算法竞赛入门基础

电气信息系 计算机科学与技术17级 陈 巍

C、C++中常用函数和STL

第一部分 基础算法

1.1 快速排序

1.1.1 算法流程及时间复杂度分析

算法流程

1.确定排序对象，排序区间；（确定函数的形参）

2.确定分界点`x = q[(l + r) / 2]`,和需要递归处理的两个边界点`i = l - 1`,`j = r + 1`

3.循环处理分界点`x`两侧的不符合条件的数字交换处理

4.递归左右两个区间`[l, j]`和`[j + 1, r]`

时间复杂度

O($nlogn$)

1.1.2 题目及相关代码

题目：

[AcWing785.快速排序]

代码示例：

```
void quick_sort(int q[], int l, int r)
{
    if (l >= r) return ;     // 递归出口（排序完毕）
    // 确定分界点x和边界点ij
    int x = q[(l + r) / 2];
    int i = l - 1, j = r + 1;
    while (i < j)
    {
        do i++; while (q[i] < x);     // 找到x左侧不符合条件的值并记录下标i
        do j--; while (q[j] > x);    // 找到x右边不符合条件的值并记录下标j
        if (i < j) swap(q[i], q[j]);     // 交换x左右两侧的值
        else break;
    }
    // 递归处理
    quick_sort(q, l, j), quick_sort(q, j + 1, r);
}
```

简化版：

```
void quick_sort(int q[], int l, int r)
{
    if (l >= r) return ;

```

```
    int x = q[(l + r) / 2];
    int i = l - 1, j = r + 1;

    while (i < j)
    {
        while (q[++i] < x);
        while (q[--j] > x);
        if (i < r) swap(q[i], q[j]);
        else break;
    }

    quick_sort(q, l, j), quick_sort(q, j + 1, r);
}
```

注意：

排序的区间范围；

分解点的确定；

递归调用时使用的参数。

2.1.3 运用STL中的sort函数

```
#include <algorithm>    // include算法库之后才能够使用sort函数
sort(q, q + n); // q是待排序的数组,排序区间下标[0, n)；形参中q是数组的地址
/*
* 注意：必要时，定义 bool cmp() 或者 重载操作符 <
*/
```

2.1.4 相关题目

AcWing786.第K个数

1.2 归并排序

1.2.1 算法流程及时间复杂度分析

算法流程：

0.确定递归出口

1.划分（递归）。找到分解点`mid = (l + r) / 2`，然后根据分解点进行`递归划分`。

2.合并。

首先，确定三个参数`i`、`j`、`k`，其中`i = l`、`j = mid + 1`分别表示划分后的两个区间`[l, mid]`和`[mid + 1, r]`的起始下标，`k = 0`表示`tmp数组`的其实下标；

然后，比较划分后的两个数组中数值大小，按照升序存放到`tmp数组`中；

最后，将存放升序结果的`tmp数组`中的值，转存回原数组。

时间复杂度分析：

O($nlogn$)

1.2.2 题目及相关代码

题目：

AcWing787.归并排序

代码示例：

```
void merge_sort(int q[], int l, int r)
{
    // 递归出口
    if (l >= r) return ;

    // 划分
    int mid = (l + r) / 2;
    merge_sort(q, l, mid), merge_sort(q, mid + 1, r);

    // 归并
    int i = l, j = mid + 1;      // 划分后的两个需要进行比较的数组的起始位置的下标ij
    int k = 0;    // 数组tmp的起始下标k
    // 比较划分后的数组的下标对应的值大小，按照升序存到tmp中
    while (i <= mid && j <= r)
    {
        if (q[i] < q[j]) tmp[k++] = q[i++];
        else tmp[k++] = q[j++];
    }
    while (i <= mid)
    {
        tmp[k++] = q[i++];
    }
    while (j <= r)
    {
        tmp[k++] = q[j++];
    }
    // 将已经顺序排列后的tmp转存到原数组中
    for (i = l, j = 0; i <= r; ++i, ++j) q[i] = tmp[j];
}
```

注意：

递归出口；

先划分后合并。

1.2.3 相关题目

AcWing788.逆序对的数量

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 1e6 + 10;
int q[N];
int tmp[N];
int n;

LL merge_sort(int q[], int l, int r)
{
    if (l >= r) return 0;

    int mid = l + r >> 1;
```

```
    LL res = merge_sort(q, l, mid) + merge_sort(q, mid + 1, r);

    while (i <= mid && j <= r)
    {
        if (q[i] <= q[j]) tmp[k++] = q[i++];
        else
        {
            res += mid - i + 1;
            tmp[k++] = q[j++];
        }
    }

    while (i <= mid) tmp[k++] = q[i++];
    while (j <= r) tmp[k++] = q[j++];

    for (i = l, j = 0; i <= r; ++i, ++j) q[i] = tmp[j];

    return res;
}
int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0 ; i < n; ++i) scanf("%d", &q[i]);
    printf("%d\n", merge_sort(q, 0, n - 1));
}
```

1.3 二分法

1.3.1 整数二分

重点： 边界问题处理

本质：

二分和单调性没有直接的关系。只要满足`单调性`，我们就可以使用二分法；但是，二分法不仅仅适用于单调性的题目。

本质上是，区间上的性质。二分可以将区间一分为二，比如，左半边是满足性质的，右半边是不满足性质的。也就是，根据某种性质，将区间一分为二，一半满足性质，一半不满足性质，`用二分法寻找满足性质/条件的边界点`。

整数二分结果：

通过两种不同的二分，可以得到`左半边的右边界点`和`右半边的左边界点`。

求解`左半边的右边界点`：

我们要查找的`x`在符合条件的区间右边；

算法流程：

1）首先，找到当前区间的中间值`mid = (l + r + 1) / 2`；

2）然后，判断中间值`mid`是否满足性质/条件（区间的左半边）；

当中间值`mid`满足条件`(True)`的时候，说明中间值`mid`在左半边中的某一个位置；`左半边的边界点`一定在中间值`mid`的右边（`mid`可能符合条件，当前`mid`是可以取到边界点的），所以得到区间`[mid,r]`；更新区间：`l = mid`，更新后的区间正好是`[mid,r]`；

当中间值`mid`不满足条件`(False)`的时候，说明中间值`mid`在右半边的某一个位置；由于`mid`一定不在左半边（中间值`mid`一定不符合条件），所以我们得到区间`[l,mid-1]`；更新区间`[l, mid - 1]`;

如果查找的值`x`不存在，找到的则是`小于x的最大值`。

代码：

```
/*
    bool check(int mid) { ... }
*/
int binary_search(int l, int r)
{
    while (l < r)
    {
        int mid = (l + r + 1) >> 1; // int mid = (l + r + 1) / 2
        if (check(mid)) // 不写check()直接判断：if (q[mid] >= x)
            l = mid; // [mid, r]
        else
            r = mid - 1;  // [l, mid - 1]
    }
    return l;  // 小于等于x的最大值
}
```

思考：为什么`mid = (l + r + 1) / 2`?

求解`右半边的左边界点`：

我们要查找的`x`在符合条件的区间最左边；

算法流程：

1） 首先，找中间值`mid = (l + r) / 2`；

2） 然后，判断中间值`mid`是否满足性质/条件（`区间右半边`）；

当满足`(True)`条件时（mid在区间右半边），说明`mid`在`区间右半边的某一个位置`，这时`右半边的左边界点`在`mid`的左侧（可能被`当前的mid`取到）；那么更新后的区间为`[l,mid]`；更新`r = mid`；

当不满足`(false)`条件时（mid在区间左半边），说明mid在区间左半边的一个位置，这时`右半边的左边界点`在`mid`的右侧（不可能被`当前的mid`取到）;那么更新后的区间为`[mid+1,r]`；更新`l = mid + 1`。

如果查找的值x不存在，则返回`大于x的最小值`

代码示例：

```
/*
    bool check(int mid) { ... }
*/
int binary_search(int l, int r)
{
    while (l < r)
    {
        int mid = l + r >> 1; // int mid = (l + r) / 2;
        if (check(mid))
            r = mid;         // [l, mid]
        else
            l = mid + 1;     // [mid+1, r]
    }
    return l; // 大于等于x的最小值
```

```
}
```

1.3.1.1 两种二分的选择

方法：

首先，不写`mid`而是先编写`if`中的`check()函数`；

然后，根据编写好的`check()函数`来确定更新区间的方式；

最后，根据更新区间的方式，来确定`mid = l + r >> 1`还是`mid = l + r + 1 >> 1`。

1.3.2.1 题目链接及代码

题目链接：

AcWing789.数的范围

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;

int main()
{

    return 0;
}
```

1.3.2 实数二分

1.4 前缀和与差分

1.5 高精度算法/大整数算法

1.5.1 高精度加

$C = A + B$； $A \geq 0, B \geq 0$

题目链接：

AcWing.791高精度加法

思路：

使用C++的STL中vector实现，模拟加法运算。

算法流程：

主函数中，使用`string`类型的变量存放参与运算的数，然后将“参与运算的数”逆序存放到`vector`类型的变量中（作为参数）；

加法运算函数，通过设置一个`进位变量t`模拟每一位运算后得到的结果；通过`t % 10`得到“当前位”的数值，`t /= 10`得到参与下一位运算的进位值；最后记得处理“多出来的一位”的进位值。

