Insper

Ciência dos Dados

Aula 21

Modelo de regressão linear

Insper | Instituto de Ensino e Pesquisa

Um particular problema

arquivo ipynb

Renda per capita (usado PIB per capita como proxy de renda per capita) tem alguma relação com a emissão de CO_2 produzido por um país?

Insper | Instituto de Ensino e Pesquisa

Os slides a seguir descrevem as características e cuidados com uma Análise de Regressão

Pesquise alguma referência bibliográfica para mais detalhes!!

Objetivo de uma Análise de Regressão

A presença ou ausência de **relação linear** pode ser investigada sob dois pontos de vista:

a) Quantificando a força dessa relação: correlação.

b) Explicitando a forma dessa relação: regressão.

Graficamente, a relação entre duas variáveis quantitativas pode ser feita via **Gráfico de Dispersão.**

Análise de regressão

"A coleção de ferramentas estatísticas que são usadas para modelar e explorar relações entre variáveis que estão relacionadas de maneira não determinística é chamada de análise de regressão."

Montgomery, D.C. e Runger, G.C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 6ª. Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

Análise de regressão

Objetivo: Explicar como uma ou mais variáveis se comportam em função de outra.

Variável dependente (resposta) - y: variável de interesse, cujo comportamento se deseja explicar.

Variável independente (explicativa) - x: variável ou variáveis que são utilizadas para explicar a variável dependente.

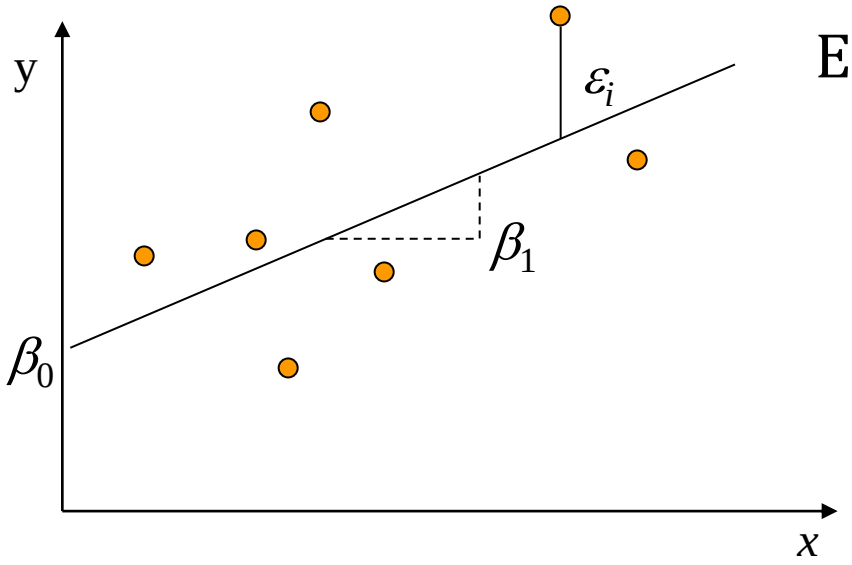
Modelo de regressão: equação (reta) que associa **y** e um ou vários **x**.

Insper | Instituto de Ensino e Pesquisa

Modelo de regressão simples

Teoria

Modelo de Regressão Linear Simples



$$E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Inclinação populacional

Intercepto populacional

Erro Aleatório

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Variável Dependente

Variável Independente

Método dos Mínimos Quadrados

Os valores populacionais de β_0 e β_1 são desconhecidos.

Para estimá-los, é necessário minimizar o resíduo que é dado pela diferença entre o valor verdadeiro de y e seu valor estimado $\hat{y}$, ou seja,

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i.$$

O método utilizado na estimação desses parâmetros é o método dos mínimos quadrados.

Logo, o método dos mínimos quadrados requer que consideremos a soma dos n resíduos quadrados, denotado por SQRes:

$$\text{SQRes} = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i \right)^2$$

Inferência em Análise de Regressão

Usualmente, uma das hipóteses em análise de regressão é avaliar a significância da regressão.

Ou seja,

H_0: $\beta_1 = 0$ ➔ não há relação entre x e Y

H_1: $\beta_1 \neq 0$ ➔ há relação entre x e Y

Para realizar esse teste de hipóteses, será necessário atribuir distribuição aos erros ε_i, além de outras suposições ao modelo.

