傅立叶变换与频域分析简介

报 告 人　肖春雨

指导老师　周泽兵 教授

白彦峥 教授

2021-12-02

华中科技大学

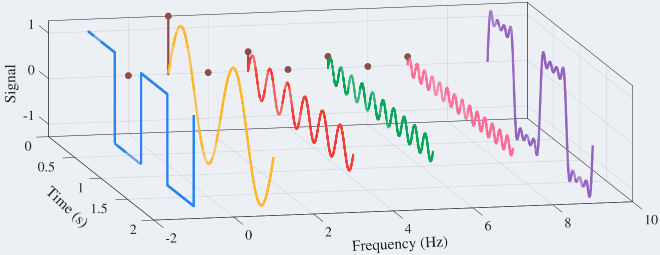
报告内容

- 连续信号频域分析
  - 傅立叶级数：周期信号
  - 傅立叶变换：非周期信号
  - 两者的统一：狄拉克函数
- 离散信号频域分析
  - 时域采样：频率混叠
  - 有限窗长：频率泄露
  - 频域采样：栅栏效应
- 噪声与功率谱估计
  - 数据的频域特征：幅度谱、功率谱
  - 功率谱估计算法：周期图、Welch、LPSD
  - 功率谱实际应用：噪声评估、系统辨识

连续信号频域分析

周期信号的频域分解

问题：如何将周期信号分解为正弦信号的叠加？



- 选正交基：$\vec{x}, \vec{y} \quad \longrightarrow \quad \cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$
- 坐标表示：$\vec{r} = r_x\vec{x} + r_y\vec{y} \quad \longrightarrow \quad f(t) = \sum a_n \cos k\omega_0 t$
- 计算内积：$r_x = \sum r_i x_i \quad \longrightarrow \quad a_k = \int f(t) \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t$

单边傅立叶级数

综合公式

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

分析公式

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_T x(t) \cos k\omega_0 t \, \mathrm{d}t \\ b_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_T x(t) \sin k\omega_0 t \, \mathrm{d}t \end{cases}$$

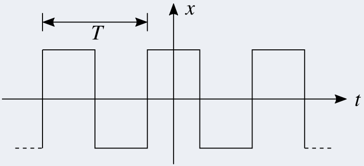
收敛条件（Dirichlet Conditions）

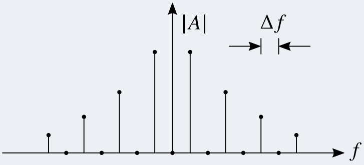
- 周期内绝对可积
- 不存在第二类间断点

傅立叶级数及其性质

傅立叶级数（Fourier Series）

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\omega_0 t} \qquad A_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$





基本性质：频率间隔 $\Delta f = 1/T$，共轭对称，周期 $\leftrightarrow$ 离散

非周期信号

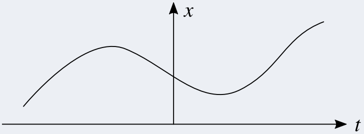
非周期信号 ⇔ 周期无限大

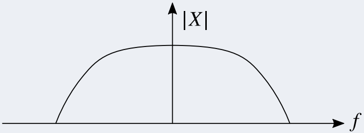
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \\
&= \lim_{T\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t} \, \mathrm{d}t}_{X(\mathrm{j}\omega)} \\
&= \lim_{\omega_0\to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \omega_0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

傅立叶变换及其性质

傅立叶变换（Fourier Transform）

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$





基本性质：共轭对称，非周期 $\leftrightarrow$ 连续

狄拉克函数（采样函数）

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \delta(t):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

- 采样性质：$\int f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=f(t_0)$
- 卷积性质：$f(t)*\delta(t-t_0)=\int f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t-t_0)$

傅立叶变换的统一表达

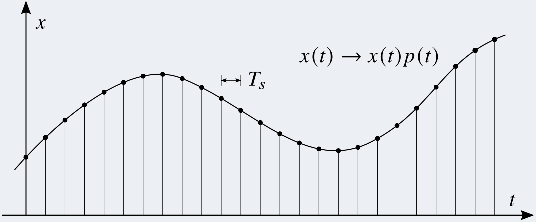
$$X(\mathrm{j}\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi A_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\Leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