最后，将从“个位到十位百位...”的逆序组成的结果，顺序输出。

注意：

参数是逆序传参数；

如果是非十进制运算，只需要将 `t % X` 和 `t \= X` 中的 `X` 替换成相应的进制即可；

结果是逆序，输出需要顺序输出；

不需要比较A和B的大小关系。

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <string>
#include <cstring>
#include <vector>

using namespace std;

string a, b;
vector<int> A, B, C;

vector<int> add(vector<int>& A, vector<int>& B)
{
    vector<int> C;
    int t = 0;  // 进位t
    for (int i = 0; i < A.size() || i < B.size(); ++i)
    {
        if (i < A.size()) t += A[i];
        if (i < B.size()) t += B[i];
        C.push_back(t % 10);      // 得到当前位的值，并存到C中
        t /= 10;     // 得到进位值
    }
    // 在运算结束后，处理进位，防止遗漏
    if (t) C.push_back(t);     // 等价 if(t) C.push_back(1);
    return C;
}
int main()
{
    cin >> a >> b;
    // 将每一位逆序存放到vector中,A和B中第一个元素是a和b中最低位的数字
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; --i) A.push_back(a[i] - '0');
    for (int j = b.size() - 1; j >= 0; --j) B.push_back(b[j] - '0');

    vector<int> C = add(A, B);

    // 将逆序存放的结果，输出
    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; --i) cout << C[i];
    puts("");
    return 0;
}
```

1.5.2 高精度减法

1.5.3 高精度乘法-大整数乘低精度

$C = A * b, A > 0, b > 0$

题目链接：

AcWing.793高精度乘法

思路：

使用C++的STL中vector实现，模拟乘法运算。

算法流程：

主函数，同`高精度加法`；

模拟乘法函数，注意对进位的处理。

注意：

除了`高精度加法`外，模拟乘法函数中没有对额外进位进行特别处理，而是通过巧妙的方法在for循环中一起处理了。

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <string>
#include <cstring>
#include <vector>

using namespace std;

string a;
int b;
vector<int> A, C;

vector<int> mul(vector<int>& A, int b)
{
    vector<int> C;
    int t = 0;
    for (int i = 0; i < A.size() || t; ++i)     // 实现了对进位的处理
    {
        if (i < A.size()) t += A[i] * b;
        C.push_back(t % 10);
        c /= 10;
    }
    return C;
}
int main()
{
    cin >> a >> b;
    for (int i = a.size() - 1; i >= 0; --i) A.push_back(a[i] - '0');

    C = mul(A, b);

    for (int i = C.size() - 1; i >= 0; --i) cout << C[i];
    cout << endl;
    return 0;
}
```

1.5.4 高精度除法

第二部分 数据结构

2.1 链表

2.1.1 单链表

2.1.1.1相关操作、算法流程及代码实现：

相关操作和算法流程：

1. 初始化单链表
2. 插入元素
    1. 插入头结点x
    2. 在结点k的后面插入结点x
2. 删除元素
    1. 删除结点k后面的一个结点
3. 删除头结点

代码实现：

```
/*
    head表示头指针；
    e[i]表示编号为i的结点的值；
    ne[i]表示编号为i的下一个元素的next指针；
    idx表示临时指针,当前使用的结点编号.
*/
const int N = 1e6 + 10;
int head, e[N], ne[N], idx;

// 初始化单链表
void init()
{
    head = -1;    // 表示不指向任何元素
    idx = 0;    // 从编号0开始存放结点
}

// 插入头结点x；x表示头结点的值
void add_to_head(int x)
{
    e[idx] = x;
    ne[idx] = head;
    head = idx++;
}

// 插入结点,在编号为k的结点后面出入结点x
void add(int k, int x)
{
    e[idx] = x;
    ne[idx] = h[k];
    h[k] = idx++;
}

// 删除结点k后面的结点
void remove(int k)
{
    ne[k] = ne[ne[k]];
}

// 删除头结点
void remove_to_head()
{
```

```
    head = ne[ne[head]];
}

// 遍历单链表并输出
for (int i = head; i != -1; i = ne[i])
{
    cout << e[i] << ' ';
}
cout << endl;
```

2.1.1.2相关题目链接及代码示例：

题目链接：

AcWing.826单链表

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
using namespace std;

const int N = 1e6  + 10;

int main()
{

    return 0;
}
```

2.2 栈

2.3 队列

2.8 并查集

2.8.1 并查集功能和原理：

功能：

1）用来判断一个图中是否存在环;

2）将两个集合合并为一个集合；

3）判断两个元素是否在同一个集合中；

4）维护额外信息

5）无向图的连通分量个数、Kruskar算法求最小生成树、最近/最小公共祖先（LCA）

原理：

并查集是一种 树形数据结构 又称为 不相交集 或 不相交集合的数据结构 ;每一个集合用一颗树来表示。树根的编号就是整个集合的编号。每个节点都存放着自己的父结点（可以 路径压缩优化 ）。

路径压缩-优化：

让`集合中的所有结点/路径上的每个节点`都指向`祖先/根结点`，只需要一次遍历，就可以让大部分结点找到根结点，优化结点查找。

基本操作及时间复杂度：

路径压缩-优化后，时间复杂度：接近 $O(1)$

算法流程和相关操作：

首先初始化所有结点的父结点为指向自己；根据要求进行`合并操作`和`查找操作`。

```
int p[N];   // p[a] = b 表示 结点a的父亲是 结点b
```

求集合的编号/祖先结点/根结点的编号（路径压缩后）：

```
while (p[x] != x) x = p[x];
```

Find查找祖先结点 + 路径压缩：

```
// 返回结点x的祖先结点编号，即集合的编号
int find(int x)
{
    if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);
    else return p[x];
}
```

Union合并操作（利用Find）：

```
// 如果ab两个结点不在同一个集合中，将 结点a 所在的集合 合并到 结点b 所在的集合 ：  b的祖先结点作为 a 的祖先结点的父结点

if (find(a) != find(b)) p[find(a)] = find(b);
```

题目链接及代码示例：

AcWing836.合并集合

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;
int n, m;
int p[N];

// 查找操作 + 路径压缩
int find(int x)
{
    if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);
    return p[x];
}


int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    // 初始化所有结点的父结点
    for (int i = 1 ; i <= n; ++i) p[i] = i;
```

```
23
24      while (m--)
25      {
26          char op[2];
27          int a, b;
28          scanf("%s%d%d", op, &a, &b);
29
30          if (op[0] == 'M')    // 合并
31          {
32              p[find(a)] = find(b);
33          }
34          else    // 判断 or 查找
35          {
36              if (find(a) != find(b)) puts("No");
37              else puts("Yes");
38          }
39
40      }
41      return 0;
42  }
```

2.8.2 连同块中点的数量

第三部分 搜索与图论

3.0 深度优先遍历DFS 和 宽度优先遍历BFS 简介

3.0.1 DFS

DFS是树形结构的`搜索树`，可以对整个空间进行搜索；

一条路走到黑。

算法流程：

从起点开始，一直往下一层搜索，当遇到叶节点时，`回溯`；

也就是，一直往前走，当走到了尽头再回头；回头之后，看看当前是否可以继续向前走（换一个`树的分叉`）；不能走了之后再回头，再看是否可以向前走；

直到走完`搜索树`的所有结点。

3.0.2 BFS

BFS同DFS同样是树形结构的搜索树，同样可以对整个空间进行搜索（于DFS的搜索方式不同）；

眼观六路，耳听八方。

算法流程：

从起点开始，先走完搜索树的第一层所有结点；

然后再走完搜索树的第二层结点；

直到走完所有结点。

3.0.3 DFS 和 BFS 的对比

数据结构：

DFS： stack栈

BFS： queue队列

空间：

DFS： $O(h)$；h 为搜索树的高度

BFS： $O(2^h)$；

`DFS在"空间复杂度"上有优势`

最短路性质：

DFS： 不具有最短路性质

BFS： 具有最短路性质（在每一次按层扩展/搜索过程中，每次都能找到最近的点，最终能够找到一条最短路径）

`BFS在"时间复杂度"上有优势`

3.0.4 DFS 的难点

`回溯原理`的理解；

`剪枝技巧`的使用。

`回溯+回复现场`：哪个地方修改了状态，哪个地方需要恢复现场（递归函数的位置）

3.0.5 BFS 求最短路的条件

图/树的边权为1时，才能够使用BFS求最短路；

其他情况，只能使用`最短路算法`求解最短路。

3.1 深度优先遍历 DFS

题目链接：

AcWing842.排列数字

题解：

我们可以将问题转化为，在三个空格（`_ _ _`）上面填数字；

有三个空位，从第一个空位开始填数字，都枚举一遍所有数字，查找没有使用过的数字，将没有使用过的数字填到空格中；

注意：每次都存放当前的路径；记得回溯和回复现场。

优化：位运算

关键点：

想清楚`搜索顺序`

示例代码：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;
const int N = 10;
```

