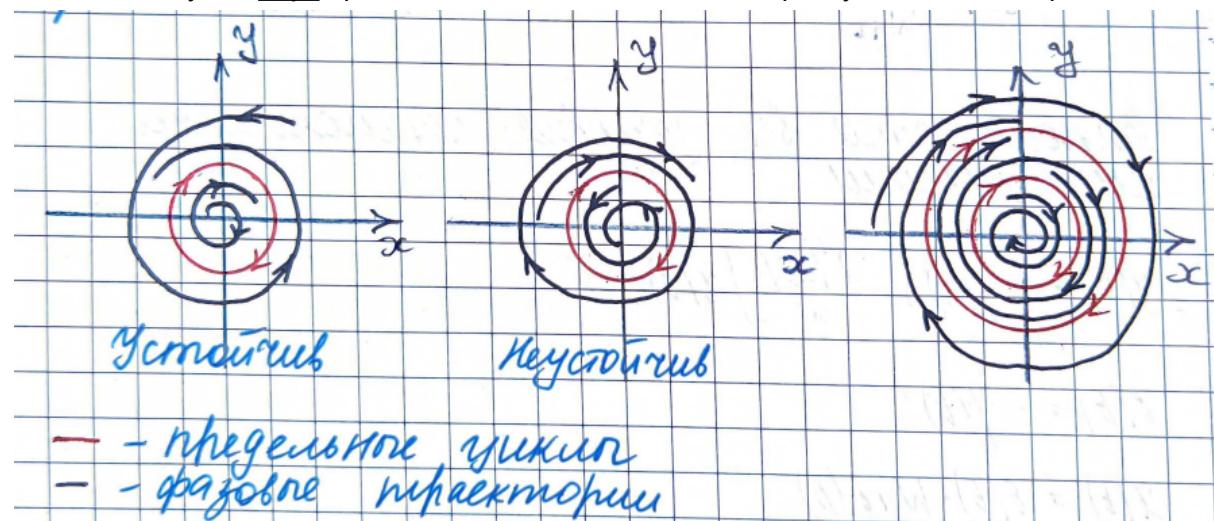


Модуль 1

1. Исследование устойчивости предельных циклов с помощью критерия Михайлова.

Предельный цикл - замкнутая кривая, соответствующая периодическим процессам, в окрестности которой имеют место колебательные переходные процессы. (Фазовая траектория - замкнутый круг/овал).

Если фазовые траектории изнутри и снаружи сходятся к предельному циклу, то это устойчивый предельный цикл, если удаляются в обе стороны - неустойчивый. Возможен случай двух предельных циклов, один из которых устойчив, а второй - нет.



Физический смысл устойчивого периодического процесса, отвечающего предельному циклу - автоколебания системы.

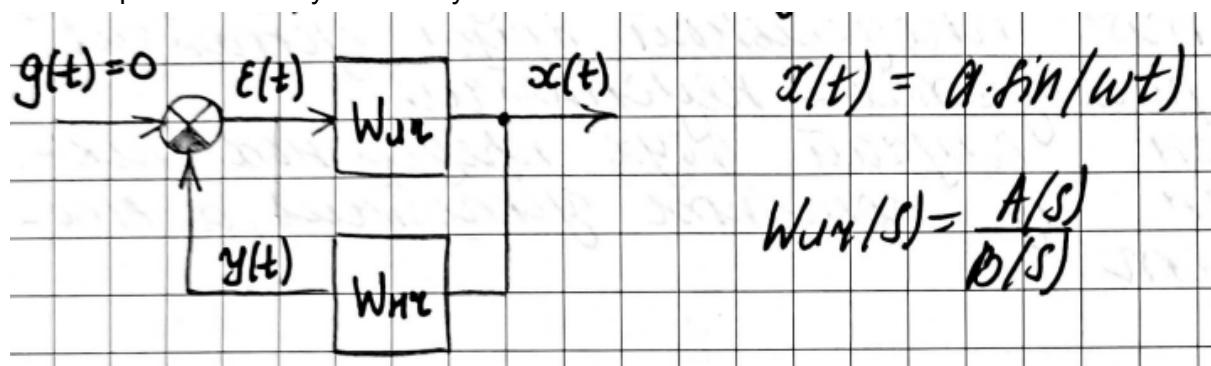
Автоколебания - собственные периодические колебания системы, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия.

При этом частота и амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий, а определяются внутренними свойствами системы.

Автоколебания могут возникать только в нелинейных системах.

В линейных системах собственные периодические колебания возможны только на границе устойчивости (все корни характеристического уравнения комплексные). Причем их амплитуда определяется начальными условиями.

Рассмотрим нелинейную систему



Выполняются все условия гармонической линеаризации. (лин. часть - обладает свойством фильтра низких частот, условие Дирихле (расклад. в ряд Фурье), нелинейность одна или сводима к одной.)

$$y(t) = [q(a) + \frac{q'(a)p}{\omega}]x(t)$$

$$p(t) = -y(t)$$

$$x(t) = E(t) \cdot W_{u\bar{u}}(p)$$

$$- [q(a) + \frac{q'(a)p}{\omega}]x(t) \cdot \frac{A(p)}{B(p)} = x(t)$$

$$x(t) \left[B(p) + A(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)p}{\omega} \right] \right] = 0$$

$p = j\omega = \lambda$ / переходим в частотную область)

$$(B(j\omega) + A(j\omega) \left[q(a) + \frac{q'(a)j\omega}{\omega} \right])x(t) = 0$$

$$B(j\omega) + A(j\omega) \left[q(a) + jq'(a)/\omega \right] = 0$$

Выделяем в выражении мнимую и действительную часть.

