere Fluid bzw. das äußere Fluid (Bild 9-18, 9-19).

Diese Werte können auch in einer Datei gespeichert werden für die spätere Verarbeitung z. B. in Excel. Hierfür muss in der Detailansicht:

- **File / Export** angeklickt werden.
- Im Export-Fenster kann der Dateityp gewählt werden wie z. B. ***.csv** oder ***.txt**.
- Nach der Eingabe des Dateinamens mit **Save** abspeichern.

Des Weiteren können auch direkt Bilder erzeugt werden über die Aufgabenleiste mit **File** und **Save Picture**.

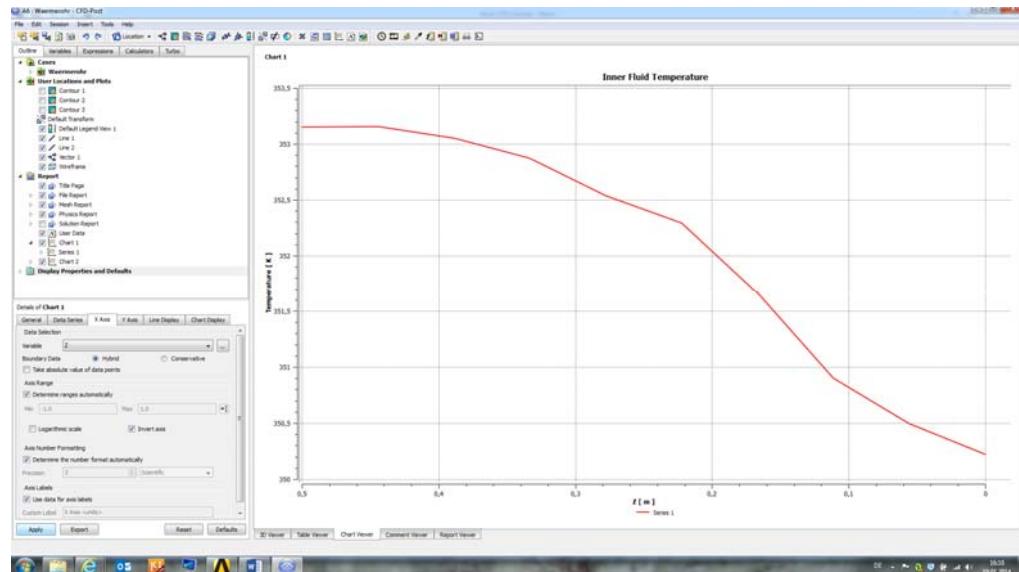


Bild 9-18 CFX-POST: Temperaturverlauf des inneren Fluides

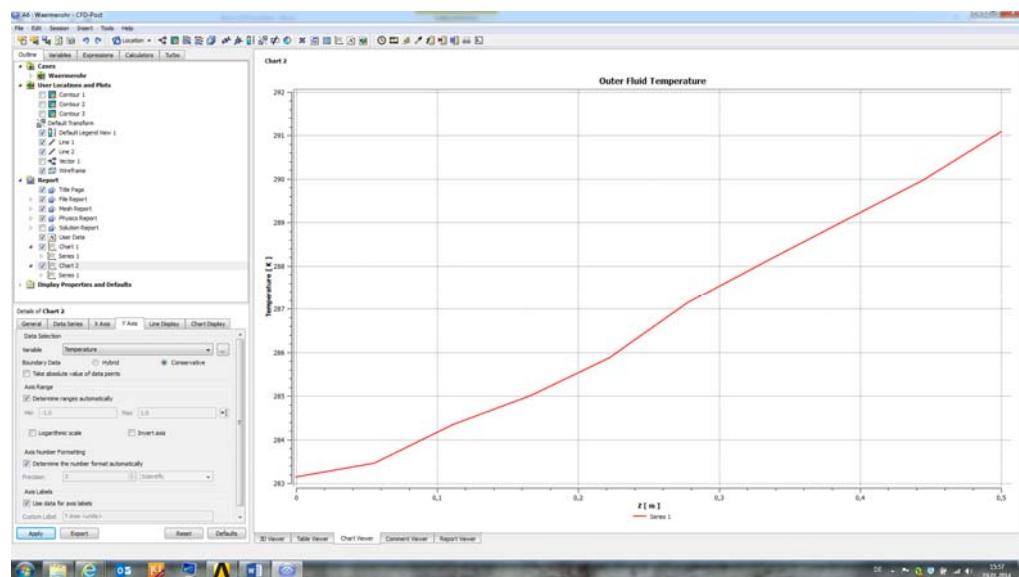


Bild 9-19 CFX-POST: Temperaturverlauf des äußeren Fluides

9.6 Parametervariation

Durch Anklicken des Feldes **Parametersatz** in der ANSYS WORKBENCH können alle zuvor definierten Parameter angezeigt werden (Bild 9-20).

