



# Matemática

# Sumário

Lógica .....	3
Conjuntos .....	4
Funções.....	7
Sequências .....	18
Matrizes .....	20
Sistemas lineares.....	25
Análise combinatória .....	27
Probabilidade.....	31
Geometria .....	32
Trigonometria .....	43
Geometria de posição.....	51
Sólidos geométricos.....	53
Números complexos .....	60
Polinômios .....	63
Geometria analítica.....	65
Proporcionalidade.....	72
Matemática Financeira.....	72
Estatística.....	73

# Lógica

Proposição é toda expressão que encerra um pensamento de sentido completo e pode ser classificada como V (verdadeira) ou F (falsa).

Exemplo:

$$9 = 6 \text{ (F)}$$

$$\sqrt{4} = \log 100 \text{ (V)}$$

Todo gato é branco. (F)

Alguns gatos são brancos. (V)

## Negação

A negação de uma proposição  $p$  é indicada por  $\sim p$  ou  $\bar{p}$ . A negação de uma proposição verdadeira é falsa e vice-versa.

Exemplo:

$p$ : Sempre chove. (F)

$\bar{p}$ : Nem sempre chove. (V)

Tabela verdade:

$p$	$\bar{p}$
V	F
F	V

Negação.

## Conectivos

É uma expressão que une duas proposições dando origem a uma outra proposição.

Existem dois conectivos: a conjunção e a disjunção.

- Conjunção (e): é indicada  $p \wedge q$  será verdadeira se, e somente se, ambas as proposições  $p$  e  $q$  forem verdadeiras. Caso uma delas seja falsa sua conjunção será falsa.
- Disjunção (ou): é indicada  $p \vee q$  será verdadeira sempre que uma das duas proposições,  $p$  ou  $q$  forem verdadeiras. Será falsa apenas se as duas forem falsas.

Exemplo:

$p$ : Toda árvore é verde. (F)

$q$ : Árvores são vegetais. (V)

$p \wedge q$ : Árvores são vegetais e todas as árvores são verdes. (F)

$p \vee q$ : Árvores são vegetais ou árvores são verdes. (V)

Tabela verdade:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Conectivos.

## Condicionais

Existem dois tipos de condicionais: o condicional e o bicondicional.

- Condicional  $p \rightarrow q$ : será falso somente quando  $p$  for verdadeiro e  $q$  for falso. Caso contrário será verdadeiro.

Exemplo:

$p$ :  $n$  é um número ímpar.

$q$ :  $n$  é divisível por 3.

$p \rightarrow q$ : Se  $n$  é um número ímpar, então  $n$  é divisível por 3. (F)

- Bicondicional  $p \leftrightarrow q$ : será verdadeiro somente quando ambas as proposições,  $p$  e  $q$ , forem de mesmo valor lógico: verdadeiras ou falsas.

Exemplo:

$p$ :  $\triangle ABC$  satisfaz o teorema de Pitágoras.

$q$ :  $\triangle ABC$  é retângulo.

$p \leftrightarrow q$ : se  $\triangle ABC$  é retângulo, então  $\triangle ABC$  satisfaz o teorema de Pitágoras. (V)

Tabela verdade:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Condicionais.

## Tautologia e contradição

- Tautologia: é uma proposição logicamente verdadeira, independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

- Contradição: são aquelas proposições que são falsas independentemente do valor lógico de suas proposições.

Exemplo:

$$p \wedge \bar{p}$$

## Negação de proposições

$$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$$

$$\overline{p \vee q} \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{p \rightarrow q} \leftrightarrow p \wedge \bar{q}$$

## Conjuntos

Um conjunto intuitivamente é compreendido como uma coleção de objetos.

### Pertinência

Usado para relacionar elemento e conjunto.

$x \in A$ :  $x$  é elemento do conjunto  $A$ .

$x \notin B$ :  $x$  não é elemento do conjunto  $B$ .

### Inclusão

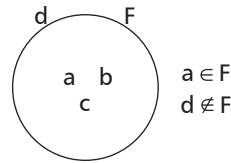
Usado para relacionar conjunto a conjunto.

$A \subset B$ : o conjunto  $A$  está contido no conjunto  $B$  ( $A$  é subconjunto de  $B$ ). Diz-se que um conjunto  $A$  é subconjunto de um conjunto  $B$ , ou que  $A$  está contido em  $B$ , se e somente se, todo elemento de  $A$  é também elemento de  $B$ .

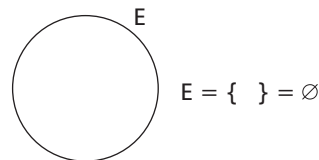
$A \not\subset B$ : o conjunto  $A$  não está contido no conjunto  $B$  ( $A$  não é subconjunto de  $B$ ).

Se em um conjunto não existir elementos, dizemos que o conjunto é vazio e indicamos com o símbolo  $\emptyset$  ou  $\{ \}$ .

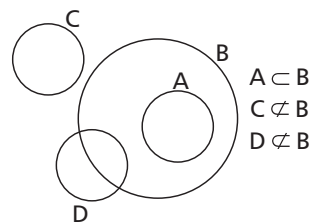
Exemplos:



Relação de pertinência.



Conjunto vazio.



Relação de inclusão.

## Simbologia matemática

Algumas notações utilizadas na matemática.

$\forall$ : "qualquer que seja" ou "para todo"

Exemplo:

" $\forall x, \sqrt{x^2} = |x|$ ", isto é, "para todo  $x$ , a raiz quadrada de seu quadrado é igual ao seu módulo."

$\exists$ : "existe"

$\therefore$ : "tal que"

$\nexists$ : "não existe"

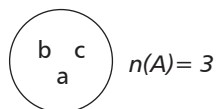
Exemplo:

$\exists x / x^2 = 2$ , isto é, "existe  $x$  tal que seu quadrado vale dois."

$n(A)$ : indica o número de elementos do conjunto  $A$ .

Exemplo:

O conjunto a seguir tem três elementos.



Um conjunto com três elementos.

## Operações entre conjuntos

### União

A união entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a  $A$  ou a  $B$ . Indicamos com o símbolo  $A \cup B$ .

$$\text{Se } x \in A \cup B \rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

### Intersecção

A intersecção entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto formado pelos elementos que pertençam a  $A$  e  $B$  ao mesmo tempo. Indicamos com o símbolo  $A \cap B$ .

$$\text{Se } x \in A \cap B \rightarrow x \in A \text{ e } x \in B$$

Dois conjuntos são ditos disjuntos se  $A \cap B = \emptyset$ .

### Diferença

A diferença entre dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto  $A$  e não pertencem ao conjunto  $B$ . Indicamos como  $A - B$ .

$$\text{Se } x \in A - B \rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

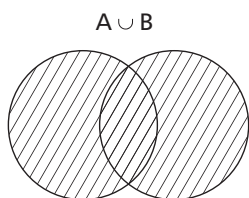


Figura 1: União.

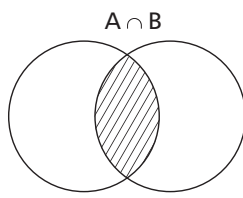
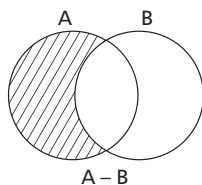
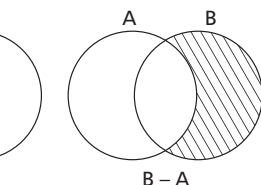


Figura 2: Intersecção.



$A - B$



$B - A$

Diferença.

○ Atenção:

$$A - B \neq B - A$$

O número de elementos de  $A \cup B$  é igual a:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

O número de elementos de  $A \cup B \cup C$  é igual a:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

### Propriedades da união e intersecção de conjuntos

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### Conjuntos Numéricos

$\mathbb{N}$  – Naturais: são os números utilizados para contar quantidades.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$  – Inteiros: são os números naturais, incluindo seus opostos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$  – Racionais: são todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots, -\frac{3}{2}, \dots, 0, \dots, 2, \dots, \frac{13}{6}, \dots \right\}$$

$\mathbb{I}$  – Irracionais: são os números que não podem ser escritos como fração de numerador e denominador inteiros.

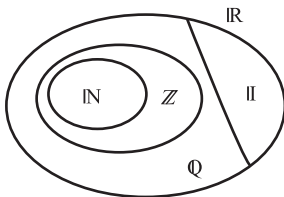
$$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{I} = \{ \dots, -\sqrt{2}, \dots, e, \dots, \pi, \dots \}$$

$\mathbb{R}$  – Reais: é o conjunto formado pelos números racionais e pelos números irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{R} = \{x/x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$$



## Intervalos

### Intervalos limitados

Os intervalos são subconjuntos dos números reais:

Intervalo fechado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



Intervalo aberto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Intervalo semiaberto à esquerda

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



### Intervalos ilimitados

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



$$]-\infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$



Os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  não são números, logo, não podem ser representados no intervalo como fechados.

## Números primos

Números primos são aqueles que possuem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

Exemplo:

3 é primo (apenas 1 e 3 dividem o número 3).

4 não é primo (1, 2 e 4 dividem o número 4).

### Observação

O número 0 e o número 1 não são primos e o número 2 é o único número primo par.

## Decomposição em fatores primos

Todo número natural composto pode ser escrito de maneira única como produto de números primos.

Exemplo:

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

## Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)

O Mínimo Múltiplo Comum de um conjunto de números naturais é o menor número natural divisível por todos os elementos do conjunto.

Exemplo:

$$mmc(9, 4) = 36$$

## Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

O Máximo Divisor Comum de um conjunto de números naturais é o maior número natural, tal que todos os elementos desse conjunto são divisíveis por ele. O produto do MMC pelo MDC de dois números é o produto desses dois números. Se o MDC de dois números for 1, chamamos de primos entre si ou coprimos.

Exemplo:

$$mdc(9, 4) = 1$$

## Dízima periódica

Um número racional pode ser representado por um número inteiro, um número decimal exato ou uma dízima periódica.

## Exemplo:

1, 41212...

Parte inteira: 1

Parte não-periódica: 4

Parte periódica: 12 (parte que se repete periodicamente)

## Fração geratriz

A geratriz de uma dízima periódica é a fração racional que origina esse número.

Numerador: é um número formado pela parte inteira seguida de parte não-periódica (quando existir) seguida do 1.º período, desse valor devemos subtrair a parte inteira seguida da parte não-periódica.

Denominador: número formado de tantos 9 quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos 0 quantos forem os algarismos da parte não-periódica.

## Exemplo:

Determine a fração geratriz da dízima 1,4121212...

Numerador:  $1412 - 14 = 1398$ 

Denominador: 990

Dízima:  $\frac{1398}{990} = \frac{233}{165}$ 

## Produtos notáveis

Quadrado da soma/diferença

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Diferença de quadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Fator comum

$$ax + ay = a(x + y)$$

Agrupamento

$$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$$

## Cubos

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

## Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

## Lagrange

$$(ac \pm bd)^2 + (ad \pm bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

## Cúbico

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

## Funções

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  denominamos função de  $A$  em  $B$ , toda relação que a cada elemento de  $A$  associa-se um, e só um, elemento de  $B$ .

## Exemplo:

Dados os conjuntos  $A = \{-2, 0, 3\}$  e  $B = \{-5, -4, 1, 2, 11\}$ , considere a função  $f: A \rightarrow B$ , definida por  $f(x) = 3x + 2$ , ou  $y = 3x + 2$ , temos que

$$x = -2 \rightarrow y = -4$$

$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

$$x = 3 \rightarrow y = 11$$

## Domínio (D)

O domínio de uma função  $f$  é o conjunto formado pelos primeiros elementos (abscissas) de cada par ordenado da função  $f$ .

## Contradomínio (CD)

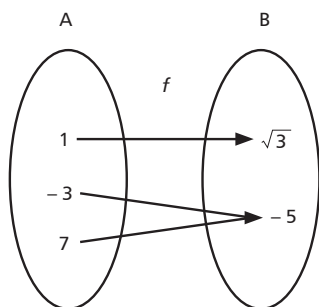
O conjunto em que encontramos os segundos elementos (ordenadas) dos pares ordenados da função.

## Imagem (Im)

A imagem de uma função  $f$  é o conjunto formado pelo segundo elemento de cada par ordenado da função  $f$ .

Nos dois exemplos a seguir a relação de  $f: A \rightarrow B$  representa uma função:

Exemplo 1:



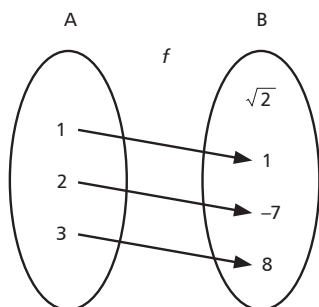
$$D(f) = \{1, -3, 7\}$$

$$CD(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$$

$$Im(f) = \{\sqrt{3}, -5\}$$

É função, pois cada elemento do conjunto  $A$  (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto  $B$  (contradomínio).

Exemplo 2:



$$D(f) = \{1, 2, 3\}$$

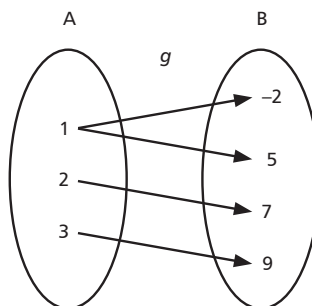
$$CD(f) = \{\sqrt{2}, 1, -7, 8\}$$

$$Im(f) = \{1, -7, 8\}$$

É função, pois cada elemento do conjunto  $A$  (domínio) da função está associado a um único elemento do conjunto  $B$  (contradomínio).

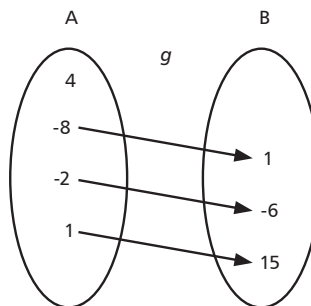
Nos dois exemplos a seguir a relação  $g: A \rightarrow B$  não representa função.

Exemplo 1:



A relação  $g: A \rightarrow B$ , não representa função, pois o número  $1 \in A$  e está associado a mais de um elemento do conjunto  $B$ . Ou seja, o número 1 tem mais de uma imagem.

Exemplo 2:

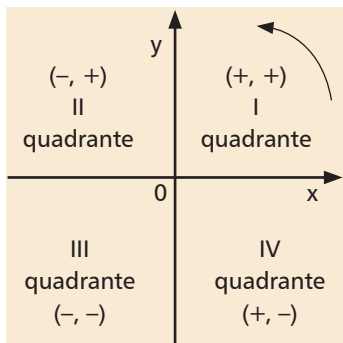


A relação  $g: A \rightarrow B$ , não representa função, pois o número  $4 \in A$  e não está associado ao conjunto  $B$ . Ou seja, o número 4 não tem imagem.

## Plano cartesiano

É um sistema constituído por dois eixos:  $x$  e  $y$  perpendiculares entre si. O eixo  $x$  é denominado de eixo das abscissas e o eixo  $y$  é denominado eixo das ordenadas. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas quadrantes. A cada ponto do plano cartesiano, associamos um par ordenado  $(x, y)$

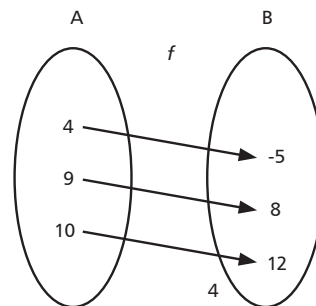




Os quadrantes.

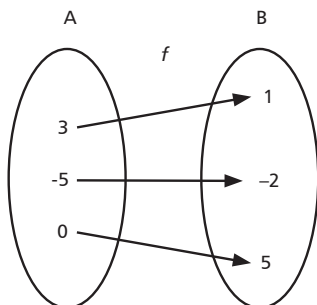
## Função bijetora

É toda função  $f$  de  $A$  em  $B$  que é simultaneamente injetora e sobrejetora.



## Função sobrejetora

Dizemos que uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é sobrejetora quando o conjunto imagem for igual ao conjunto contradomínio de  $B$ . Em linguagem matemática, se  $\forall y \in B \exists a \in A$  tal que  $f(a) = y$

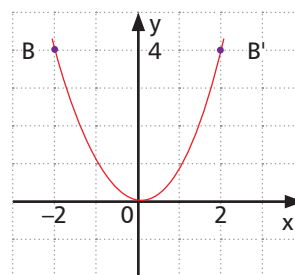


## Função par

É toda a função que  $f(x) = f(-x)$ , isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens iguais.

Exemplo:

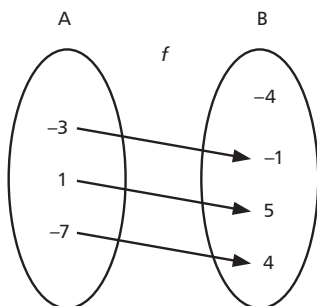
$F(x) = x^2$ , observe que elementos opostos têm imagens iguais.



$$f(2) = f(-2)$$

## Função injetora

Dizemos que uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é injetora se qualquer dos seus elementos do seu domínio tem imagens diferentes. Em linguagem matemática, se  $f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$ .

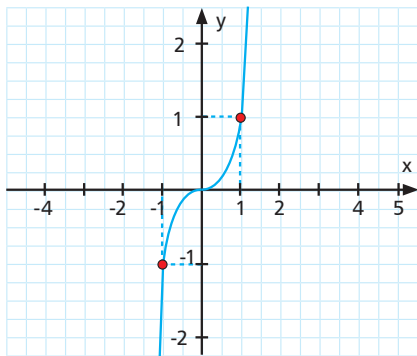


## Função ímpar

É toda a função que  $f(x) = -f(-x)$ , isto é, quaisquer elementos opostos do domínio têm imagens opostas.

Exemplo:

$f(x)=x^3$ , observe que elementos opostos têm imagens opostas.



$$f(1) = -f(-1)$$

## Função composta

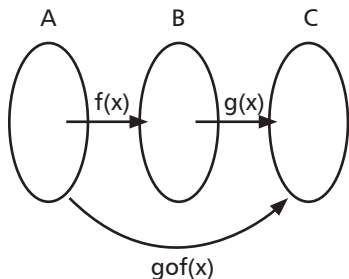
Se tivermos os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e duas funções  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ , chamamos de função composta a função  $h = g \circ f: A \rightarrow C$ , definida por  $R = g \circ f(x) = g(f(x))$ .

Exemplo:

Sejam as funções  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  e  $g(x) = 2x - 3$ , determine  $f \circ g(x)$ .

Solução:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = g(x)^2 + 4g(x) - 5 = \\ &= (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5 = \\ &= 4x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$



## Função inversa

Dada uma função  $f: A \rightarrow B$  dizemos que sua inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$  é a função que leva todos os elementos da imagem de  $f$  aos elementos do domínio de  $f$ . Uma maneira prática de determinarmos a função inversa de uma função dada é trocar a variável  $x$  pela variável  $y$ , a variável  $y$  pela variável  $x$  e em seguida isolar a variável  $y$  (quando possível).

Exemplo:

Determine a função inversa de  $y = 3x + 2$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Solução:

Para isso fazemos  $x = 3y + 2$ , onde  $y = \frac{x-2}{3}$  e, portanto,  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

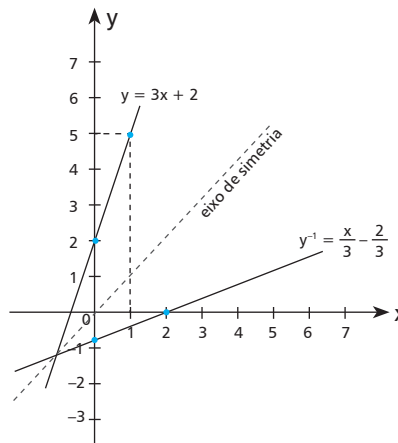


Gráfico da função  $f$  e da sua inversa.

