

傅立叶变换与频域分析简介

报 告 人 肖春雨

指导老师 周泽兵 教授

白彦峥 教授

2021-12-02

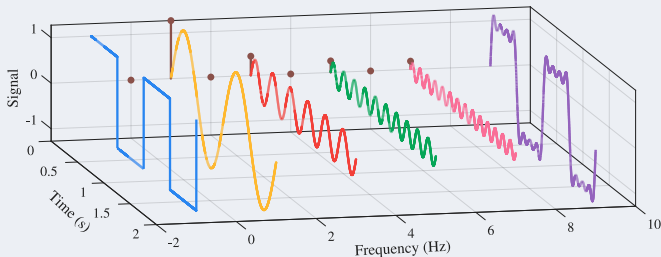
华中科技大学

- 连续信号频域分析
 - 傅立叶级数：周期信号
 - 傅立叶变换：非周期信号
 - 两者的统一：狄拉克函数
- 离散信号频域分析
 - 时域采样：频率混叠
 - 有限窗长：频率泄露
 - 频域采样：栅栏效应
- 噪声与功率谱估计
 - 数据的频域特征：幅度谱、功率谱
 - 功率谱估计算法：周期图、Welch、LPSD
 - 功率谱实际应用：噪声评估、系统辨识

连续信号频域分析

周期信号的频域分解

问题：如何将周期信号分解为正弦信号的叠加？



- 选正交基: $\vec{x}, \vec{y} \rightarrow \cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$
- 坐标表示: $\vec{r} = r_x \vec{x} + r_y \vec{y} \rightarrow f(t) = \sum a_n \cos k\omega_0 t$
- 计算内积: $r_x = \sum r_i x_i \rightarrow a_k = \int f(t) \cos k\omega_0 t dt$

单边傅立叶级数

综合公式

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

分析公式

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin k\omega_0 t \, dt \end{cases}$$

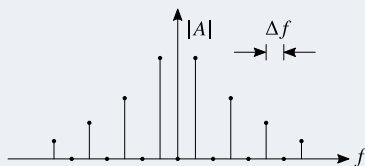
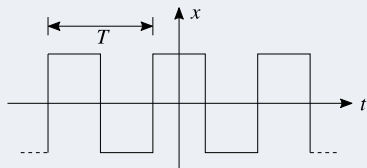
收敛条件 (Dirichlet Conditions)

- 周期内绝对可积
- 不存在第二类间断点

傅立叶级数及其性质

傅立叶级数 (Fourier Series)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\omega_0 t} \quad A_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



基本性质：频率间隔 $\Delta f = 1/T$ ，共轭对称，周期 \leftrightarrow 离散

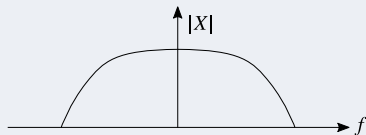
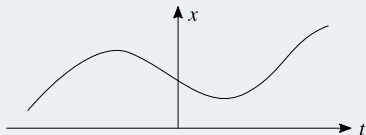
非周期信号 \Leftrightarrow 周期无限大

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\omega_0 t} \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{X(j\omega)} \\&= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

傅立叶变换及其性质

傅立叶变换 (Fourier Transform)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



基本性质：共轭对称，非周期 \leftrightarrow 连续

狄拉克函数的引入

狄拉克函数（采样函数）

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \rightarrow \delta(t) := \frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

- 采样性质: $\int f(t)\delta(t-t_0) dt = \int f(t_0)\delta(t-t_0) dt = f(t_0)$
- 卷积性质: $f(t) * \delta(t-t_0) = \int f(\tau)\delta(t-t_0-\tau) d\tau = f(t-t_0)$

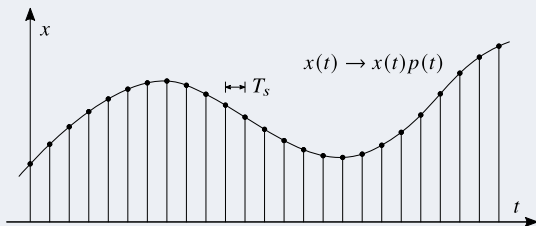
傅立叶变换的统一表达

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi A_k \delta(\omega - k\omega_0)$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{jk\omega_0 t}$$