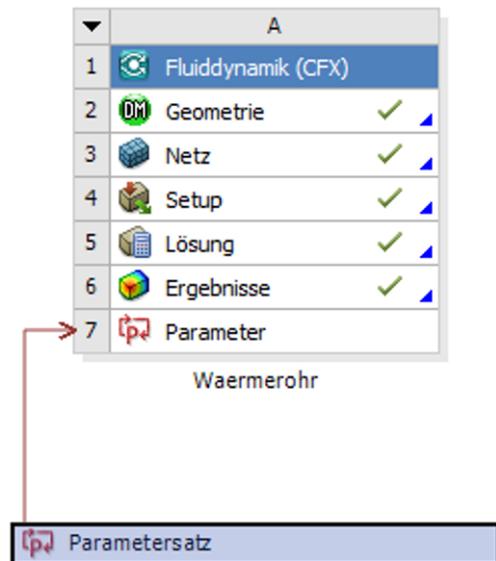


Bild 9-20 ANSYS WORKBENCH: Projektschema mit Parametersatz

Hier erscheint der Parameter **Laenge**, der zuvor im Programm DESIGN MODELER für die Rohrlänge angelegt und mit dem Wert 500mm belegt wurde. Für diesen Wert wurde bereits die Rechnung durchgeführt.

Strukturbau für Alle Parameter				
	A	B	C	D
1	ID	Parametername	Wert	Einheit
2	Eingabeparameter			
3	Eingabeparameter Waermerohr (A1)			
4	P1	Laenge	500	mm
*	Neuer Eingabeparameter	Neuer Name	Neuer Ausdruck	
6	Ausgabeparameter			
*	Neuer Ausgabeparameter		Neuer Ausdruck	
8	Diagramme			

Bild 9-21 ANSYS WORKBENCH: Strukturbau für Parameter

Rechts neben dem Strukturabaum erscheint die Tabelle der Designpunkte (Bild 9-22):

Tabelle von Design Points					
	A	B	C	D	E
1	Name ▾	Aktualisierungsreihenfolge ▾	P1 - Laenge ▾	Exportiert	Hinweis ▾
2	Einheit		mm		
3	Aktuell	1	500		
*					

Bild 9-22 ANSYS WORKBENCH: Tabelle mit aktuellem Designpunkt 500mm

Sollen nun auch Rechnungen für andere Längen automatisch durchgeführt werden, so dupliziert man den aktuellen Designpunkt (Bild 9-23):

- Anklicken des aktuellen Designpunkts mit der rechten Maustaste
- **Dupliziere Design Punkt** auswählen
- Den neuen Zahlenwert für die Länge eingeben, hier **1000mm**
- Ggf. weitere Designpunkte anlegen, hier auch für **1500mm**.

Tabelle von Design Points					
	A	B	C	D	E
1	Name ▾	Aktualisierungsreihenfolge ▾	P1 - Laenge ▾	Exportiert	Hinweis ▾
2	Einheit		mm		
3	Aktuell	1	500		
4	DP 1	2	1000		
5	DP 2	3	1500		
*					

Bild 9-23 ANSYS WORKBENCH: Tabelle mit zusätzlichen neuen Designpunkten 1000mm und 1500mm

Nach **Schließen des Parametersatzes** in der oberen Aufgabenleiste erscheint wieder die ANSYS WORKBENCH Benutzeroberfläche. Wird dann in der oberen Aufgabenleiste das Feld **Alle Designpunkte aktualisieren** angeklickt, so starten die benötigten Programme automatisch für jeden angelegten Designpunkt:

- im Programm DESIGN MODELER wird dann zuerst die Rohrlänge angepasst
- im Programm MESHING das Rechennetz aktualisiert
- im Programm CFX-SOLVER die Rechnung iterativ durchgeführt
- und im Programm CFD-POST die Ergebnisdarstellungen erzeugt.

Bis dann alle Rechnungen beendet sind, kann es dann schon etwas dauern.

Literaturverzeichnis

Übersichtsliteratur

- [1] Anderson, J.D. Jr.: Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill International Editions, 1995
- [2] Ferziger, J.H.; Peric, M.: Numerische Strömungsmechanik, Springer Verlag Berlin, 2008
- [3] Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows - Volume 1 Fundamentals of Numerical Discretization - Volume 2 Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, John Wiley & Sons, 1988
- [4] Laurien, E.; Oertel, H.: Numerische Strömungsmechanik, Springer Vieweg, 2013
- [5] Peyret, R.; Taylor, T.D.: Computational Methods for Fluid Flow, Springer Verlag Berlin, 1982