## Função afim

### Resolução da equação de 1.º Grau

Exemplo:

Resolver a equação de 1.º grau.

$$9x + 3 = 6x + 18$$

$$9x - 6x = 18 - 3$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

## Sistema de equações de 1.º Grau/método da adição

Exemplo:

Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 14 \end{cases}$$

Solução:

Para que na soma das equações uma das variáveis seja anulada devemos multiplicar uma das equações por uma constante adequada e diferente de 0 (zero). No exemplo dado podemos multiplicar a segunda equação por 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$$

Somando as equações temos:

$$7x = 35 \rightarrow x = 5$$

Se  $x = 5$ , basta então substituir esse valor em uma das equações para determinar o valor de  $y$ .

$$x + 2y = 7 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Onde: } S = \{(5, 1)\}$$

## A função afim

A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  números reais, denomina-se função afim.

$a \rightarrow$  coeficiente angular

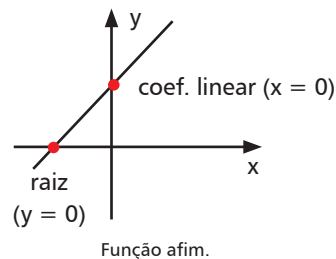
$b \rightarrow$  coeficiente linear

A raiz da função é o valor de  $x$  cuja imagem é 0 (zero).

$$x = -\frac{b}{a}$$

O coeficiente angular é a tangente da inclinação da reta em relação ao eixo  $x$ .

A ordenada do ponto intersecção da reta com o eixo  $y$  é o  $b$  e a abscissa do ponto de intersecção com o eixo  $x$  é chamada de raiz. As raízes de uma função qualquer são os valores de  $x$  tais que  $y = 0$ .



a \ b	+	-
+		
zero		
-		

Resumo da função afim.

## Função quadrática

### Equação do 2.º Grau

O formato da equação do 2.º grau é  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais e  $a \neq 0$ .

### Equações incompletas

Quando  $b=0$  ou  $c=0$

1.º caso:  $b = 0$

Exemplo:

$$x^2 - 9 = 0$$

Solução:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

2.º caso:  $c = 0$

Exemplo:

$$x^2 - 9x = 0$$

Solução:

$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x - 9 = 0$$

$$S = \{0, 9\}$$

## Equações completas

Nas equações completas utilizaremos a conhecida fórmula resolvente de um trinômio do 2.º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ , onde  $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemplo:

Resolver a equação  $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$a = 1, b = -8 \text{ e } c = 12$$

Basta aplicar a fórmula resolvente, então,

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\text{onde } S = \{2, 6\}$$

## Equação biquadrada

A equação biquadrada tem o seguinte formato:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , com  $a, b, c$  números reais e  $a \neq 0$ .

Sua resolução consiste em fazer a redução a uma equação do segundo grau, para isso fazemos a substituição,  $y = x^2$ .

Exemplo:

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$

$$\text{Fazendo: } y = x^2$$

$$\text{Então: } 2y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$\text{Cujas soluções são: } y = 1 \text{ ou } y = 4$$

Retornando a variável original ( $x$ ), temos que:

$$y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Portanto,

$$S = \{-2, -1, 1, 2\}$$

## Sistema do 2.º Grau / método da substituição

Isolamos uma das incógnitas e substituímos na equação que contém o produto.

Exemplo:

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Solução:

Isolamos uma das variáveis na primeira equação:

$$y = 8 - x$$

Agora, substituiremos na segunda:

$$x \cdot (8 - x) = 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Resolvendo a equação do 2.º grau temos:  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 6$ . Voltando ao sistema

- Se  $x = 2 \rightarrow y = 6$

- Se  $x = 6 \rightarrow y = 2$

$$S = \{(2, 6); (6, 2)\}$$

## Função quadrática

A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a, b$  e  $c$  números reais e  $a \neq 0$ , denomina-se função quadrática.

O formato do gráfico da função quadrática é uma parábola.

A intersecção da reta com o eixo  $y$  é o ponto  $c$  e a intersecção com o eixo  $x$  é chamada de raiz. As raízes podem ser obtidas com o uso da fórmula resolvente de um trinômio do 2.º grau.

### Discriminante ( $\Delta$ )

O discriminante é definido como sendo  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Se  $\Delta > 0 \rightarrow$  duas raízes reais e diferentes.

Se  $\Delta = 0 \rightarrow$  duas raízes reais e iguais.

Se  $\Delta < 0 \rightarrow$  não existe raiz real.

### Soma e produto das raízes

Sendo  $x_1$  e  $x_2$  as raízes de uma função quadrática, podemos dizer que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Vértice

A parábola representativa da função quadrática tem um ponto de máximo ou mínimo, dependendo de sua concavidade. Esse ponto é chamado de vértice.

$$V = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

### Eixo de simetria

O eixo de simetria de uma função quadrática é uma reta paralela ao eixo  $y$  que passa pelo  $x_v$ .

Crescimento e decrescimento:

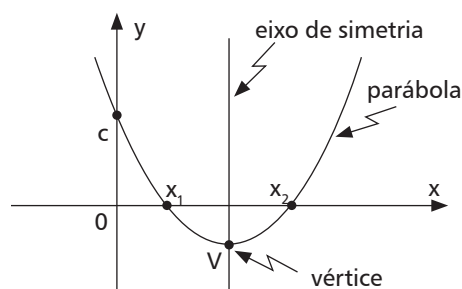
	$a < 0$	$a > 0$
$x < x_v$	Crescente	Decrescente
$x > x_v$	Decrescente	Crescente

Função quadrática.

Já a imagem pode ser obtida a partir do  $y$ .

$a < 0 \rightarrow \text{Im} = ]-\infty, y_v]$

$a > 0 \rightarrow \text{Im} = [y_v, +\infty[$



Delta	A parábola no plano cartesiano	$a > 0$ concavidade (boca) para cima	$a < 0$ concavidade (boca) para baixo
$\Delta > 0$	Intercepta o eixo horizontal em 2 pontos		
$\Delta = 0$	"Toca" em 1 ponto do eixo horizontal		
$\Delta < 0$	Não intercepta o eixo horizontal		

Resumo da função quadrática.

## Função exponencial

Propriedades da potência e das raízes.

### Propriedades da potência

1.<sup>a</sup> propriedade: produto de potências de mesma base. Conserva-se a base e somam-se os expoentes.

Exemplo:

$$2^7 \cdot 2^3 = 2^{7+3} = 2^{10} = 1024$$

2.<sup>a</sup> propriedade: quociente de potências de mesma base. Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

Exemplo:

$$\frac{2^{19}}{2^9} = 2^{19} : 2^9 = 2^{19-9} = 2^{10} = 1024$$

3.<sup>a</sup> propriedade: potência de potência. Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

Exemplo:

$$(2^5)^2 = 2^{5 \times 2} = 2^{10} = 1024$$

4.<sup>a</sup> propriedade: potência de produto. O expoente vale para todos os fatores da multiplicação.

Exemplo:

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

5.<sup>a</sup> propriedade: potência de quociente. Eleva-se o numerador e o denominador ao mesmo expoente, da seguinte forma:

Exemplo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

6.<sup>a</sup> propriedade: potência de expoente fracionário. Transforma-se em raiz quadrada.

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Exemplo:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

7.<sup>a</sup> propriedade: potência de expoente zero. É igual a 1 (um) para qualquer que seja a base diferente de 0 (zero).

Exemplo:

$$5^0 = 1$$

8.<sup>a</sup> propriedade: potência de expoente um. É a própria base, qualquer que seja a base.

Exemplo:

$$5^1 = 5$$

9.<sup>a</sup> propriedade: potência de base um. É igual a um qualquer que seja o expoente.

Exemplo:

$$1^{1024} = 1$$

10.<sup>a</sup> propriedade: potência de base zero. É igual a 0 (zero), qualquer que seja o expoente maior que zero.

Exemplo:

$$0^{1024} = 0$$

### Observação:

Não definiremos  $0^0$  neste material e zero elevado a um expoente negativo não existe.

11.<sup>a</sup> propriedade: potência de expoente negativo, com base diferente de 0 (zero). Inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente.

Exemplo 1:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

Exemplo 2:

$$2^{-10} = \left(\frac{2}{1}\right)^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

### Extração de fatores do radical

Decompõe-se o número em fatores primos e extraem-se do radical tantas vezes quantas for o índice.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{360} &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} \\ \sqrt{360} &= 6\sqrt{10}\end{aligned}$$

### Operações aritméticas de raízes

#### Soma e subtração:

Somam-se ou subtraem-se apenas as raízes quando elas tiverem o mesmo radicando e o mesmo índice no radical.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} &= \\ (1 - 5)\sqrt{2} + (3 + 2)\sqrt{3} &= \\ -4\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

**Produto e divisão:**

Exemplo 1:

$$\sqrt{18} \cdot 2\sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{180} = 2 \cdot 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Exemplo 2:

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

**Raízes de raízes:**

Quando tivermos raiz de uma raiz, multiplicaremos os índices.

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{1024}} = \sqrt[2 \cdot 5]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$$

## Racionalização

O objetivo da racionalização é tirar a raiz do denominador.

1.º caso: apenas raiz no denominador. Multiplicam-se numerador e denominador pelo denominador.

Exemplo:

$$\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

2.º caso: raiz e "não-raiz" no denominador. Multiplicam-se numerador e denominador pelo denominador com o sinal da raiz trocado.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{8}{4 - 2\sqrt{2}} &= \frac{8}{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \\ \frac{8(4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})} &= \\ \frac{8(4 + 2\sqrt{2})}{16 - 8} &= 4 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

## Função exponencial

A função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  definida como  $y = a^x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , denomina-se função exponencial.

Domínio =  $\mathbb{R}$

Contradomínio =  $\mathbb{R}_+^*$

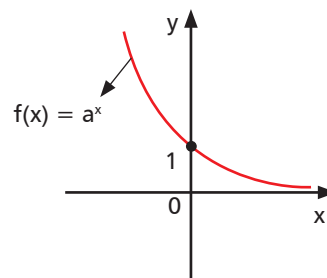
A reta  $y = 0$  é chamada de assíntota horizontal da função. A função exponencial também é uma função sobrejetiva (ou sobrejetora).

Para determinarmos o crescimento e decrescimento da função exponencial, podemos utilizar a tabela a seguir:

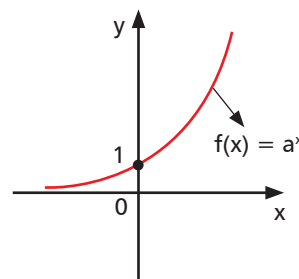
$0 < a < 1$	Decrescente
$a > 1$	Crescente

Função exponencial.

A intersecção da função exponencial com o eixo  $y$  é o ponto  $(0,1)$ . A função exponencial não possui raiz, pois não existe valor de  $x$  que torne o  $y = 0$ .



Função exponencial com  $0 < a < 1$ .



Função exponencial com  $a > 1$ .

## Equação exponencial

Existem vários tipos de equações exponenciais. A maioria delas pode ser resolvida pela propriedade injetora da função exponencial, isto é, se  $a^x = a^y \leftrightarrow x = y$ . Veja alguns tipos:

1.º tipo:

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$x = 3$$

2.º tipo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4^x$$

$$2^{-4} = 2^{2x}$$

$$-4 = 2x$$

$$x = -2$$

3.º tipo:

$$9^x + 3^{x+1} - 4 = 14$$

$$(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$$

Podemos fazer  $3^x = y$

$$y^2 + 3y - 18 = 0$$

Logo,  $y = 3$  ou  $y = -6$ .

Se  $y = 3$ ,  $x = 1$ , mas se  $y = -6$  não existe  $x$ .

Portanto  $x = 1$ .

## Inequação exponencial

Se a base for maior do que um, mantemos o sinal da desigualdade. Se a base for menor do que um, invertemos o sinal da desigualdade.

Exemplo 1:

$$4^{x-1} > \frac{1}{2}$$

$$2^{2(x-1)} > 2^{-1}$$

$$2x - 2 > -1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Exemplo 2:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-4} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2x}$$

$$x - 4 \leq 2 - 2x$$

$$x \leq 2$$

## Função logarítmica

### Logaritmo

Se  $a$  e  $b$  números reais indicamos  $\log_a b$  e chamamos de logaritmo de  $b$  na base  $a$  o número  $x$  tal que  $a^x = b$ .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Condições de existência:

$$1.^\circ \quad a > 0, a \neq 1$$

$$2.^\circ \quad b > 0$$

Se a base não for indicada, seu valor é 10, e se a base for o número irracional  $e$ , chamamos de logaritmo natural e indicamos  $\ln$ .

### Consequências/propriedades dos logaritmos

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^n = n$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{c}{b}\right) = \log_a c - \log_a b$$

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

### Cologaritmo

O cologaritmo de um número é o oposto de seu logaritmo.

$$\text{colog } x = -\log x$$

### Mudança de base

Em alguns casos, para resolução de exercícios, utilizamos a mudança de base.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

## Função Logarítmica

A função  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $y = \log_a x$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , denomina-se função logarítmica.

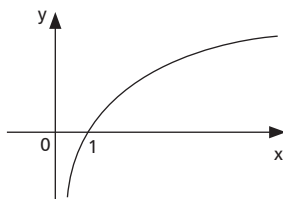
$$\text{Domínio} = \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Contradomínio} = \mathbb{R}$$

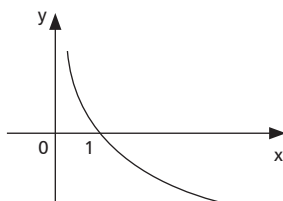
Não existe intersecção dessa função como eixo  $y$ . Sua raiz é o ponto  $P(1,0)$ .



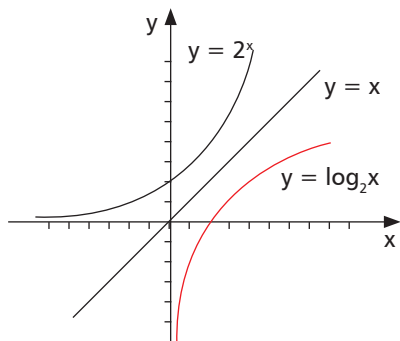
Crescente

base  $a > 1$ 

Decrescente

base  $0 < a < 1$ 

Gráficos da função logarítmica.



## Equação logarítmica

Existem vários tipos de equações logarítmicas. Para exemplificá-las, mostraremos alguns exemplos.

Exemplo 1:

$$\log_2(2x - 3) = \log_2 5$$

Condição de existência:

$$2x - 3 > 0$$

Resolvendo a equação temos:

$$2x - 3 = 5$$

$$x = 4$$

Para que 4 seja solução, as condições de existência devem ser satisfeitas:  $2 \cdot 4 - 3 > 0$ .

Portanto,  $S = \{4\}$ .

Exemplo 2:

$$\log_2 x + \log_2(x + 6) = 4$$

$$\log_2 x \cdot (x + 6) = 4$$

$$x \cdot (x + 6) = 2^4$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x = -8 \text{ ou } x = 2$$

Para que  $-8$  e  $2$  sejam soluções ambos devem satisfazer as condições de existência.

Portanto, a equação admite uma única solução  $S = \{2\}$ .

## Inequação logarítmica

Para as inequações logarítmicas, usamos o mesmo procedimento utilizado para as exponenciais: bases maiores que um ( $a > 1$ ), mantemos a desigualdade; bases entre zero e um ( $0 < a < 1$ ), invertemos a desigualdade.

Exemplo:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x - 3) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$$

Primeiro a condição de existência é:

$$2x - 3 > 0 \text{ e } x > 0$$

Agora, temos  $2x - 3 \geq x$ , pois a base é menor do que um. Portanto,  $x \geq 3$ .

Fazendo as intersecções das condições de existência e da resposta da inequação, temos que  $x \geq 3$ .

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$ .

## Função modular

### Módulo

Para um número real  $x$  temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O módulo de um número real é a distância de um ponto na reta real até a origem da reta.

Exemplo:

$$|-4| = -(-4) = 4$$

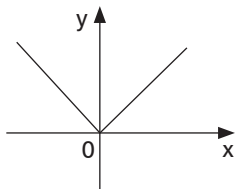
Algumas propriedades:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \rightarrow x = 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x|^2 = |x|^2$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $|x| \geq a \rightarrow -a \leq x \text{ ou } x \geq a$
- $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$

## Função modular

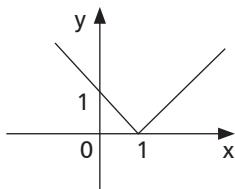
Denomina-se função modular a função  $f$ , de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:  $f(x) = |x|$ .

$$y = |x|$$

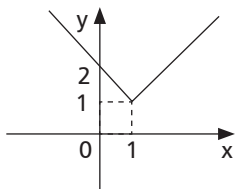


Funções envolvendo módulo:

$$y = |x - 1|$$



$$y = 1 + |x - 1|$$



## Equações e inequações modulares

Exemplo 1:

$$|x - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 1 \\ x - 5 = -1 \end{cases}$$

Logo,  $x = 6$  ou  $x = 4$

Exemplo 2:

$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$ . Podemos fazer  $|x| = y$ , daí teremos  $y = -1$  ou  $y = 3$ . Sendo  $|x| = y$ , só pode assumir valores positivos. Portanto,  $y = 3$ . Como  $y$  é o resultado do módulo de  $x$ , temos que  $x$  pode assumir dois valores:  $x = 3$  ou  $x = -3$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = 3 \text{ ou } x = -3\}$$

Exemplo 3:

$$|x - 2| < 3$$

$$-3 < x - 2 < 3$$

$$-1 < x < 5$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 5\}$$

## Sequências

**Sequência finita:** é toda função de  $A$  em  $B$ , onde  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  é subconjunto dos números naturais e  $B$  é um conjunto não-vazio.

**Sequência infinita:** é toda função de  $A$  em  $B$ , onde  $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  é o conjunto dos números naturais não-nulos e  $B$  é um conjunto não-vazio.

## Progressão aritmética

É uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior acrescido de uma constante chamada razão.

Exemplo:

(2, 5, 8, 11, ...): P.A. crescente de razão 3.

(4, 2, 0, -2, ...): P.A. decrescente de razão -2.

## Razão

A razão  $r$  de uma P.A. é dada por :

$$r = a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

## Termo médio

Dada uma P.A. de três termos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), o termo do meio é dado por:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Para uma P.A. qualquer, de número ímpar de termos, temos que o termo médio é a média aritmética dos dois extremos:

$$TM = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

## Fórmula do termo geral

Numa P.A. ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ...,  $a_{n-1}$ ,  $a_n$ ), de razão  $r$ , o termo geral é dado por :

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Exemplo:

Determine o centésimo número maior do que zero e ímpar.

Solução:

A sequência é (1, 3, 5, ...) que se trata de uma P.A. de razão  $r = 3 - 1 = 2$  e  $a_1 = 1$ , e  $n = 100$ . Queremos saber  $a_{100}$ :

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 199$$

## Fórmula da soma dos N termos de uma P.A.

A soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

Para uma P.A. com um número ímpar de termos:

$S_n = TM \cdot n$ , onde  $TM$  é o termo médio.

Exemplo:

Determine a soma dos 100 primeiros números ímpares maiores do que zero.