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0$$

Получим систему из двух алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} X(a, \omega) = 0 \\ Y(a, \omega) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{находим } a \text{ и } \omega$$

Вывод критерия Михайлова:

$$B(p)x(t) + A(p)F(x) = 0$$

$$x = x^* + \Delta x, \quad x^* = a \sin(\omega t)$$

$$B(p)(x^* + \Delta x) + A(p)F(x^* + \Delta x) = 0$$

$$F(x^* + \Delta x)$$

Разложим $F(x^* + \Delta x)$ и отбросим слагаемые с производными высшего порядка. Получим уравнение в малых отклонениях

$$B(p)\Delta x + A(p)\frac{(dF)}{dx}\Delta x = 0 \quad \text{малых} \\ F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \frac{(dF)}{dx}|_{x^*} \Delta x \\ A(p)x^* + R(p)F(x^*) = 0$$

Но поскольку этот способ очень сложный, то исследуем устойчивость приближенным способом.

Зададим малые начальные отклонения амплитуды и частоты.

$$x^* + \Delta x = (a + \Delta a) \sin(\omega t + \Delta \omega) e^{-\xi t} \quad -\text{стабильный} \\ -\text{каскадаточный} \\ \text{переходный процесс} \\ \text{близи периодического}$$

ξ - показатель затухания, показывает насколько быстро сходятся или расходятся колебания

Для устойчивости необходимо, чтобы Δa и ξ имели одинаковые знаки.

$$\Delta a = a \sin \omega t = a e^{j\omega t} \Rightarrow x = (a + \Delta a) e^{j(\omega + \Delta \omega + j\xi)t}$$

$$X(a + \Delta a, \omega + \Delta \omega + j\xi) + jY(a + \Delta a, \omega + \Delta \omega + j\xi) = 0$$

Разложим в ряд Тейлора

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + j\xi) + j \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + j \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + j\xi) = 0$$

Выделяем вещественную и мнимую части, исключаем Δa . Тогда:

$$\xi = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial x}{\partial w}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2} da$$

Для совпадения знаков применяем следующее условие:

$$\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} > 0 \quad - \text{критерий устойчивости} \\ (\text{кр. Михайлова})$$

*Почему это критерий Михайлова (непростой вопрос от Ипполитовой):

Как мы помним из прошлого семестра, для линейных систем у нас тоже есть критерий Михайлова (с кривой Михайлова). И когда у нас эта кривая Михайлова проходит через центр координат, то мы упоминали об особом состоянии системы, так называемая, граница устойчивости. И именно на этой границе устойчивости корни уравнения у нас будут выглядеть, как:

$$x = a \sin(\omega t)$$

Теперь возвращаемся к нашим нелинейным системам. В нелинейных системах отсутствует понятие о границе устойчивости, тк есть автоколебания, исследованием которых мы и занимаемся с помощью критерия Михайлова для НЕлинейных систем, где в свою очередь решение (ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ системы) находится тоже в форме

$$x = a \sin(\omega t)$$

, с учетом отбрасывания высших гармоник.

Таким образом, имеем одинаковое общее периодическое решение для двух случаев - это и есть связь критерия Михайлова для линейных систем с критерием Михайлова для НЕлинейных систем.

2. Гармоническая линеаризация несимметричных характеристик нелинейных звеньев.

Идея метода гармонической линеаризации - в системе возникли автоколебания

Условия проведения гармонической линеаризации:

1. К нелинейности возможно применить преобразование Фурье (условие Дирихле)
2. Нелинейность в системе одна либо сводима к одной
3. Линейная часть выполняет функции фильтра низких частот (степень числителя строго меньше степени знаменателя)

Когда появляется смещение:

1. Несимметричная нелинейность

2. Постоянное входное воздействие
3. Линейное входное воздействие

Diagram of a system with input $y(t)$, output $x(t)$, and two blocks labeled $W_{\text{ЛЧ}}$ (Low-Cut Filter) connected in series.

$$x = x_0 + x' = x_0 + a \cdot \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$$

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x_0 + a \sin \omega t) dt$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x_0 + a \sin \omega t) \cos(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x_0 + a \sin \omega t) \sin(n\omega t) dt$$

Т. к. линейная часть выполняет функцию фильтра низких частот, оставляем только первую гармонику:

$$y(t) = \frac{A_0}{\omega} + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

$$\frac{A_0}{\omega} = F_0(x_0, a)$$

$$A_1 = q'(a) \cdot a$$

$$B_1 = q(a) \cdot a$$

$$y(t) = F_0(x_0, a) + q(a) \cdot a \sin(\omega t) + q'(a) a \cos(\omega t)$$

$$x^* = a \sin(\omega t)$$

$$\rho x''(t) = a \omega \cos(\omega t)$$

$$y = f(x) = F_0(x_0, a) + \int_{-\pi}^{\pi} [q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p] x^*$$

$$F_0 = \frac{1}{d\pi} \int F(x_0 + a \sin \psi) d\psi \quad \psi = \omega t$$

$$q = \frac{1}{\pi a} \int F(x_0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int F(x_0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

F_0 - постоянная составляющая

q, q' - коэффициенты гармонической линеаризующих

$q' = 0$ при однозначной начальной константе

*когда еще возникают несимметричные колебания

2. Входное воздействие – константа ($f = \text{const}$), порядок астатизма – нулевой
3. Входное воздействие – $f = \text{const} + ct$, а порядок астатизма – первый