```cpp
int n;
int path[N];    // path[u]表示第u层中存放的数字=>搜索路径中第u个搜索位置
bool st[N]; // st[i]表示 i 是否使用过，True 使用过， false 没有使用过

void dfs(int u)    // u表示当前搜索树的深度
{
    // 当搜索到最后一层，输出结果
    if (u == n)
    {
        for (int i = 0; i < n; ++i) printf("%d ", path[i]);
        puts("");
        return ;
    }
    // 搜索，寻找符合条件的路径（本层中，没有被使用过的数字）
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        if(!st[i])
        {
            path[u] = i;    // 更新当前层数的数字（更新被搜索到的数字）
            st[i] = true;  // 更新 数字i 的状态
            dfs(u + 1);     // 搜索下一层
            st[i] = false;  // 回溯（恢复现场）
        }
    }
}

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    dfs(0);
    return 0;
}
```

3.1.1 n皇后问题

题目链接：

AcWing843.n-皇后问题

题目讲解：

dfs + 剪枝技巧

（未剪枝）从第一行到第n行，每行皇后放置的列的位置；

（剪枝）从第一行到第n行，在摆放每一行的皇后时，首先判断`当前要摆放皇后的位置`是否和`前几行的皇后位置`产生冲突。如果产生冲突，停止当前行皇后的摆放，放弃对后面几个皇后摆放，停止搜索（剪枝）。如果没有产生冲突，继续摆放下一行。

代码示例（剪枝）：

算法流程：

按行摆放，判断摆放的列位置、正对角线和反对角线位置是否符合摆放条件。

算法细节-正反对角线表示以及判断思路：

正对角线 dg:

对正角线按照`由左上到右下`表示，从棋盘的左上角算作第一条正对角线；

$y = -x + b$

表示列通过截距$b = y + x$，将皇后摆放位置 (u, i) 带入到截距公式中，得到

`dg[u + i]`

反对角线 udg：

反对角线按照`由左上到右下`表示，从棋盘的右上角算作第一条反对角线

$y = x + b$

截距公式 $b = y - x$，同上，得到 `udg[n - u + i]`

解释 $y - x < 0$ 时结果为负数，但是数组的下标没有负数，所以增加`偏移量 n`。

时间复杂度：

$O(n * n!)$

```
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;
const int N = 10;

int n;
char g[N][N];   // 棋盘
bool col[N];    // 列判断（每一列只能有一个）
bool dg[N];     // 两条对角线：正对角线dg （从右上角开始，按照由左上到右下）
bool udg[N];    //                反对角线udg （从左上角开始，按照由右上到左下）

void dfs(int u)
{
    if (u == n)    // 第n行的皇后也摆放完毕，输出结果
    {
        for (int i = 0; i < n; ++i) puts(g[i]);
        puts("");
        return ;
    }
    // 当前第u行皇后的摆放，枚举每一列，找到何时的摆放位置
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        // 根据 y = ax + b 和 y = -ax+b 中截距来判断位置
        if (!col[i] && !dg[u + i] && !udg[n - u + i]) // 第u行中，第i列没有放过而且(u,i)的正对角线和反对角线没有摆放过
        {
            g[u][i] = 'Q';
            col[i] = dg[u + i] = udg[n - u + i] = true;
            dfs(u + 1);
            col[i] = dg[u + i] = udg[n - u + i] = false;
            g[u][i] = '.';
        }
    }
}
int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            g[i][j] = '.';
    dfs(0);
    return 0;
}
```

代码示例（未剪枝）：

算法流程：

枚举每一个格子，每一个格子都有两种选择，摆放皇后，或者不摆放皇后。

时间复杂度：

$O(2^{n^n})$

```
#include <iostream>
#include <cstdio>

using namespace std;
const int N = 10;

int n;
char g[N][N];   // 棋盘
bool row[N];    // 行判断
bool col[N];    // 列判断（每一列只能有一个）
bool dg[N];     // 两条对角线：正对角线dg （从右上角开始，按照由左上到右下）
bool udg[N];    //               反对角线udg （从左上角开始，按照由右上到左下）

void dfs(int x, int y, int s)    // 摆放位置(x,y),当前已经摆放的皇后数量t
{
    if (y == n) y = 0, x++; // 如果当前行按列摆放已经出界，从下一行的第一个位置开始摆放
    if (x == n) // 如果当前行摆放完毕
    {
        if (s == n)
        {
            for (int i = 0; i < n; ++i) puts(g[i]);
            puts("");
        }
        return ;
    }
    dfs(x, y + 1, s); // 当前位置不摆放皇后，判断下一个位置

    // 当前可以摆放皇后
    if (!row[x] && !col[y] && !dg[x + y] && !udg[n - x + y])
    {
        row[x] = col[y] = dg[x + y] = udg[n - x + y] = true;
        g[x][y] = 'Q';
        dfs(x, y + 1, s + 1); // 判断下一个位置摆放皇后
        row[x] = col[y] = dg[x + y] = udg[n - x + y] = false;
        g[x][y] = '.';
    }
}
int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            g[i][j] = '.';
    dfs(0,0,0);
    return 0;
}
```

3.2 宽度优先遍历BFS

3.2.1 走迷宫

题目链接：

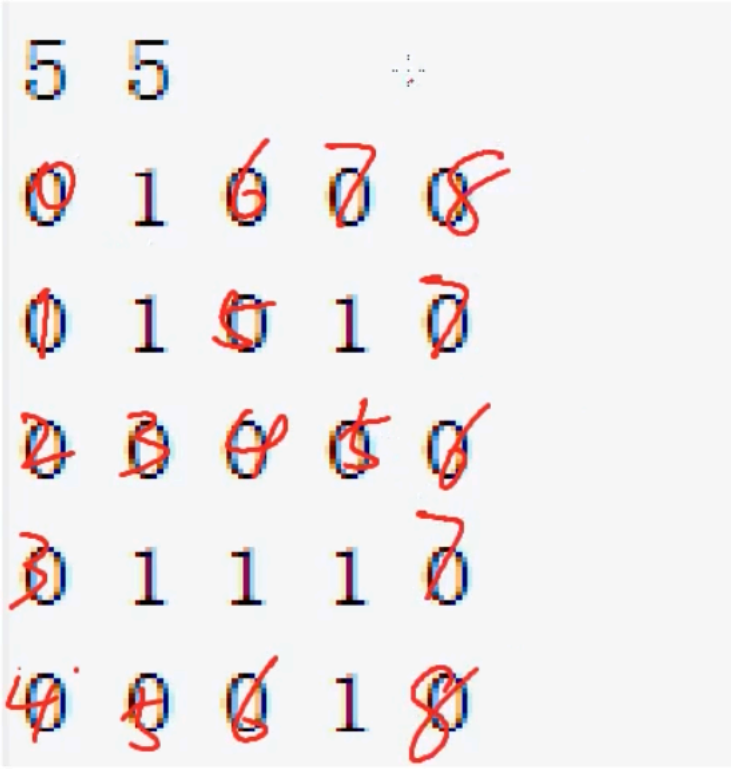
AcWing844.走迷宫

算法流程：

从左上角 $(0,0)$ 为起点，按照一定的顺序，走到每一个距离为1 的所有点；

然后，走到距离为1的点之后接着走到距离起点为2的所有点，直到走到终点(n,n)。

样例模拟：



说明：数字即表示`搜索的层数/先后顺序`，同时也表示距离。

算法框架

```
队头元素 -> queue       // 队头元素放到queue中
while (queue不为空)
{
    取当前队头
    扩展队头
    // 后续操作
}
```

代码示例（模拟队列写法）：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;

typedef pair<int, int> PII;
const int N = 110;
```

```cpp

int n, m;
int g[N][N];    // 存放图
int d[N][N];    // 每一个点d[x][y]到起点的距离
PII q[N * N];    // 模拟队列q[],队列的大小是N*N，q[i]有两个元素q[i].first是横坐标x,q[i].second是纵坐标y


int bfs()
{
    int hh = 0, tt = 0;    // 初始化：  队头hh是0，队尾tt是0
    q[0] = {0, 0};    // 初始化起始位置

    memset(d, -1, sizeof(d));    // 初始化距离，保证每一个位置都是第一次走
    d[0][0] = 0;    // 从起点开始
    // 上右下左，四个方向的xy坐标变换的偏移量
    int dx[4] = {-1, 0, 1, 0};
    int dy[4] = {0, 1, 0, -1};

    while (hh <= tt)    // 队列不为空
    {
        PII t = q[hh++];    // 取出队头元素
        // 枚举4个方向
        for (int i = 0; i < 4; ++i)
        {
            int x = t.first + dx[i], y = t.second + dy[i];
            // 保证xy在正确的范围内，而且g[x][y] == 0表示当前路可以走；d[x][y] == -1表示当前路的是第一次走，保证了最短路的求得
            if (x >= 0 && x < n && y >= 0 && y < m && g[x][y] == 0 && d[x][y] == -1)
            {
                d[x][y] = d[t.first][t.second] + 1;    // 更新当前点到起始点的距离
                q[++tt] = {x, y};     // 将当前点入队
            }
        }
    }
    return d[n - 1][m - 1];    // 返回（终点[n,m]到起点的距离）最短距离
}

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < m; ++j)
            scanf("%d", &g[i][j]);
    printf("%d\n", bfs());
    return 0;
}
```