Solução:

A sequência é a mesma dada antes e já sabemos que  $a_1 = 1$ , e  $n = 100$ , além do que  $a_{100} = 199$ . Portanto, a soma será:

$$S_{100} = \frac{(1 + 199)}{2} \cdot 100 = 10\,000$$

## Interpolação

Interpolar (ou inserir)  $k$  meios aritméticos entre dois extremos  $a$  e  $b$  nessa ordem significa determinar a P.A. de  $k + 2$  termos, onde  $a$  é o primeiro e  $b$  é o último. A razão dessa P.A. pode ser determinada pela fórmula a seguir:

$$r = \frac{a_n - a_1}{k + 1}$$

Onde  $a_n$  é o último termo e  $a_1$  é o primeiro

Exemplo:

Interpole 4 meios aritméticos entre 2 e 17.

Solução:

$a_1 = 2$ ,  $a_n = 17$ ,  $k = 4$ , onde

$$r = \frac{17 - 2}{4 + 1} = 3$$

Portanto, a P.A. é: (2, 5, 8, 11, 14, 17).

## Progressão geométrica

É uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado de uma constante chamada razão.

Exemplo:

(2, 4, 8, 16, ...) : P.G. crescente de razão 2.

(4, -2, 1, - $\frac{1}{2}$ ) : P.G. alternada de razão - $\frac{1}{2}$ .

## Razão

Para determinarmos a razão de uma P.G., a razão é dada por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

## Termo médio

Dada uma P.G. de três termos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), temos que  $b = \sqrt{a \cdot c}$ , ou seja, o termo central é a média geométrica dos extremos.

## Fórmula do termo geral

Para determinarmos um termo qualquer de uma P.G. ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , ...,  $a_{n-1}$ ,  $a_n$ ), basta usar a fórmula do termo geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

## Fórmula da soma dos N termos de uma P.G.

Para determinar a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. utilizamos a fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

## Fórmula do produto dos N termos de uma P.G.

Para determinar o produto dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. utilizamos a fórmula:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

## Interpolação

Interpolar (ou inserir)  $k$  meios geométricos entre dois extremos  $a$  e  $b$  nessa ordem significa determinar a P. G. de  $k + 2$  termos, onde  $a$  é o primeiro e  $b$  é o último. A razão dessa P.G. pode ser determinada pela fórmula a seguir:

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Onde  $a_n$  é o último termo e  $a_1$  é o primeiro.

## P.G. infinita

Quando  $|q| < 1$  e a P.G. for infinita, a soma dos termos dessa P.G. tende a um número real que pode ser definido pela fórmula:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo:

Determine a soma dos termos da P.G. infinita:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Solução:

$$a_1 = 1, a_i = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{Ou seja, } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

# Matrizes

Matrizes são tabelas de números dispostos em linhas e colunas.

Toda matriz tem o formato  $m \times n$ , em que  $m$  é o número de linhas e  $n$  é o número de colunas.

Para representarmos uma matriz, podemos utilizar:

- parênteses ( )
- colchetes [ ]

Indicamos os elementos por  $a_{ij}$ , onde  $i$  representa o número da linha e  $j$  representa o número da coluna, à qual o elemento pertence.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$\text{Escrever a matriz } A = (a_{ij})_{3 \times 2} = 2i - j$$

Genericamente representamos por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$a_{31} = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_{32} = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Portanto, a matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Duas matrizes são iguais se, e somente se, forem do mesmo tipo e todos os elementos forem iguais entre si na mesma ordem.

Algumas matrizes têm denominações especiais. Veja alguns exemplos:

- Matriz linha: é a matriz que tem apenas uma linha.

Exemplo:

$$L = [1 \quad 2 \quad 3]$$

- Matriz coluna: é a matriz que tem apenas uma coluna.

Exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz nula: é a matriz em que todos os elementos são zero.

Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Matriz quadrada

Uma matriz quadrada possui o mesmo número de linhas e colunas. Dizemos que uma matriz quadrada é do tipo  $m \times m$  ou tem ordem  $m$ .

Apenas matrizes quadradas têm diagonais:

- Diagonal principal: é formada pelos elementos  $a_{ij}$  tais que  $i = j$ .
- Diagonal secundária: é formada pelos elementos  $a_{ij}$ , tal que  $i + j = n + 1$ .

Exemplo:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

DS  
DP

Diagonal principal: (1, 5, 9)

Diagonal secundária: (3, 5, 7)

## Operações entre matrizes

### Soma e subtração

A soma de duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \text{ calcule } C = A + B$$

$$\text{e } D = A - B:$$

Solução:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

### Multiplicação de um número real por uma matriz

Para multiplicar um número real  $K$  por uma matriz  $A$ , basta multiplicar todos os elementos de  $A$  pelo número real  $K$ .

Exemplo:

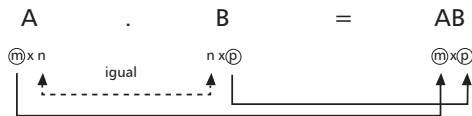
$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}, \text{ calcule } 2A:$$

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}$$

### Multiplicação entre matrizes

Na multiplicação de duas matrizes  $A$  e  $B$ , o número de colunas de  $A$  deve ser igual ao número de

linhas de  $B$ . O produto  $AB$  terá o mesmo número de linhas de  $A$  e o mesmo número de colunas de  $B$ .



Os elementos da matriz produto  $C$ , são obtidos pela seguinte relação:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

calcule:

$$C = A \times B$$

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & -2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & -2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 6 \\ 3 & 13 & 23 \end{bmatrix}$$

Note que, neste caso  $\nexists B \times A$ .

## Matriz inversa

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Dizemos que essa matriz é inversível se existir uma matriz  $B$ , tal que  $A \times B = I_n$  e indicamos essa matriz  $B$ , como  $A^{-1}$ .

Algumas das propriedades da matriz inversa:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(K \cdot A)^{-1} = \frac{1}{K} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Matriz identidade: é a matriz em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a 0. Indicamos  $I_n$ , onde  $n$  é a ordem da matriz. Caso seja possível o produto temos:

$I \cdot A = A \cdot I = A$  ( $I$  é o elemento neutro da operação produto entre matrizes).

Exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: é a matriz quadrada que possui elementos nulos fora da diagonal principal.

Exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular: é aquela que possui todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal iguais a 0 (zero).

Exemplo:

$$T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriz idempotente: é aquela matriz quadrada tal que  $A^2 = A$ .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Matriz nilpotente: é aquela matriz quadrada tal que  $A^k = 0$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$N$  é nilpotente com  $k = 3$

- Matriz involutória: é toda matriz tal que  $A^2 = I$ .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz transposta

A matriz transposta de  $A$ ,  $A^t$  é obtida trocando ordenadamente linhas por colunas.

Exemplo:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ , então,

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da matriz transposta:

$$(A^t)^t = A$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(K \cdot A)^t = K \cdot A^t$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

- Matriz simétrica: é aquela que é igual a sua transposta, ou seja,  $a_{ij} = a_{ji}$ .

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = S^T$$

- Matriz antissimétrica: é aquela que é igual à oposta da transposta, ou seja:  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = -A^T$$

- Matriz ortogonal: é toda a matriz quadrada tal que  $A^T = A^{-1}$ .

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix};$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = P^{-1}$$

## Determinantes

É o único número real associado a uma matriz quadrada. O determinante de uma matriz é indicado com barras simples:  $\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$

### 1.ª ordem

Para a matriz de primeira ordem, o determinante é igual ao seu único elemento.

Exemplo:

$$|-5| = -5$$

### 2.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -16$$

### 3.ª ordem

## Regra de Sarrus

Para determinantes de 3.ª ordem utilizaremos:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

A melhor maneira de explicar a regra de Sarrus é com um exemplo:

$$\det = -8 + 12 - 30 + 4 - 9 + 80 = 49$$

## Menor complementar

Chama-se menor complementar  $D_{ij}$  relativo a um elemento  $a_{ij}$  da matriz  $A$  o determinante, associado

à matriz quadrada, obtida em  $A$ , e que se obtém eliminando de  $A$ , a linha e a coluna correspondente ao elemento considerado.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 = -12$$

Eliminando-se a terceira linha e a terceira coluna.

## Cofator

Chama-se cofator de um elemento de uma matriz quadrada o número obtido pelo produto do menor complementar e  $(-1)^{i+j}$ .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo:

No exemplo anterior

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot D_{33} = -12$$

## Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n \geq 2$  é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$$

$$3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot (-18) - 2 \cdot 1 \cdot 18 = -36$$

## Propriedades dos determinantes

- Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante da matriz é 0 (zero).

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas paralelas são iguais, então o determinante dessa matriz é 0 (zero).

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas paralelas são proporcionais o determinante é 0 (zero).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

- Os determinantes de uma matriz e o da sua transposta são iguais.
- Se multiplicarmos uma fila de uma matriz por um número real, o determinante fica multiplicado por este número.
- Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $k$  um número real. Então,

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

- Quando trocamos duas filas paralelas de lugar, o determinante muda de sinal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Quando a matriz for diagonal, seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$$

- O determinante de um produto é o produto dos determinantes,  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ .



Mais especificamente:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

## Matriz inversa

Veremos uma maneira mais rápida de determinar a matriz inversa.

- Matriz dos cofatores: a matriz dos cofatores é a matriz formada pelos respectivos cofatores dos elementos da matriz em uso. Indicamos  $\text{cof}(A)$ .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 11 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz adjunta: a matriz adjunta é a matriz transposta da matriz dos cofatores. Indicamos  $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T$ .

A matriz inversa pode ser escrita assim:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

Exemplo:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-6}{15} & \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \end{bmatrix}$$

## Teorema de Jacobi

O determinante não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes a filas paralelas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$L'_2 = L_2 + 2 \cdot L_1$$

## Regra de Chió

A regra de Chió é utilizada para baixar a ordem de um determinante. A seguir, os passos para a utilização da regra de Chió:

- Se  $a_{11} = 1$ , eliminamos a primeira linha e a primeira coluna dessa matriz.
- Subtraímos de cada elemento restante o produto dos elementos que ficam nos pés das perpendiculares traçadas do elemento considerado.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \textcircled{5} & -2 \\ \textcircled{0} & \textcircled{3} & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - 0 \cdot 5 & 1 - 0 \cdot 2 \\ 2 + 1 \cdot 5 & 4 - 1 \cdot 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

# Sistemas lineares

Um conjunto de  $n$  equações lineares a  $m$  incógnitas, forma o que chamamos de sistema linear.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_{mn} \end{cases}$$

Se o conjunto  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$  satisfizer as equações, esse conjunto será denominado solução do sistema.

## Regra de Cramer

Utilizada para determinar a solução de Sistemas Possíveis e Determinados.

O determinante principal é formado pelos coeficientes das variáveis:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Os determinantes secundários são obtidos substituindo as colunas das variáveis pela coluna dos termos independentes:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

As soluções do sistema são obtidas assim:

$$x_a = \frac{Dx_a}{D}, \text{ para } a \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Exemplo:

Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 20$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -40$$

Assim,

$$x = \frac{Dx}{D} = 1$$

$$y = \frac{Dy}{D} = -1$$

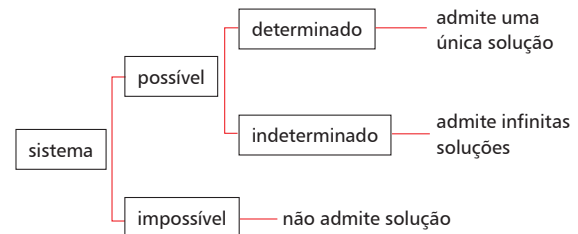
$$z = \frac{Dz}{D} = 2$$

A solução do sistema é  $(1, -1, 2)$ .

## Discussão de sistemas

Quanto à solução os sistemas são divididos em três tipos:

- Sistema Possível e Determinado (SPD): quando admitir uma única solução.
- Sistema Possível e Indeterminado (SPI): quando admitir infinitas soluções.
- Sistema Impossível (SI): quando não admitir soluções.



## Escalonamento de um sistema

Dois sistemas são ditos equivalentes se têm a mesma solução.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Forma} \\ \text{escalonada} \end{array}$$

Escalonamento é um método de resolução que consiste em transformar um sistema em um outro equivalente de resolução mais fácil. Para isso, utilizamos operações lineares:

- Multiplicar uma equação inteira por uma constante.
- Trocar duas equações entre si.
- Somar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Para escalonarmos um sistema, para as equações e para a matriz aumentada (incluindo os termos independentes), seguiremos os passos anteriores.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array} \right] L'_2 = L_2 - L_1 \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] L'_3 = L_3 - 2 \cdot L_1 \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] L'_3 = L_2 + L_3 \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] L'_3 = \frac{L_3}{2}$$

Essa é a chamada forma escalonada:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Mas, se quisermos prosseguir:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] L'_2 = L_2 - L_1 \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] L'_1 = L_1 - L_3 \sim$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] L'_1 = L_1 + L_2$$

Essa é a forma escalonada reduzida:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] , \text{ assim temos:}$$

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + y + 0z = 2, \text{ então } x = 3, y = 2 \text{ e } z = 1 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$$

## Análise combinatória

A análise combinatória é a parte da matemática que estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado evento.

### Fatorial

Seja  $n$  um número natural,  $n \geq 2$ . Denomina-se fatorial de  $n$  e indicamos por  $n!$ , o produto do número  $n$  por todos os seus antecessores até o 1. Ou seja,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Por definição temos:

$$0! = 1! = 1$$

## Permutações simples

Definimos permutações simples como sendo o número de maneiras de arrumar  $n$  elementos distintos em  $n$  posições, em que cada maneira se diferencia pela ordem em que os elementos aparecem.

$$P_n = n!$$

Exemplo:

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra CAROL?

Solução:

A palavra CAROL é escrita com 5 letras,

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Portanto, existem 120 anagramas possíveis.

## Arranjos simples

Arranjo simples de  $n$  elementos distintos, tomados  $p$  a  $p$ , onde  $n \geq 1$  e  $p$  é um número natural menor ou igual a  $n$ , é qualquer ordenação de  $p$  elementos dentre os  $n$  elementos, em que cada maneira de tomar os elementos se diferencia pela ordem e natureza dos elementos.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

Quantas palavras com cinco letras podemos formar com as letras D, U, S, A, E, C, R, O, L?

Solução:

O número de palavras é,

$$A_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1512$$

ou seja, podem-se escrever 1512 palavras com as nove letras acima indicadas.

## Combinação simples

Combinação simples de  $n$  elementos distintos, tomados  $p$  a  $p$ , onde  $n \geq 1$  e  $p$  é um número natural menor ou igual a  $n$ , é qualquer ordenação de  $p$  elementos dentre os  $n$  elementos, em que cada maneira de tomar os elementos se diferencia apenas pela natureza dos elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo:

Calcule o número de diagonais de um  $n$ -ágono regular.

Solução:

O número de diagonais de um polígono convexo é igual a:

$$C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n =$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Pois, basta tomar vértices dois a dois e descontar o número de lados ( $n$ ).

## Permutações com repetição

Se existem  $n$  objetos dos quais  $k_1$  são do tipo 1,  $k_2$  do tipo 2 e  $k_m$  do tipo  $m$  em que a soma  $k_1 + k_2 + \dots + k_m$  é igual a  $n$ , então o número de permutações é dado por:

$$P_{n(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Exemplo:

Quantos anagramas podem ser escritos com as letras da palavra CABANA?

Solução:

$$P_{6(1, 1, 1, 1, 1, 1)} = \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

Portanto, existem 120 anagramas possíveis com as letras da palavra CABANA.

## Permutação circulares

Para dispor  $n$  objetos distintos em torno de um círculo de maneira distintas, usamos a seguinte fórmula:

$$PC_n = (n - 1)!$$

## Números binomiais

Sejam  $n$  e  $p$  números naturais tais que  $n \geq p$ . Nessas condições, definimos os números binomiais da seguinte maneira:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!} = C_{n, p}$$

Onde  $n$  é o numerador e  $p$  é o denominador

Consequências da definição:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

## Binomiais complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n - p}$$

Números binomiais complementares.

## Relação de Stiefel

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p + 1} = \binom{n + 1}{p + 1}$$

## Relação de Fermat

$$\binom{n}{p} \cdot \binom{n - p}{p + 1} = \binom{n}{p + 1}$$

Outras propriedades:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$

## Triângulo Aritmético de Pascal

O triângulo de Pascal consiste em uma tabela onde dispomos de forma ordenada os números binomiais:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} & \\ & & & & & & & \\ & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\ & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

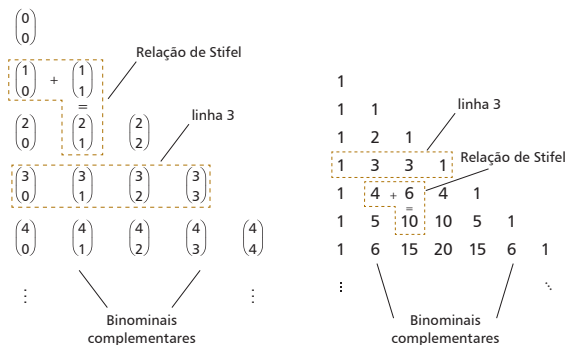
Os elementos deste triângulo podem ser dipostos de outra forma, como vemos a seguir:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{n} \end{array}$$

Substituindo os números binominais pelos respectivos resultados temos:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Observe a relação de Stifel no triângulo Pascal:



## Soma dos elementos de uma mesma linha

	Coluna							
	0	1	2	3	4	5	6	2n soma dos elementos de cada linha
Linha 0	1							2 <sup>0</sup> = 1
Linha 1	1	1						2 <sup>1</sup> = 2
Linha 2	1	2	1					2 <sup>2</sup> = 4
Linha 3	1	3	3	1				2 <sup>3</sup> = 8
Linha 4	1	4	6	4	1			2 <sup>4</sup> = 16
Linha 5	1	5	10	10	5	1		2 <sup>5</sup> = 32
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1	2 <sup>6</sup> = 64
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

## Binômio de Newton

Chama-se Binômio de Newton toda expressão da forma  $(x + a)^n$ , em que  $x$  e  $a$  são números reais e  $n$  é um número natural. O desenvolvimento dessa expressão é dado da seguinte forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

Exemplo:

Determine o desenvolvimento:

$$\left(-\frac{c}{2} + 2b\right)^4 =$$

Solução:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{c}{2} + 2b\right)^4 &= \binom{4}{0} (2b)^0 \left(-\frac{c}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} (2b)^1 \left(-\frac{c}{2}\right)^3 + \binom{4}{2} (2b)^2 \left(-\frac{c}{2}\right)^2 + \binom{4}{3} (2b)^3 \left(-\frac{c}{2}\right)^1 + \binom{4}{4} (2b)^4 \left(-\frac{c}{2}\right)^0 \\ &= \frac{c^4}{16} - bc^3 + 6b^2c^2 - 16b^3c + 16b^4 \end{aligned}$$

## Termo geral

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}$$

Exemplo:

Determine e calcule o terceiro termo.

Solução:

Para 3.º termo  $k=2$ , então,

$$T_3 = \binom{4}{2} (2b)^2 \left(-\frac{c}{2}\right)^{4-2} = 6b^2c^2$$

## Soma dos coeficientes

A soma dos coeficientes de um Binômio de Newton é obtida trocando as variáveis por 1.

Exemplo:

Calcule a soma dos coeficientes da expansão de  $\left(2x - \frac{y}{2}\right)^4$ .

Solução:

$$\left(2 \cdot 1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

## Probabilidade

### Espaço amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Indicaremos com a letra  $U$ .

Exemplo:

*Carta do naipe de paus.*



$$U = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$$

### Evento

É um subconjunto qualquer de um espaço amostral.

Indicamos com a letra  $A$ .