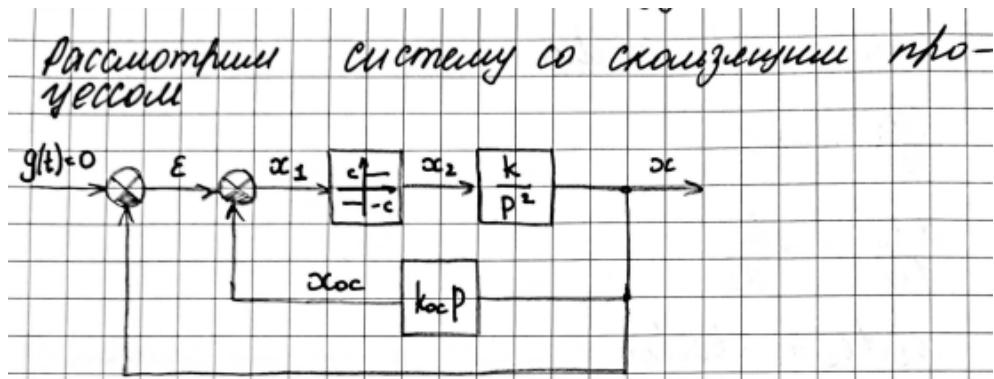
a) $f(t) = \text{const} = f^0, C_f =$
 $= S(0)f^0,$

б) $f(t) = f^0 + ct$ при $S(p) =$
 $= pS_1(p), C_f = cS_1(0),$ т. е.
 соответственно для систем без
 астатизма и с астатизмом.

3. Скользящие процессы.

Скользящий процесс – это процесс движения изображающей точки по фазовой плоскости к началу координат с бесконечно большой частотой и бесконечно малой амплитудой.

Пример от Ксюши:



На схеме скорость это хос

Уравнения, описывающие систему:

$$\dot{E}(t) = g(t) - x(t) = -x(t)$$

$$x_1(t) = E(t) - x_{oc}(t)$$

$$x_2(t) = c \cdot \text{sign } x_1(t)$$

$$x_{oc}(t) = x(t) \cdot k_{oc} p = \dot{x}(t) k_{oc}$$

$$\ddot{x} = k x_2$$

$$x_1(t) = -x(t) - x_{oc}(t) = -x(t) - \dot{x}(t) k_{oc}$$

$$x_2(t) = c \cdot \text{sign} [-x(t) - \dot{x}(t) k_{oc}]$$

$$\ddot{x} = k c \cdot \text{sign} [-x(t) - \dot{x}(t) k_{oc}]$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_1 + k_{oc} x_2 = 0$$

Здесь x_1 и x_2 не те же самые как на схеме. это просто условное обозначение. В схеме x_2 – вторая производная от x

*$x_2 = -\frac{1}{k_{oc}} x_1$ – линейное переключение на
разной плюсности*

Вправой части от смысла переключение

$$\dot{x}_2 = -kc$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow dt = dx_1/x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -kc$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{kc}{x_2}$$

$$x_2 dx_2 = -kc dx_1$$

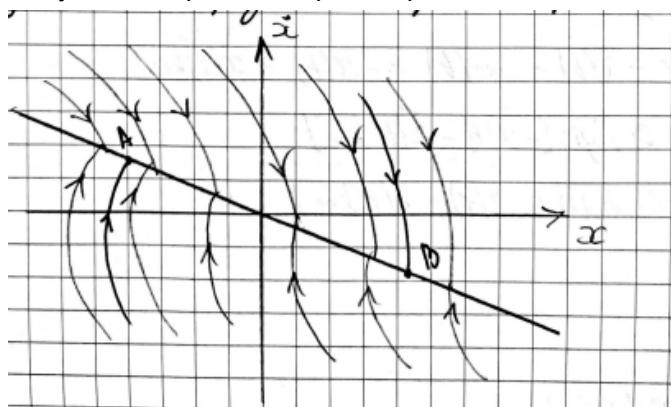
$$\frac{x_2^2}{2} = -kx_1 c + C_1 - \text{парабола}$$

Слева от смысла переключение

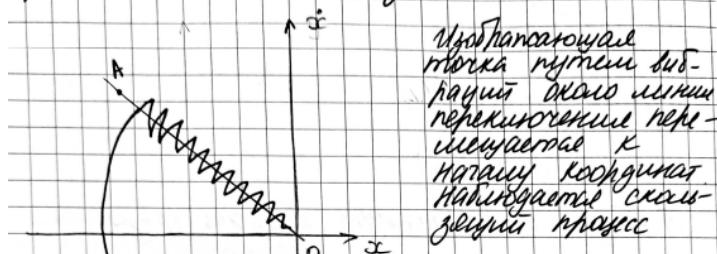
$$x_2 dx_2 = kc dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} = kc x_2 + C_2$$

Полученная фазовая траектория



Фрагментарный полуценный рисунок. Видно, что на отрезке смысла переключения AB параболе траектории стремится к нулю, а она неадекватна в этом отрезке.



Закон движения в скользящем процессе:

$$x + kac \dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{kac} x = 0$$

$$x = C_0 e^{-\frac{1}{kac} t}$$

Частота пульсирующей
тожда нулеви вид-
рации около линии
переключения пере-
менуяется к
направлению координат
Начинается скольз-
ящий процесс

Нелинейная система второго порядка на участке скользящего процесса вырождается в линейную систему первого порядка. При этом закон движения в скользящем процессе не зависит от параметров прямой цепи.

ПРИМЕР: Имеем фазовый портрет (фазовые траектории – параболы, упирающиеся в отрезок АВ).

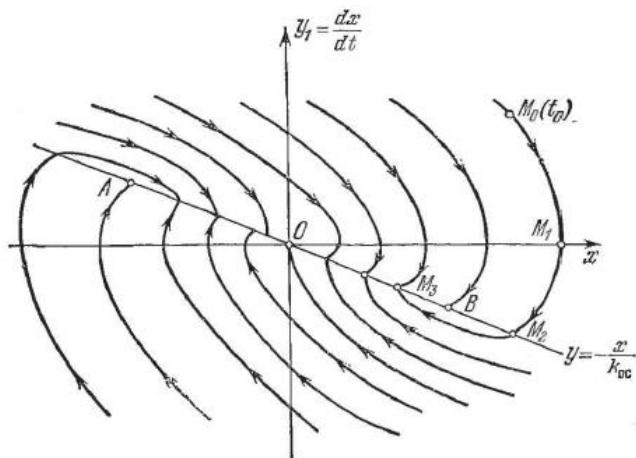


Рис. 2.7.

