

# 功率谱估计及其应用

---

肖春雨

2020-10-22

华中科技大学

理论基础

算法实现

实际应用

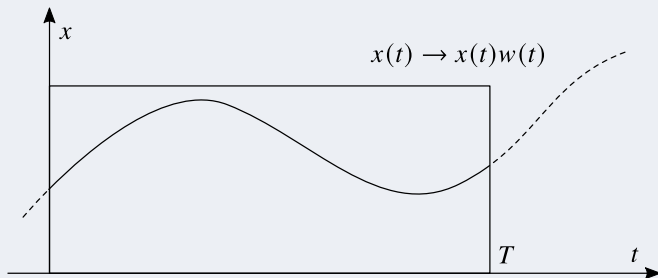
## 理论基础

---

### 维纳-辛钦定理

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\tau)x(t) dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-t} x(t-\tau) e^{-j\omega(\tau-t)} d\tau dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-t} \bar{X}(j\omega) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2 \end{aligned}$$

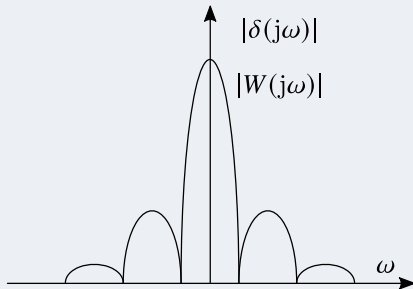
## 频率泄漏 — 有限时间的截断效应



$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)w(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^T x(t)w(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * W(j\omega)\end{aligned}$$

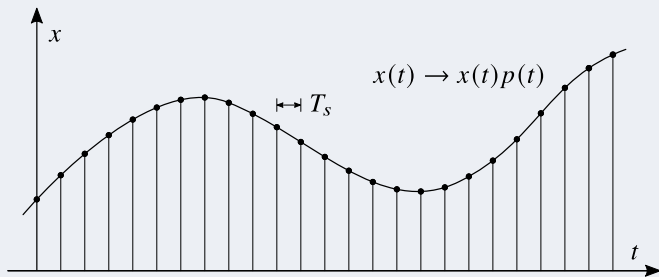
## 频率泄漏 — 有限时间的截断效应

### 窗函数的影响



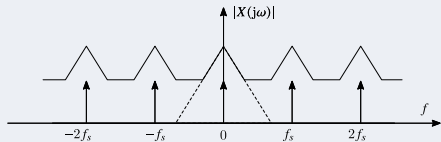
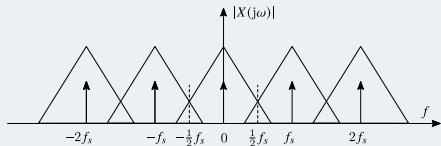
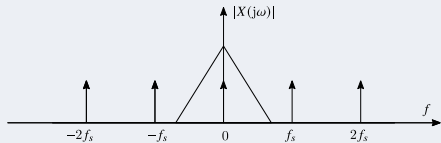
- 主瓣宽度：频率分辨率
- 旁瓣高度：频率泄漏

## 频谱混叠 — 连续信号的采样失真



$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)p(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\omega - jk\omega_s)\end{aligned}$$

## 频谱混叠 — 连续信号的采样失真



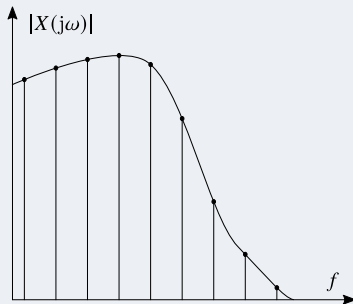
防止混叠的一般方法

- 抗混叠滤波器
- 提高采样率



## 栅栏效应 — 数字算法的离散本质

0x3A01	→ $X(1)$
0x69C4	→ $X(2)$
0xF26C	→ $X(3)$
0x7521	→ $X(4)$
⋮	⋮
0x69C4	→ $X(N-1)$
0xF26C	→ $X(N)$