如果想要输出路径，只需要开一个额外的pair数组，记录当前坐标(x,y)是从哪一个点走过来的即可。

代码示例（STL写法）：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <queue>
#include <algorithm>

```

```cpp
using namespace std;
typedef pair<int,int> PII;

const int N = 110;
int n, m;
int g[N][N];
int d[N][N];

int bfs()
{
    queue<PII> q;
    memset(d, -1, sizeof(d));
    d[0][0] = 0;
    q.push({0, 0});

    int dx[4] = {-1, 0, 1, 0}, dy[4] = {0, 1, 0, -1};
    while (q.size())
    {
        auto t = q.front();
        q.pop();

        for (int i = 0; i < 4; ++i)
        {
            int x = t.first + dx[i], y = t.second + dy[i];
            if (x >= 0 && x < n && y >= 0 && y < m && d[x][y] == -1 && g[x][y] == 0)
            {
                d[x][y] = d[t.first][t.second] + 1;
                q.push({x, y});
            }
        }
    }
    return d[n - 1][m - 1];
}

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 0 ; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < m; ++j)
            scanf("%d", &g[i][j]);
    int res = bfs();
    printf("%d\n", res);
}
```

3.2.2 八数码问题

3.3树和图的存储

树形结构是一种**特殊的图结构**。所以我们只需要理解图结构的存储即可。

图有两种类型**有向图**和**无向图**。算法中，无向图在相连结点之间建立两条边；有向图根据指向建立一条边。无向图我们也可以看成一种特殊的有向图。

有向图的存储两种方式：

邻接矩阵：二维矩阵；不能存储重边，多条重边只能够存储一条。

空间复杂度： $O(n^2)$

邻接表：多个单链表

代码实现，见后续题目中的代码

通用存储树和图的代码模版

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10, M = N * 2;

int h[N], e[M], ne[M], idx;

// 加边：添加一条从a指向b的边
void add(int a, int b)
{
    e[idx] = b;
    ne[idx] = h[a];
    h[a] = idx++;
}

int mian()
{
    // 初始化邻接表的表头
    memset(h, -1, sizeof(h));

    return 0;
}
```

注意：无向图，建立两条方向相反的有向边。

3.4 树和图的深度优先遍历

3.4.1 树的重心

题目链接

AcWing846.树的重心

题解

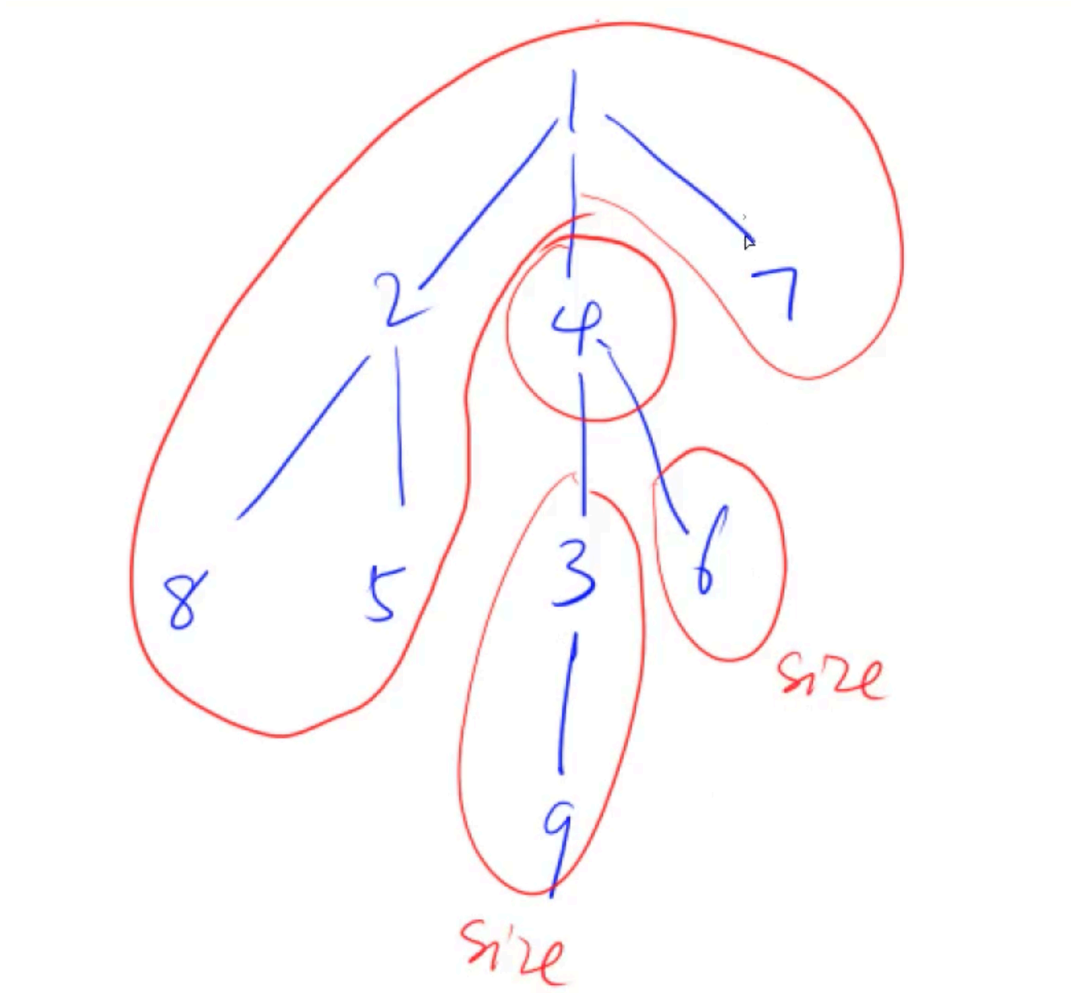
树的遍历，相当于特殊有向图的遍历。

树的重心：

树中的一个结点，如果将这个点删除后，剩余各个连通块中点数的最大值最小，那么这个节点被称为树的重心。（换句话说，把一个点删除掉之后，以这个点（被删除的点）为根的各棵子树的结点数量中的最大值，再从所有的最大值中取最小值；把连通块理解成`子树/集合`）

思路：

遍历整棵树，遍历结点的同时将每一个结点删除掉，删除节点的同时求解连通块的数量的最大值，从这些最大值中再找最小值。（求删除每一个点后的连通块的数量的最大值）



连通块的求解：

从`4`开始DFS，通过`4`的儿子结点的`dfs返回值`就能够得到两个`size`的大小；剩下一个连通块的数量为`结点总数 - size[4]`，即减去以`4`根的树的点个数。

时间复杂度

$O(n+m)$

时间复杂度和`点数`以及`边数`呈线性关系

代码示例-模拟队列写法

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10, M = 2 * N;

int n;  // 树的结点个数
int h[N], e[M], ne[M], idx;
bool st[N]; // 每个点只能遍历一次，st用来坐标记

int ans = N; // 记录答案（最大值）

// 加边
void add(int a, int b)
```

```
{
    e[idx] = b;
    ne[idx] = h[a];
    h[a] = idx ++;
}

int dfs(int u)    // 当前遍历的图中结点u
{
    st[u] = true; // 更新u的状态

    int sum = 1; // 以u为根的树中结点个数（当前点算一个，默认为1）
    int res = 0; // 所有连通块中结点数量的最大值
    // 遍历结点u的出边
    for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i])
    {
        int j = e[i]; // j表示链表中出边指向的结点，在图中的编号
        if (!st[j])
        {
            int s = dfs(j);  // 以u为根的子树的大小
            res = max(res, s); // u 和子树 的连通块的最大值
            sum += s; // u的子树的结点，是u这个树中的一部分，所以结点数量要更新
        }
    }
    res = max(res, n - sum);  // (n - sum) 表示 删除u为根的树，不算u这个树后剩下的连通块点的个数

    ans = min(ans, res);  // 连通块的（结点数量）最大值中最小值

    return sum;  // 返回 以u为根的树的结点个数
}

int main()
{
    scanf("%d", &n);

    memset(h, -1, sizeof(h)); //  （容易遗忘）初始化存图的链表表头

    for (int i = 0; i < n - 1; ++i)
    {
        // 无向图:加两条边（反向）
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        add(a, b), add(b, a);
    }
    dfs(1);
    printf("%d\n", ans);
    return 0;
}
```

代码示例-STL写法

```
// 代码注释看"模拟队列写法"
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <queue>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10, M = 2 * N;
```

```cpp
int n, m;
int h[N], e[M], ne[M], idx;
int d[N];

void add(int a, int b)
{
    e[idx] = b;
    ne[idx] = h[a];
    h[a] = idx++;
}

int bfs()
{
    memset(d, -1, sizeof(d));
    queue<int> q;
    q.push(1);
    d[1] = 0;
    while (q.size())
    {
        int t = q.front();
        q.pop();
        for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (d[j] == -1)
            {
                d[j] = d[t] + 1;
                q.push(j);
            }
        }
    }
    return d[n];
}