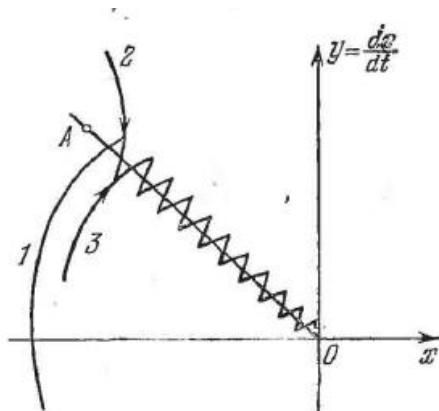


Рис. 2.8.

На отрезке линии пересечения АВ фазовые траектории встречаются. Как только фазовая траектория пересечет линию пересечения ОА, изображающая точка пойдет по фазовой траектории 2, которая вернет процесс к отрезку ОА. Потом встретится фазовая траектория 3 и т.д. В результате изображающая точка путем вибраций около линии переключения переместится к началу координат О. Таким образом наблюдается скользящий процесс.

Нелинейная система второго порядка на участке скользящего процесса вырождается в линейную систему первого порядка.

4. Приближенное определение параметров предельных циклов и их устойчивости с использованием ЛЧХ.

$$W_{\text{ЛЧХ}}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$W_{\text{НЧ}}(a, \omega) = q(a) + \frac{q'(a)\rho}{\omega}$$

$$W(\rho) = W_{\text{ЛЧХ}}(\rho) \cdot W_{\text{НЧ}}(a, \omega)$$

Переходим в частотную область ($\rho = j\omega$)

$$W_{\text{НЧ}}(a) = q(a) + jq'(a)$$

$$W(\rho) = W_{\text{ЛЧХ}}(j\omega) \cdot W_{\text{НЧ}}(a)$$

Схема тут не очень-то нужна, но можно для галочки нарисовать обычную с линейной и нелинейной частью.

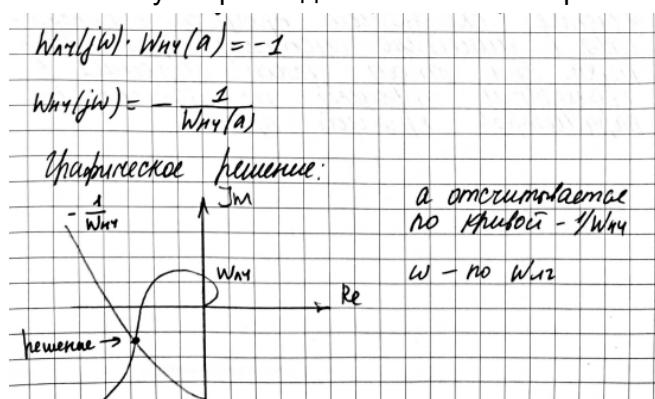
Периодическое решение линеаризованной системы получается при наличии в характеристическом уравнении замкнутой системы пары чисто мнимых корней. По критерию Найквиста (в нем участвует передаточная разомкнутой системы) это

соответствует прохождению $W(j\omega)$ через точку -1.

$$W_{\text{ЛЧХ}}(j\omega) \cdot W_{\text{НЧ}}(a) = -1$$

$$W_{\text{НЧ}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{ЛЧХ}}(a)}$$

Графическое решение:



Вместо этого можно воспользоваться двумя скалярными уравнениями:

$$\begin{aligned}
 |W_{\text{л}}(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{q^2(a) + (q'(a))^2}} \\
 \arg[W_{\text{л}}(j\omega)] &= -\pi - \arctg \frac{q'(a)}{q(a)} \\
 20 \lg |W_{\text{л}}(j\omega)| &= 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{q^2(a) + (q'(a))^2} = \\
 &= -20 \lg \sqrt{q^2(a) + (q'(a))^2} \\
 |W_{\text{л}}(j\omega)| &= -20 \lg \sqrt{q^2(a) + (q'(a))^2} \\
 \varphi_{\text{л}}(\omega) &= -\pi - \arctg \frac{q'(a)}{q(a)}
 \end{aligned}$$

Для нахождения амплитуды и частоты строим графики левых и правых частей уравнения. Частота откладывается в логарифмическом масштабе, а амплитуда - в натуральном. Решением будет получение замкнутого прямоугольника (выполнение обоих неравенств).