Fachliteratur

- [6] ANSYS CFX-Solver Benutzeranleitungen, ANSYS CFX Release 15.0, 2013
- [7] Beam, R.M.; Warming, R.F.: An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic system in conservation law form, Journal of Computational Physics, 22, 87-109, 1976
- [8] Briley, W.R.; McDonald, H.: Solution of the three-dimensional Navier-Stokes equations by an implicit technique, Proc. 4th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol. 35, Springer Verlag Berlin, 1975
- [9] Chima, R.V.: NASA Glenn Research Center, Cleveland, USA, 2011,
http://www.grc.nasa.gov/WWW/5810/rvc/tcgrid/stg1_x.jpg
- [10] Courant, R.; Isaacson, E.; Reeves, M.: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences, Comm. Pure and Applied Mathematics, 5, 243-55, 1952
- [11] Enquist, B.; Osher, S.: Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations, Mathematics of Computation, 34, 45-75, 1980
- [12] Godunov, S.K.: A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations, Math. Sbornik, 47, 271-306, 1959, in Russian, Translation US Joint Publ. Res. Service JPRS 7226, 1969
- [13] Harten, A.; Lax, P.D.; Van Leer, B.: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Review, 25, 35-61, 1983
- [14] Jameson, A.; Schmidt, W.; Turkel, E.: Numerical simulation of the Euler equations by finite volume method using Runge-Kutta time stepping schemes, AIAA Paper 81-1259, 1981
- [15] Lax, P.D.; Wendroff, B.: Systems of conservation laws, Comm. Pure and Applied Mathematics, 13, 217-37, 1960

- [16] Lecheler, S.: Ein voll-implizites 3-D Euler-Verfahren zur genauen und schnellkonvergenten Strömungsberechnung in Schaufelreihen von Turbomaschinen, Fortschrittbericht VDI Reihe 7 Nr. 216, VDI-Verlag Düsseldorf, 1992
- [17] Lerat, A.: Implicit methods of second order accuracy for the Euler equations, AIAA Paper 83-1925, 1983
- [18] MacCormack, R.W.: The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, AIAA Paper 69-354, 1969
- [19] Osher, S.; Chakravarty, S.R.: High resolution schemes and the entropy condition, SIAM Journal Numerical Analysis, 21, 966-84, 1984
- [20] Pulliam, T.H.; Steger, J.L.: Implicit finite difference simulations of three dimensional compressible flows, AIAA Journal, 18, 159-67, 1980
- [21] Pulliam, T.H.; Chaussee, D.S.: A diagonal form of an implicit approximate factorization algorithm, Journal of Computational Physics, 39, 347-63, 1981
- [22] Roe, P.L.: The use of the Riemann problem in finite difference schemes, Lecture Notes in Physics, Vol. 141, 354-9, Springer Verlag Berlin, 1981
- [23] Roe, P.L.: Some contributions to the modelling of discontinuous flows, Lecture in Applied Mathematics, 22, 357-72, 1985
- [24] Steger, J.L.; Warming, R.F.: Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite difference methods, Journal of Computational Physics, 40, 263-93, 1981
- [25] Van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. A second order sequel to Godunov's method, Journal of Computational Physics, 32, 101-36, 1979
- [26] Van Leer, B.: Flux vector splitting for the Euler equations, Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer Verlag, 1982
- [27] Von Neumann, J.; Richtmyer, R.D.: A method for the numerical computations of hydrodynamical shocks, Journal of Mathematical Physics, 21, 1950
- [28] Yee, H.C.: Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications, Journal of Computational Physics, 68, 151-79, 1985
- [29] Yee, H.C.; Harten, A.: Implicit TVD schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates, AIAA Paper 85-1513, 1985

Sachwortverzeichnis

A

Abbruchfehler 44 ff., 52 ff., 59, 64 f., 71, 81, 109, 192 f.
 Abbruchkriterium 111
 Abströmrand 9, 25, 28 ff., 62 ff., 106, 121, 127, 133 f., 153 ff., 175 f., 191
 Additive numerische Viskosität 41, 54 ff., 59, 81, 83, 93, 192
 ANSYS CFX 1, 8, 106, 114, 122, 188
 ANSYS WORKBENCH 116, 146, 150, 162, 167, 186 f.
 Aufgabenleiste 117 ff.
 Auftriebsbeiwert 110 ff.

B

Baldwin-Lomax-Modell 33 f.
 Beschleunigung 13 f., 59, 82

C

CAD 62 f., 106 ff., 124, 146, 190, 198
 CFD-POST 116, 139 ff., 158, 180, 187
 CFL-Zahl 59, 81 ff., 192
 CFX-PRE 106, 116, 127 ff., 152 ff., 171 ff.
 CFX-SOLVER 106, 136 ff., 156 ff., 178 f., 187 f.
 Charakteristik 26 ff., 56, 59, 84, 86, 99
 C-Rechennetz 63, 65 f., 192
 Courant-Friedrichs-Levy-Zahl 59, 192

D

DESIGN MODELER 106 f., 116 ff., 145 ff., 162 ff., 186 ff.
 Detailansicht 117 ff.,

Dichte 2, 5, 11 f., 21, 24, 39, 42, 61, 66 f., 71, 74 f., 99, 105, 109, 193 f.

Differential 8 ff., 33 ff., 40 ff., 51 ff., 62, 67 ff., 78, 188, 191 f.

Differentialform 9 ff., 43, 191

Differentialgleichung 8, 20, 33 f., 40 ff., 51 ff., 62, 67, 78, 192

Differenzengleichung 42, 52 ff., 62, 67, 78, 192

Differenzenschema 57 f.

Diskretisierung 8, 10 ff., 15, 41 ff., 54 ff., 60, 71, 74 ff., 78 ff., 93, 191 f.

Diskretisierungsmethode 41, 43, 192

Divergenz 13, 20, 23 f.