离散信号频域分析

时域采样与离散时间傅立叶变换

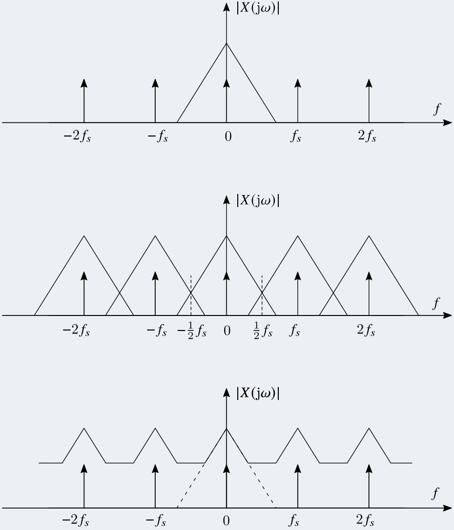
连续信号的离散化：冲击串采样 $p(t) = \sum \delta(t - nT_s)$



离散时间傅立叶变换（Discrete-Time Fourier Transform）

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \qquad X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

连续信号采样与频谱混叠



混叠的直接原因

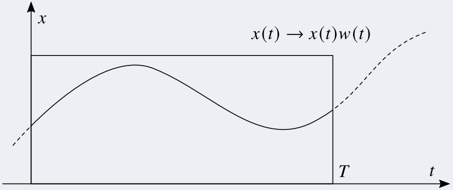
- 高频噪声的影响
- 采样率太小

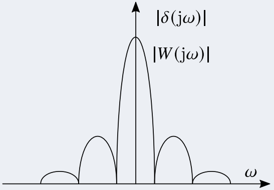
防止混叠的一般方法

- 抗混叠滤波器
- 提高采样率

有限时间截断与频率泄漏

信号的加窗处理



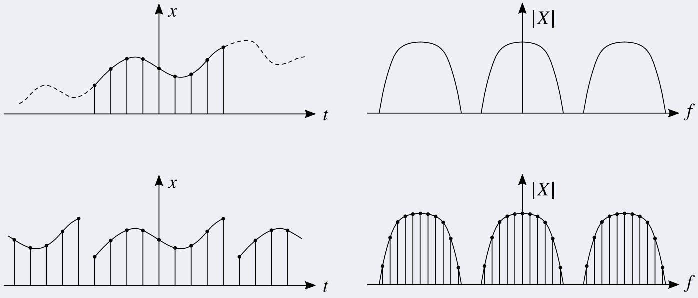


窗函数特性

- 主瓣宽度：频率分辨率 $f_{\mathrm{res}} = 1/T$
- 旁瓣高度：频率泄漏

常用窗函数：汉宁窗、海明窗、布莱克曼窗……

离散傅立叶变换与栅栏效应



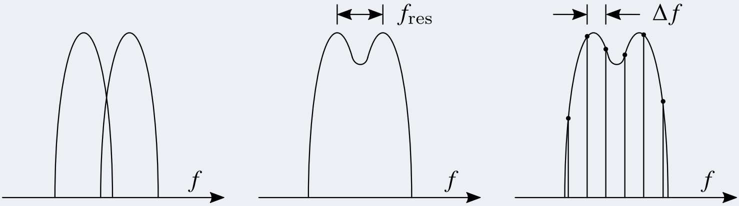
离散傅立叶变换（Discrete Fourier Transform）

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{k}{N}n} \qquad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{k}{N}n}$$

频率分辨率与计算分辨率

频率分辨率： $X(\mathrm{j}\omega)$ 中能够分辨的最小频率间隔 $f_{\mathrm{res}} = \frac{1}{T}$

计算分辨率： 离散傅立叶变换的频率间隔（栅栏效应）$\Delta f = \frac{f_s}{N}$



- 改善频率分辨率： 增加采样时长
- 改善计算分辨率： 增加采样时长、数据末尾补零

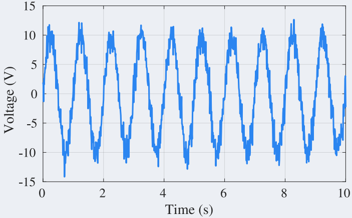
程佩清. 数字信号处理. 第四版. 清华大学出版社. 2013. 185–189.

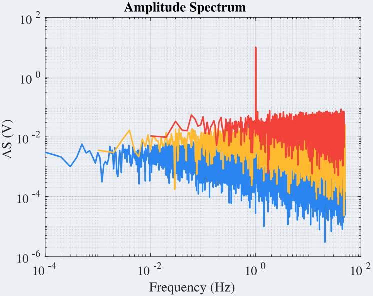
噪声与功率谱估计

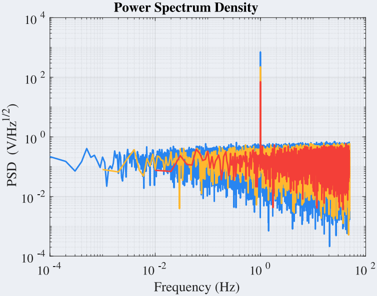
数据的频域特征

数据 = 信号 + 噪声

- 信号： 确定规律
- 噪声： 统计规律







功率谱密度的计算

维纳–辛钦定理：功率谱密度是自相关函数的傅立叶变换

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau)x(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} x(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \bar{X}(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |X(\mathrm{j}\omega)|^2
\end{aligned}
$$