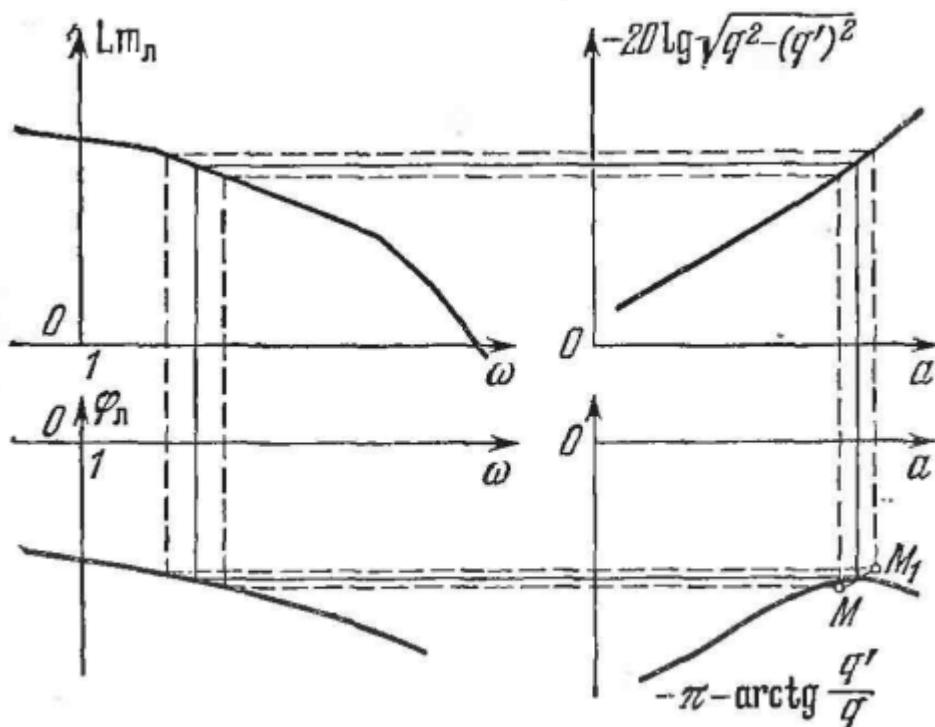


Рис. 4.23.

Исследование устойчивости:

Задаем амплитуду отклонение дельта а.

Система будет возвращаться к периодическому решению, если при положительном отклонении колебания затухают, а при отрицательном отклонении - расходятся.
Т.Е.:

а-да : критерий уст. Найквиста выполняется

а-да : кр. уст. Найквиста не выполняется

5. Метод точечного преобразования.

Метод точечного преобразования - усовершенствование метода припасовывания (решение диф уравнений для каждого участка процесса, на котором они справедливы по отдельности) с геометрическими представлениями в фазовом пространстве.

Как я понял это точечное преобразование нужно для нахождения точки, которая соответствует предельному циклу, и с помощью метода “стрелочек вверх/низ и влево/вправо”. Мы определяем устойчивый предельный цикл или нет; сколько их; мб есть колебательный процесс без предельного цикла (затухание/расхождение)

Важные понятия:

Исходная точка - точка с которой начинаем точечное преобразование КАЖДЫЙ РАЗ, а не только первый.

Последующая точка - точка, которую получаем из исходной с помощью функции последования.

Функция последования - зависимость соответствующая ходу фазовой траектории в силу решения уравнений динамики нелинейной системы.

Преобразование точки саму в себя - значит мы нашли точку соответствующую предельному циклу. Иначе нашли особую точку типа “центр”.

Есть еще параметрическое точечное преобразование: мы не можем построить известную зависимость последований (из-за тяжести ее нахождения), а с помощью времени вводим параметр времени, и, исходя из двух точек взятых на фазовой траектории, строим две параметрической зависимости. Их пересечение - особая точка типа “центр”.

Далее из Попова:

Запишем в общем виде уравнения динамики нелинейной системы второго порядка без внешнего воздействия:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y). \quad (3.12)$$

На фазовой плоскости (x, y) возьмем какой-нибудь отрезок линии AB , который пересекается фазовыми траекториями в одном направлении (рис. 3.5). Обозначим через s координату произвольной точки Q на отрезке AB , отсчитываемую вдоль дуги AB от начала A .

Пусть решение уравнений (3.12) $x = x(t)$, $y = y(t)$ дает фазовую траекторию, проходящую через точку Q . Допустим далее, что с увеличением t эта фазовая траектория снова пересечет отрезок AB в некоторой другой точке Q' (рис. 3.5). Координату точки Q' по дуге AB обозначим s' .

Точка Q' (первого следующего пересечения отрезка AB той же фазовой траекторией) называется *последующей* по отношению к исходной точке Q . Зависимость

$$s' = f(s), \quad (3.13)$$

соответствующая ходу фазовой траектории в силу решения уравнений (3.12), называется *функцией последования*. Функция последования определяет *закон точечного преобразования* для данной нелинейной системы.

Определение последующих точек по заданным исходным на отрезке AB и называется *точечным преобразованием отрезка AB самого в себя*. Ввиду непрерывности

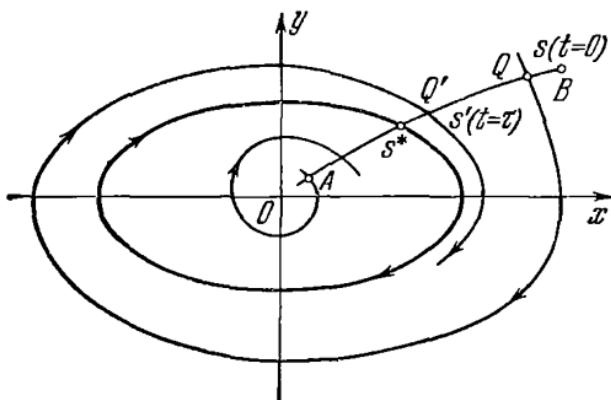


Рис. 3.5.

расположения фазовых траекторий исходные и последующие точки заполняют весь отрезок. Однако каждая точка отрезка AB не обязательно имеет последующую *внутри* этого отрезка. Фазовые траектории, пересекающие отрезок, могут и не возвращаться к нему.

Возможен такой случай, что последующая точка Q' совпадает с исходной Q , т. е.

$$f(s) = s = s^*. \quad (3.14)$$

При этом мы получаем замкнутую фазовую траекторию (рис. 3.5): предельный цикл или кривую, соответствующую особой точке типа «центр», и т. п. Последнее выясняется из хода соседних фазовых траекторий. Случай (3.14) называется *точечным преобразованием точки Q самой в себя*. Это неподвижная точка в общем точечном преобразовании отрезка AB .

Изобразим графически функцию последовательности $s' = f(s)$ (рис. 3.6). Проведем из начала координат наклонную прямую под углом 45° (биссектрису координатного угла). Если она пересечется с кривой $f(s)$, то эта точка

пересечения даст координату s^* (рис. 3.6) замкнутой фазовой траектории.