Druckkraft 13

Dynamische Viskosität 25

E

Eigenvektor 89
 Eigenwert 86, 89
 Ein-Gleichungsmodell 33
 Einheitsmatrix 23
 Elektromagnetische Kraft 13
 Energie
 -, innere 24
 -, kinetische 33, 34
 -, potentielle 17
 Energieerhaltung 17, 19, 23, 42, 129, 137, 156, 179, 191
 Enthalpie 19, 24, 39, 82
 Enthalpedämpfung 82
 Entropiebedingung 91 ff.
 Erhaltungsgleichung 1, 8 ff., 35, 41 ff., 51, 54, 61, 69 ff., 86, 94, 129 f.,

Erhaltungsvektor 9, 22, 62, 89

Euler-Gleichung 9, 35, 37ff., 81, 191

Expansionsfächer 87 f., 94, 99 ff.

Extrema 85, 88

F

Festkörperrand 9, 25 f., 29 ff., 48 f., 61 f., 74 f., 106 ff., 133 f., 155, 177, 193

Finite-Differenzen 10 f., 42 f., 73, 192

Finite-Elemente 42 f., 192

Finite-Volumen 42 f., 74, 82, 192

Fluid-Struktur-Interaktion 2, 108

Flussvektor 22

Fourier 19, 30

G

Gaskonstante 24, 92, 104

Genauigkeitsordnung 8, 45, 48 f., 52, 101, 192

Geometrieerzeugung 8, 63

Gesamtenergie 17

Geschwindigkeitsvektor 13, 23, 37, 141 f., 160, 182 f., 195

Gleichungssystem 20, 23, 33, 42, 58 ff., 83, 192

Grafikfenster 117 ff.

Gravitation 17, 21, 23

Grenzschicht-Gleichungen 35, 38

Grenzschichtprofil 27, 74

H

Haftbedingung 30, 37, 74

Hauptdiagonale 58

Hauptsatz 17, 191

Hexaeder 63, 73, 125 f.

Hinterkante 65 ff., 75

H-Rechennetz 61, 65 f., 71 f., 193

I

Ideales Gas 24

Impulserhaltung 9 f., 13, 16, 20, 23, 40, 137, 156 f., 179, 191

Integralform 10 ff., 24, 43

Isofläche 112

Isothermen 114 f., 159, 180 f.

J

Jacoby-Determinante 68, 70

K

Komponente 13, 17, 29 f., 33, 37, 119 ff., 127, 132, 147 ff., 152, 162 ff. 171 ff.

Konservative Form 15, 70

Konsistenz 41, 53 f.

Kontaktfläche 87, 88, 99 ff.

Kontrollvolumen 10 ff.

Kontur 64 f., 94, 112, 193

Konvektion 18, 40

Konvergenz 51 ff., 59, 61, 80 ff., 106, 109, 111, 129, 131, 137 ff., 157 ff., 179

Koordinaten 8, 11 ff., 16, 19, 21 ff., 65 ff., 83, 107, 118 ff., 131, 145 ff., 194

Koordinatentransformation 67

Körperkräfte 13

Kraft 13 f., 17, 21, 112, 145,

L

Leistung 2, 17 f., 78, 83, 109

Limiter 78, 92 f., 98 ff., 195

Linearisierung 59

Linienkörper 119

Lösung

-, instationäre 51, 192

-, numerische 53 f., 95, 192

-, stationäre 41, 51, 81 ff., 109, 192

M

- Machzahlverteilung 2, 5
 Massenerhaltung 9 ff., 23, 94, 157, 190
 Massenstrom 12, 27, 94 f., 111, 153, 175, 180
 Mehrgittertechnik 59, 82
 MESHING 106, 109, 116, 124 ff., 150 ff., 167 ff., 187
 Mittelwerte 32 f.
 Monotonie 91, 93, 95, 193

N

- Navier-Stokes-Gleichung 8f., 20 ff., 32 ff., 47, 54, 81, 83, 190
 Netzeinflussstudie 110
 Netzgenerierung 63, 107, 116
 Netzunabhängigkeitsstudie 105, 110, 193
 Netzverdichtung 74, 75, 76
 Netzverfeinerung 105 f., 106, 109 f., 193
 Normalspannung 15, 16
 Normatmosphäre 132
 Null-Gleichungsmodell 33

O

- Oberflächenkraft 13, 17
 O-Rechennetz 65, 71 f., 75 f., 125, 192
 Oszillation 81, 84 f., 88, 90 ff., 191 ff.

P

- Post-Processing 112, 193
 Potentialgleichung 9, 35, 38 ff., 190
 Pre-Processing 105, 107, 111, 193
 Prisma 73
 Prismenschicht 125 ff., 150 ff., 168 ff.