常用形式

$$
S_x(\omega) \approx \frac{1}{Nf_s} |X(k)|^2 \to \sqrt{\frac{2}{Nf_s}}\,|X(k)|
$$

功率谱估计算法：周期图

```
[pxx,f] = periodogram(x,window,nfft,fs,'onesided');
```

数据加窗

↓

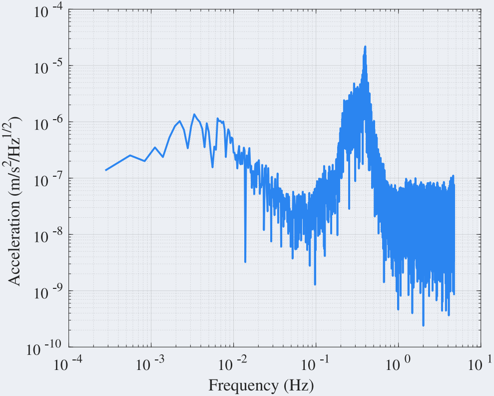
FFT 计算频谱

↓

计算功率谱密度

↓

汇总并绘图



功率谱估计算法：Welch

```
[pxx,f] = pwelch(x,window,noverlap,nfft,fs,'onesided');
```

数据等长分段

↓

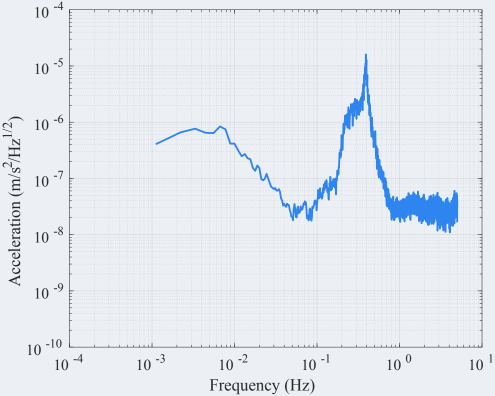
每段使用周期图法

↓

各段谱密度对应平均

↓

汇总并绘图



功率谱估计算法：LPSD

```
[pxx,f] = iLPSD(x,fs);
```

构造对数均匀频率点

↓

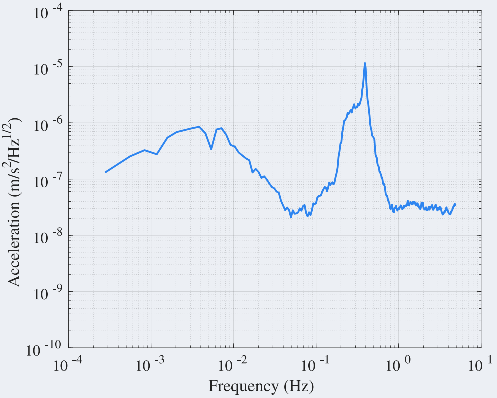
根据频率分辨率分段

↓

单点 DFT 并求各段平均

↓

汇总并绘图



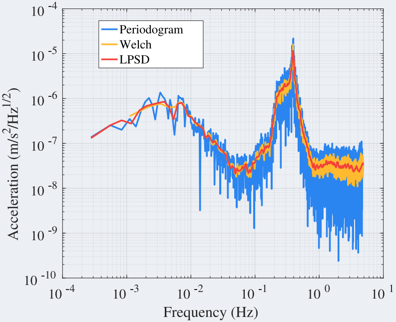
---

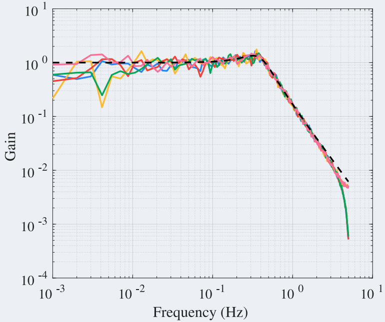
[1] M. Tröbs, et al. Improved Spectrum Estimation from Digitized Time Series on a Logarithmic Frequency Axis.

[2] LPSD 功率谱估计. https://ichunyu.github.io/lpsd/

功率谱实际应用

示例：噪声测试、系统辨识





https://github.com/iChunyu/signal-process-demo

谢 谢 ！