Ход точечного преобразования прослеживается на этом графике следующим образом. Возьмем исходную точку s правее точки s^* (рис. 3.6). Точке s соответствует определенное значение s' (точка N) на кривой $f(s)$. Таким

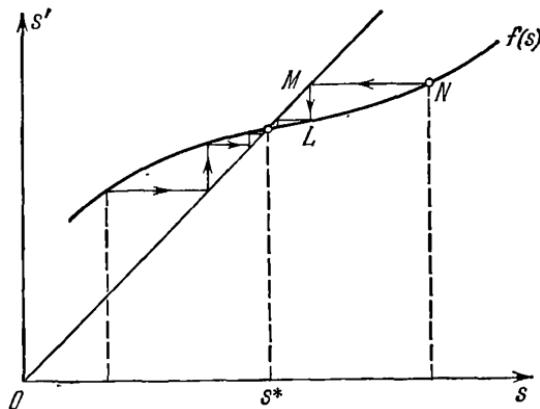


Рис. 3.6.

образом, мы нашли координату последующей точки. Теперь примем ее за новую исходную точку. Для этого достаточно снести полученную точку N по горизонтали NM (рис. 3.6) на биссектрису. Проведя далее из точки M вертикаль ML , найдем значение координаты s' новой последующей точки и т. д. Из этого простого построения видно, что в данном случае процесс сходится к предельному циклу s^* .

Возьмем теперь исходную точку s левее s^* и точно тем же способом проследим ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 3.6. Очевидно, этот процесс тоже сходится к тому же предельному циклу s^* . Следовательно, здесь мы имеем устойчивый предельный цикл (автоколебания).

Отсюда условие устойчивости предельного цикла имеет вид

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)_{s=s^*} < 1. \quad (3.15)$$

В противном случае, изображенном на рис. 3.7, а (где стрелками показан ход точечного преобразования), получается неустойчивый предельный цикл. На других графиках рис. 3.7 показаны: б) случай двух предельных

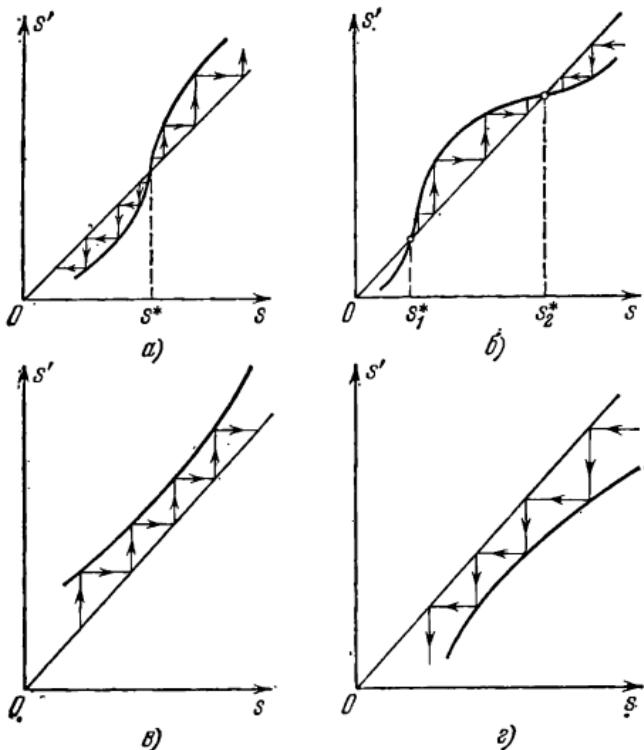


Рис. 3.7.

циклов, из которых один неустойчивый, а второй устойчивый; в) случай расходящихся колебаний; г) случай затухающих колебаний.

Такого типа графики (рис. 3.6, 3.7) называются *диаграммами точечного преобразования*. Изображение хода точечного преобразования на такой диаграмме эквивалентно сопряжению начальных и концевых условий соседних участков в методе припасовывания. Но производится это специальным и довольно простым геометрическим построением. Это будет видно нагляднее на примерах § 3.3.

Основным в методе является нахождение функции последовательности $s' = f(s)$ на основе решения уравнений динамики системы (3.12). Найти эту функцию в явной форме не всегда легко. В большинстве случаев бывает легче представить функцию последовательности в параметрической форме.

Параметрическая форма точечного преобразования в качестве параметра содержит время τ прохождения изображающей точки по фазовой траектории от исходной точки Q (рис. 3.5) до ее последующей Q' . Через этот параметр τ на основании решения уравнений (3.12) выражаются координаты точек Q и Q' , а именно

$$s = f_1(\tau), \quad s' = f_2(\tau). \quad (3.16)$$

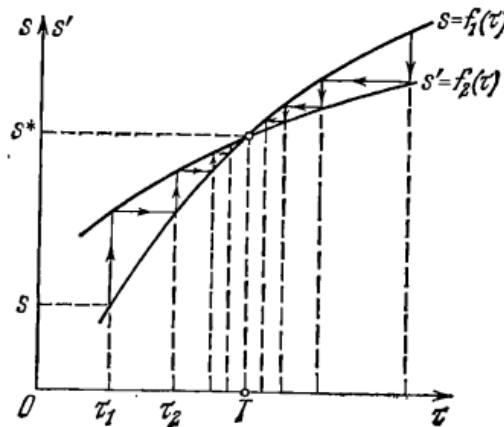


Рис. 3.8.

Строится графики этих функций (рис. 3.8). Точка пересечения их дает координату $s' = s = s^*$ замкнутой фазовой траектории (предельного цикла), причем абсцисса этой точки определяет период T соответствующих колебаний системы. Условие устойчивости предельного цикла сохраняется в виде (3.15), но с дифференцированием s' и s по параметру τ в (3.16). Изображенный на рис. 3.8 случай соответствует устойчивому предельному циклу.