Q

- Quellterm 9, 21, 23, 53 f., 62, 69

R

- Randbedingung
 , - physikalische 26 ff., 34, 134, 153, 175, 190
 , - numerische 26 ff., 190
 Randfläche 63, 108, 111, 127, 152, 171 f.
 Rechengebiet 25 f., 31, 48, 55, 62 ff., 75, 105 ff., 120 ff., 132, 135, 140, 145, 150, 162, 164 f., 173 ff., 193
 Rechennetz
 , - adaptiv 8, 76, 192
 , - blockstrukturiert 71
 , - kartesisch 64
 , - schiefwinklig 65, 69, 192
 , - strukturiert 34, 61, 64, 71 f., 109, 192
 , - unstrukturiert 61, 73 f., 192
 Rechennetzadaption 63, 74
 Rechenparameter 128, 153, 173
 Reibungskraft 13
 Relaxationsverfahren 59
 Residuenglättung 82
 Reynolds-Spannung 33 f.
 Reynoldszahl 34 ff., 190
 Riemann 85 ff.,
 Rotationsfrei 39 f., 190
 Rotationssymmetrie 108 f.
 Rückwärtsdifferenz 44 ff., 50, 56, 71, 81, 84, 86, 191

S

- Schalenkörper 123
 Schallgeschwindigkeit 59, 86
 Schiefwinkligkeit 71, 75, 125, 192
 Schubspannung 13 ff., 24
 Schwankungsgröße 32
 Schwerkraft 13, 21
 Shear Stress Transport 33, 129, 153, 174

- Skalarform 20 f.
Spannungsmatrix 23
Spiegelsymmetrie 108 f.
SST-Modell 34
Stabilität 53 f., 59 f., 78, 83, 90
Standardnetz 109, 150, 167 f.
Stoffwert 25, 111
Stokessche Beziehung 24
Stoßwelle 86 f., 94, 99 ff.,
Stromlinie 2 f., 39, 106, 112, 140 ff., 161, 194
Strömungsgeschwindigkeit 2, 11, 86
Strömungsvektor 112, 140
Strukturbau 117 ff., 140 ff.,
Sutherland-Formel 25
Symmetrie translatorische 108 f.
Symmetrieebene 62 f., 105 ff., 122, 133 ff., 140 ff., 149, 155, 158 ff., 165, 177, 180 ff., 193
- T**
Tangentialbedingung 37
Taylor-Reihe 44 ff., 84
Tetraeder 63, 73 f., 125
Thin-Layer 9, 35 ff., 83, 195
Totaldruck 25 ff., 132
Totaltemperatur 26, 28, 132
Transition 2, 34
Tridiagonal 58, 83
Turbulenzmodell 9, 32 ff., 111, 113, 129, 137, 156, 179, 190, 194
TVD-Bedingung 78, 91, 93, 95, 101, 193
- U**
Überschall-Abströmräand 9, 29, 190
Überschall-Festkörperrand 30
Überschall-Zuströmräand 27
- Überschallströmung 2, 25 f., 28, 51
Übungsbeispiel 114, 117, 146, 162
Umkehrtransformation 68
Unstetigkeit 11, 37, 39, 43, 48, 55, 81, 84, 87, 90 ff., 99, 101, 193, 196 ff.
Unterschall-Abströmräand 28
Unterschall-Festkörperrand 29
Unterschall-Zuströmräand 9, 26 f., 190
Unterschallströmung 25 f., 39, 78, 81, 84, 134
Upwind-Diskretisierung 41, 48, 56, 59, 93, 191
- V**
Validierung 2, 8, 105, 111, 194
Vektorform 20, 22, 52, 69
Verdichtungsstoß 2, 55, 76 ff., 87 f., 94 f., 99 ff.
Verdrängungsdicke 38
Verfahren
,- ADI 79 f., 83, 100 ff., 192
,- Flux-Difference-Splitting- 79, 85 ff., 95, 98
,- Flux-Vector-Splitting- 79, 85 f., 89, 94 ff., 100 ff.
,- Godunov- 85 ff., 188 f.
,- High-Resolution- 8, 56, 78 f., 84, 90 ff., 98, 100 f., 104, 192 f.
,- Lax-Wendroff- 79 ff., 93, 192
,- monotone 85
,- Predictor-Corrector- 80 f.
,- Runge-Kutta- 80 ff., 93, 188, 192
,- TVD- 78 f., 84, 90 ff., 193
,- Upwind- 54, 56, 78 f., 84 ff., 89 ff., 192
,- Zentrale 79 ff., 90, 93, 192
- Viskosität
,- physikalische 55

, - numerische 81, 83, 93, 191
Volumenelement 10 ff., 17 f., 21, 32, 42 f.,
73 f., 109, 122, 190
Vorderkante 67, 112, 121, 131, 138
Vorwärtsdifferenz 44 ff., 56, 81, 86, 191

W

Wand adiabate 108, 175
Wandtemperatur 29 f.
Wärmekapazität 24 f.
Wärmeleitung 18 ff., 30
Wärmeleitkoeffizient 25
Wärmestrahlung 18, 21
Wärmestrom 18 ff., 30, 175

Wirbelsimulationsmodell 33
Wirbelviskositätsmodell 33 f.