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    memset(h, -1, sizeof(h));
    for (int i = 0; i < m; ++i)
    {
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        add(a, b);
    }
    printf("%d\n", bfs());
    return 0;
}
```

通用dfs代码模版

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10, M = N * 2;
```

```cpp

int h[N], e[M], ne[M], idx;
bool st[N]; // 第i个点时候 被访问过/遍历过

// 加边操作:给a加一条到b的边
void add(int a, int b)
{
    e[idx] = b;
    ne[idx] = h[a];
    h[a] = idx++;
}

void dfs(int u) // 当前被访问的结点
{
    st[u] = true;   // 更新状态，u被访问
    // 遍历当前点的所有出边
    for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i])
    {
        int j = e[i];    // j表示链表中的结点在图中的编号
        if (!st[j]) // 如果没有遍历/搜索过，继续向下搜索（“一条道走到黑”）
            dfs(j);
    }
}
int main()
{
    // 初始化 临界表
    memset(h, -1, sizeof(h));    // 初始化链表表头

    return 0;
}
```

注意：不论是DFS还是BFS，每一个点只需要遍历一次即可。

3.5 树和图的宽度优先遍历BFS

3.5.1 图中点的层次

题目链接

AcWing847.图中点的层次

重边：`a`和`b`之间有超过一条边

自环：存在`a`指向`a`自己的边

题解

由于图中边权为1，可以使用BFS来求最短路/最短距离。

代码示例

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10, M = 2 * N;

int n, m; // n个点 m条边
int h[N], e[M], ne[M], idx;
```

```cpp
int d[N];  // 表示点i到起点的距离
int q[N]; // 模拟队列

void add(int a, int b)
{
    e[idx] = b;
    ne[idx] = h[a];
    h[a] = idx ++;
}

int bfs()
{
    int hh = 0, tt = 0;    // hh 队头指针,  tt 队尾指针
    q[0] = 1;    // 起点入队

    memset(d, -1, sizeof(d));    // 初始化距离，所有点距离起点的距离都为-1（同时可以作为是否被遍历过的标志）

    d[1] = 0;    // 起点到起点的距离
    // BFS框架
    while (hh <= tt)
    {
        int t = q[hh++];    // 取队头，并且队头出队
        for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])
        {
            int j = e[i];
            if (d[j] == -1)    // j没有被遍历过，那么距离起点的距离为-1
            {
                // 更新距离，扩展队头的点x
                d[j] = d[t] + 1;
                q[++tt] = j;
            }
        }
    }
    return d[n];    // 返回最短路
}
int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    memset(h, -1, sizeof(h));    // 初始化链表表头
    for (int i = 0; i < m; ++i)
    {
        int a, b;
        scanf("%d%d", &a, &b);
        add(a, b);
    }
    printf("%d\n",bfs());
    return 0;
}
```

通用BFS框架

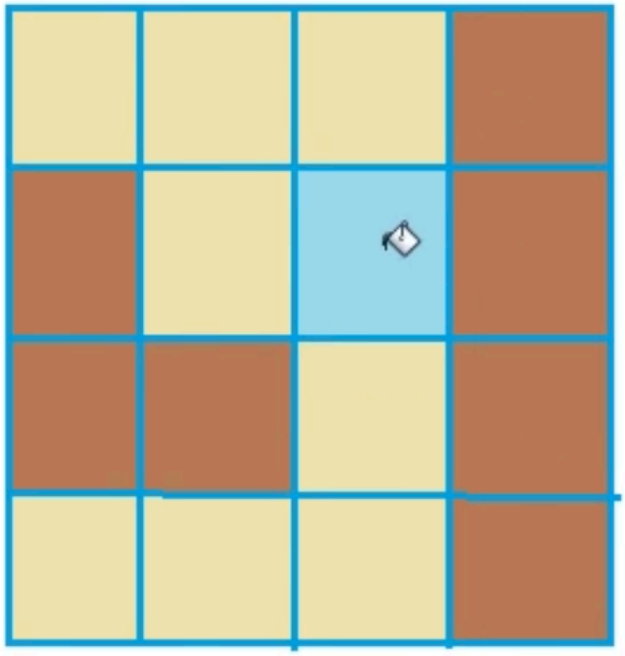
```
#include <queue>
// queue为队列
1. 将起点放到queue的队头中
2.
while (queue 不为空)
{
    取出队头元素t,并及时弹出queue中的队头元素

    扩展t能够到达的所有邻点x
    if (x 没有被遍历过)
        将x放入queue（x入队）
    // 接下来的操作 （本题目中 更新距离）
}
```

3.6 BFS算法拓展

3.6.1 Flood Fill--洪水灌溉算法

算法简介：



在一个`迷宫/地图`中，深色区域为墙，浅色区域为洼地；我们从洼地中找到一个位置开始注水（图中蓝色区域），当洼地中的水被注满时，会向相邻的区域`灌溉/填充`；当填满所有洼地或者满足某个条件时停止注水。

DFS类似，只不过变为当前位置注满水后，向固定方向的下一个位置继续注水，直到这个方向无法继续注水时，再回溯换一个方向注水，重复上述操作。

算法的作用：

可以在线性时间复杂度内，找到某个点所在的连通块。

注意：虽然Flood-Fill算法同样可以用DFS来实现。为了防止出现DFS中`爆栈`的问题，尽量使用BFS来实现Flood-Fill算法。

题目链接

AcWing1097.池塘计数

四连通：某个点和其相邻的上下左右四个点连通

八连通：某个点和其上下左右、左右上、左右下共八个点连通

算法思路

使用`Flood-Fill算法`从左上角开始`遍历所有点`，只要当前位置是`水洼`而且`第一次被遍历到`并且`当前位置周围连通起来的水洼`共同构成一个`池塘`，那么就满足条件更新结果。

注意：在写搜索算法时，需要考虑很多搜索的特判条件，搜索算法本身并不难，考察地也是代码熟练度和特判细节。

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstring>
#include <algorithm>

// 将 pari中的第一个元素和第二个元素的表示简化 first 、 second
#define x first
#define y second

using namespace std;

typedef pair<int, int> pii;    // 使用pair存放“二维下标”

const int N = 1010, M = N * N;    // N的长宽理论最大值，M图的理论最大值

int n, m;   // 地图的长宽
char g[N][N];
pii q[M];    // 使用pari模拟队列写法
bool st[N][N]; // st[i][j] 表示 点(i,j)是否被遍历过(判重：防止重复遍历某一个点)

// 参数为起点坐标(start_x, start_y)的BFS
void bfs(int sx, int sy)
{
    int hh = 0, tt = 0; // 队头指针hh 和 队尾指针tt
    q[0] = {sx, sy}; // 起点坐标入队
    st[sx][sy] = true; // 更新起点坐标的状态

    while (hh <= tt) // 只要队列不为空
    {
        pii t = q[hh++];    // 取队头元素，并且出队pop()

        // 使用两重循环枚举当前坐标的“八连通”位置(3x3小矩阵)，是否是水洼('W')
        for (int i = t.x - 1; i <= t.x + 1; ++i)
            for (int j = t.y - 1; j <= t.y + 1; ++j)
            {
                // 特判当前位置(入队坐标)
                if (i == t.x && j == t.y) continue;
                // 不合法区域
                if (i < 0 || i >= n || j < 0 || j >= m) continue;
                // 当前位置不含水('.') 或者水洼被遍历过
                if (g[i][j] == '.' || st[i][j]) continue;

                // 去除掉所有不合法的情况之后，我们将合法情况的点放到队列中去,并更新状态
                q[++tt] = {i, j};
                st[i][j] = true;
            }
    }
```

```
}

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);

    // 按行读数据
    for (int i = 0; i < n; ++i) scanf("%s", g[i]);

    // Flood-Fill
    int cnt = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < m; ++j)
            if (g[i][j] == 'W' && !st[i][j]) // 是"水洼"而且"水洼第一次被遍历过"
            {
                // 只要找到了“第一次被遍历过的水洼”，就说明了池塘的存在；先用BFS搜索池塘的大小，然后
                bfs(i, j);  // 从水洼地开始使用BFS搜索“池塘”
                cnt++;
            }

    // 输出结果
    printf("%d\n", cnt);
    return 0;
}
```

3.6.2 BFS的最短路模型

3.7 DFS算法拓展

3.X.1 连通性模型

3.x.2 图和树的遍历

3.x 拓扑排序

3.x 最短路算法

第四部分 数学知识

第五部分 动态规划

动态规划问题，可以从两个方面去考虑：`状态表示`和`状态计算`；其中`状态表示`可以分为`集合`+`属性`，`状态计算`可以分为`集合的划分`+`状态方程`；最后通过优化的方法减少时间复杂度或者空间复杂度。

