В. Г. Грудницкий, Ю. А. Прохорчук, Один прием построения разностных схем с произвольным порядком аппроксимаций дифференциальных уравнений в частных производных, *Докл. АН СССР*, 1977, том 234, номер 6, 1249–1252

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 234, № 6

УДК 518:517.944/.947

МАТЕМАТИКА

В. Г. ГРУДНИЦКИЙ, Ю. А. ПРОХОРЧУК

ОДИН ПРИЕМ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОРЯДКОМ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 28 II 1977)

Предлагается способ построения разностных схем с произвольным порядком аппроксимации краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, обладающий следующими свойствами: шаблоны схем при повышении порядка аппроксимации не изменяются, такие свойства схем, как консервативность, монотонность, автоматически сохраняются, если они имеются в схеме первого или второго порядка точности, положенной в основу алгоритма. Повышение порядка точности проводится достаточно формальным образом и может быть автоматизировано. Способ построения основан на использовании дифференциальных следствий исходных уравнений.

Рассмотрим алгоритм на примере одного уравнения дивергентного вида

$$u_t=F_x(u),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad t\geqslant 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,x)=f(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1;\quad u(t,0)=\varphi(t),\ t\geqslant 0. \tag{2}$$

Чтобы не загромождать выкладки, считаем, что F не зависит **явно** от t и x. Дифференцируя уравнение (1) n раз по x, получим систему уравнений

$$u_{tx}^{(1)(k)}=F_x^{(k+1)},\quad k=0,1,\ldots,n; \tag{3}$$

здесь $u_{tx}^{(j)(k)}=\partial^{j+k}u/\partial t^j\partial x^k$. Воспользуемся также следствием уравнения (1)

$$u_{tx}^{(j)(k)}=F_{tx}^{(j-1)(k+1)},\quad j=0,1,\ldots,n-k. \tag{4}$$

Заметим, что

$$F_x^{(k)}=\sum_{m=0}^{k-1}(\partial F_x^{(k-1)}/\partial u_x^{(m)})u_x^{(m+1)}=F_x^{(k)}(u,u_x^{(1)},\ldots,u_x^{(k)}).$$

Аналогично, учитывая (4), получим

$$F_{tx}^{(j)(k)}=F_{tx}^{(j)(k)}(u,u_x^{(1)},\ldots,u_x^{(j+k)}), \tag{5}$$

причем $F_{tx}^{(j)(k)}$ линейна относительно $u_x^{(j+k)}$ при $j+k\geqslant 1$. С учетом полученных соотношений для системы (3) можно поставить следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}u_x^{(k)}(0,x)=f_x^{(k)}(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad k=0,1,\ldots,n;\\ u(t,0)=\varphi(t);\quad F_{tx}^{(k-1)(1)}(t,0)=\varphi_t^{(k)}(t),\quad t\geqslant 0,\quad k=1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{6}$$

Граничные условия в угловой точке предполагаются согласованными с соответствующим порядком. Последнее из соотношений (6) позволяет определить $u_x^{(k)}(t,0)$ в явном виде, так как $u_x^{(k)}$ линейным образом входит в $F_{tx}^{(k-1)(1)}$. Вообще говоря, коэффициент при $u_x^{(k)}$ может оказаться нулем (если граничные условия задаются на характеристике). В этом случае вместо соотношений (6) необходимо использовать характеристические соотношения, позволяющие определить $u_x^{(k)}(t,0)$.

Для последнего уравнения системы (3) запишем на шаблоне «угол» разностную схему первого порядка точности

$$[u_x^{(n)}(p+1,m)-u_x^{(n)}(p,m)]/\tau=[F_x^{(n)}(p,m)-F_x^{(n)}(p,m-1)]/h, \tag{7}$$

$$p=0,1,\ldots,T/\tau;\quad m=1,\ldots,1/h,$$

где τ — шаг разностной сетки по t, h — шаг по x.

Для уравнения порядка $n-1$ системы (3) запишем на том же шаблоне разностный аналог со вторым (как нетрудно убедиться) порядком точности относительно h, τ:

$$\begin{gathered}[u_x^{(n-1)}(p+1,m)-u_x^{(n-1)}(p,m)]/\tau-\\ -0{,}5\tau[F_{tx}^{(1)(n-1)}(p,m)-F_{tx}^{(1)(n-1)}(p,m-1)]/h=\\ =[F_x^{(n-1)}(p,m)-F_x^{(n-1)}(p,m-1)]/h+0{,}5h[u_x^{(n)}(p+1,m)-u_x^{(n)}(p,m)]/\tau.\end{gathered} \tag{8}$$