Z

Zeitschritt 41, 51, 53, 59 f., 81 ff., 87, 111,
130, 156 f., 179, 191
Zelleckpunkt 42 f.
Zellzentrum 42 f., 87
Zustandsgleichung 24, 190
Zuströmrand 9, 25 ff., 31, 62, 67, 121, 133
f., 152, 154, 169 ff., 184, 190
Zuströmrichtung 27
Zuströmung 25 ff., 67, 94, 133, 145, 159,
181, 192

Antworten zur Zielkontrolle

Antworten zu Kapitel 2.1

1. Erhaltungsgrößen sind die Masse, der Impuls in x-, y- und z-Richtung und die Energie.
2. Die Unterschiede zwischen Integral- und Differentialform sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.
3. Die Massenerhaltungsgleichung wird an einem raumfesten Volumenelement hergeleitet. Die Summe aller Massenströme durch die sechs Oberflächen ist gleich der zeitlichen Änderung der Masse im Volumenelement.
4. Die Impulserhaltungsgleichungen werden aus dem zweiten Gesetz von Newton hergeleitet.
5. Die Energieerhaltungsgleichung wird aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet.
6. Die vektorielle Form der Navier-Stokes-Gleichungen ist als Gleichung 2.18 angegeben.
7. Zusätzliche Gleichungen sind die thermische und die kalorischen Zustandsgleichungen und neun Beziehungen für die Spannungen, wie z. B. die Stokesschen Beziehungen.
8. Physikalische Randbedingungen müssen vom Benutzer vorgegeben werden, numerische Randbedingungen werden vom Programm berechnet.
9. Am Unterschall-Zuströmrand müssen vier physikalische Randbedingungen vorgegeben werden, an einem Überschall-Abströmrand keine (in 3D).
10. Die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen lösen die Turbulenzen auf und benötigen deshalb ein extrem feines Rechennetz. Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen verwenden Turbulenzmodelle und benötigen nicht so feine Rechennetze, weshalb die Rechenzeiten deutlich kürzer sind.
11. Turbulenzmodelle sind notwendig, um die hochfrequenten turbulenten Schwankungen, die vom Rechennetz nicht aufgelöst werden, berechnen zu können.
12. Bei den Thin-Layer Navier-Stokes-Gleichungen werden die Reibungs- und Wärmeleitungsterme in die beiden Richtungen parallel zur Wand vernachlässigt.
13. Bei den Euler-Gleichungen werden alle Reibungs- und Wärmeleitungsterme vernachlässigt. Sie gelten deshalb nur für hohe Reynoldszahlen und ablösefreie Strömungen.
14. Bei der Potentialgleichung werden alle Reibungs- und Wärmeleitungsterme wie bei den Euler-Gleichungen vernachlässigt und Verluste werden nicht zugelassen (Rotationsfreiheit bzw. isentrope und isenthalpe Strömung).
15. Die Polare kann nur mit den Navier-Stokes-Gleichungen berechnet werden, da bei größeren Anstellwinkeln die Strömung ablösen kann.
16. Um die Stoßlage um ein Hyperschallflugzeug abschätzen zu können, würden die Euler-Gleichungen ausreichen.

Antworten zu Kapitel 3.1

1. Diskretisierung bedeutet die Umwandlung der Differentiale in finite Differenzen.

2. Diskretisierungsmethoden sind die Finite-Elemente-Methode, die Finite-Volumen-Methode und die Finite-Differenzen-Methode.
3. Die räumlichen Ableitungen können durch Vorwärtsdifferenzen, Rückwärtsdifferenzen oder zentrale Differenzen diskretisiert werden.
4. Die Genauigkeitsordnung ist die Größenordnung des Abbruchfehlers. Bei einer Genauigkeit 1. Ordnung ist der Abbruchfehler z. B. $O(\Delta x)$, bei 2. Ordnung $O(\Delta x^2)$.
5. Bei stetigem Verlauf der Strömungsgröße sollte die Genauigkeit 2. Ordnung sein, bei unstetigem Verlauf nur 1. Ordnung um Oszillationen an der Unstetigkeitsstelle zu vermeiden.
6. Die zeitliche Ableitung kann durch eine Vorwärtsdifferenz oder eine zentrale Differenz diskretisiert werden.
7. Bei der zeitasymptotischen Rechnung wird eine stationäre Lösung gesucht und die zeitliche Ableitung wird lediglich aus numerischen Gründen verwendet. Bei der zeitgenauen Rechnung wird die instationäre Lösung gesucht und die zeitliche Ableitung wird physikalisch aufgelöst.
8. Für die instationäre Rechnung wird eine zentrale Differenz verwendet, da diese eine Genauigkeit von 2. Ordnung hat.
9. Für stationäre Lösungen werden die zeitlichen Ableitungen mitgelöst, da dann die Erhaltungsgleichungen hyperbolisch bleiben und mit einem Lösungsverfahren gelöst werden können.
10. Nach der Diskretisierung erhält man die so genannten Differenzengleichungen.
11. Die Differenzengleichung ist konsistent mit der Differentialgleichung, wenn für Netzmaßenweiten, die gegen Null gehen, die Abbruchfehler auch gegen Null gehen, d. h. die Differenzengleichungen stimmen mit den Differentialgleichungen überein.
12. Ein numerisches Lösungsverfahren ist stabil, wenn die Abbruchfehler während des Rechenlaufs immer kleiner werden. Die numerische Lösung erfüllt dann die Differenzengleichung.
13. Eine numerische Lösung ist konvergent, wenn sie die Differentialgleichungen erfüllt. Das Residuum als Maß für die Erfüllung der Erhaltungsgleichungen muss immer kleiner werden. Sind die Residuen aller Erhaltungsgleichungen kleiner als 10^{-4} , so spricht man in der Regel von einer konvergenten Lösung.
14. Eine additive numerische Viskosität wird bei der zentralen räumlichen Diskretisierung benötigt, um die Abbruchfehler zu dämpfen, das Verfahren stabil zu machen und Oszillationen an Unstetigkeitsstellen zu reduzieren.
15. Upwind-Diskretisierung bedeutet eine einseitige Diskretisierung, die die Ausbreitungsrichtung von Informationen berücksichtigt.
16. Bei der expliziten Diskretisierung werden die Flussterme zum bekannten Zeitpunkt n gebildet, während sie bei der impliziten Diskretisierung zum Zeitpunkt $n+1$ gebildet werden.
17. Vorteil der impliziten Diskretisierung ist, dass größere C-Rechennetze bzw. Zeitschritte verwendet werden können. Hierdurch sind die Gesamtrechenzeiten üblicherweise kürzer als bei expliziten Verfahren. Nachteil ist die aufwändige Programmierung, da ein Gleichungssystem gelöst bzw. eine Matrix invertiert werden muss.
18. Die CFL-Zahl (Courant-Friedrichs-Levy-Zahl) koppelt den Zeitschritt Δt an die Maschenweite Δx , siehe Gleichung 3.31.
19. Bei einem rein expliziten Verfahren kann die maximale CFL-Zahl höchstens 1 sein.