Exemplo:

*Ocorrência de um número par no naipe de paus.*

Solução:

Conjunto universo

$$U = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$$

Evento:



$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

### Probabilidade de um evento

A probabilidade de que o evento  $A$  aconteça em relação ao espaço  $U$ ,

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

onde  $n(U)$  é o número de ocorrências do espaço amostral e  $n(A)$  é o número de ocorrências do evento  $A$ .

Exemplo:

*A probabilidade de que ocorra um número par do naipe de paus.*

Solução:

O número de elementos do universo  $U$  é:

$$n(U) = 52$$

O número de cartas pares de paus é:

$$n(A) = 5$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer uma carta par do naipe de paus é de:

$$p(A) = \frac{5}{52}$$

### Probabilidade da união de dois eventos

A probabilidade de ocorrer o evento  $A$  ou o evento  $B$  é dada por:

$$p(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)}$$

onde  $n(A)$ ,  $n(B)$ ,  $n(A \cap B)$ , são respectivamente os números de elementos de  $A$ , de  $B$  e de  $A \cap B$ .

Exemplo:

*Qual é a probabilidade de ocorrer uma carta do naipe de paus ou uma carta par num baralho de 52 cartas?*

Solução:

O número de elementos do universo  $U$  é:

$$n(U) = 52$$

O número de cartas de paus é:

$$n(A) = 13$$

O número de cartas pares é:

$$n(B) = 20$$

O número de cartas pares de paus é:

$$n(A \cap B) = 5$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer uma carta de paus ou uma carta par é de:

$$p(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{13 + 20 - 5}{52}$$

$$= \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

ou

$$p(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B) =$$

$$\frac{13}{52} + \frac{20}{52} - \frac{5}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

## Probabilidade condicional

A probabilidade de ocorrer o evento  $A$ , dado que o evento  $B$  já ocorreu, é representada por  $P(A/B)$  e podemos calcular da seguinte forma:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

## Evento complementar

A probabilidade de que ocorra um evento é igual a 1, menos a probabilidade de ocorrer o evento complementar. Ou seja,  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ , onde  $A$  e  $\bar{A}$  são complementares.

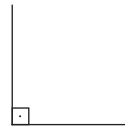
# Geometria

## Geometria plana

### Ângulos

O ângulo é definido como uma região do plano formado por duas semirretas de mesma origem (vértice).

- Ângulo reto ou de  $90^\circ$ :



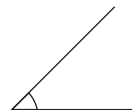
- Ângulo raso ou de  $180^\circ$ : equivale a dois ângulos retos.



- Ângulo obtuso: equivale a um ângulo maior que um ângulo reto e menor do que dois ângulos retos.

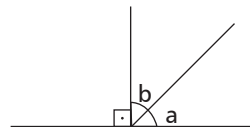


- Ângulo agudo: equivale a um ângulo menor que o ângulo reto.



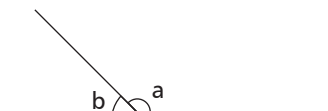
- Ângulos complementares: quando dois ângulos juntos formam um ângulo reto.

$$b + a = 90^\circ$$



- Ângulos suplementares: quando dois ângulos juntos formam um ângulo raso.

$$b + a = 180^\circ$$

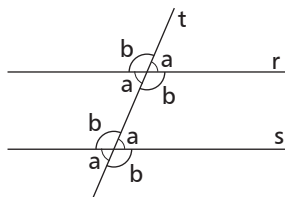


## Reta transversal a duas paralelas

Ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal.

As retas  $r$  e  $s$  são paralelas e  $t$ , é a transversal.





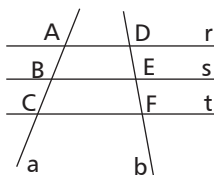
Os ângulos a e b são suplementares.

## Teorema de Tales

Um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais determina segmentos proporcionais.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

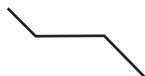
Com  $r/s/t$  e  $a$  e  $b$  são transversais



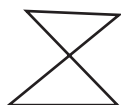
## Polígonos

Linha poligonal é uma linha formada por segmentos de reta.

Classificação de linhas poligonais:



Linha poligonal aberta e simples



Linha poligonal fechada não-simples



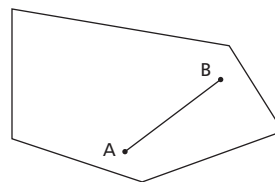
Linha poligonal fechada e simples



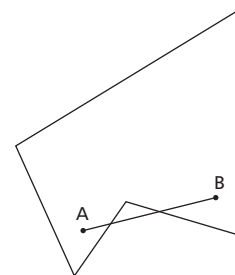
Linha poligonal aberta e não-simples

Polígono é uma linha poligonal fechada e simples.

Polígono convexo é tal que quaisquer pontos interiores unidos formam um segmento de reta completamente contido no polígono. Caso contrário o polígono é dito não convexo, ou côncavo.



Polígono convexo



Polígono côncavo

A soma do ângulo interno com um ângulo externo sempre é igual a  $180^\circ$ .

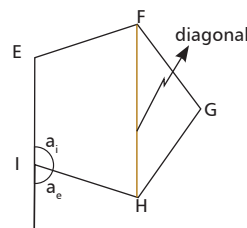
A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dado pela fórmula:

$$S_i = 180^\circ(n - 2)$$

A soma dos ângulos externos é constante:  $S_e = 360^\circ$

O número de diagonais de um polígono convexo é dado por:

$$D = \frac{n(n - 3)}{2}$$



Pentágono.

## Polígonos regulares

Um polígono é dito regular se todos os seus lados forem congruentes e todos os seus ângulos também forem congruentes

O apótema de um polígono regular é a menor distância entre o centro da circunferência inscrita no polígono e seus lados.

# Principais polígonos regulares

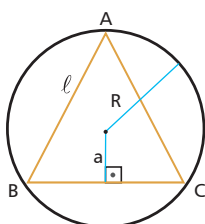
## Triângulo equilátero

a	S
$\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Ângulo interno: 60°

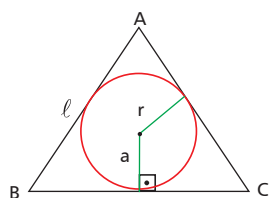
Ângulo central: 120°

a	ℓ
$\frac{R}{2}$	$R\sqrt{3}$



Triângulo equilátero inscrito.

a	ℓ
r	$2\sqrt{3}r$



Triângulo equilátero circunscrito.

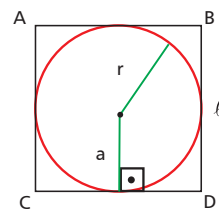
## Quadrado

a	S
$\frac{\ell}{2}$	$\ell^2$

Ângulo interno: 90°

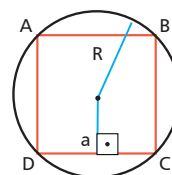
Ângulo central: 90°

a	ℓ
r	2r



Quadrado circunscrito.

a	ℓ
$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$R\sqrt{2}$



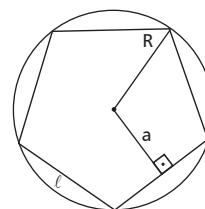
Quadrado inscrito.

## Pentágono Regular

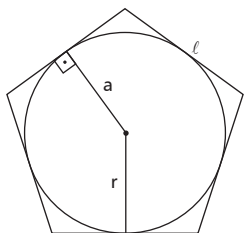
a	S	a
$\frac{\ell}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$\frac{\ell^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	r
ℓ	a	ℓ
$2r \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{R}{4} (1 + \sqrt{5})$	$\frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Ângulo interno: 108°

Ângulo central: 72°



Pentágono regular inscrito.



Pentágono regular circunscrito.

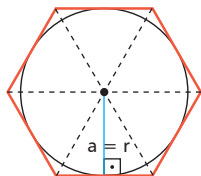
## Hexágono Regular

a	S
$\frac{l\sqrt{3}}{2}$	$\frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$

Ângulo interno:  $120^\circ$

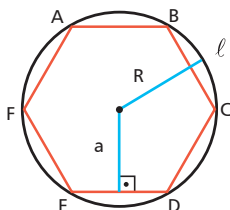
Ângulo central:  $60^\circ$

a	l
r	$\frac{2\sqrt{3}r}{3}$



Hexágono regular circunscrito.

a	l
$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	R

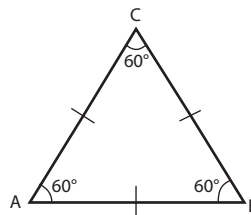


Hexágono regular inscrito.

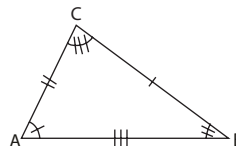
## Triângulos

Classificação quanto aos lados:

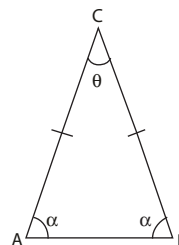
- **Equilátero:** três lados congruentes.



- **Escaleno:** três lados diferentes.

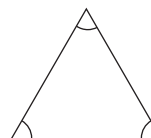


- **Isósceles:** dois lados iguais.

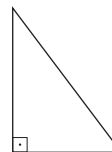


Classificação quanto aos ângulos:

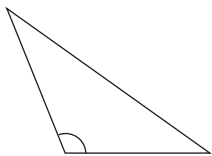
- **Acutângulo:** três ângulos agudos.



- **Retângulo:** um ângulo reto.



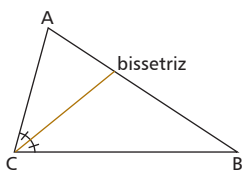
- Obtusângulo: um ângulo obtuso.



## Cevianas notáveis

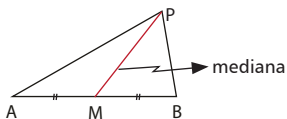
### Bissetriz

Bissetriz é a semirreta interna, com origem no vértice de um ângulo que divide esse ângulo em dois ângulos de mesma medida (congruentes).



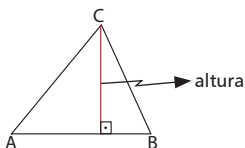
### Mediana

A mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.



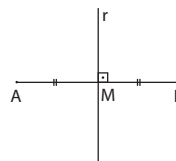
### Altura

A altura de um triângulo é a reta perpendicular que liga o vértice até o lado oposto.



### Mediatriz

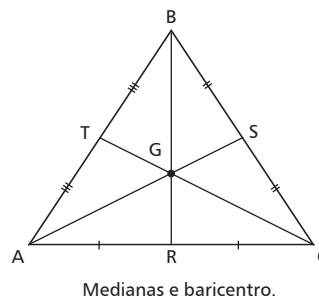
A mediatriz de um segmento é a reta traçada a partir do ponto médio do segmento e forma um ângulo de  $90^\circ$  com esse segmento.



### Pontos notáveis

Nos triângulos existem 4 pontos notáveis:

- Baricentro: encontro das medianas. Divide o triângulo em seis triângulos de áreas iguais.

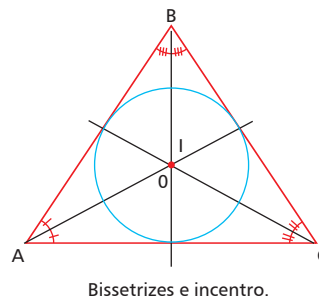


Medianas e baricentro.

As medianas são:  $\overline{AS}$ ,  $\overline{CT}$  e  $\overline{BR}$ .

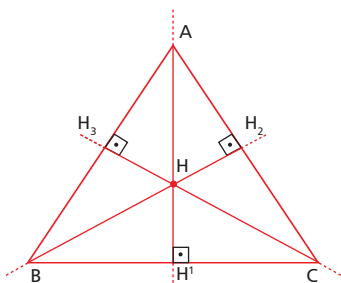
O ponto G é o baricentro.

- Incentro: encontro das bissetrizes. É o centro da circunferência inscrita no triângulo.



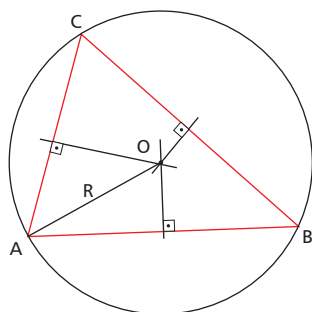
Bissetrizes e incentro.

- Ortocentro: encontro das alturas.



Alturas e ortocentro.

- Circuncentro: encontro das mediatrizes. É o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



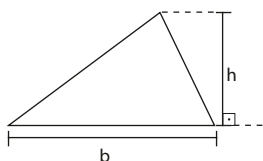
Mediatrizes e circuncentro.

## Área

Podemos calcular a área do triângulo usando fórmulas que relacionem os seus raios, seus lados etc.:

- Quando tivermos base e altura.

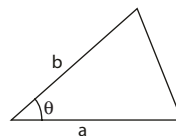
$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$



Área de um triângulo.

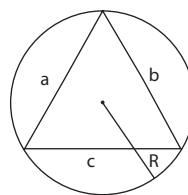
- Quando tivermos dois lados e o ângulo entre eles.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \theta}{2}$$



- Quando tivermos os lados e o raio da circunferência circunscrita.

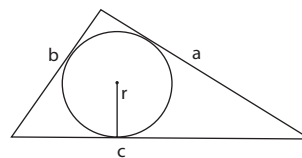
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$



Área do triângulo inscrito numa circunferência.

- Quando tivermos os lados e o raio da circunferência inscrita.

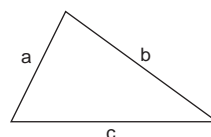
$$S = p \cdot r$$



Área de um triângulo circunscrito a uma circunferência.

- Fórmula de Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

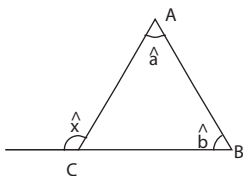


Área de um triângulo em função dos lados.

### Teorema do ângulo externo

Em qualquer triângulo o ângulo externo é numericamente igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

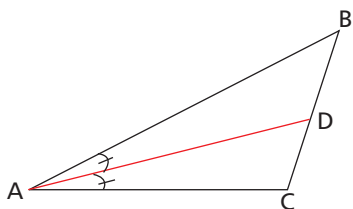
$$x = a + b$$



### Teorema das bissetrizes

O teorema das bissetrizes internas diz que a bissetriz divide internamente o lado ao qual corresponde em segmentos proporcionais aos lados correspondentes.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$



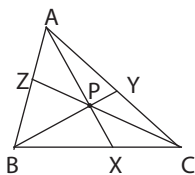
### Teorema de Ceva-Menelaus

Ceva:

Se,

$$\frac{AZ \cdot BX \cdot CY}{BZ \cdot CX \cdot AY} = 1$$

então AX, BY e CZ são concorrentes.



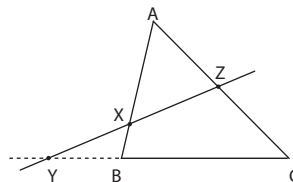
Teorema de Ceva.

Menelaus:

Se,

$$\frac{AX \cdot BY \cdot CZ}{BX \cdot CY \cdot AZ} = 1$$

então X, Y e Z estão alinhados.

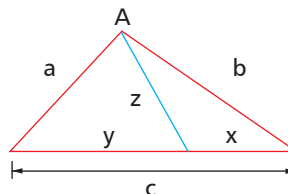


Teorema de Menelaus.

### Relação de Stewart

Considere uma ceviana qualquer de um triângulo. Sempre vale a seguinte igualdade:

$$a^2x + b^2y - z^2c = xyc$$



Teorema de Stewart.

### Congruência entre triângulos

Dois triângulos são congruentes quando tanto lados quanto ângulos são ordenadamente congruentes. Os casos de congruência são:

- LAL: quando possuem dois lados e o ângulo formado entre eles congruentes.
- ALA: quando possuem dois ângulos e o lado a eles adjacente congruentes.
- LLL: quando possuem os três lados congruentes.
- LAAo: quando possuem um lado, um ângulo e ângulo oposto ao lado, congruentes.

### Semelhança entre triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando possuem três ângulos congruentes, por consequência os lados

opostos aos ângulos serão proporcionais como também as cevianas. Os casos de semelhança de triângulo são:

- quando possuem dois pares de ângulos respectivamente iguais;
- quando possuem três lados homólogos proporcionais;
- quando possuem dois pares de lados homólogos proporcionais e o ângulo entre eles igual.

## Quadriláteros

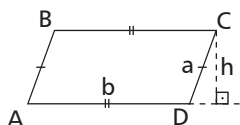
Quadriláteros notáveis:

### Paralelogramo

Um quadrilátero é chamado de paralelogramo se, e somente se, possuir lados opostos paralelos.

$$S = b \cdot h$$

$$2P = 2(a+b)$$



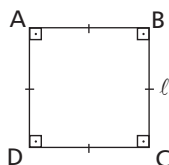
### Quadrado

Todos os ângulos são iguais a  $90^\circ$ , os lados são iguais e os lados opostos são paralelos entre si, as diagonais são congruentes, ortogonais e se interceptam nos respectivos pontos médios.

$$2P = 4\ell$$

$$D = \ell\sqrt{2}$$

$$S = \ell^2$$



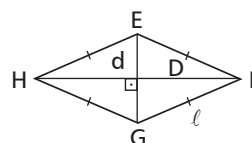
### Losango

Os ângulos opostos são congruentes, os lados são congruentes, os lados opostos são paralelos, as diagonais são ortogonais e se interceptam nos respectivos pontos médios.

$$2P = 4\ell$$

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$D^2 + d^2 = 4\ell^2$$



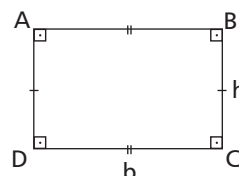
### Retângulo

Os ângulos internos são congruentes e com medida igual a  $90^\circ$ , os lados opostos são congruentes e paralelos, as diagonais são congruentes e se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

$$2P = 2(b + h)$$

$$S = b \cdot h$$

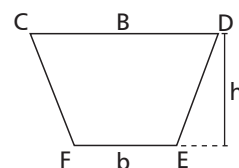
$$h^2 + b^2 = D^2$$



### Trapézio

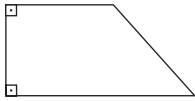
O trapézio apresenta apenas um par de lados opostos paralelos.

$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

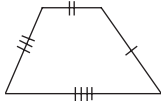


Classificação:

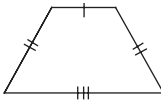
- Trapézio Escaleno: todos os lados diferentes.



- Trapézio Isósceles: dois lados que não sejam de bases iguais.

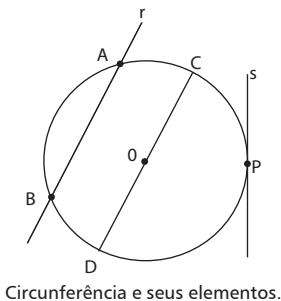


- Trapézio Retângulo: pelo menos um dos lados não-paralelos é perpendicular às bases.

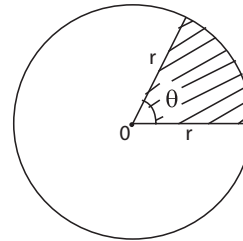


## Circunferência

- Raio: segmento que une o centro a um ponto da circunferência ( $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OP}$ ).
- Corda: segmento que une dois pontos da circunferência ( $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ).
- Arco: uma parte da circunferência.
- Diâmetro ( $\overline{CD}$ ): é uma corda que corta o centro da circunferência. É a corda de tamanho máximo.
- Secante ( $r$ ): reta que passa por dois pontos da circunferência.
- Tangente(s): reta que passa por apenas um ponto da circunferência.