离散信号频域分析

时域采样与离散时间傅立叶变换

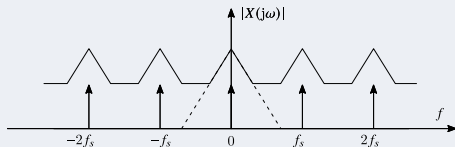
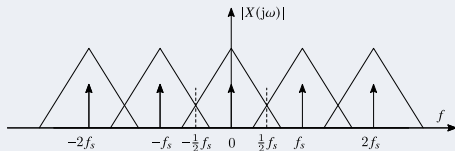
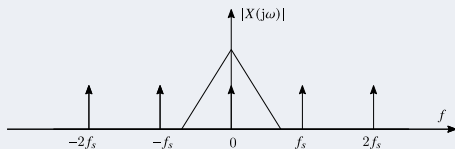
连续信号的离散化：冲击串采样 $p(t) = \sum \delta(t - nT_s)$



离散时间傅立叶变换 (Discrete-Time Fourier Transform)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

连续信号采样与频谱混叠



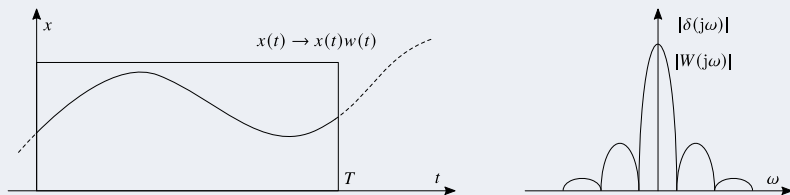
混叠的直接原因

- 高频噪声的影响
- 采样率太小

防止混叠的一般方法

- 抗混叠滤波器
- 提高采样率

信号的加窗处理

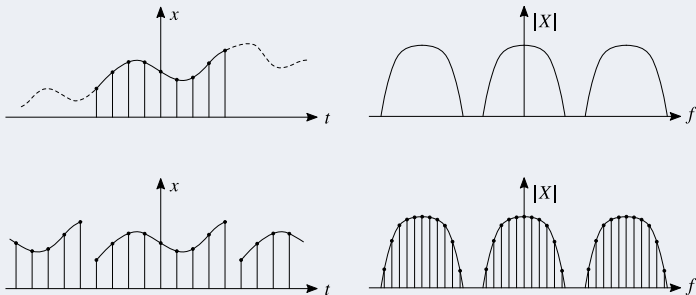


窗函数特性

- 主瓣宽度：频率分辨率 $f_{\text{res}} = 1/T$
- 旁瓣高度：频率泄漏

常用窗函数：汉宁窗、海明窗、布莱克曼窗……

离散傅立叶变换与栅栏效应



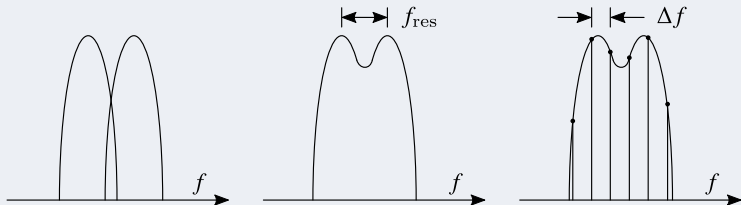
离散傅立叶变换 (Discrete Fourier Transform)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

频率分辨率与计算分辨率

频率分辨率： $X(j\omega)$ 中能够分辨的最小频率间隔 $f_{\text{res}} = \frac{1}{T}$

计算分辨率：离散傅立叶变换的频率间隔（栅栏效应） $\Delta f = \frac{f_s}{N}$



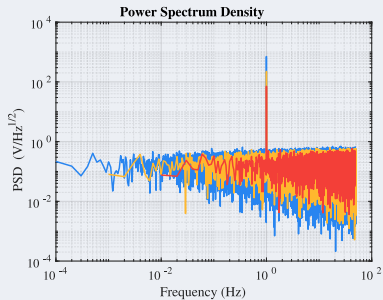
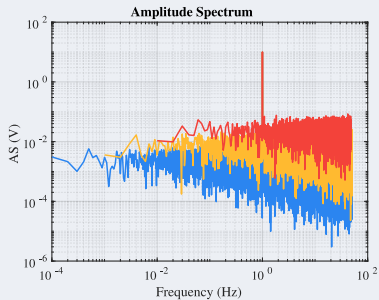
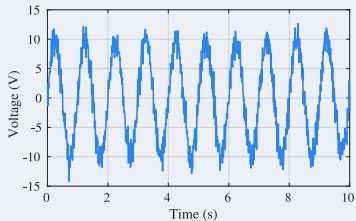
- 改善频率分辨率：增加采样时长
- 改善计算分辨率：增加采样时长、数据末尾补零