Этот процесс можно продолжить, уничтожая на каждом шаге погрешность разностной аппроксимации с помощью производных более высокого порядка. Укажем удобный способ, называемый обычно интегро-интерполяционным ([1]), который позволяет записать схему в общем виде. Уравнения (3) интегрируются по ячейке сетки (это дает возможность искать слабое решение системы (3))

$$\begin{gathered}\int_0^\tau\int_0^{-h}(u_{tx}^{(1)(k)}-F_x^{(k+1)})\,dx\,dt=\\ =\int_0^{-h}[u_x^{(k)}(\tau,x)-u_x^{(k)}(0,x)]\,dx+\int_0^\tau[F_x^{(k)}(t,-h)-F_x^{(k)}(t,0)]\,dt=0,\end{gathered} \tag{9}$$

после чего подынтегральные выражения аппроксимируются разложениями по Тейлору в окрестностях узлов сетки

$$u_x^{(k)}(0,x)=\sum_{i=k}^n u_x^{(i)}(p,m)x^{i-k}/(i-k)!,$$

$$u_x^{(k)}(\tau,x)=\sum_{i=k}^n u_x^{(i)}(p+1,m)x^{i-k}/(i-k)!,$$

$$F_x^{(k)}(t,0)=\sum_{i=k}^n F_{tx}^{(i-k)(k)}(p,m-1)t^{i-k}/(i-k)!,$$

$$F_x^k(t,0)=\sum_{i=k}^n F_{tx}^{(i-k)(k)}(p,m)t^{i-k}/(i-k)!,$$

$$k=0,1,\ldots,n.$$

Подставляя полученные разложения в уравнение (9), получим разностную аппроксимацию уравнений (3) с порядком точности $(n+1-k)$ относительно τ, h

$$\sum_{i=k} \{(-h)^{i-k+1}[u_x^{(i)}(p+1,m)-u_x^{(i)}(p,m)]+$$

$$+\tau^{i-k+1}[F_{tx}^{(i-k)(k)}(p,m)-F_{tx}^{(i-k)(k)}(p,m-1)]\}/(i-k+1)!=0, \tag{10}$$

$$k=n,\ n-1,\dots,1,\ 0.$$

В качестве граничных условий воспользуемся соотношениями (6) в граничных узлах сетки.

Для иллюстрации приведем пример численного решения уравнения переноса $u_t+u_x=0$ с граничными условиями $\varphi(t)=\sin(-t)$, $f(x)=\sin x$. Максимальный модуль разности $\varepsilon(z)$ между численным и точным решением $u=\sin(x-t)$ изменялся в зависимости от порядка точности схемы z следующим образом: для решения на сетке $h=0{,}5$, $\tau=0{,}25$ в области $0\leqslant t$, $x\leqslant 2$ было $\varepsilon(1)<0{,}2$; $\varepsilon(2)<0{,}11\cdot10^{-1}$; $\varepsilon(3)<0{,}2\cdot10^{-2}$; ...; $\varepsilon(10)<$ $<0{,}1\cdot10^{-8}$, $\varepsilon(11)<0{,}6\cdot10^{-10}$; для $h=2$, $\tau=1$ ($0\leqslant t$, $x\leqslant 2$) было $\varepsilon(1)<0{,}2$, $\varepsilon(2)<0{,}55\cdot10^{-1}$; ...; $\varepsilon(20)<0{,}5\cdot10^{-9}$. Заметим, что в схемах высокого порядка точности величины остаточных членов определяются в основном коэффициентом $1/(n+1)!$, а не h^n.

При численном решении краевых задач, имеющих разрывы в граничных условиях или их производных порядка меньшего, чем порядок точности аппроксимирующей системы, при задании граничных условий необходимо следить за выполнением соотношений типа

$$u_x^{(k)}=u_x^{(k)}(x_1)-\int_{x_1}^{x} u_x^{(k+1)}(\xi)\,d\xi, \qquad k=0,1,\dots,n-1. \tag{11}$$

Это приводит к необходимости «размазывать» разрывы на несколько узлов сетки в зависимости от порядка точности схемы и порядка производной, терпящей разрыв. При этом численное решение приближается к точному на достаточно гладких участках решения с ожидаемым порядком точности. В окрестности разрыва решения схема дает нулевой порядок точности, в окрестности разрыва первой производной — первый порядок и т. д. Отметим, что алгоритм, при соответствующем подборе «элементарной» схемы, всегда можно построить таким образом, что на участках монотонности решения и его производных будет получено монотонное вместе со своими «производными» численное решение.