其中，`集合`为，能够满足"条件"的所有物品/方法；

`属性`，最大值、最小值或者数量；

`集合的划分`，把`集合`划分成若干个更小的子集，然后把每一个子集划分成更小的子集，通过计算出更下的子集的结果，来得到上一层集合的结果，最终求得`整个集合`；

`状态方程`，状态转移方程；

`优化`,代码/状态方程的等价变形。

5.1 背包问题

5.1.1 问题背景

有 N 个物品和一个容量为 V 的背包；每一件物品 i 都有两个属性 v_i和 w_i,其中 w_i表示第 i 件物品的体积，v_i 表示第 i 件物品的价值。在不超过背包容量 V 的情况下，求解放进背包的物品的最大价值。

5.1.2 01背包问题

5.1.2.1 问题描述及题目链接

每件物品只有一件，即每一件物品只能够"使用"一次。

题目链接：

AcWing2.01背包问题

5.1.2.2 朴素算法

状态表示： $f[i,j]$

集合：从 i 件物品中挑选出容量不超过 j 的所有物品的价值

属性： 最大值

状态计算：

集合的划分：

1）不选第 i 件物品时，物品的总体积不超过 j 的选法，表示为 $f[i-1,j]$；

$f[i-1,j]$ 中的 $i-1$ 表示为从前 $i-1$ 个物品中选（没有选择第 i 件物品 ）；整体，表示为不选第 i 件物品时，容量不超过 j 的选法中，最大值；

2）选择第 i 件物品时，物品的总体积不超过 j 的选法，表示为 $f[i-1,j-v_i]+w_i$；

$f[i-1,j-v_i]+w_i$ 表示从前 $i-1$ 个物品中选，体积不超过 $j-v_i$ （虽然选择了第 i 件物品，但是现考虑前 $i-1$ 件物品的选法，然后补上第 i 件物品的体积 v_i 和价值 w_i ）的选法；表示为 $f[i-1,j-v_i]+w_i$

状态方程：

1）不选择第 i 件物品时，物品的总体积不超过 j 的选法：

$$f[i,j]=f[i-1,j]$$

2）选择第 i 件物品时，物品的总体积不超过 j 的选法：

$$f[i,j]=f[i-1,j-v_i]+w_i$$

状态转移方程：

$f[i,j]=max(f[i-1,j],f[i-1,j-v_i]+w_i)$

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;
const int N = 1010;
int n, m;   // n物品的数量， m背包的容量
int f[N][N];    // 状态方程，f[i][j]从前i个物品中选，所有选法的最大价值
int v[N];   // v[i]表示第i件物品的体积
int w[N];   // w[i]表示第i件物品的价值

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    // f[0][0～m]表示从前0件物品中选，体积不超过0～m的选法中的最大值，结果是0，默认是0，不需要初始化
    for(int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 0; j <= m; ++j)
        {
            f[i][j] = f[i-1][j];
            if (j >= v[i])  f[i][j] = max(f[i, j], f[i - 1, j - v[i]] + w[i]);
        }
    return 0;
}
```

5.1.2.3 优化（一维算法）

将状态从二维表示变成一维表示

状态表示：$f[j]$

集合：体积不超过 j 的情况下的

属性： 最大值

状态计算

状态划分：滚动数组思想

从朴素算法中的状态转移方程 $f[i,j]=f[i-1,j]+f[i-1,j-v_i]+w_i$ 我们不难发现，参数 i 仅仅使用了两个，也就是 i 和 $i-1$；参数 j 的范围不论是 j 还是 $j-v_i$ 都不超过 j；所以，我们可以用一维来表示。

状态方程：

$f[j]=max(f[j-v_i]+w_i)$

注意：

要逆序枚举 j ,防止在更新 $f[j]$ 时，受到到 $f[j-v_i]$ 的影响

代码示例：

```
#include <iostream>
```

```cpp
#inlcude <cstdio>
#incldue <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int n, m;
int f[N];     // 状态表示 f[j]容量不超过j的情况下选法的最大值
int v[N], w[N];

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = m; j >= v[i]; --j)
            f[j] = max(f[j], f[j - v[i] + w[i]);
    printf("%d\n", f[m]);
    return 0;
}
```

5.1.3 完全背包问题

5.1.3.1 问题描述及题目链接

每一件物品 i 可以选择任意多次。

题目链接：

AcWing3.完全背包问题

5.1.3.2 朴素算法

状态表示： $f[i,j]$

集合：从 i 件物品，选择容量不超过 j 的物品的选择

属性：最大值

状态计算：

集合划分：

在对前 $i-1$ 件物品作出选择后，从第 i 件物品选择 k 件的选法；当前这种选法得到的最大价值；

状态方程：

在对前 $i-1$ 件物品作出选择后，选择 k 件第 i 件物品的选法的状态方程

1. 当第 i 件物品选择了 0 件时，

$f[i,j]=f[i-1,j-0*v_i]+0*w_i$

2. 当第 i 件物品选择了 1 件时，

$f[i,j]=f[i-1,j-1*v_i]+w_i$

...

3. 当第 i 件物品选择了 k 件时，

$f[i,j]=f[i-1,j-k*v_i+k*w_i$

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int f[N][N];     // 状态方程
int v[N], w[N]; // v[i]表示第i件物品的体积，w[i]表示第i件物品的价格
int n, m;   // n件物品，  m表示背包的容量

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    // 状态转移方程：
    //      f[i][j] = f[i - 1][j - k * v[i]] + k * w[i]
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 0; j <= m; ++j)
            for (int k = 0; k * v[i] <= j; ++k)
                f[i][j] = max(f[i][j], f[i - 1][j - k * v[i]] + k * w[i]);

    printf("%d\n", f[n][m]);
    return 0;
}
```

5.1.3.3 优化（二维）

状态表示：

同`朴素算法`

状态计算：

同`朴素算法`

优化：

首先，观察朴素算法的状态转移方程: $f[i][j] = f[i-1, j-k*v_i] + k*w_i$

然后，展开 $f[i,j]$ 和 $f[i-1, j-v_i]$:

$f[i,j] = max(f[i-1,j] + f[i-1,j-v_i] + w_i + f[i-1,j-2*v_i] + 2*w_i + \ ... \ + f[i-1,j-k*v_i] + k*w_i)$，其中`max()`里面的 $f[i-1,j]$ 表示从前 i 件物品中选择，容量不超过 j 的情况下，`当前选法`没有选择第 i 件物品的价值；$f[i-1,j-v_i] + w_i$ 表示从前 i 件物品中选择，容量不超过 j 的情况下，`当前选法`选择1件第 i 件物品的价值 ...

$f[i,j-v_i] = max($ $f[i-1,j-v_i] + f[i-1,j-2*v_i] + w_i + f[i-1,j-2*v_i] + 2*w_i + \ ... \ + f[i-1$,其中`max()`里面的 $f[i-1,j-v_i]$ 表示从前 i 件物品中选择，容量不超过 $j-v_i$ 的情况下，`当前选法`没有选择第 i 件物品的价值 ...

最后，将展开后的 $f[i,j]$ 和 $f[i,j-v_i]$ 对比和代入/替换得到：

$f[i,j] = max(f[i-1,j] + f[i,j-v_i] + w_i)$

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int f[N][N];    // 状态方程
int v[N], w[N]; // v[i]表示第i件物品的体积，w[i]表示第i件物品的价格
int n, m;   // n件物品， m表示背包的容量

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    // 状态转移方程
    //      f[i][j] = max(f[i-1][j], f[i][j-v[i]] + w[i])
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 0; j <= m; ++j)
        {
            f[i][j] = f[i-1][j];
            if (j >= v[i]) f[i][j] = max(f[i][j], f[i][j - v[i]] + w[i]);
        }
    printf("%d\n", f[n][m]);
    return 0;
}
```

5.1.3.4 优化（一维）

优化：

不难发现，优化（二维）方法的状态转移方程以及代码示例和01背包问题很像，我们同样可以使用代码等价变形的方法将代码优化为一维表示。

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int n, m;
int f[N];
int v[N], w[N];

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &v[i], &w[i]);

    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = v[i]; j <= m; ++j)
            f[j] = max(f[j], f[j - v[i]] + w[i]);
    printf("%d\n, f[m]);
    return 0;
```

```
}
```

思考：为什么优化（一维）后的内层循环是顺序枚举 j 而不是像“01背包问题”中的优化代码那样逆序枚举 j 呢?

观察`优化（二维）`的状态转移方程 $f[i,j]=max(f[i-1,j],f[i,j-v_i+w_i)$,`优化（一维）`中的 $f[j]$ 在 $f[j-v_i]$ 的更新之后才得到更新，所以不会受到影响。

5.2 线性DP

5.2.1 数字三角形

5.2.1.1 题目链接：

AcWing898.数字三角形

5.2.1.2 算法流程：

状态表示： $f[i,j]$, $a[i,j]$ **表示数字三角形中，第** i **行第** j **列的位置的数字**

集合：所有从起点走到 $[i,j]$ 的路径；（第 i 行第 j 列的数字;起点是 $(1,1)$）

属性：最大值

状态计算：

集合划分：

1. 来自左上方（从左上方的位置走到(i,j), 走到 $(i-1,j-1)$的位置， 已经得到最大路径长度和当前位置的数字相加：

   $f[i,j]=f[i-1,j-1]+a[i,j]$
2. 来自右上方（从右上方的位置走到(i,j)）：

   $f[i,j]=f[i-1,j]+a[i,j]$

   为什么上一个点的位置是 $(i-1,j)$ 而不是 $(i+1,j+1)$ 或者是其他的坐标呢?