Ход точечного преобразования на такой параметрической диаграмме прослеживается следующим образом. Берем некоторую исходную точку на кривой s (рис. 3.8). Перемещаемся по вертикали до кривой s' , находя тем самым последующую точку при том же значении параметра $\tau = \tau_1$ (это будет время движения изображающей точки по фазовой траектории от Q до Q' на рис. 3.5). Затем найденную последующую точку принимаем за новую исходную, для чего по горизонтали (рис. 3.8) переносим ее

на кривую s . После этого переходим снова на кривую s' уже при новом значении $\tau = \tau_2$ и т. д. Весь ход точечного преобразования показан на рис. 3.8 стрелками.

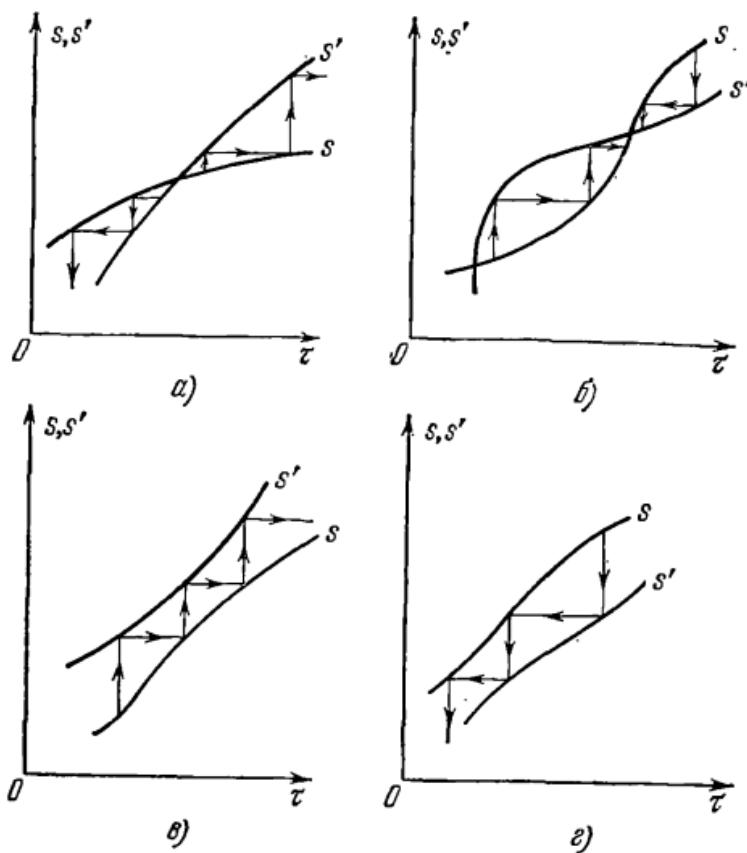
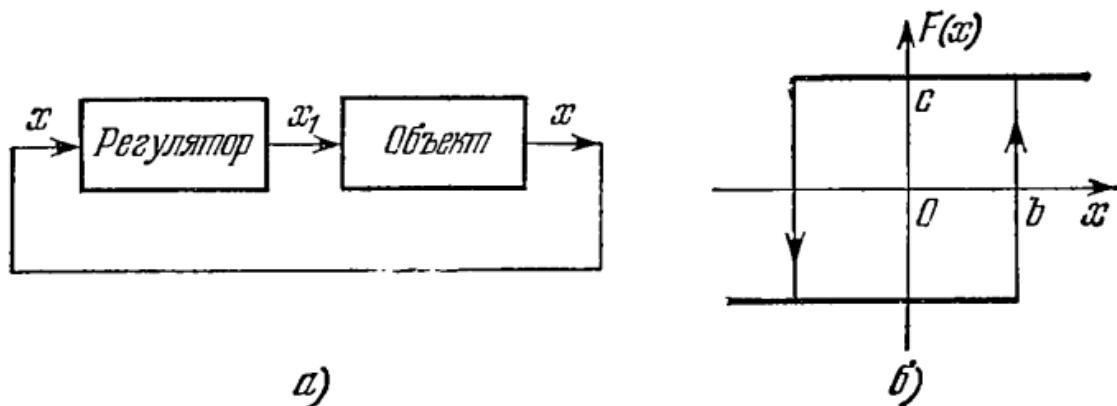


Рис. 3.9.

Рис. 3.9 иллюстрирует параметрические диаграммы точечного преобразования для тех же четырех случаев, что и на рис. 3.7.

Пример, про который говорил Рубцов:



Общая идея:

1. В системе есть какая-то статическая нелинейность. Например, реле с мертвой зоной или гистерезисная реле, как в учебнике

2. Разбивает фазовую плоскость на области в зависимости от того, какое значение принимает нелинейность (подробнее см. метод построения фазовых траекторий для статических нелинейностей). Линии разделения этих областей – линии переключения
3. Пишем уравнения системы

лятора представлена на рис. 3.1, б. Уравнение объекта:

$$(T_1 p + 1)x = -k \cdot x_1,$$

уравнение регулятора:

$$px_1 = F(x).$$



Общее уравнение замкнутой системы имеет вид

$$T_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -k \cdot F(x). \quad (3.1)$$

4. Берем какую-то точку на одной из линий переключения. Это будет наша исходная точка с $t=0$
5. Берем последующую точку на соседней линии переключения. В ней $t=\tau$
6. Ищем x и x' из уравнения динамики системы для данной области (интегрируем)
7. Дальше ищем функцию последования параметрическим способом, подставляя условия каждой точки в найденные в п.6 выражения
8. Строим диаграмму точечного преобразования. По ней потом можно построить разные переходные процессы, посмотреть, что там происходит

Вообще этот метод нужен, чтобы посмотреть переходный процесс и определить периодическое решение

