Ciência dos dados

SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Magalhães e Lima (7ª. Edição): Capítulo 5

Propriedades da Esperança

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias:

a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

b) $E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)$

Se X e Y são **independentes** ou **dependentes**, os resultados acima são sempre válidos!!

Propriedades da Variância

Sejam X e Y variáveis aleatórias:

a) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

b) $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

sendo $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Se <u>X e Y são **independentes**</u>, então

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Propriedades da Variância

Sejam a e b constantes e X e Y variáveis aleatórias:

a) $Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y)$

b) $Var(aX-bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) - 2abCov(X,Y)$

sendo $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Se X e Y são **independentes**, então

$$Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

$$Var(aX-bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)$$

Propriedades da Covariância

a. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

b. $\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\ \mathrm{Cov}(X,Y)$

c. Se X e Y forem **independentes**, então

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

ATENÇÃO:

Há casos particulares em que X e Y são dependentes, mas Cov(X,Y)=0. Ver Exercício 4 desta aula.

Exemplo 2

Em uma determinada loja de roupas, o preço médio da calça jeans é de R$ 118,00, com um desvio-padrão associado a essa variável de R$ 22,00.

a) Defina a variável aleatória X em termos do problema.

b) Uma mãe de trigêmeas entra nessa loja e deseja comprar uma calça jeans para cada filha, mas para evitar brigas, comprará todas iguais. Qual o gasto total esperado dessa mãe e respectivo desvio padrão?

c) Uma outra mãe de três filhas entra nessa loja e deseja comprar uma calça jeans para cada filha. Como suas filhas não têm gostos iguais, fará escolhas independentes e não necessariamente iguais. Qual o gasto total esperado dessa outra mãe e respectivo desvio padrão?

DEIXE TODOS OS RESULTADOS TEÓRICOS EXPLICITAMENTE DEMONSTRADOS NA SUA RESOLUÇÃO.

Propriedades da Esperança e Variância

Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias quaisquer, então

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

$$Var(X+Y+Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + \\ + 2Cov(X,Y) + 2Cov(X,Z) + 2Cov(Y,Z)$$

Propriedades da Esperança e Variância

Sejam X_1, X_2, ..., X_k variáveis aleatórias **independentes**, então

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_k) = \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{Var}(\mathrm{X}_k)$$

Exercícios

Exercício 1

Um processo industrial pode ser executado em duas etapas independentes. O tempo gasto em cada etapa segue uma distribuição com média de 5 horas e desvio-padrão de 10 horas.

Um engenheiro resolveu modificar o processo de produção fazendo com que seja executado numa única fase, cujo tempo de execução é o dobro da primeira etapa do processo atual.

Vale a pena adotar o processo proposto pelo engenheiro?

R: Atual: E(T) = 10 e DP(T) = 14,14
Novo: E(T) = 10 e DP(T) = 20