Antworten zu Kapitel 4.1

1. Ein gutes Rechennetz soll möglichst rechtwinklig sein mit Änderungsraten kleiner als 1,2. Dann sind die Abbruchfehler am kleinsten und die Genauigkeit am größten (sieh auch Kapitel 6.4).
2. Bei schiefwinkeligen Rechennetzen passen sich die Netzlinien der Wandkontur an, wodurch die Genauigkeit der Lösung am Rand steigt.
3. O-, C-, und H-Rechennetze sind schiefwinkelige Rechennetze. Die Buchstaben geben die Form der Netzlinien an, siehe Kapitel 4.3.2. O-Rechennetze lösen die Grenzschicht an der Geometrie gut auf, allerdings nicht den Nachlauf. C- und H-Rechennetze lösen Grenzschicht und Nachlauf gut auf. H-Rechennetze verschwenden allerdings Netzpunkte in der Zuströmung.
4. Rechennetze werden am Festkörperrand verdichtet, um die Strömungsgradienten in der Wandgrenzschicht auflösen zu können und die Genauigkeit zu erhöhen. Bei reibungsfreier Rechnung ist dies nicht notwendig, so dass am Festkörperrand die Rechennetze deutlich größer sein können, was Rechenzeit spart.
5. Der Vorteil blockstrukturierter Rechennetze ist, dass sie aus mehreren Blöcken zusammengesetzt werden können. Hierdurch lassen sich auch für komplexere Geometrien gute Rechennetze mit geringer Schiefwinkligkeit erzeugen.
6. Adaptive Rechennetze passen ihre Maschenweite automatisch den Strömungsgradienten an. Somit können z. B. Verdichtungsstöße gut aufgelöst werden, während im restlichen Strömungsfeld unnötige Netzpunkte vermieden werden. Die Rechnungen können somit genau und effizient durchgeführt werden.
7. Unstrukturierte Rechennetze sind sehr flexibel und lassen sich auch an komplexe und zusammengesetzte Geometrien gut anpassen.
8. Eine ideale Netzzelle soll am besten rechtwinklig sein, da dann die Abbruchfehler klein sind und die Genauigkeit groß.

Antworten zu Kapitel 5.1

1. Die drei Klassen von Lösungsverfahren sind zentrale Verfahren, Upwind-Verfahren und High-Resolution-Verfahren.
2. Zentrale Verfahren sind genau, haben aber Probleme an Unstetigkeitsstellen wie Verdichtungsstößen. Die Lösung oszilliert dort meistens. Upwind-Verfahren sind sehr robust und oszillationsfrei, allerdings nicht genau genug. High-Resolution-Verfahren kombinieren beides. Sie sind genau und verhindern die Entstehung von Oszillationen an Unstetigkeitsstellen.
3. Zu den zentralen Lösungsverfahren zählen die Lax-Wendroff-Verfahren, die Runge-Kutta-Verfahren und die ADI-Verfahren.
4. Ein Vorteil der Upwind-Verfahren ist ihre Robustheit, auch bei Hyperschallströmungen mit starken Verdichtungsstößen. Nachteilig ist, dass sie nur eine Genauigkeit 1. Ordnung haben und somit bei stetigem Strömungsverlauf zu ungenau sind.
5. Monotone Lösungsverfahren verhindern die Entstehung von Extremstellen. Hierdurch können Oszillationen und unphysikalische Lösungen erst gar nicht entstehen.

