功率谱估计及其应用

肖春雨

2020-10-22

华中科技大学

报告内容

理论基础

算法实现

实际应用

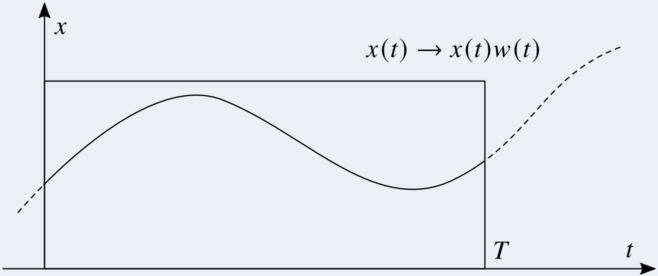
理论基础

功率谱的计算

维纳–辛钦定理

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t-\tau)x(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-t}x(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-t}\bar{X}(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2
\end{aligned}
$$

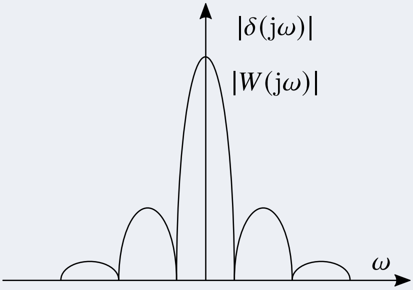
频率泄漏 — 有限时间的截断效应



$$\mathcal{F}\left[x(t)w(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} x(t)w(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega) * W(\mathrm{j}\omega)$$

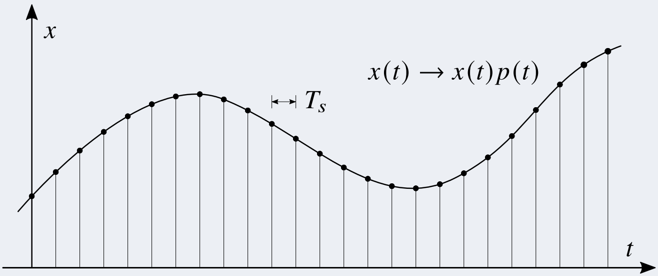
频率泄漏 — 有限时间的截断效应

窗函数的影响



- 主瓣宽度：频率分辨率
- 旁瓣高度：频率泄漏

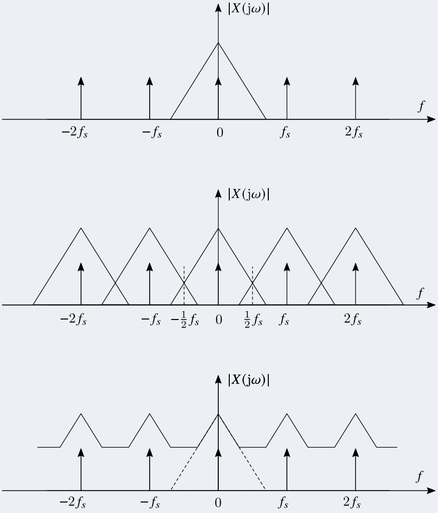
频谱混叠 — 连续信号的采样失真



$$\mathscr{F}\left[x(t)p(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t - nT_s\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega) * P(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\mathrm{j}\omega - \mathrm{j}k\omega_s)$$

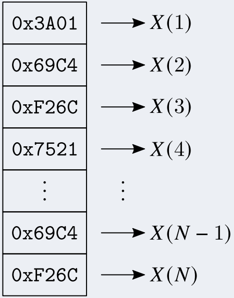
频谱混叠 — 连续信号的采样失真

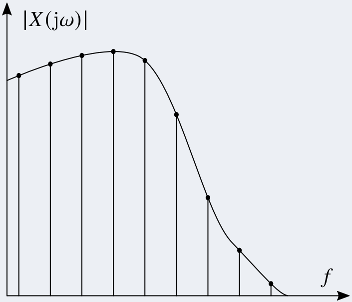


防止混叠的一般方法

- 抗混叠滤波器
- 提高采样率

栅栏效应 — 数字算法的离散本质





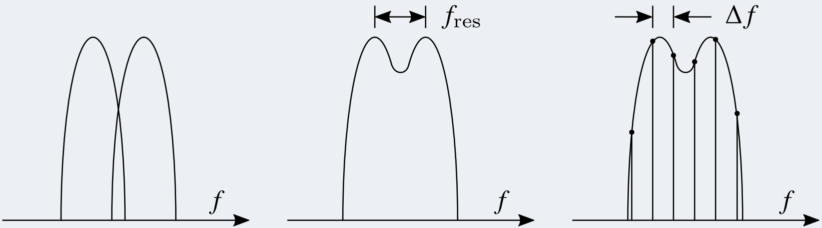
减小栅栏效应的一般方法

- 增加采样点数
- 有效数据尾部补零

频率分辨率

频率分辨率：数据连续谱 $X(\mathrm{j}\omega)$ 中能够分辨的最小频率间隔

计算分辨率：DFT 算法所引入的频率间隔（栅栏效应）



$$f_{\mathrm{res}} = \frac{1}{T} \qquad \Delta f = \frac{f_s}{N}$$

程佩清. 数字信号处理. 第四版. 清华大学出版社. 2013. 185–189.

算法实现

周期图法

```
[pxx,f] = periodogram(data,window,nfft,fs,'onesided');
```

Welch 法

```
[pxx,f] = pwelch(data,window,noverlap,nfft,fs,'onesided');
```

LPSD

```
[pxx,f] = iLPSD(data,fs);
```

M. Tröbs, G. Heinzel. Improved Spectrum Estimation from Digitized Time Series on a Logarithmic Frequency Axis. Measurement. 2006.

实际应用

功率谱估计实际应用

- 信号检测
- 噪声本底
- 系统辨识

https://github.com/iChunyu/signal-process-demo

谢 谢 ！