## Setor circular



Setor circular.

$$C = 2\pi r = d\pi$$

$$S = \pi r^2$$

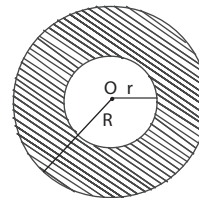
$$S = \frac{\theta \cdot r^2}{2}$$

### Observação

$$d = 2r$$

A área da coroa circular é dada por:

$$S = \pi (R^2 - r^2)$$

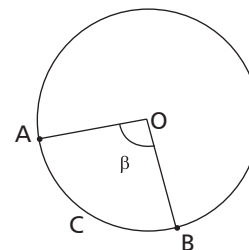


Coroa circular.

## Arcos e ângulos

- Ângulo central (AOB): é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. A medida desse ângulo é igual à medida do arco correspondente.

$$\beta \equiv \widehat{ACB}$$

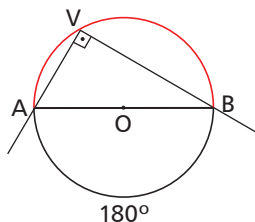


Ângulo central.

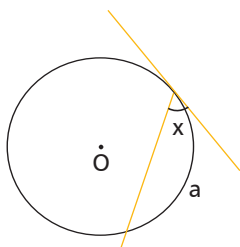


- Ângulo inscrito (APB): é o ângulo que tem vértice na circunferência. A medida do ângulo inscrito é igual à metade do arco correspondente.

**Ângulo inscrito na semicircunferência é de 90°.**



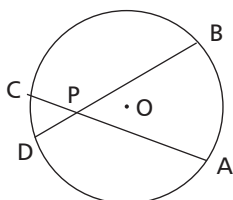
- Ângulo do segmento: é o ângulo que tem o vértice na circunferência e cujos lados são formados por uma secante e uma tangente. A medida desse ângulo é igual à metade do arco correspondente.



- Ângulo excêntrico interior: é o ângulo formado pelo cruzamento de duas secantes da circunferência em seu interior. A medida desse ângulo é igual à semissoma dos arcos determinados pelas secantes.

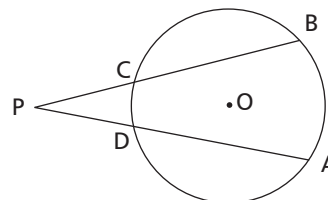
$$BPA = \frac{AB + CD}{2}$$

$$BPC = \frac{AD + BC}{2}$$



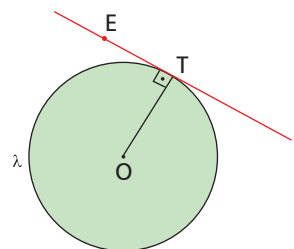
- Ângulo excêntrico exterior: é o ângulo formado pelo cruzamento de duas secantes da circunferência em seu exterior. A medida desse ângulo é igual ao módulo da semidiferença dos arcos determinados pelas secantes.

$$CPD = \left| \frac{AB + CD}{2} \right|$$



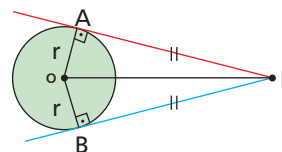
Outras propriedades importantes são:

- Retas paralelas compreendem arcos de medidas iguais.
- O raio é perpendicular à tangente no ponto de tangência.



Ângulo formado entre a reta tangente e o centro é reto.

- Duas tangentes traçadas do mesmo ponto possuem medidas iguais.



Propriedade das tangentes.

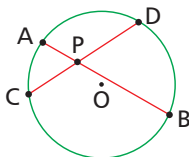
- O ponto médio do segmento formado pelas intersecções da reta secante a uma circunferência, quando unido, forma um ângulo de 90° em relação à reta secante.

Potência de ponto

Vamos ver aqui a potência de um ponto P em relação a uma circunferência. Essas relações podem ser extraídas através da semelhança de triângulos:

- P é interno:

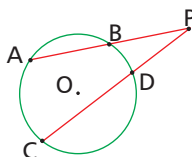
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Potência de ponto interno.

- P é externo:

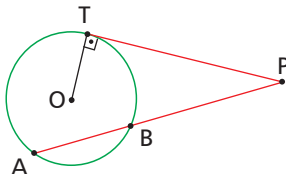
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Potência de ponto externo.

- P é tangente:

$$PT^2 = PB \cdot PA$$



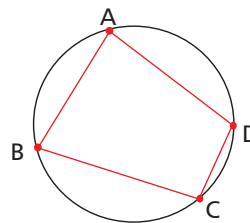
Potência da tangente.

## Quadriláteros inscritíveis

Um quadrilátero é dito inscritível se todos os seus quatro vértices estiverem na circunferência.

- Todo quadrilátero inscritível na circunferência tem a soma dos ângulos opostos iguais a  $180^\circ$  (esse quadrilátero é chamado cíclico).

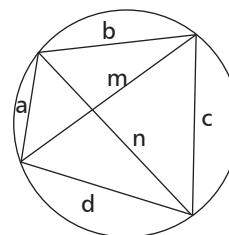
$$A + C = B + D = 180^\circ$$



## Teorema de Ptolomeu

O teorema de Ptolomeu foi desenvolvido para quadriláteros inscritíveis e pode ser escrito da seguinte forma:

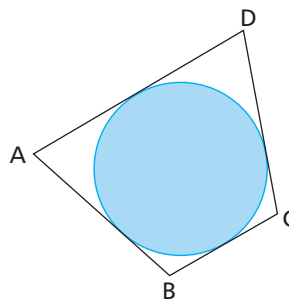
$$m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$$



## Quadriláteros circunscritíveis

Um quadrilátero é circunscritível se todos os lados forem tangentes à circunferência. Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma dos lados opostos é igual à soma dos outros dois.

$$AB + CD = AD + BC$$



# Trigonometria

## Correspondência entre arcos e ângulos

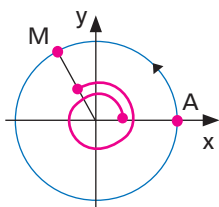
Um ângulo central é igual à medida do arco correspondente.

Unidades de medidas de ângulo:

$1^\circ$  (um grau) – é a medida do arco equivalente a  $\frac{1}{360}\lambda$

$1\text{gr}$  (um grado) – é a medida do arco equivalente a  $\frac{1}{400}\lambda$

Arcos côngruos são arcos com a mesma extremidade.



Exemplo:

$120^\circ$  é côngruo com  $480^\circ$ , pois  $120^\circ + 360^\circ$  (uma volta) =  $480^\circ$ .

A partir dessas relações, podemos estabelecer outras:

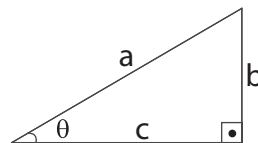
$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{1}{\text{cotg } \theta} \quad \text{cos } \theta \neq 0$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{1}{\text{tg } \theta} \quad \text{sen } \theta \neq 0$$

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} \quad \text{cos } \theta \neq 0$$

$$\text{cossec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad \text{sen } \theta \neq 0$$

## Trigonometria no triângulo retângulo



Triângulo retângulo.

Sendo  $\theta$  a medida de um ângulo agudo do triângulo retângulo, temos:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cossec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{a}{b}$$

## Senos e cossenos de ângulos notáveis

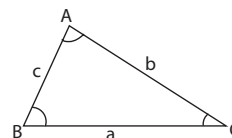
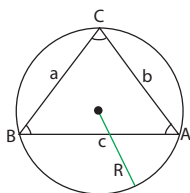
	sen $\theta$	cos $\theta$	tg $\theta$
15°	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$
18°	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72°	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$2 + \sqrt{3}$

Senos e cossenos de ângulos notáveis.

## Triângulos quaisquer

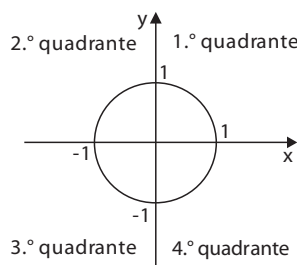
### Lei dos senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



### Círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.



### Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

## Eixos trigonométricos

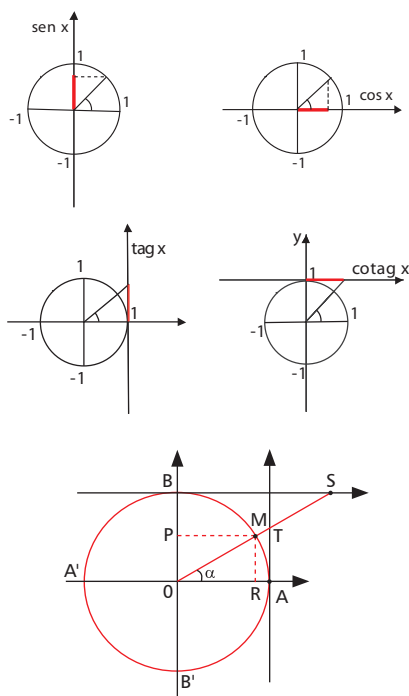
O eixo vertical representa o seno.

O eixo horizontal representa o cosseno.

O eixo da tangente é o eixo que é tangente ao círculo trigonométrico no ponto (1,0), com origem nesse mesmo ponto.

O eixo da cotangente é o eixo que é tangente ao círculo no ponto (0,1) com origem nesse mesmo ponto.

A cotangente é definida como a distância do ponto (0,0) até o eixo da cotangente.



Círculo trigonométrico e seus eixos.

Relação fundamental:

$$(\sen \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

Relações decorrentes da relação fundamental:

Dividindo  $(\sen \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  por  $(\sen \theta)^2$  temos:

$$1 + (\tag \theta)^2 = (\sec \theta)^2$$

Dividindo  $(\sen \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  por  $(\cos \theta)^2$  temos:

$$1 + (\cotg \theta)^2 = (\csc \theta)^2$$

## Funções trigonométricas

### Seno (segmento OP)

Chama-se função seno a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \sen(x)$ .

A função seno é limitada e periódica sendo:

$\text{Im} = [-1, 1]$  (imagem)

$p = 2\pi$  (período)

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sen \alpha$	0	1	0	-1	0

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	+	-	-
crescimento	C	D	D	C

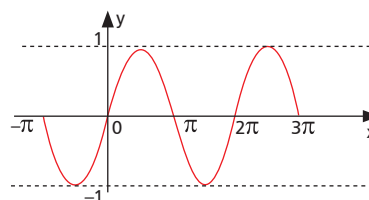
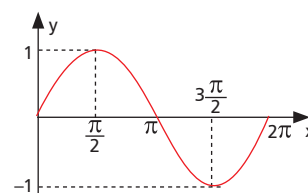


Gráfico da função seno.

### Casos particulares de funções envolvendo seno

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = a + b \cdot \sen(cx + d)$ , onde:

$\text{Im} = [a - b, a + b]$  (imagem)

$p = \frac{2\pi}{c}$  (período)

Os elementos  $a$ ,  $b$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

- $a$  – Translada a função verticalmente.
- $b$  – Determina o valor da amplitude.
- $c$  – Varia o período da função.
- $d$  – Translada a função horizontalmente.

## Cosseno (segmento OR)

Chama-se função cosseno a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \cos(x)$ .

A função cosseno é limitada e periódica sendo:

$\text{Im} = [-1, 1]$  (imagem)

$p = 2\pi$  (período)

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	-	-	+
crescimento	D	D	C	C

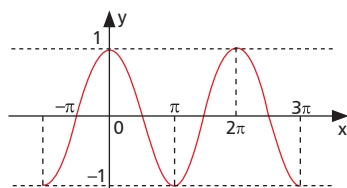
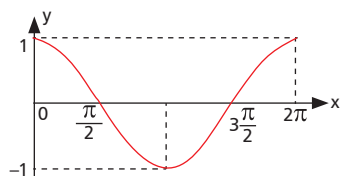


Gráfico da função cosseno.

## Casos particulares de funções envolvendo cosseno

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$ , onde:

$\text{Im} = [a - b, a + b]$  (imagem)

$p = \frac{2\pi}{c}$  (período)

Os elementos  $a$ ,  $b$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

- $a$  – Translada a função verticalmente.
- $b$  – Determina o valor da amplitude.
- $c$  – Varia o período da função.
- $d$  – Translada a função horizontalmente.

## Tangente (segmento AT)

Chama-se função tangente a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \text{tg}(x)$ .

A função tangente é ilimitada e periódica sendo:

$\text{Im} = \mathbb{R}$  (imagem)

$p = \pi$  (período)

$\text{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\text{tg } \alpha$	0	∅	0	∅	0

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	-	+	-
crescimento	C	C	C	C

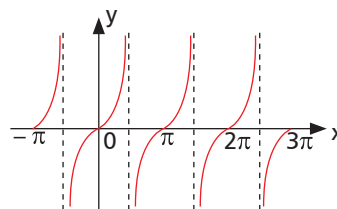
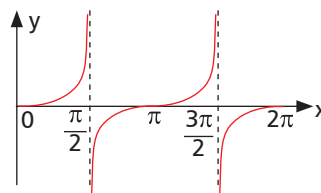


Gráfico da função tangente.

## Casos particulares de funções envolvendo tangente

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$y = f(x) = a + b \cdot \operatorname{tg}(cx + d), \text{ sendo:}$$

$\operatorname{Im} = \mathbb{R}$  (imagem)

$$p = \frac{\pi}{c} \text{ (período)}$$

$$\operatorname{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2c} - \frac{d}{c} + \frac{n\pi}{c}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Os elementos  $a$ ,  $c$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

- $a$  – Translada a função verticalmente.
- $c$  – Varia o período da função.
- $d$  – Translada a função horizontalmente.

## Cotangente (segmento BS)

Chama-se função cotangente a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \operatorname{cotg}(x)$ .

A função cotangente é ilimitada e periódica sendo:

$\operatorname{Im} = \mathbb{R}$  (imagem)

$p = \pi$  (período)

$$\operatorname{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	-	+	-
crescimento	D	D	D	D

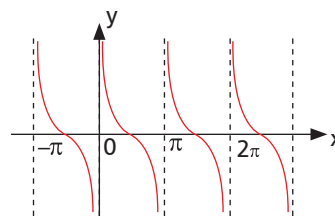
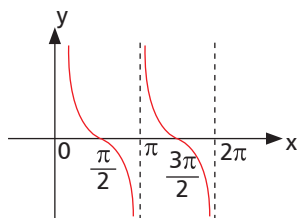


Gráfico da função cotangente.

## Casos particulares de funções envolvendo cotangente

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$y = f(x) = a + b \cdot \operatorname{cotg}(cx + d), \text{ sendo:}$$

$\operatorname{Im} = \mathbb{R}$  (imagem)

$$p = \frac{\pi}{c} \text{ (período)}$$

$$\operatorname{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{-d}{c} + \frac{n\pi}{c}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Os elementos  $a$ ,  $c$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

- $a$  – Translada a função verticalmente.
- $c$  – Varia o período da função.
- $d$  – Translada a função horizontalmente.

## Secante

Chama-se função secante a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \sec(x)$ .

A função secante é ilimitada e periódica sendo:

$\operatorname{Im} = \mathbb{R} - [-1, 1]$  (imagem)

$p = 2\pi$  (período)

$$\operatorname{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sec \alpha$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$	1

Crescimento, decrescimento e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	-	-	+
crescimento	C	C	D	D

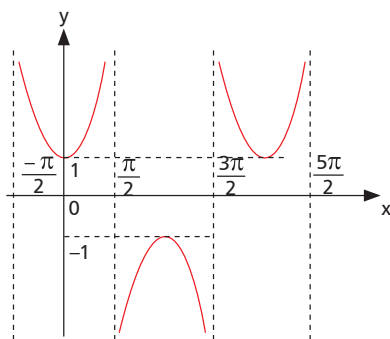


Gráfico da função secante.

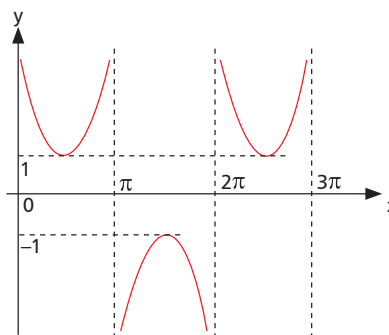


Gráfico da função cossecante.

## Casos particulares de funções envolvendo secante

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = a + b \cdot \sec(cx + d)$ , sendo:

$$\text{Im} = \mathbb{R} - [a - b, a + b] \text{ (imagem)}$$

$$p = \frac{2\pi}{c} \text{ (período)}$$

$$\text{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2c} - \frac{d}{c} + \frac{n\pi}{c}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Os elementos  $a$ ,  $c$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

$a$  – Translada a função verticalmente.

$c$  – Varia o período da função.

$d$  – Translada a função horizontalmente.

## Cossecante (segmento OS)

Chama-se função cossecante a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = f(x) = \csc(x)$ .

A função cossecante é ilimitada e periódica, sendo:

$$\text{Im} = \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ (imagem)}$$

$$p = \pi \text{ (período)}$$

$$\text{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\csc \alpha$	$\nexists$	1	$\nexists$	1	$\nexists$

Crescimento, decréscimo e sinais variando conforme o quadrante:

quadrante	1.º	2.º	3.º	4.º
sinal	+	+	-	-
crescimento	D	C	C	D

## Casos particulares de funções envolvendo cossecante

Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$y = f(x) = a + b \cdot \csc(cx + d), \text{ sendo:}$$

$$\text{Im} = \mathbb{R} - [a - b, a + b] \text{ (imagem)}$$

$$p = \frac{2\pi}{c} \text{ (período)}$$

$$\text{Dm} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{d}{c} + \frac{n\pi}{c}, n \in \mathbb{Z}\}$$

Os elementos  $a$ ,  $c$  e  $d$  influenciam a função da seguinte forma:

$a$  – Translada a função verticalmente.

$c$  – Varia o período da função.

$d$  – Translada a função horizontalmente.

## Redução ao 1.º quadrante

Para facilitar o estudo das funções trigonométricas, faz-se reduções do 2.º, 3.º e 4.º quadrantes ao 1.º quadrante. O ângulo geralmente recai em um dos arcos notáveis.

## Redução do 2.º quadrante

Supondo que  $x$  é um ângulo do segundo quadrante:

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x)$$

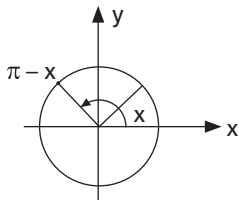
$$\tan x = -\tan(\pi - x)$$

$$\csc x = \csc(\pi - x)$$



$$\sec x = -\sec (\pi - x)$$

$$\cotg x = -\cotg (\pi - x)$$



### Redução do 3.º quadrante

Supondo que  $x$  é um ângulo do terceiro quadrante:

$$\sen x = -\sen (x + \pi)$$

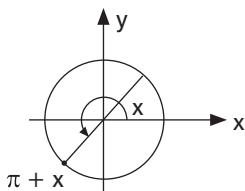
$$\cos x = -\cos (x + \pi)$$

$$\tg x = \tg (x + \pi)$$

$$\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} (x + \pi)$$

$$\sec x = -\sec (x + \pi)$$

$$\cotg x = \cotg (x + \pi)$$



### Redução do 4.º quadrante

Supondo que  $x$  é um ângulo do quarto quadrante:

$$\sen x = -\sen (2\pi - x)$$

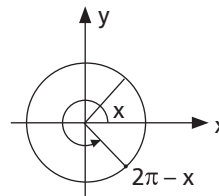
$$\cos x = \cos (2\pi - x)$$

$$\tg x = -\tg (2\pi - x)$$

$$\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} (2\pi - x)$$

$$\sec x = \sec (2\pi - x)$$

$$\cotg x = -\cotg (2\pi - x)$$



## Adição/subtração de arcos

$$\sen (a \pm b) = \sen a \cdot \cos b \pm \sen b \cdot \cos a$$

$$\cos (a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sen b \cdot \sen a$$

$$\tg (a \pm b) = \frac{\tg a \pm \tg b}{1 \mp \tg a \cdot \tg b}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \sen(15^\circ) &= \cos (45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sen 45^\circ \sen 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

## Arcos duplos

$$\sen(2a) = 2 \sen a \cdot \cos a$$

$$\tg(2a) = \frac{2 \tg a}{1 - \tg^2 a}$$

$$\begin{aligned} \cos (2a) &= (\cos a)^2 - (\sen a)^2 = \\ &= 2(\cos a)^2 - 1 = 1 - 2(\sen a)^2 \end{aligned}$$

Exemplo:

Se  $\sen \theta + \cos \theta = a$ , quanto vale  $\sen (2\theta)$ ?