Suposições do modelo linear simples

- Os **erros têm distribuição normal** com média e variância constante, ou seja,

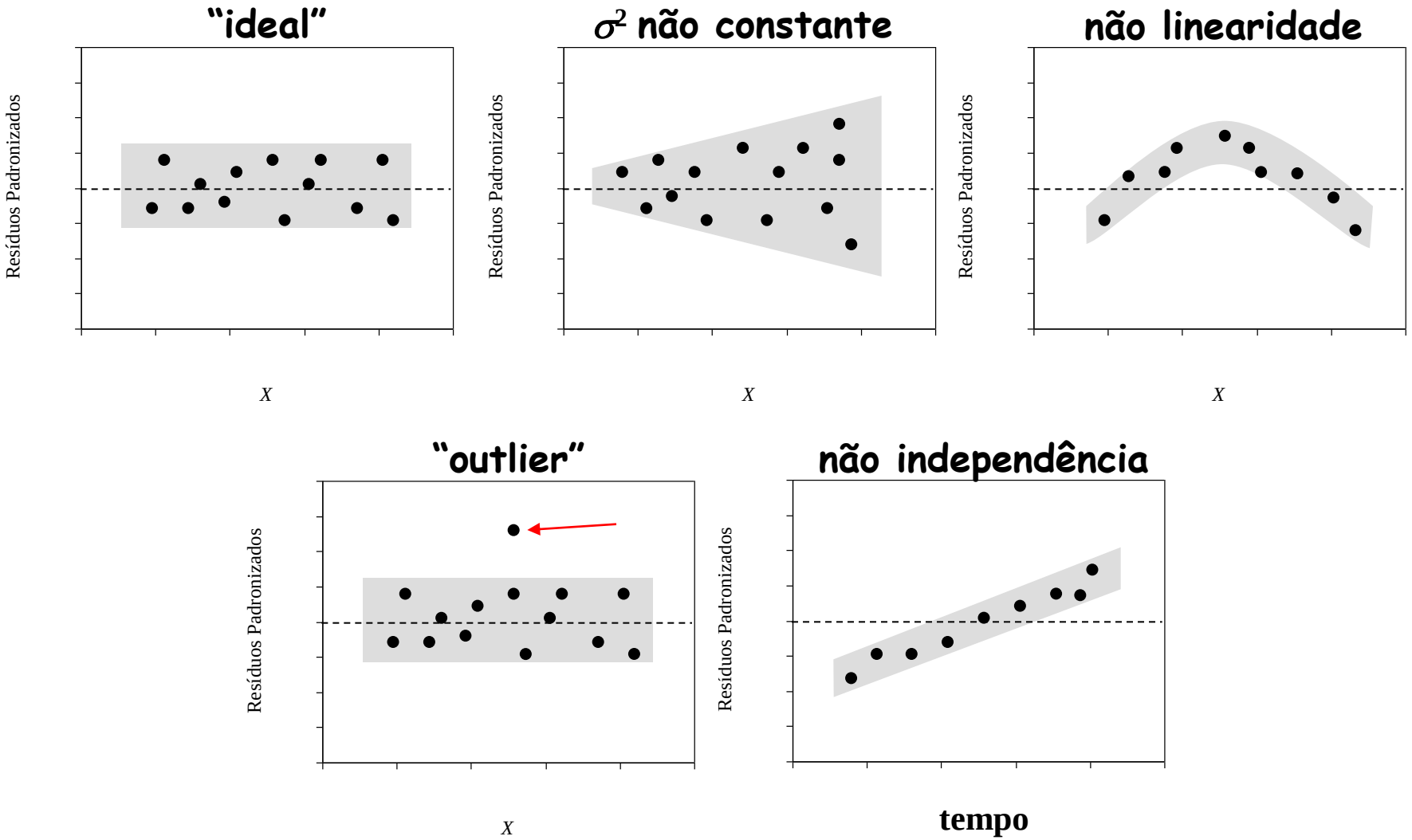
$$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2).$$

- Os **erros são independentes** entre si, ou seja,

$$\text{Corr}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$$

- **Modelo é linear nos parâmetros**.
- **Homocedasticidade**: $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ para qualquer $i = 1, \ldots, n$.

Análise de Resíduos



Insper | Instituto de Ensino e Pesquisa

Interpretação das estimativas dos coeficientes de um modelo de regressão

Modelos lineares nos coeficientes e nas variáveis

Modelo de regressão linear simples – Lin-Lin

Reta estimada:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

Interpretação do coeficiente linear estimado:

O intercepto é o valor previsto (esperado ou médio) para y quando $x = 0$.