6. Verfahren, die eine räumliche Genauigkeit von 2. Ordnung haben, sind nicht mehr streng monoton, da dies nur Verfahren 1. Ordnung erfüllen.
7. Für Verfahren 2. Ordnung wurde deshalb die TVD-Bedingung eingeführt, eine abgeschwächte Monotonie-Bedingung. Sie verhindert bei Verfahren von 2. Ordnung Genauigkeit die Entstehung von Oszillationen. Allerdings schließt sie unphysikalische Lösungen nicht aus.
8. Deshalb muss bei Verfahren mit einer räumlichen Genauigkeit von 2. Ordnung neben der TVD-Bedingung auch die Entropie-Bedingung erfüllt sein. Sie erlaubt nur Lösungen, bei denen die Gesamtentropie zunimmt.
9. Limiter-Funktionen begrenzen die Steigungen der Zellgrößen an Unstetigkeitsstellen. Hierdurch wird an Unstetigkeitsstellen die räumliche Genauigkeit auf 1. Ordnung reduziert und Oszillationen werden verhindert.
10. High-Resolution-Verfahren bzw. TVD-Verfahren liefern sowohl bei stetigem, als auch bei unstetigem Strömungsverlauf genaue und oszillationsfreie Lösungen.

Antworten zu Kapitel 6.1

1. Bei einer numerischen Strömungsberechnung müssen folgende fünf Schritte durchgeführt werden: Erzeugung des Rechengebiets, Erzeugung des Rechennetzes, Vorbereitung der Strömungsberechnung (Pre-Processing), Strömungsberechnung und Auswertung (Post-Processing).
2. Die Geometrie kann üblicherweise als CAD-Datei oder als Textdatei mit den Koordinaten eingelesen werden. Moderne CFD-Programme haben auch Programmteile, mit denen die Geometrie direkt erzeugt werden kann.
3. Das Rechengebiet begrenzen folgende Randarten: Zuströmränder, Abströmränder, periodische Ränder und Symmetrieebenen. Durch sie kann das Fluid strömen. Nicht durchströmte Ränder sind die Festkörperränder, die durch die Geometrie selbst gebildet werden.
4. Symmetrieebenen helfen Rechenzeit zu sparen, da das Rechengebiet deutlich verkleinert werden kann, wodurch Netzpunkte und Rechenzeit eingespart werden können.
5. Üblicherweise sollen die Ränder des Rechengebiets drei charakteristische Geometrielängen wie z. B. die Sehnenlänge beim Tragflügelprofil von der Geometrie selbst entfernt sein, um die Strömung an der Geometrie nicht zu verfälschen, da am Rand oftmals konstante Werte vorgeschrieben werden.
6. Das Rechennetz soll in Gebieten mit starken Gradienten verdichtet werden, um eine bessere Auflösung und Genauigkeit erzielen zu können. Dies ist bei starken Krümmungen und Knicken der Fall, in der Grenzschicht und an Unstetigkeitsstellen wie Verdichtungsstößen.
7. Eine Netzverfeinerungsstrategie ist sinnvoll, um schneller eine konvergente Lösung zu erhalten. Die Rechnung wird auf einem groben Netz gestartet. Nach einigen Iterationen wird die Lösung auf ein feineres Netz interpoliert. Auf diesem feinen Netz werden wieder einige Rechenschritte durchgeführt, bevor wieder auf das nächst feinere Netz interpoliert wird. Hierdurch werden die höherfrequenten Störungen schneller eliminiert.
8. Bei einer Netzunabhängigkeitsstudie werden Rechnungen auf unterschiedlich feinen Netzen durchgeführt und ihre Lösungen werden miteinander verglichen. Ziel ist es, das Netz

mit der kleinsten Netzpunktzahl zu finden, bei dem die Lösung nahezu keine Unterschiede zum feinsten Netz aufweist.

9. Beim Pre-Processing wird die Strömungsberechnung vorbereitet und es werden alle notwendigen Parameter und die Randbedingungen definiert.
10. Es sollte die ähnlichste vorhandene Lösung als Startlösung verwendet werden um, da dann die Rechnung am schnellsten konvergiert.
11. Die Strömung kann am besten mittels Geschwindigkeitsvektoren oder Stromlinien sichtbar gemacht werden.
12. Validierung bedeutet den Vergleich einer numerischen Lösung mit theoretischen oder experimentellen Ergebnissen um sicherzustellen, dass das Rechenprogramm zuverlässige Ergebnisse liefert.
13. Wenn CFD-Programme für neuartige Anwendungen verwendet werden, sollte zuerst eine Validierung durchgeführt werden.
14. Im Bereich von 0° bis 12° stimmen Rechnung und Messung in Bild 6.5 gut überein. In diesem Bereich kann das CFD-Programm mit guter Genauigkeit eingesetzt werden.
15. Die Berechnung größerer Ablösegebiete ist schwierig, weil die Strömung instationär wird und die Turbulenzmodelle oftmals zu ungenau sind.