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado:

$$(\sen \theta + \cos \theta)^2 = a^2$$

$$(\sen \theta)^2 + (\cos \theta)^2 + 2 \sen \theta \cdot \cos \theta = a^2$$

$$1 + \sen (2\theta) = a^2 \rightarrow \sen (2\theta) = a^2 - 1$$

## Arcos metade

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Exemplo:

Calcule  $\sin \frac{\pi}{8}$ :

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

## Arcos triplos

$$\sin (3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos (3a) = -3\cos a + 4\cos^3 a$$

$$\operatorname{tg} (3a) = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

## Relações de prostaférese

São relações de transformação de soma em produto.

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{(\alpha \pm \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha \mp \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \pm \cos \beta = \pm 2 \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

## Funções trigonométricas inversas

### Função arco-seno

Seja  $f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  que associa cada número real  $x$  do eixo dos senos a um único número real  $y$  da circunferência trigonométrica, tal que  $\sin y = x$ .

$y$  é a medida do arco cujo seno vale  $x$ .

A função inversa do seno é indicada por  $f(x) = \arcsen(x)$ .

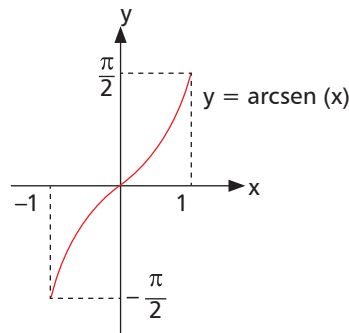


Gráfico da função arco-seno.

Exemplo:

$$\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

### Função arco-cosseno

Seja  $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  que associa cada número real  $x$  do eixo dos cossenos a um único número real  $y$  da circunferência trigonométrica, tal que  $\cos y = x$ .

$y$  é a medida do arco cujo cosseno vale  $x$ .

A função inversa do cosseno é indicada por  $f(x) = \arccos(x)$ .

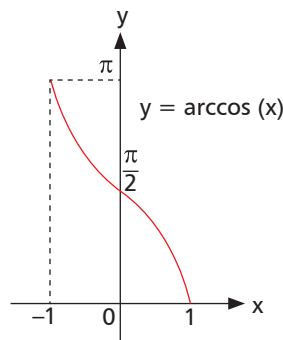


Gráfico da função arco-cosseno.

Exemplo:

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

## Função arco-tangente

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  que associa cada número real  $x$  do eixo das tangentes a um único número real  $y$  da circunferência trigonométrica, tal que  $\operatorname{tg} y = x$ .

$y$  é a medida do arco cuja tangente vale  $x$ .

A função inversa da função tangente é indicada por:  $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ .

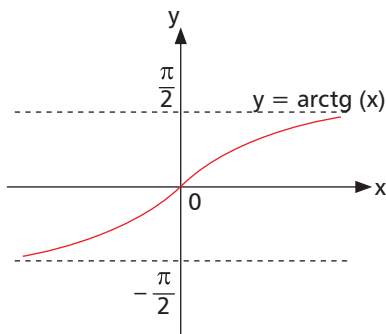


Gráfico da função arco-tangente.

Exemplo:

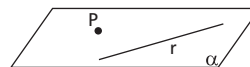
$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

## Geometria de posição

O ponto, a reta e o plano são entes geométricos aceitos sem definição:

- Pontos: não têm dimensão e são indicados com letras maiúsculas.
- Retas: são unidimensionais e são indicadas com letras minúsculas.
- Planos: são tridimensionais e indicados com letras gregas.
- Semirretas: quando um ponto divide uma reta em duas partes, chamamos essas duas partes de semirretas.
- Segmento de reta: é uma parte da reta compreendida entre dois pontos.

- Pontos colineares: quando três pontos estão alinhados, dizemos que eles são colineares.
- Pontos coplanares: quando existe um plano que contenha os quatro pontos dizemos que esses pontos são coplanares.
- Espaço: é o conjunto de todos os pontos.



Ponto, reta e plano.

## Postulados

Postulados são proposições aceitas sem demonstrações.

Postulados de existência:

- existem infinitos pontos;
- existem infinitas retas e, em cada reta e fora delas, existem infinitos pontos;
- existem infinitos planos e, em cada plano e fora deles, há infinitos pontos.

Postulados de determinação:

- dois pontos distintos definem uma única reta;
- três pontos não-colineares determinam um único plano.

Postulado de inclusão:

- Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um mesmo plano, a reta estará contida nesse plano.

Postulado do espaço:

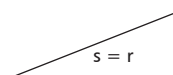
- Um plano separa o espaço em dois semiespaços cuja origem é o próprio plano.

Postulado de Euclides:

- Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.

## Posições relativas entre duas retas

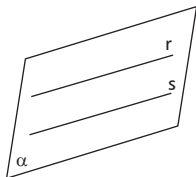
- Coincidentes: se todos os pontos de uma são os pontos da outra.



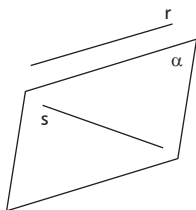
- **Concorrentes:** quando tem apenas um ponto em comum.



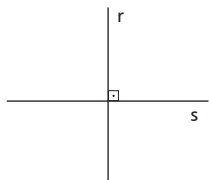
- **Paralelas:** quando não tem ponto em comum e são coplanares.



- **Reversas:** quando não existe plano que as contenha.



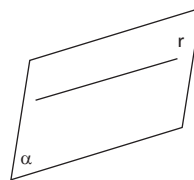
- **Perpendiculares:** quando são concorrentes e formam ângulos retos.



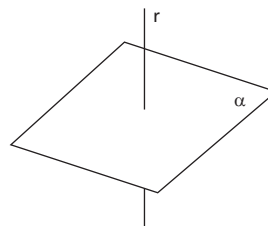
- **Ortogonais:** quando são reversas e formam um ângulo reto. Nesse caso, existe uma paralela a uma delas que é perpendicular à outra.

## Posições relativas de reta e plano

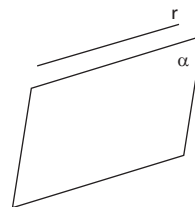
- **Reta contida no plano:** se existirem dois pontos de uma reta contida em um plano, então a reta inteira está dentro do plano.



- **Reta secante:** se um único ponto de uma reta estiver dentro de um plano, dizemos que essa reta é secante ao plano.

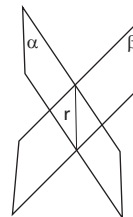


- **Reta paralela:** se não existir ponto da reta dentro do plano, dizemos que a reta é paralela ao plano.

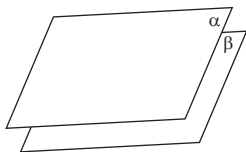


## Posição relativa entre planos

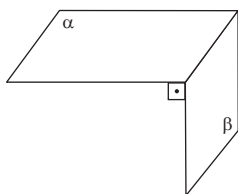
- **Planos secantes:** dois planos são secantes quando se interceptam segundo uma reta.



- **Planos paralelos:** quando não possuem nem um ponto em comum. Note que nesse caso qualquer reta em um dos planos é paralela ao outro plano.



- Planos coincidentes: quando possuírem todos os pontos em comum.
- Planos perpendiculares: quando num dos planos existir uma reta perpendicular ao outro plano, dizemos que esses dois planos são perpendiculares.



## Sólidos geométricos

### Poliedros

Poliedro convexo é um sólido limitado por um número finito de polígonos convexos, tal que:

1. Dois polígonos não pertençam ao mesmo plano;
  2. Cada lado de um polígono pertence a dois, e somente dois, polígonos;
  3. Em relação a qualquer de suas faces, o poliedro fica todo situado num mesmo semiespaço determinado pelo plano que contém esta face.
- Faces (F): regiões poligonais que determinam o poliedro.
  - Arestas (A): intersecção de duas faces.
  - Vértices (V): intersecção de três ou mais arestas.

Os nomes dos poliedros são dados em função do número de lados:

- Tetraedro: 4 faces
- Pentaedro: 5 faces

- Hexaedro: 6 faces
- Heptaedro: 7 faces
- Octaedro: 8 faces
- ...
- Icosaedro: 20 faces
- ...

### Poliedros regulares

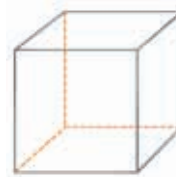
Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes.

Existem cinco poliedros regulares:

- Tetraedro:  $A=6$ ,  $V=4$ ,  $F=4$



- Hexaedro (cubo):  $A=12$ ,  $V=8$ ,  $F=6$



- Octaedro:  $A=12$ ,  $B=6$ ,  $F=8$



- Dodecaedro:  $A=30$ ,  $V=20$ ,  $F=12$



- Icosaedro:  $A=30$ ,  $V=12$ ,  $F=20$



Nome	A	V	F
Tetraedro	6	4	4
Hexaedro	12	8	6
Octaedro	12	6	8
Dodecaedro	30	20	12
Icosaedro	30	12	20

Poliedros regulares.

## Relação de Euler

$$V + F = A + 2$$

Outra relação importante:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n$$

onde  $F_n$  representa um polígono de uma das faces com  $n$  lados.

## Soma dos ângulos das faces

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro em função dos números de vértices ( $V$ ) é dado por:

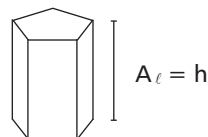
$$S = 360^\circ (V - 2)$$

## Prismas

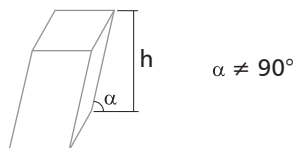
Prisma é o poliedro convexo em que:

- Duas de suas faces (bases) são congruentes e situadas em planos paralelos distintos.
- As outras faces são paralelogramos determinados pelas arestas das bases e pelas arestas laterais.

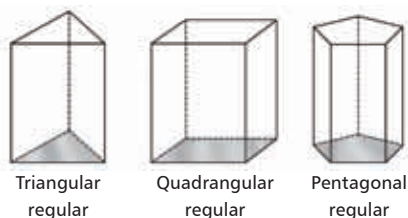
- Prisma reto: a aresta lateral ( $A_\ell$ ) é perpendicular ao plano da base.



- Prisma oblíquo: a aresta lateral é oblíqua ao plano da base.



Um prisma regular é aquele em que as bases são polígonos regulares.



Alguns prismas regulares.

Fórmulas:

$$V = A_b \cdot h$$

$$A_\ell = 2p \cdot h$$

$$A_t = A_\ell + 2A_b$$

A área de cada polígono da base é chamada de área da base ( $A_b$ ).

A área em volta do poliedro é chamada de área lateral ( $A_\ell$ ).

O volume é indicado por ( $V$ ).

A altura do prisma será indicada por  $h$ .

$2P$  é o perímetro da base.

## Paralelepípedo reto-retângulo

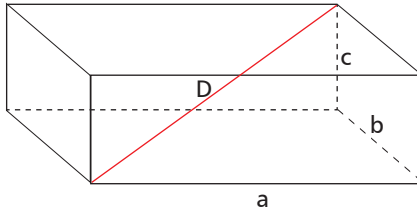
O paralelepípedo é um prisma em que todas as seis faces são retângulos.

Fórmulas:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

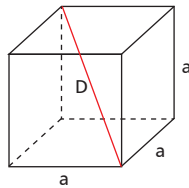
$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



### Cubo ou hexaedro regular

O cubo é o paralelepípedo reto-retângulo que possui todas as arestas congruentes.



Fórmulas:

$$V = a^3$$

$$A_t = 6a^2$$

$$D = a\sqrt{3}$$

### Cilindro circular reto

Um cilindro circular é reto quando a geratriz é perpendicular aos planos das bases.

Fórmulas:

$$V = \pi r^2 h$$

$$A_t = 2\pi r (r + h)$$

$$A_\ell = 2\pi r h$$

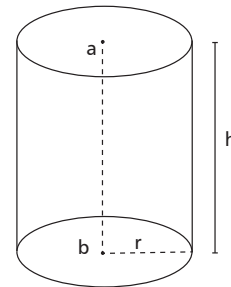
$$A_b = \pi r^2$$

Onde:

h = altura

r = raio da base

$\overline{ab}$  = eixo



### Secção meridiana de um cilindro

Secção meridiana é a secção que contém o eixo do cilindro. Se essa secção formar um quadrado, dizemos que o cilindro é equilátero.

Secção:

$$A_s = dh = 2rh$$

$$2p_s = 2d + 2h$$

Cilindro equilátero:

$$V = 2\pi r^3$$

$$A_t = 6\pi r^2$$

$$A_\ell = 4\pi r^2$$

$$A_b = \pi r^2$$

### Pirâmide

As pirâmides são poliedros com uma base poligonal e faces laterais triangulares unidas por um único ponto comum chamado de vértice.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

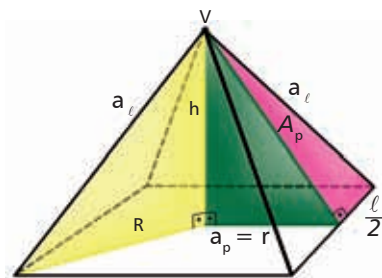
$$A_t = A_l + A_b$$



Exemplos de pirâmides.

## Pirâmides regulares

É a pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.



Elementos da pirâmide regular.

Relações entre os elementos da pirâmide regular:

$$A_p^2 = a_p^2 + h^2$$

$$a_l^2 = h^2 + R^2$$

$$a_l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + A_p^2$$

## Tetraedro regular

O tetraedro regular é uma pirâmide regular de base triangular em que todas as faces são triângulos equiláteros.

Fórmulas:

$$A_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_p = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

$$a_l = a$$

$$A_t = a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$a_p = \frac{l \sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a \sqrt{6}}{3}$$

Onde,

$a_p$  é o apótema da base

$h$  é a altura da pirâmide

$a_b$  é a aresta da base

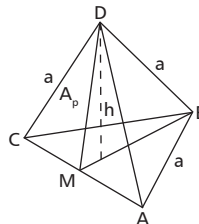
$a_l$  é a aresta lateral

$A_p$  é o apótema da pirâmide

$A_b$  é a área da base

$A_t$  é a área total

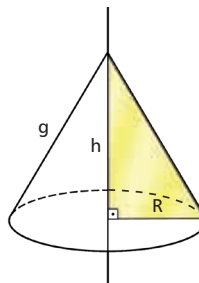
$V$  é o volume do tetraedro



## Cone circular reto

Um cone circular é reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base.

$$h^2 + r^2 = g^2$$



Cone de revolução.



Relações dos elementos do cone:

Fórmulas:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A_t = \pi r(r + g)$$

$$A_\ell = \pi r g$$

$$A_b = \pi r^2$$

### Secção meridiana de um cone

Secção meridiana é a secção que contém o eixo do cone.

Se essa secção formar um triângulo equilátero, dizemos que o cone é equilátero, então  $g = d = 2r$ , teremos as seguintes fórmulas:

$$A_s = \frac{dh}{2} = rh$$

$$2p_s = d + 2g$$

no caso da secção e,

$$V = \frac{2\pi r^3}{3}$$

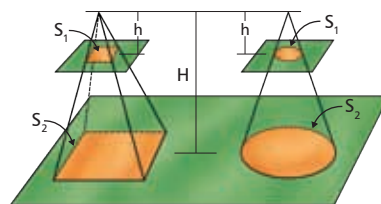
$$A_t = 3\pi r^2$$

$$A_\ell = 2\pi r^2$$

$$A_b = \pi r^2$$

no caso do cone equilátero.

### Tronco de pirâmide e tronco de cone



### Razões entre áreas/volumes

Ao interceptar uma pirâmide por um plano paralelo à base obtemos duas pirâmides semelhantes. Obtemos as seguintes relações:

$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right) = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

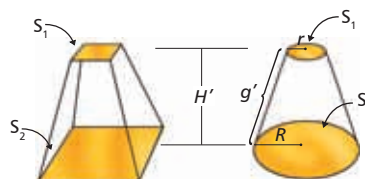
$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$

As áreas e volumes abaixo são referentes aos troncos de cone e pirâmide retos:

$$S_t = S_1 + S_2 + S_\ell$$

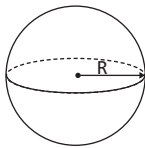
$$V = \frac{H'}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

$$V = \frac{\pi H'}{3} (r^2 + R^2 + rR)$$



Já a área lateral pode ser obtida nas pirâmides através das áreas dos trapézios e do cone através da equação  $\pi g'(r + g)$ , onde  $g'$  é a nova geratriz.

## Esfera



Fórmulas:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

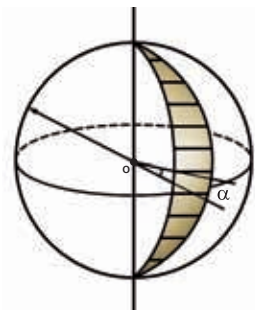
$$A_t = 4\pi R^2$$

### Partes da esfera

- Área do fuso:

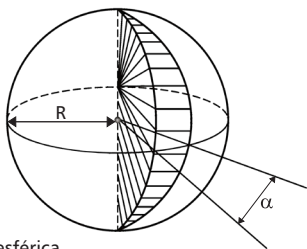
$$S_f = 2\alpha R^2 \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

$$S_f = \frac{2\alpha R^2}{90^\circ} \quad (\alpha \text{ em graus})$$



Fuso esférico.