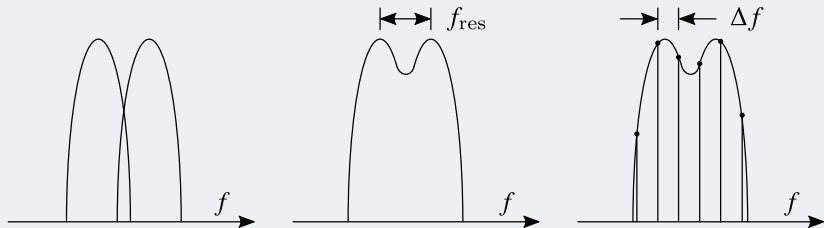
### 减小栅栏效应的一般方法

- 增加采样点数
- 有效数据尾部补零

## 频率分辨率

频率分辨率：数据连续谱  $X(j\omega)$  中能够分辨的最小频率间隔

计算分辨率：DFT 算法所引入的频率间隔（栅栏效应）



$$f_{\text{res}} = \frac{1}{T} \quad \Delta f = \frac{f_s}{N}$$

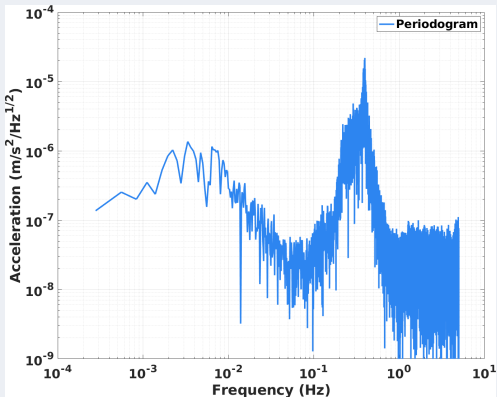
# 算法实现

---

# 周期图法

```
[pxx,f] = periodogram(data>window,nfft,fs,'onesided');
```

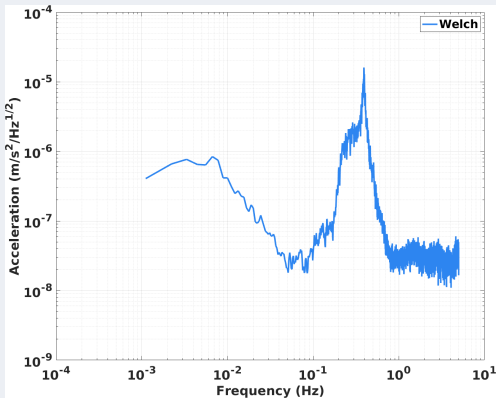
数据加窗  
↓  
FFT 计算频谱  
↓  
计算功率谱密度  
↓  
汇总并绘图



# Welch 法

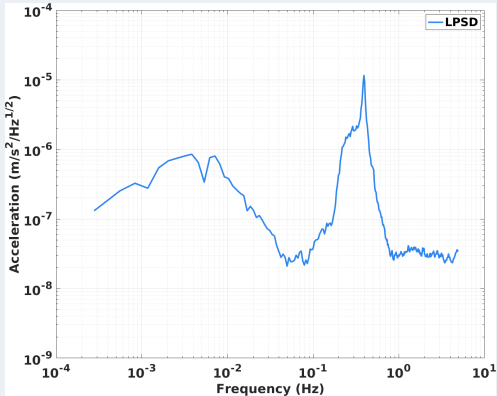
```
[pxx,f] = pwelch(data>window,noverlap,nfft,fs,'onesided');
```

数据等长分段  
↓  
每段使用周期图法  
↓  
各段谱密度对应平均  
↓  
汇总并绘图



```
[pxx,f] = iLPSD(data,fs);
```

构造对数均匀频率点  
↓  
根据频率分辨率分段  
↓  
单点 DFT 并求各段平均  
↓  
汇总并绘图



M. Tröbs, G. Heinzl. Improved Spectrum Estimation from Digitized Time Series on a Logarithmic Frequency Axis. Measurement. 2006.

## 实际应用

---

# 功率谱估计实际应用

- 信号检测
- 噪声本底
- 系统辨识



<https://github.com/iChunyu/signal-process-demo>



**谢谢！**