噪声与功率谱估计

数据的频域特征

数据 = 信号 + 噪声

- 信号：确定规律
- 噪声：统计规律



功率谱密度的计算

维纳-辛钦定理：功率谱密度是自相关函数的傅立叶变换

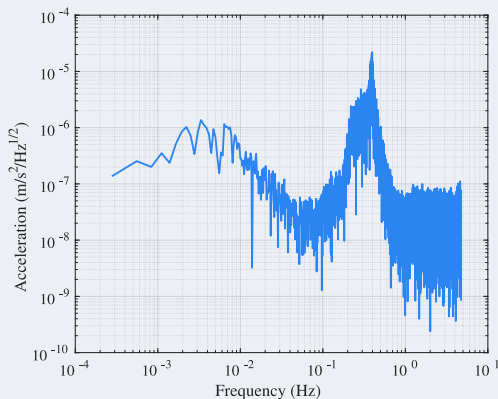
$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\tau)x(t) dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} x(t-\tau)e^{-j\omega(\tau-t)} d\tau dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)e^{-j\omega t} \bar{X}(j\omega) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2 \end{aligned}$$

常用形式

$$S_x(\omega) \approx \frac{1}{Nf_s} |X(k)|^2 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{Nf_s}} |X(k)|$$

功率谱估算法：周期图

```
[pxx,f] = periodogram(x>window,nfft,fs,'onesided');
```



功率谱估计算法：Welch

```
[pxx,f] = pwelch(x>window,noverlap,nfft,fs,'onesided');
```

数据等长分段



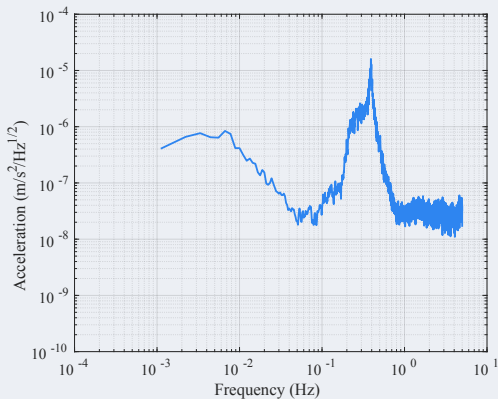
每段使用周期图法



各段谱密度对应平均



汇总并绘图



功率谱估计算法：LPSP

```
[pxx,f] = iLPSP(x,fs);
```

构造对数均匀频率点



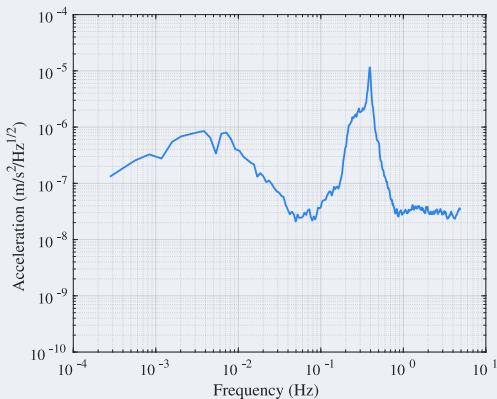
根据频率分辨率分段



单点 DFT 并求各段平均



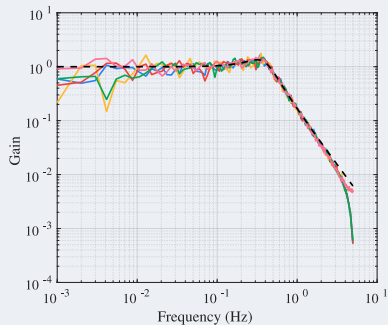
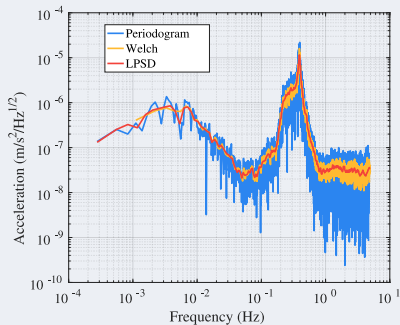
汇总并绘图



[1] M. Tröbs, et al. Improved Spectrum Estimation from Digitized Time Series on a Logarithmic Frequency Axis.

[2] LPSP 功率谱估计. <https://ichunyu.github.io/lpsd/>

示例：噪声测试、系统辨识



<https://github.com/iChunyu/signal-process-demo>

谢谢！