- Volume da cunha esférica:

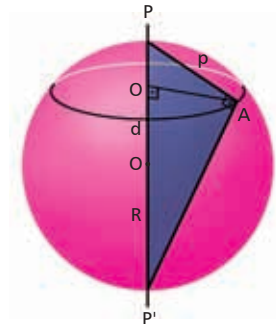


Cunha esférica.

$$V_c = \frac{2\alpha r^3}{3} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

$$V_c = \frac{\alpha \pi r^3}{270^\circ} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

- Distância polar  $p$  de um círculo da esfera é a distância de qualquer ponto desse círculo ao respectivo polo:

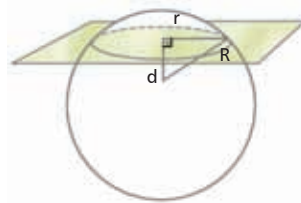


$$p = \sqrt{2R \cdot (R - d)}$$

$$\text{no equador} \rightarrow p = R\sqrt{2} \quad (d = 0)$$

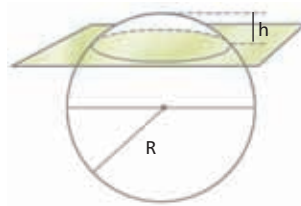
- Secção de uma esfera:

$$d^2 + r^2 = R^2$$

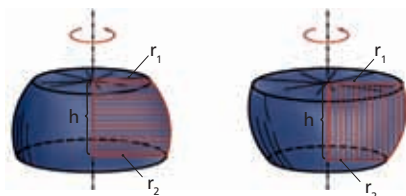


- Área da calota esférica:

$$S_c = 2\pi rh$$

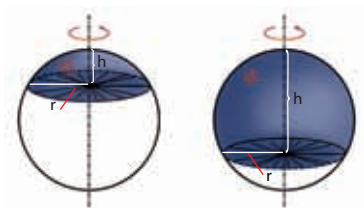


- Volume do segmento esférico de duas bases:



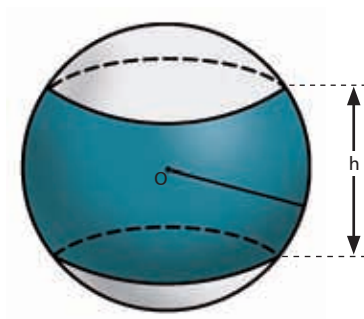
$$V = \frac{rh}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

- Volume do segmento esférico de uma base:



$$V = \frac{rh}{6} (3r^2 + h^2)$$

- Volume da zona esférica:

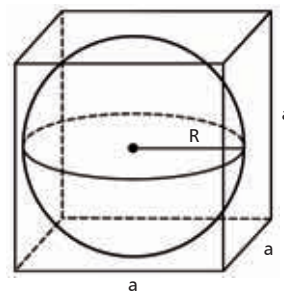


$$S_z = 2\pi rh$$

## Sólidos inscritos e circunscritos

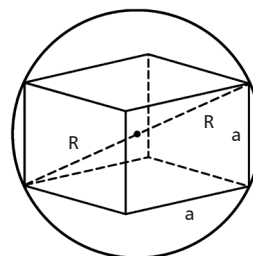
- Cubo circunscrito à esfera

$$a = 2r$$



- Cubo inscrito na esfera

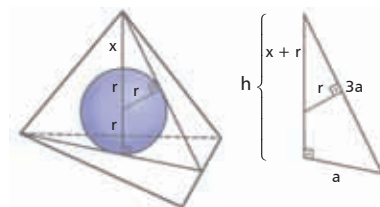
$$a = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$



- Tetraedro regular circunscrito a uma esfera

$$h = 4r$$

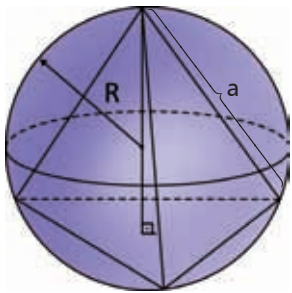
$$h = 2r\sqrt{6}$$



- Tetraedro regular inscrito a uma esfera

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

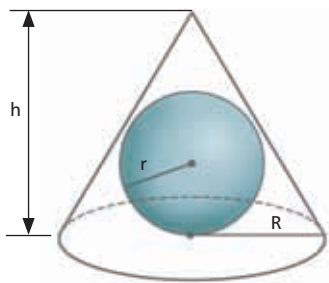
$$a = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$$



- Cone equilátero circunscrito a uma esfera

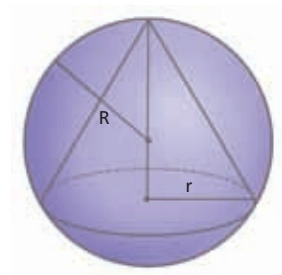
$$h = 3r$$

$$R = r\sqrt{3}$$



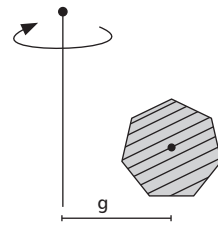
- Cone inscrito a uma esfera

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$



## Teorema de Guldin

O teorema de Guldin é um teorema utilizado para calcularmos o volume de um sólido de rotação que não tenha uma das formas conhecidas, ou no caso, quando uma partição em várias partes tornar-se muito trabalhosa.



$$V = 2\pi Sg$$

Onde,

$g$  = distância do centro de gravidade do objeto até o eixo considerado

$s$  = área da figura plana a ser rotada

Exemplo:

Calcule a que distância do centro fica o centro de gravidade de meia circunferência. Rotacionando uma semicircunferência em torno de um eixo que contenha o diâmetro, temos:

$$V = 2\pi Sg$$

Como o sólido gerado é uma esfera e  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$  e  $S = \frac{\pi r^2}{2}$  então,

$$g = \frac{4r}{3\pi}$$

## Números complexos

### Unidade imaginária

Devido à necessidade de se obter solução para todas as equações polinomiais, surgiu a representação de raízes de índice par de número negativo.

Unidade imaginária  $i$  é tal que:

$$i^2 = -1$$

Exemplo:

Resolver a equação  $x^2 - 4x + 5 = 0$

Utilizando a fórmula resolvente de um trinômio do 2.º grau obtemos:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Delta = -4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

onde o conjunto solução dentro do conjunto dos números complexos é:

$$S = \{2 + i, 2 - i\}$$

## Forma algébrica

Todo número complexo  $Z$  pode ser escrito da forma  $z = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  números reais, onde  $a$  é denominada parte real do complexo e  $b$  é a parte imaginária de  $z$ .

Se  $z = bi$ , dizemos que o complexo é imaginário puro.

Se  $z = a$ , dizemos que o complexo é real.

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais e imaginárias forem iguais

## Adição e subtração

Na adição (ou subtração) de números complexos na forma  $z = a + bi$ , somam-se as partes reais e imaginárias, respectivamente.

Exemplo:

Dados  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 3 - 2i$ , calcule

a)  $z_1 + z_2$

$$1 + i + 3 - 2i = 1 + 3 + i - 2i = 4 - i$$

b)  $z_1 - z_2$

$$1 + i - (3 - 2i) = 1 - 3 + i + 2i = -2 + 3i$$

## Multiplicação

Usamos a propriedade distributiva da multiplicação.

Exemplo:

Dados  $z_1 = 1 - i$  e  $z_2 = 3 - 2i$ , calcule  $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i) \cdot (3 - 2i) =$$

$$3 - 2i - 3i + 2i^2 =$$

$$3 - 2i - 3i - 2 =$$

$$1 - 5i$$

## Divisão

Dado um número complexo  $z = a + bi$ , definimos como conjugado desse número complexo o complexo  $\bar{z} = a - bi$ . Para efetuar a divisão de dois números complexos, basta multiplicar o numerador e o denominador da divisão pelo complexo conjugado do denominador.

Exemplo:

Dados  $z_1 = 3 + 5i$  e  $z_2 = 1 - 2i$ , determine

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} =$$

$$\frac{3 + 6i + 5i + 10i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} = -\frac{7}{5} + \frac{11i}{5}$$

## Potências de i

Potência de expoente natural da unidade imaginária:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

Observe que as potências formam uma sequência que se repete a cada quatro elementos, logo o valor de uma potência qualquer  $i^n$  pode ser determinada por  $i^r$ , onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4.

Exemplo:

$$i^{775} = i^3 = -i \text{ (pois o resto de 775 dividido por 4 é 3)}$$

## Forma trigonométrica

### Plano de Argand-Gauss

A todo número complexo podemos relacionar um ponto no plano de Argand-Gauss que é um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, onde o eixo horizontal representa a parte real do complexo e o eixo vertical representa a parte imaginária do complexo. A esse ponto damos o nome afixo.

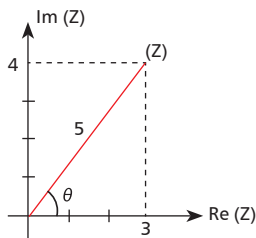
### Módulo de um complexo

O módulo de um número complexo  $|z|$  é definido como a distância do afixo desse complexo à origem do plano de Argand-Gauss. O módulo de um complexo é determinado por:

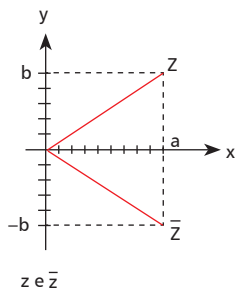
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z = 3 + 4i$$



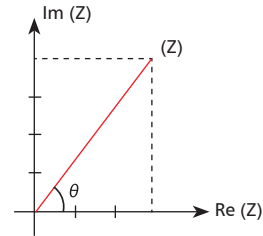
$z$  e  $\bar{z}$

## Forma trigonométrica

### Argumento

Todo número complexo forma um ângulo com o eixo da parte real no sentido anti-horário como demonstrado a seguir. Esse ângulo é chamado argumento.

Podemos utilizar as relações a seguir:



$$\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{|z|}$$

A partir do argumento  $\theta$  e do módulo de um número complexo  $z = a + bi$ , é possível representar esse número usando uma notação trigonométrica.

$$z = |z| (\cos \theta + i \text{sen } \theta)$$

ou

$$z = \rho (\cos \theta + i \text{sen } \theta)$$

### Exemplo:

Escrever o complexo  $z = 3 + 3i$  na forma trigonométrica.

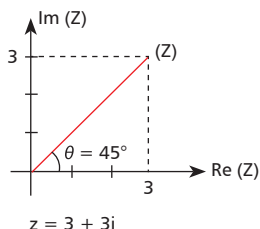
**Módulo:**

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$z = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen } \frac{\pi}{4} \right)$$



## Operações na forma trigonométrica

### Multiplicação e divisão

Dados  $z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

### Fórmulas de Moivre

#### 1.ª Fórmula de Moivre

Dado  $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  temos que:

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

#### 2.ª Fórmula de Moivre

Dado  $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  denominamos raiz  $n$ -ésima de  $z$  ao número complexo  $w = |w| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ , tal que:

$$w^n = z$$

Obtemos as raízes de um número complexo pela relação:

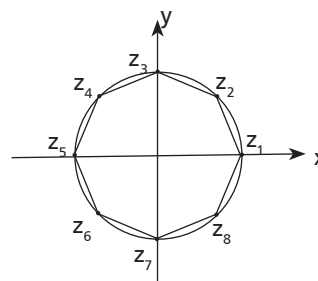
$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Onde  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . As raízes, quando representadas graficamente, formam um polígono regular de  $n$  lados.

### Exemplo:

Determine raízes oitavas do número complexo  $Z = 1$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 &= i \\ z_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_5 &= -1 \\ z_6 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_7 &= -i \\ z_8 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



Raízes oitavas da unidade 1.

## Polinômios

Denominamos polinômio a expressão:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

Os coeficientes do polinômio  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$  são números reais e os expoentes  $n, n-1, n-2, n-3, \dots$  são números naturais.

Grau de um polinômio é o maior expoente da variável com coeficiente não-nulo.

### Divisão

Dados dois polinômios  $P(x)$  e  $D(x)$  (não nulo), dividir  $P(x)$  por  $D(x)$  significa determinar outros dois polinômios  $Q(x)$  e  $R(x)$ , tais que:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Exemplo:

Dividir o polinômio  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$  pelo polinômio  $D(x) = x - 3$ . Usando o método das chaves temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline x^2 - x + 2 \\ \hline 2x - 2 \\ \hline -2x + 6 \\ \hline 4 \end{array} \\ -x^3 + 3x^2 & \text{quociente } q(x) \\ \hline -x^2 + 5x - 2 & \\ +x^2 - 3x & \\ \hline 2x - 2 & \\ -2x + 6 & \\ \hline 4 & \text{resto } (r) \end{array}$$

## Teorema do resto

O teorema do resto é utilizado no caso de o divisor  $D(x)$  ter o grau 1. O resto da divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$  é  $P(a)$ , onde  $a$  é a raiz de  $D(x)$ .

Exemplo:

Determine o resto da divisão de  $P(x) = x^3 + 7x^2 - 2x + 1$  por  $D(x) = x + 3$

$$D(x) = 0 \iff x = -3$$

$$P(-3) = (-3)^3 + 7(-3)^2 - 2(-3) + 1$$

$$P(-3) = 43 \Rightarrow r(x) = 43$$

## Dispositivo prático de Briot-Ruffini

O dispositivo prático de Briot-Ruffini consiste na obtenção do quociente e do resto de uma divisão de um polinômio qualquer por um polinômio do tipo  $x + \alpha$ , utilizando apenas os coeficientes do dividendo e a raiz do divisor, através do procedimento a seguir:

$-\alpha$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
		$b_0\alpha$	$b_1\alpha$	$b_2\alpha$	...	$b_{n-2}\alpha$	$b_{n-1}\alpha$
	$a_0$	$a_1 + b_0\alpha$	$a_2 + b_1\alpha$	$a_3 + b_2\alpha$	$\vdots$	$a_{n-1} + b_{n-2}\alpha$	$a_n + b_{n-1}\alpha$

Exemplo:

Calcular o quociente da divisão de  $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1$  por

2	5	0	-3	1	-1
		5 . 2 + 0	10 . 2 - 3	17 . 2 + 1	35 . 2 - 1
	5	10	17	35	69

Onde:

$$Q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 17x + 35$$

## Equações polinomiais

Uma equação polinomial é uma equação do tipo  $P(x)=0$ , onde  $P(x)$  é um polinômio de grau  $n$ ,  $n \geq 1$ . No conjunto dos números complexos toda equação tem pelo menos uma raiz (real ou complexa).

## Representação fatorada

Toda equação polinomial de grau  $n(n \geq 1)$  pode ser escrita de forma fatorada única com  $n$  fatores da forma:

$$a_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = 0$$

onde  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  são as raízes de  $P(x)=0$ .

Exemplo:

Forme um polinômio cujas raízes são  $-2$ ,  $1$  e  $0$ .

$P(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ , atribuindo um valor para  $a_0$  temos:

$$a_0 = 1, r_1 = -2, r_2 = 1 \text{ e } r_3 = 0 \text{ temos:}$$

$$P(x) = 1(x - 1)(x + 2)(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

## Multiplicidade de uma raiz

É o número de vezes que um número é raiz de um polinômio  $P(x)$ .

Exemplo:

Resolver a equação

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$$

sabendo que  $3$  é raiz dupla (aparece duas vezes) da equação.

Utilizando o dispositivo de Ruffini, vamos reduzir o grau do polinômio para  $2$ .

3	1	-7	13	3	-18
3	1	-4	1	6	0
	1	-1	-2	0	

Agora basta resolver a equação  $x^2 - x - 2 = 0$ . Logo, as raízes são  $-1$ ,  $2$  e  $3$ (dupla) e o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:



$$P(x) = 1(x + 1)(x - 2)(x - 3)^2$$

## Raízes complexas

Se um complexo  $z = a + bi$  é raiz de um polinômio  $P(x)$  de coeficientes reais, então seu conjugado  $\bar{z} = a - bi$  também é raiz desse polinômio.

**Exemplo:**

Determine um polinômio  $P(x)$  com coeficientes reais que tenha raízes 2,  $2i$ ,  $1 + i$ .

**Solução:**

Se  $2i$  e  $1 + i$  são raízes, então  $-2i$  e  $1 - i$  também são. Podemos escrever o polinômio da seguinte maneira:

$$P(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5)$$

Fazendo  $a_0 = 1$  e utilizando as raízes dadas temos:

$$P(x) = 1(x - 2)(x - 2i)(x - 1 - i)(x + 2i)(x - 1 + i)$$

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 24x - 16$$

## Raízes racionais

Se uma fração racional irredutível  $\frac{p}{q}$  for raiz de uma equação algébrica de grau  $n$  de coeficientes inteiros, então  $p$  é divisor de  $an$  e  $q$  é divisor de  $a_0$ .

**Exemplo:**

Determine o conjunto das raízes racionais da equação:

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

**Solução:**

Da equação dada, temos  $a_n = 2$  e  $a_0 = 3$ . Então, os possíveis valores de  $p$  são  $\{-1, 1, -2, 2\}$  e os possíveis valores de  $q$  são  $\{-1, 1, -3, 3\}$ . Portanto, os valores de  $\frac{p}{q}$  são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Fazendo a verificação temos que:

$$S = \left\{ -2, \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

## Relações de Girard

São fórmulas matemáticas que relacionam as raízes de uma equação algébrica com seus coeficientes.

3.º grau raízes =  $r_1, r_2, r_3$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 = \frac{a_2}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

4.º grau raízes =  $r_1, r_2, r_3, r_4$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_3 \cdot r_4 = \frac{a_2}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + \dots + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = -\frac{a_3}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = -\frac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

**Exemplo:**

Seja  $a, b$  e  $c$  as raízes da equação  $x^3 - 11x + x - 3 = 0$ , calcular  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

**Solução:**

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc}$$

Como  $ab + ac + bc = \frac{a_2}{a_0}$  e  $abc = -\frac{a_3}{a_0}$  temos que:

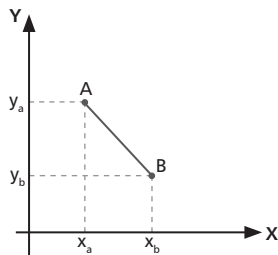
$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{\frac{a_2}{a_0}}{-\frac{a_3}{a_0}} = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{3}$$

## Geometria analítica

### Distância entre dois pontos e ponto médio

Dados dois pontos  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$ , distância entre eles é dada por:

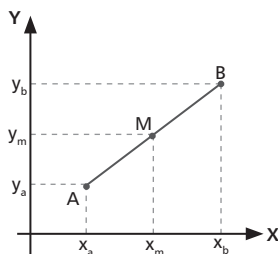
$$d_{A,B} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$



Distância entre dois pontos.

## Ponto médio de um segmento

$$M = \left( \frac{x_b + x_a}{2}, \frac{y_b + y_a}{2} \right)$$



Exemplo:

Os vértices de um triângulo são os pontos  $A(0,4)$ ,  $B(2,-6)$  e  $C(-4,2)$ . Calcular o comprimento da mediana referente ao vértice A.

Solução:

Primeiro vamos determinar o ponto médio do lado BC:

$$M_{BC} = \left( \frac{2 - 4}{2}, \frac{-6 + 2}{2} \right) = (-1, -2)$$

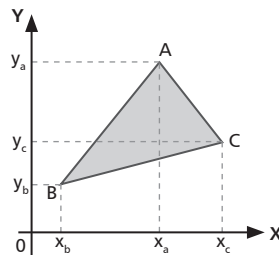
Agora basta determinar a distância entre A e  $M_{BC}$

$$d_{M,A} = \sqrt{[0 - (-1)]^2 + [4 - (-2)]^2} = \sqrt{37}$$

## Triângulo

Dados três pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$ , distintos e não-colineares, a área do triângulo formado por eles é dada por:

$$S = \frac{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

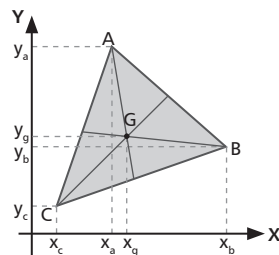


Área de um triângulo.

## Baricentro (ou centro de gravidade)

Dados três pontos não-colineares, o baricentro do triângulo formado por eles é dado por:

$$G = \left( \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)$$



Baricentro do triângulo.

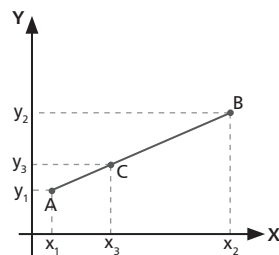
## Reta

### Estudo analítico da reta

Condição de alinhamento de três pontos.

Dados três pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$ , são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Alinhamento de três pontos.

## Equações da reta

Equação de uma reta dado o ponto  $A(x_a, y_a)$  e o coeficiente angular  $m$ :

$$(y - y_a) = m(x - x_a)$$

Equação reduzida da reta:

$$y = mx + n$$

Equação geral da reta:

$$Ax + By + C = 0$$

Onde,

$$m = \frac{-A}{B}$$

$$n = \frac{-C}{B}$$

Equação segmentária da reta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

com  $p \cdot q \neq 0$

Onde  $a$  é a abscissa do ponto de intersecção da reta com o eixo  $x$  e  $b$  é a ordenada do ponto de intersecção com o eixo  $y$ .