С использованием «элементарной» схемы, аналогичной схеме Лакса, произведен расчет нормального отражения прямой ударной волны от плоской стенки в идеальном газе. Исходные дифференциальные уравнения $w_t+F_x=0$, $t\geqslant0$, $0\leqslant x\leqslant5$ (где w, F — векторные функции, $w=\{\rho, \rho u, E\}$, $F=\{\rho u,\ p+\rho u^2,\ u(E+p)\}$, ρ — плотность, u — скорость, p — давление, $E=$ $=p/(\gamma-1)+0{,}5\rho u^2$ — полная энергия газа) численно решали по схемам первого, второго и третьего порядков точности. Начальные условия $w(0,x)=w_0$, $x>1{,}65$; $w(0,x)=w_1$, $0\leqslant x\leqslant1{,}65$ задавали, исходя из соотношений Рэнкина — Гюгонио для ударной волны с $M=1{,}2$ (w_0 — параметры невозмущенного газа, w_1 — параметры газа во фронте ударной волны). В качестве граничных использовали соотношения $w(t,0)=w_1$, условия непротекания на стенке ($x=5$), а также их дифференциальные следствия. Расчет проводился сквозным способом, результаты приведены на рис. 1, 2 ($h=0{,}1$; $\tau=0{,}02$).

В качестве примера расчета параболического уравнения приведем результаты численного решения уравнения теплопроводности $u_t=u_{xx}$ с граничными условиями $u(x,0)=\sin x$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $t\geqslant0$. В качестве «элементарной» использовалась схема $(u_m^{p+1}-u_m^p)/\tau=(u_{m+1}^p-$ $-2u_m^p+u_{m-1}^p)/h^2$. Максимальный модуль разности $\varepsilon(z)$ между численным ($h=\pi/4$, $\tau=h^2/2$) и точным решением $u=\sin x\cdot\exp(-t)$ изменялся

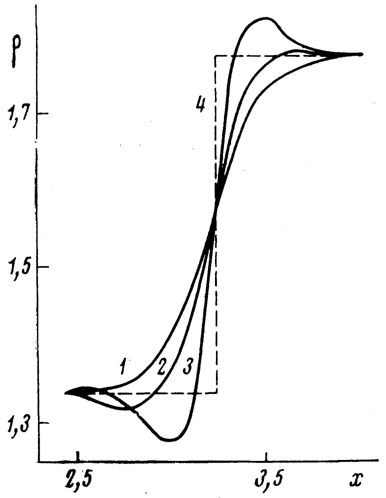

Рис. 1

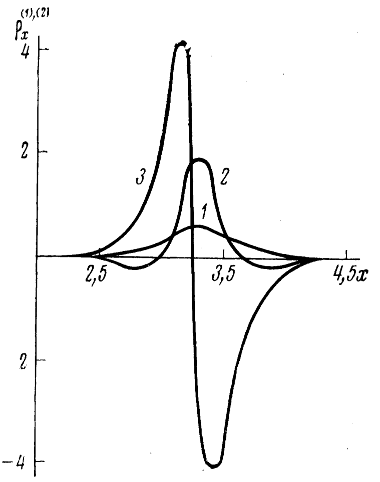

Рис. 2

Рис. 1. Плотность ρ в зависимости от x: *1*, *2*, *3* – расчет соответственно по схемам I, II и III порядков точности после момента отражения, *4* – точное решение

Рис. 2. Производная $\rho_x^{(1)}$ в схеме II порядка (*1*), III порядка (*2*) и производная $\rho_x^{(2)}$ в схеме III порядка (*3*) после отражения

при $t=1{,}0$ с ростом порядка аппроксимации следующим образом: $\varepsilon(2)=$ $=0{,}5\cdot10^{-1}$; $\varepsilon(4)=0{,}3\cdot10^{-2}$, $\varepsilon(6)=0{,}4\cdot10^{-4}$.

Итак, в работе описан метод получения разностных схем с произвольным порядком аппроксимации исходных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод не имеет принципиальных ограничений на тип и размерность аппроксимируемых уравнений. Получаемые схемы однородны и не требуют значительной перестройки вблизи границ расчетной области для схем всех порядков аппроксимации. Следует отметить, что свойства консервативности схем, построенных с помощью предлагаемого способа, более полны, чем аналогичные свойства многоточечных схем того же порядка (для схем порядка выше первого). Действительно, в схемах предлагаемого типа консервативно считаются не только основные уравнения, но и уравнения для производных. В случае уравнений, описывающих движение сплошной среды, это означает, что для малых конечных объемов среды, заполняющих ячейки разностной сетки, консервативно рассчитываются не только характеристики основного поступательного движения, но и характеристики относительных движений более высокого порядка малости, связанных с деформацией и вращением элементарных объемов среды, заполняющих ячейки сетки. Эти движения описываются продифференцированными основными уравнениями в проинтегрированном по ячейке виде.

Граничные условия для продифференцированных уравнений находятся достаточно формальным способом из граничных условий для исходного уравнения, самого исходного уравнения и его дифференциальных следствий на границе. Возникновение разрывов в граничных условиях и решениях для производных из-за недостаточной гладкости исходных граничных условий, их несогласованности и т. п. является объективным фактором, характеризующим свойства решения и не препятствующим, как указано выше, проведению расчетов.

Авторы выражают благодарность С. П. Рыбаку за помощь в проведении расчетов по модельным задачам.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 1, № 1 (1969).