Quando não fizer sentido zerar a variável x, o valor $\hat{\beta}_0$, por si só, não será muito interessante. E nem terá inferência.

Interpretação do coeficiente angular estimado:

De maneira geral, a cada variação Δx na variável explicativa x , $\hat{\beta}_1$ é a variação prevista (esperada ou média) na variável resposta.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta x}$$

Modelo de regressão linear simples – Lin-Lin

Reta estimada:

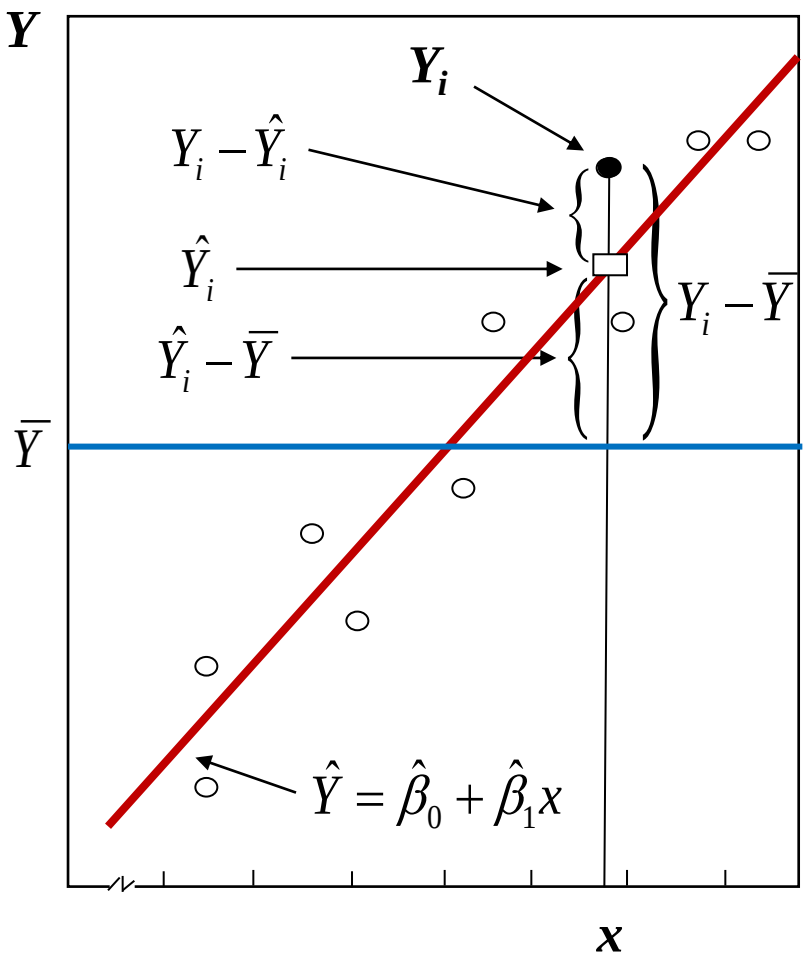
$$\widehat{Salario} = -0{,}90 + 0{,}54\, Educ$$

Interpretação do coeficiente angular estimado:

A cada um ano a mais de educação formal, a variação média no salário é de 0,54 dólar/hora.

Wooldridge, J. M. **Introdução à econometria.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

Qualidade do ajuste



$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\text{SQT} = \text{SQReg} + \text{SQRes}$$

$$R^2 = \frac{\text{SQReg}}{\text{SQT}} = \frac{\text{SQT} - \text{SQRes}}{\text{SQT}} = 1 - \frac{\text{SQRes}}{\text{SQT}}$$

Coeficiente de determinação

$$0 \le R^2 \le 1$$

Interpretação do Coeficiente de determinação: mede a fração da variação total de Y explicada pela regressão.

Insper

ATENÇÃO: Associação não é causalidade

Suponha que encontremos alta correlação entre duas variáveis A e B. Podem existir diversas explicações do porque elas variam conjuntamente, incluindo:

- Mudanças em outras variáveis causam mudanças tanto em A quanto em B.
- Mudanças em A causam mudanças em B.
- Mudanças em B causam mudanças em A.
- A relação observada é somente uma coincidência (**correlação espúria**). **CUIDADO!!**

Fonte: http://leg.ufpr.br/~silvia/CE003/node77.html