## Coeficiente angular da reta

O coeficiente angular  $m$  de uma reta não-vertical é numericamente igual à tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas, no sentido anti-horário.

Determinação do coeficiente angular  $m$ :

1.º Quando o ângulo é conhecido.

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

2.º Quando conhecemos dois pontos distintos da reta.

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

3.º Quando conhecemos a equação geral da reta (neste caso basta colocar a equação na forma reduzida).

## Posições relativas entre duas retas

Existem três posições relativas entre duas retas:

- Paralelas: duas retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.
- Coincidentes: duas retas serão iguais se, e somente se, seus coeficientes angulares e seus coeficientes lineares forem iguais.
- Concorrentes: duas retas serão concorrentes se seus coeficientes angulares forem diferentes.

No caso delas serem concorrentes, pode ainda acontecer de serem perpendiculares. Neste caso:

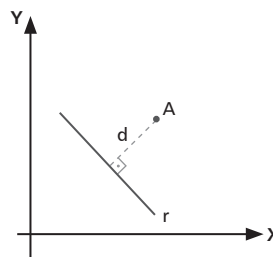
$$m_a \cdot m_b = -1$$

Onde  $m_a$  é o coeficiente angular da reta  $a$  e  $m_b$  é o coeficiente angular da reta  $b$ .

## Distância entre ponto e reta

Se quisermos saber a distância entre um ponto  $A(x_a, y_a)$  e uma reta  $Ax + By + C = 0$ , basta utilizarmos a equação a seguir:

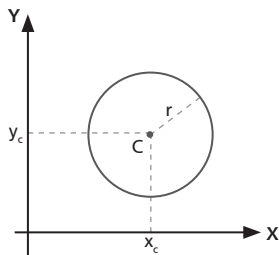
$$d = \left| \frac{Ax_a + By_a + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



## Circunferência

### Estudo analítico da circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo dado.



A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

A equação geral da circunferência é:  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ , onde

$$x_c = -\frac{D}{2}$$

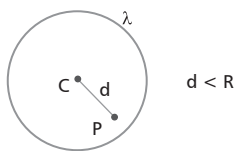
$$y_c = -\frac{E}{2}$$

$$F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

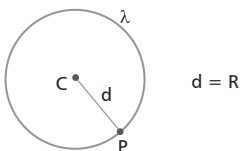
## Posições relativas entre ponto e circunferência

Existem três posições relativas entre um ponto  $p(x_0, y_0)$  e uma circunferência  $\lambda$  de raio  $R$ .

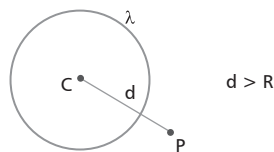
- É interno à circunferência:



- Pertence à circunferência:



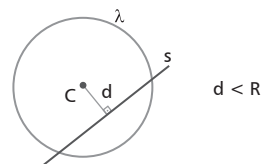
- É externo à circunferência:



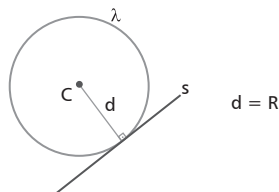
## Posições relativas entre ponto e circunferência

Existem três posições relativas entre uma reta  $S: ax + b = 0$  e uma circunferência de raio  $r$ . São elas:

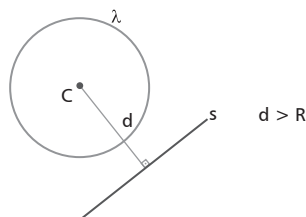
- S é secante à circunferência:



- S é tangente à circunferência:



- S é externa à circunferência:

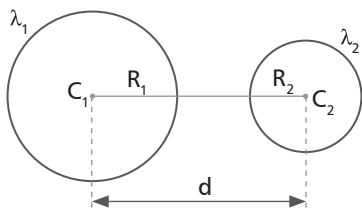


## Posições relativas de duas circunferências

Sejam duas circunferências  $\lambda_1$  de raio  $R_1$  e  $\lambda_2$  de raio  $R_2$  e  $d$  a distância entre os centros. As possíveis posições relativas entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são:

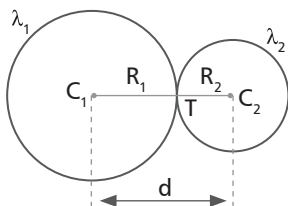
- Exteriores:  $d > R_1 + R_2$

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são disjuntas elas não têm ponto comum.



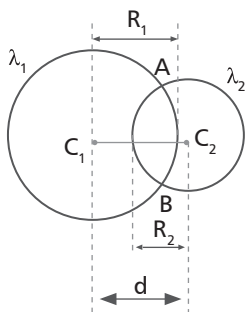
- Tangentes exteriores:  $d = R_1 + R_2$

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são tangentes entre si, elas têm um único ponto em comum.

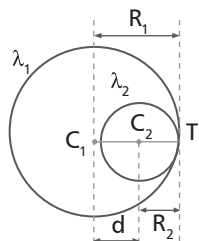


- Secantes:  $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

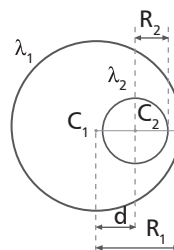
Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são secantes entre si, elas têm dois pontos comuns.



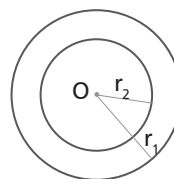
- Tangentes interiores:  $d = |R_1 - R_2|$



- Interiores:  $d < R_1 + R_2$



- Concêntricas:  $d = 0$



## Elipse

Dados dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  de um plano tal que  $F_1F_2 = 2c \neq 0$ , chamaremos de elipse o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  é a constante  $2a > 2c$ .

Principais elementos da elipse:

$F_1F_2 \rightarrow$  focos

$O \rightarrow$  centro

$A_1A_2 \rightarrow$  eixo maior

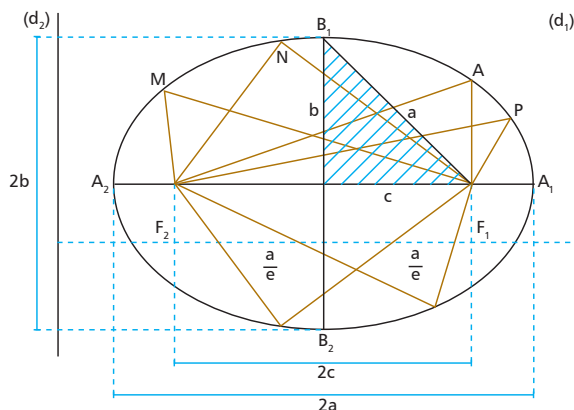
$B_1B_2 \rightarrow$  eixo menor

$2c \rightarrow$  distância focal

$2a \rightarrow$  medida do eixo maior

$2b \rightarrow$  medida do eixo menor

$\frac{p}{q} \rightarrow$  excentricidade



A excentricidade de uma elipse é chamada de  $e$  e pode ser calculada da seguinte forma:

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

As diretrizes da elipse são duas retas perpendiculares ao eixo suporte do eixo maior distando  $\frac{a}{e}$  do centro da curva.

### Equação da elipse

A equação reduzida da elipse para o caso do centro ser a origem do sistema e o eixo maior estiver sobre o eixo horizontal:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Caso o eixo maior esteja sobre o eixo vertical a equação terá o seguinte formato:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

No caso de o centro não ser a origem, mas o ponto a equação será assim (com eixo maior paralelo ao eixo horizontal essa será a equação:

$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1$$

A equação geral é obtida expandindo-se a expressão anterior.

### Hiperbole

Dados dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  de um plano tal que  $F_1F_2 = 2c \neq 0$ , chamaremos de hipérbole o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  é a constante  $2a < 2c$ .

Principais elementos da hipérbole:

$F_1$  e  $F_2 \rightarrow$  focos

$O \rightarrow$  centro

$A_1A_2 \rightarrow$  eixo real ou transverso

$B_1B_2 \rightarrow$  eixo imaginário

$2c \rightarrow$  distância focal

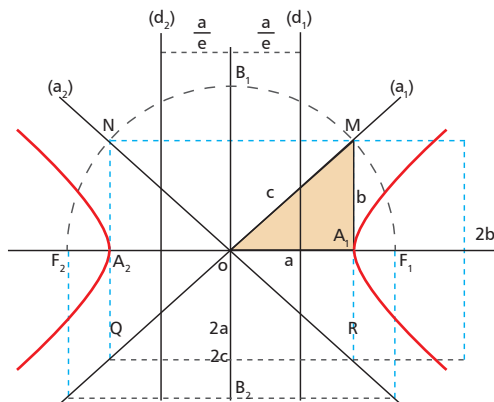
$2a \rightarrow$  medida do eixo real

$2b \rightarrow$  medida do eixo imaginário

$\frac{c}{a} \rightarrow$  excentricidade

Relação notável:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



A excentricidade de uma elipse é chamada de  $e$  e pode ser calculada da seguinte forma

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

As diretrizes  $d_1$  e  $d_2$  da elipse são duas retas perpendiculares ao eixo suporte do eixo maior distando  $\frac{a}{e}$  do centro da curva.

Assíntotas são duas retas que passam pelo centro da hipérbole e posições-limites das tangentes a ela quando os pontos de contato afastam-se indefinidamente. As equações das assíntotas são:

$$r = \pm \frac{b}{a}$$

## Equação da hipérbole

Vamos escrever a equação reduzida da elipse para o caso do centro ser a origem do sistema e o eixo real estiver sobre o eixo horizontal

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Caso o eixo real esteja sobre o eixo vertical a equação terá o seguinte formato:

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Caso isso aconteça, as assíntotas serão

$$r = \pm \frac{b}{a}$$

No caso de o centro não ser a origem, mas o ponto, a equação será assim (com eixo real paralelo ao eixo horizontal essa será a equação:

$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1$$

A equação geral é obtida expandindo-se a expressão anterior.

## Parábola

Dado um ponto F e uma reta d de um plano, tal que  $F \notin d$  e seja p a distância entre F e d. Denominamos parábola o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a mesma distância de F e d.

Principais elementos:

F → foco

d → diretriz

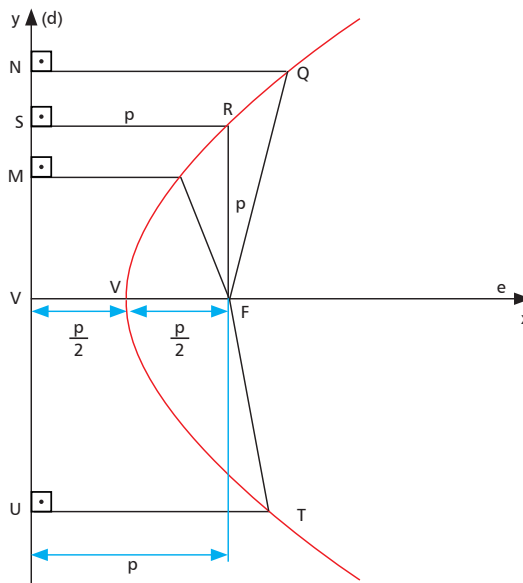
p → parâmetro

V → vértice

VF → eixo de simetria

Relação notável:

$$VF = \frac{p}{2}$$



A reta fixa (d) é a diretriz, e e o eixo que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.

Da definição de parábola concluímos que:

FT = UT; FP = MP; FR = SR = p; FQ = NQ; ...

## Equações da parábola

A equação reduzida da parábola no caso do eixo ser horizontal e vértice V (0, 0), é:

$$y^2 = 2px$$

Para esta situação a equação da diretriz é:

$$x = -\frac{p}{2}$$

A equação reduzida da parábola no caso do eixo ser vertical e vértice V (0, 0), é:

$$x^2 = 2py$$

Para esta situação a equação da diretriz é:

$$y = -\frac{p}{2}$$

As equações gerais da parábola no caso do vértice pertencer a um ponto  $V = (x_0, y_0)$  qualquer são:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \rightarrow \text{com eixo horizontal}$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \rightarrow \text{com eixo vertical}$$

## Proporcionalidade

### Divisões em partes diretamente proporcionais

Significa dividir de forma que cada uma das partes seja proporcional aos números dados.

**Exemplo:**

*Dividir 10 em partes proporcionais a 7, 8 e 5:*

**Solução:**

*O número 100 deve ser dividido em 20 partes (8 + 7 + 5). Como isso equivale a 5, os números seriam 8 . 5, 7 . 5 e 5 . 5 = 40, 35 e 25.*

### Regra de três

- Grandezas diretamente proporcionais: duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra aumenta na mesma proporção.
- Grandezas inversamente proporcionais: duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma versão.

**Exemplo 1:**

*Com 14 litros de tinta podemos pintar uma parede de 49m<sup>2</sup>. Quantos litros serão necessários para uma parede de 42m<sup>2</sup>?*

**Solução:**

*Como são grandezas diretamente proporcionais, podemos utilizar a regra de três:*

$$\frac{14}{49} = \frac{x}{42}$$

Logo,  $x = 12$  litros.

**Exemplo 2:**

*Certo carro correndo a uma velocidade de 140km/h faz determinado trajeto em 3min. Quanto tempo o mesmo demoraria se sua velocidade fosse de 210km/h.*

**Solução:**

*Como são grandezas inversamente proporcionais, podemos utilizar a regra de três:*

$$\frac{140}{210} = \frac{x}{3}$$

Logo  $x = 2$  minutos

### Porcentagem

Porcentagem é uma razão centesimal representada pelo símbolo % (por cento).

**Exemplo:**

$$8\% = \frac{8}{100}$$

*Calcular 8% de 700*

**Solução:**

*Por regra de três temos:*

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{700}$$

Logo, 8% de 700 é 56.

## Matemática Financeira

### Juros simples

O regime de juros simples é aquele no qual os juros incidem sempre sobre o capital inicial:

$$j = c . i . t$$

$j$  = juros

$c$  = capital inicial

$i$  = taxa

$t$  = número de períodos



## Exemplo:

Calcule o juro simples de R\$18.000,00, durante três meses, a uma taxa de 8% mensal.

$$j = c \cdot i \cdot t = 18\,000 \cdot 0,08 \cdot 3 = 4\,320$$

Os juros são R\$4.320,00.

## Juros compostos

O regime de juros compostos é aquele em que, ao final de cada período, os juros do período anterior são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$i$  = taxa

$c$  = capital inicial

$n$  = número de períodos

$M$  = montante após o período  $n$

## Exemplo:

Calcule os juros compostos de R\$18.000,00, durante 3 meses, a uma taxa de 8% ao mês.

## Solução:

Primeiro calcularemos o montante obtido após três meses.

$$M = C \cdot (1 + i)^n = 18\,000(1,08)^3 = R\$22.674,82$$

Os juros são:

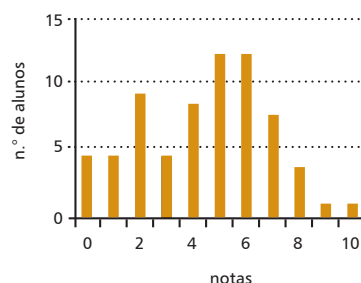
$$J = M - C = 22\,674,82 - 18\,000 = R\$4.674,82$$

## Exemplo:

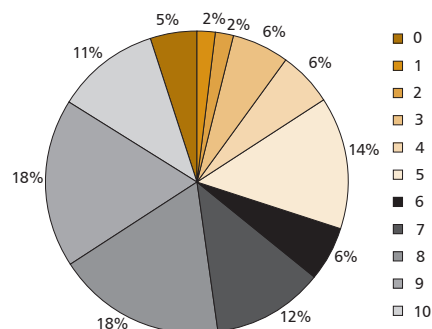
Em uma turma de 65 alunos as notas (de 0 a 10) de uma determinada disciplina ficaram distribuídas como segue:

Nota ( $x_i$ )	Frequência absoluta $f_i$	Frequência relativa $f_r$	Frequência acumulada $f_a$
0	4	4/65	4
1	4	4/65	8
2	9	9/65	17
3	4	4/65	21
4	8	8/65	29
5	12	12/65	41
6	12	12/65	53
7	7	7/65	60
8	3	3/65	63
9	1	1/65	64
10	1	1/65	65
$\Sigma$	65	1	---

A representação do exemplo anterior em um gráfico de colunas fica assim:



Representação gráfica em setores:



## Estatística

## Frequências

- Absoluta: a frequência absoluta representa a quantia de vezes que determinado evento aparece num conjunto de dados.
- Relativa: relaciona a frequência absoluta com o total de eventos.
- Acumulada: representa o número de eventos acumulados até a classe considerada.

## Medidas de tendência central

### Mediana

Em um conjunto de  $k$  termos ordenados, o termo que ocupa a posição central é denominado mediana. Para  $k$  ímpar a posição da mediana é  $\frac{k+1}{2}$  e para  $k$  par a mediana é a média aritmética dos dois termos que estiverem no centro.

O número de termos do exemplo anterior é 65, portanto, a posição da mediana é o termo de posição  $\frac{65+1}{2} = 33$  e, ordenando os elementos temos que a 33.<sup>a</sup> nota é 5.

### Média ( $\bar{x}$ )

A média de um conjunto de dados é a razão entre o somatório de todos os elementos e o número de elementos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

No exemplo anterior a média é

$$\bar{x} = \frac{0,4 + 1,4 + 2,9 \dots + 9,1 + 10,1}{65} = 4,46$$

### Moda

Em um conjunto de dados, a moda é o elemento que tem maior frequência. No exemplo anterior, existem duas modas, então, o conjunto é dito bimodal: as modas são 5 e 6.

## Medidas de dispersão

### Variância ( $s^2$ )

Dado um conjunto, chamamos de desvio a distância de um elemento até a média. A média aritmética dos quadrados de todos os desvios de uma amostra é chamada de variância.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

No exemplo anterior,

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(0 - 4,46)^2 + (1 - 4,46)^2 + \dots + (10 - 4,46)^2}{64}$$

$$S^2 = 5,59$$

### Desvio-padrão ( $s$ )

O desvio-padrão é o quadrado da variância.

$$s = \sqrt{s^2}$$

No exemplo anterior, o desvio-padrão é  $2,36 = \sqrt{5,59}$

### Outras médias

- Média aritmética ponderada: na média aritmética ponderada, cada um dos elementos tem um peso sobre a amostra.

Exemplo:

Um aluno tirou no boletim as notas 5; 5,5 e 7,5 em sua escola nos três trimestres letivos. Sabe-se que o peso dos dois primeiros trimestres é 3 e do último é 4 e que a média mínima para a aprovação é 6. O aluno foi aprovado?

Basta calcular a média ponderada:

$$\bar{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

Onde  $p_i$  é o peso do elemento

$$\bar{x}_p = \frac{5 \cdot 3 + 5,5 \cdot 3 + 7,5 \cdot 4}{10} = 6,15$$

Portanto, o aluno foi aprovado.

- Média harmônica simples: a média harmônica simples é o inverso da média aritmética dos inversos dos elementos.

No exemplo anterior desconsiderando os pesos, a média harmônica é:

$$\bar{h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

$$\bar{h} = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5,5} + \frac{1}{7,5}} = 5,82$$

Ou seja, o aluno não seria aprovado.

- Média harmônica ponderada: é o caso em que cada uma das parcelas tem um peso relativo à amostra total.

$$\bar{h}_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{x_i} \right)}$$

Onde  $p_i$  é o peso do elemento.

No exemplo anterior, a média seria:

$$\bar{h}_p = \frac{10}{\frac{3}{5} + \frac{3}{5,5} + \frac{4}{7,5}} = 5,95$$

Ou seja, o aluno não seria aprovado.