   因为：我们用`数组`来存放这个`数字三角形`，由于存放的方式使得，每一个数字的坐标又一些改变。

状态方程：

$f[i,j]=max(f[i-1,j-1]+a[i,j],f[i-1,j]+a[i])$

注意：

`数字三角形`的存放和坐标位置表示；

通过`状态方程`我们求解得到的是从`起点`走到最底下一层的每一个位置的最大路径长度,然后通过比较最低下一层的路径长度来求得最中结果。

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 510, INF = 1e9;

int n;
int a[N][N];
int f[N][N];
```

```cpp

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 1; j <= i; ++j)
            scanf("%d", &a[i][j]);
    // 初始化状态，将每一个状态初始化成“负无穷”，而且额外初始化第0行第0列，每一列还要额外初始化一个坐标的状态
    //
    for (int i = 0; i <= n; ++i)
        for (int j = 0; j <= i + 1; ++j)
            f[i][j] = -INF;
    // DP
    f[1][1] = a[1][1];  // 初始化起点
    for (int i = 2; i <= n; ++i)
        for (int j = 1; j <= i; ++j)
            f[i][j] = max(f[i - 1][j - 1] + a[i][j], f[i - 1][j] + a[i][j]);
    // 遍历最后一层数字三角形的状态，找最大值
    int res = -INF;
    for (int i = 0; i <= n; ++i) res = max(res, f[n][i]);
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
```

练习与提高：

AcWing1015.摘花生：

状态方程：

$f[i,j]=max(f[i-1,j]+w[i][j],f[i][j-1]+w[i][j])$

AcWing1018.最低通行费：

注意：

仔细分析`2N-1`这个条件；

考虑边界问题，对特殊位置进行特判；

状态方程：

$f[i,j]=min(f[i-1,j]+w[i][j],f[i][j-1]+w[i][j])$

AcWing1027.方格取数:

思路：

1） 两个人同时走

2） 一个先走，将走过的路上打上标记

状态表示：

两个人同时走

集合： $f[i_1,j_1,i_2,j_2]$ 和 $f[k,i_1,i_2]$

$[i_1,j_1,i_1,j_1]$表示两条路径从 $(1,1)$ 和 $(1,1)$分别走到 (i_1,j_1) 和 (i_2,j_2)的路径的集合，

$f[i_1,j_1,i_2,j_2]$表示两条路径走到(i_1,j_1)和(i_2,j_2)的长度之和最大值；

化简状态用3个状态来表示：

$[k, i_1, i_2]$用 k 表示两条路径当前走到的格子位置中横纵坐标之和，$f[k, i_1, i_2]$中表示从$(1, 1)$和$(1, 1)$分别走到$(i_1, k - i_1)$ 和 $(i_2, k - i_2)$的长度之和最大值。

其中 k 满足的等价关系：

$k = (i_1 + j_1) = (i_2 + j_2)$

属性：最大值

状态计算：

集合划分：

从`最后一步`开始考虑的思想，当重合时，做到不重复处理；

1）两条路径分别从`上面/向下走`走到(i_1, j_1)和从`上面/向下走`走到(i_2, j_2)

2）两条路径分别从`上面/向下走`走到(i_1, j_1)和从`左边/向右走`走到(i_2, j_2)

3）两条路径分别从`左边/向右走`走到(i_1, j_1)和从`上面/向右走`走到(i_2, j_2)

4）两条路径分别从`左边/向右走`走到(i_1, j_1)和从`左边/向右走`走到(i_2, j_2)

状态方程：

下面以（1）为例：

$$f[k, i_1, i_2] = \begin{cases} f[k-1, i_1-1, j_1] + f[k-1, i_2-1, j_1] + w[i_1][j_1] & \text{两个点重合} \\ f[k-1, i_1-1, j_1] + w[i_1, j_1] + f[k-1, i_2-1, j_2] + w[i_2, j_2] & \text{两个点不重合} \end{cases}$$

思考：

如何处理`同一个格子不被重复选择/走过`？

答：由于两条路径是同时移动，而且每次移动一个格子；我们不难发现一个关系式:
$i_1 + j_1 = i_2 + j_2$

即两条路线在横纵坐标之和相同时，才会出现重合。

为什么 $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ 能够说明两个路径走过的格子相同?

答：每次移动两条路径走过的点的方向（`向下/向右`）只有两个，那么我们能够确定两个点的下一步的移动范围，由$k = i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ 只要每一步出现 $i_1 = i_2$那么$j_1 = j_2$,产生了重合。

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 15;
int n;
int f[2 * N][N][N];
int w[N][N];

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    // 输入（有技巧性）
```

```
    int a, b, c;
    while (cin >> a >> b >> c, a || b || c) w[a][b] = c;

    // DP f[k][i1][i2]
    for (int k = 2; k <= n + n; ++k)
        for (int i1 = 1; i1 <= n; ++i1)
            for (int i2 = 1; i2 <= n; ++i2)
            {
                int j1 = k - i1, j2 = k - i2;
                // 判断是否在合法范围内
                if (j1 >= 1 && j1 <= n && j2 >= 1 && j2 <= n)
                {
                    // 特判,重复
                    int t = w[i1][j1];
                    if (i1 != i2) t += w[i2][j2];
                    // 向下 向下
                    f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k-1][i1-1][i2-1] + t);
                    // 向下 向右
                    f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k-1][i1-1][i2] + t);
                    // 向右 向下
                    f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k-1][i1][i2-1] + t);
                    // 向右 向右
                    f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k-1][i1][i2] + t);
                }
            }
   printf("%d\n", f[2*n][n][n]);
   return 0;
}
```

5.2.2 最长上升子序列 LIS（Longest Increasing Subsequence）

题目链接及解释：

AcWing895.最长上升子序列

何为`子序列`？

```
abcd
```

`abcd`是我们已知的序列，序列`abcd`的子集组成的集合就是序列`abcd`的子序列，比如：

长度为 1 的子序列`a`，长度为2的子序列`ab`，长度为 3 的子序列`acd`。

状态表示：f[i]

集合：从第一个数字开始计算，所有以数字 a_i 结尾的上升子序列 属性：最大值

状态计算：

集合划分：

划分依据：按照`最后一步`来划分，结尾数字 a_i 前面的一个数字是不确定的，我们划分出 $i-1$ 种可能性（表示以数字 a_i 结尾的序列的前面的数字个数）

划分依据的另一种描述：当前上升子序列中`最后一个不同的点/结尾数字的前一个点的值`

1） 以 a_i 结尾的上升子序列中，前一个数字为 a_1

2） 以 a_i 结尾的上升子序列中，前一个数字为 a_2

...

3) 以 a_i 结尾的上升子序列中，前一个数字为 a_{i-1}

除了上面 $i-1$ 种情况，还有一个上升子序列中有且仅有 a_i 这一个数字，这个情况下上升子序列的长度为 1

状态方程：

已知，数列

... a_k a_j a_i ...

而且，$f[j]$ 表示序列中以数字 j 为结尾的最长上升子序列的长度；

当 $a_j < a_i$ 时，满足最长上升子序列的条件更新 $f[i] = f[j] + 1$。（因为在更新 $f[i]$之前 $f[j]$ 就已经被`更新/计算`出来了）

状态转移方程：

$$f[i] = f[j] + 1 \qquad (j < i)$$

时间复杂度：

$O(n^2)$

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#incldue <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int f[N];
int a[N];

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d", &a[i]);

    // DP
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        f[i] = 1;    // 当只有a[i]自己，组成上升子序列时
        for (int j = 1; j < i; ++j)
        {
            if (a[j] < a[i])
                f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
        }
    }
    // 找最大值
    int res = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) res = max(res, f[i]);
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
```

优化版 - 贪心算法：

根据样例`3 1 2 1 8 5 6`，我们发现`3`可以接`8`组成最长上升子序列；同样，`3`后面的`1`同样可以接`8`；可以接到`3`的后面的数字一定能够接到比`3`小的数字的后面组成`最长上升子序列`。

根据最长上升子序列的长度来分类；`多个`最长上升子序列中求解出长度为 i 的数字，而且每一个长度结尾数值的最小值（取最小值，保证了后面能够拼接的数字范围更大）；

最长上升子序列的长度越长，子序列结尾数字的数值大小越大（不存在，结尾数字的数值大小相等的情况），严格单调递增（当满足单调递增的情况下，可以使用二分法）；

思想：拼接

根据上面的结论，数字 a_i 可以拼接到一个结尾数字的数值小于a_i 的最长上升子序列的后面，我们只要将 a_i 拼接到能够拼接的最长上升子序列结尾数字的最大值的后面（`二分法`：找到小于某一个数的最大的数字），就能够得到`长度加一`的最长上升子序列。

记得更新当前长度的最长上升子序列结尾数字的最小值。

时间复杂度： $O(n * logn)$

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1e6 + 10;
int n;
int a[N];
int q[N];    // q[i] 表示当前长度是i的最长上升子序列的末尾元素值

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) scanf("%d", &a[i]);

    int len = 0;    // 最长上升子序列的长度
    q[0] = -2e9;    // 设置边界

    // 通过二分法，查找最长上升子序列结尾q[i]小于a[i]的最大值
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        // 二分（区间）
        int l = 0, r = len;
        while (l < r)
        {
            int mid = (l + r + 1) >> 1;
            if (q[mid] < a[i]) l = mid;
            else r = mid - 1;
        }
        len = max(len, r + 1);
        // 拼接
        q[r + 1] = a[i];
    }
    printf("%d\n", len);
    return 0;
}
```

练习和提高：

AcWing1017.怪盗基德的滑翔翼

思路 - 如何转化成LIS问题： 当怪盗基德从某一栋房子开始向左跳时：

我们可以把这个问题当作`从最左端开始/从左向右看`的`LIS问题`；

当怪盗基德从某一栋房子开始向右跳时：

我们可以把这个问题当作`从最右端开始/从右向左看`的`LIS问题`；

最终：

两个方向的`LIS问题`求解

AcWing1014.登山

分析题目： 1） 根据`每次浏览的景点海拔都要大于前一个`；说明这个问题涉及到了`子序列`。

2） `相邻两个景点的高度不能相同`，`一旦开始下降，就不能上升了`；说明子序列满足`先严格单调递增然后严格单调递减`。

3） 求最多能浏览多少景点。

目标：

所有形状是`先严格单调递增然后严格单调递减（金字塔形状）`的子序列长度的最大值。

状态表示：$f[i]$

集合表示：所有以 $a[i]$ 为峰值的子序列

属性： 最大值

状态计算：

集合划分：

1）当峰值为 $a[0]$ 时，子序列的最大长度

2）当峰值为 $a[1]$ 时，子序列的最大长度

...

3） 当峰值为$a[n]$ 时，子序列的最大长度

当 $a[k]$ 为峰值的时候，左边的上升子序列和右边上升子序列的最大值求解是独立的；可以分别求处左右两边的上升子序列的最大值 $f[k]$ 和 $g[k]$；

注意,分段求解需要将额外的计算1次 $a[k]$ 减掉

状态方程：

$f[i] = f[j] + 1$

$g[i] = g[j] + 1$

$sum = f[i] + g[i] - 1$

优化 - 打表：

从 $O(n^3)$ 优化成 $O(n^2)$

```cpp
// 未优化
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;

const int N = 1010;
int n;
```

```cpp
int a[N], f[N], g[N];

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d", &a[i]);
    // 左边
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        f[i] = 1;
        for (int j = 1; j < i; ++j)
        {
            if (a[j] < a[i]) f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
        }
    }
    // 右边
    for (int i = n; i >= 1; --i)
    {
        g[i] = 1;
        for (int j = n; j > i; --j)
        {
            if (a[j] < a[i]) g[i] = max(g[i], g[j] + 1);
        }
    }
    // 注意：处理额外的一次
    int res = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) res = max(res, f[i] + g[i] - 1);
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
```

AcWing482.合唱队形

思路：同AcWing1014.登山 仅仅对最后的结果做处理即可。

提示：（对偶）保留的人数尽可能多，剔除的人数就会变少了

AcWing1012.友好城市

难点： 思路上，非代码上

技巧：转化

题目分析： 1） 每个城市上只能建一座桥

2） 所有桥与桥之间不能相交

求解建桥的数量最大

状态表示：

集合：

首先，将南北两岸的城市在纸上画出来用两行表示（上面一行对应北岸，下面一行对应南岸）；由于友好城市的的关系是一一对应的，我们可以将某一行进行排序（另一行的顺序也会造成改变）；

比如，对下面一行（南岸）城市的位置进行升序排序，然后从下面一行（南岸）的城市向其对应的城市建立友好关系；

根据题目中的要求`桥与桥之间不能相交`，所以只要保证从下面一行（南岸）的城市与其对应的友好城市（上面一行）位置/坐标是上升子序列（单调的）即可求解出该问题；

通过上面的分析，我们得到了两个集合：`所有合法的建桥方式`和`上升子序列`

属性：最大值

状态计算：

参考`最小上升子序列（朴素）`

使用了`双关键字排序方法`，防止TLE。

代码示例：

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;
typedef pair<int,int> pii;

const int N = 5010;
int n;
pii q[N];
int f[N];

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 0; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &q[i].first, &q[i].second);

    sort(q, q + n);    // 对北岸进行排序（与分析中举例相反）

    // DP-最小上升子序列
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        f[i] = 1;
        for (int j = 0; j < i; ++j)
            if (q[j].second < q[i].second)
                f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
         res = max(res, f[i]);
    }
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
////////////////另一种写法（细节上不一样）//////////////////////////////
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;
typedef pair<int,int> pii;

const int N = 5010;
int n;
int f[N];
pii q[N];

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d%d", &q[i].first, &q[i].second);
```

```
    sort(q + 1, q + n + 1);
    // DP-LIS
    int res = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        f[i] = 1;
        for (int j = 1; j < i; ++j)
            if (q[j].second < q[i].second)
                f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
        res = max(f[i], res);
    }
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
```

AcWing1016.最大上升子序列和

求解目标：

满足：1）上升子序列 2）子序列之和最大值

不一定是最长上升子序列，但是一定要满足上升子序列之和最大值

题目分析：

状态表示：

集合： 所有以$a[i]$结尾的上升子序列

属性：每一个上升子序列的`和的最大值`

状态计算：

集合的划分：

划分依据： 从`最后一步`考虑它的前一步；

按照以 $a[i]$ 结尾的上升子序列，前一个数的值`（倒数第二个数）`划分；

1）$a[i]$ 的前面是空的；

2）倒数第二个数是 $a[1]$ ；

3）倒数第二个数是 $a[2]$ ；

...

4） 倒数第二个数是 $a[i-1]$ ；

状态方程：

当 $a[i]$ 前面是空的，最大值为 $a[i]$；

当倒数第二个数是 $a[k]$ 时，上升子序列的最大值就是以 $a[k]$ 结尾的上升子序列最大值 $f[k]$ 再加 $a[i]$ ；

$f[i]=f[i]+a[i]$

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;
const int N = 1010;
int a[N];
int f[N];
```

```cpp
int n;

int main()
{
    scanf("%d", &n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%d", &a[i]);

    int res = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
    {
        f[i] = a[i];
        for (int j = 1; j < i; ++j)
        {
            if (a[j] < a[i])
                f[i] = max(f[i], f[j] + a[i]);
        }
        res = max(f[i], res);
    }
    printf("%d\n", res);
    return 0;
}
```

5.2.3 最长公共子序列 LCS（Longest Common Subsequence）

5.2.3.1 题目链接及样例解释：

题目链接：

AcWing897.最长公共子序列

样例解释：

```
acbd
abedc
```

最长公共子序列及长度: abd 3

子序列解释：同`LIS`。

5.2.3.2 算法流程

状态表示：

$f[i,j]$二维的状态

集合：所有由第一个序列的前 i 个字母和第二个序列的前 j 个字母能够组成的公共子序列（所有在第一个序列的前 i 个字母中出现，而且在第二个序列的前 j 个字母中同样出现的子序列）

属性：最大值

状态计算：

集合的划分：

从当前是`最后一步`来考虑，或者说，从上一种状态$f[i-1][j-1]$到当前状态；

以 $a[i]$ 和 $b[j]$ 是否存在于公共子序列当中；一共四种情况：

1）$a[i]$不存在，$b[j]$不存在， 最长公共子序列的长度不变，仍然为前第一行 $i-1$ 个字母和第二行前 $j-1$能够构成的最长公共子序列的长度；

$f[i-1,j-1]$

2）$a[i]$不存在，$b[j]$存在；

不能直接用 $f[i-1,j]$ 这个状态来表示，但是$f[i-1,j]$ 却包含了这种情况；

3）$a[i]$存在，$b[j]$不存在；

不能直接用$f[i,j-1]$这个状态来表示，但是 $f[i,j-1]$

4）$a[i]$存在，$b[j]$存在，公共子序列长度加1；

$f[i-1,j-1]+1$

状态方程：

最终结果就是，从上面的四种情况里选出，最大值即可；

$f[i,j]=max(f[i-1,j],f[i,j-1],f[i-1][j-1]+1)$

代码示例：

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <algorithm>

using namespace std;
const int N = 1010;
int n, m;
char a[N], b[N];
int f[N][N];

int main()
{
    scanf("%d%d", &n, &m);
    scanf("%s%s", a + 1, b + 1);

    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 1; j <= m; ++j)
        {
            f[i][j] = max(f[i - 1][j], f[i][j - 1]);
            if (a[i] == b[j]) f[i][j] = max(f[i][j], f[i-1]);
        }
    printf("%d\n", f[n][m]);
    return 0;
}
```

第六部分 贪心算法

6.1 区间问题

6.1.1

第七部分 时空复杂度