6. Гармоническая линеаризация несимметричных характеристик нелинейных звеньев (общие вопросы). Понятие фильтра низких частот

Идея метода гармонической линеаризации - в системе возникли автоколебания

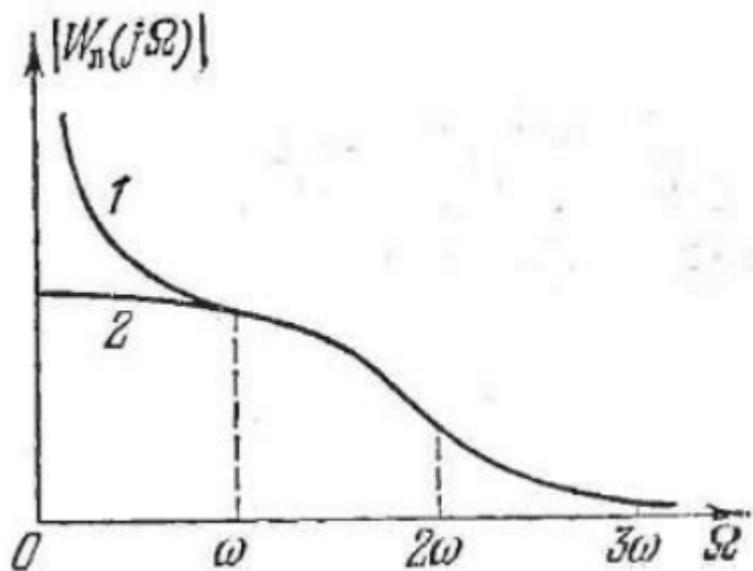
Условия проведения гармонической линеаризации:

1. К нелинейности возможно применить преобразования Фурье (условие Дирихле)
2. Нелинейность в системе одна либо сводима к одной

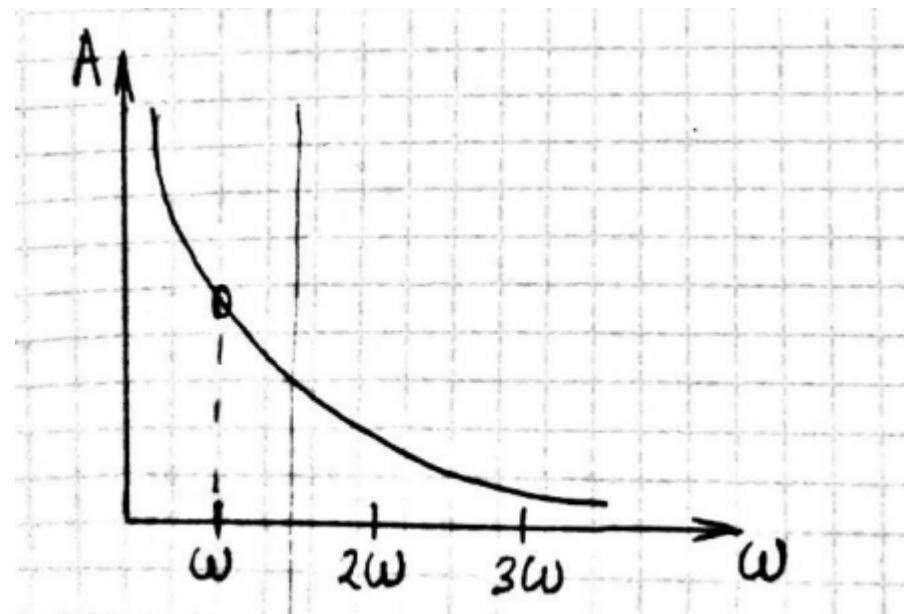
3. Линейная часть выполняет функцию фильтра низких частот (степень числителя передаточной функции строго меньше степени знаменателя)

Про фильтр низких частот:

Допустим, что в замкнутой системе возможны автоколебания. Построим следующий график:



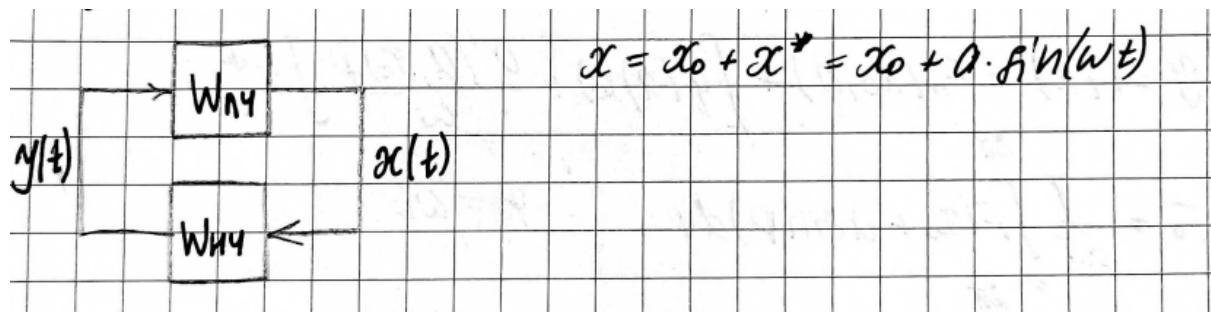
Еще один график амплитудной характеристики фильтра низких частот:



Видим, что величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем для первой. Это свойство называется свойством фильтра низких частот. При наличии свойства фильтра линейная часть системы будет хорошо пропускать первую гармонику

нелинейных колебаний $y(t)$ и ослаблять все высшие гармоники. Поэтому переменная $x(t)$ на выходе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде.

Рассмотрим замкнутую систему с несимметричной нелинейностью:



x_0 – смещение, появляющееся за счет несимметричной нелинейности

Разложим нелинейность в ряд Фурье:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$$

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int F(x_0 + a f'n \omega t) dt$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int F(x_0 + a f'n \omega t) \cos(n\omega t) dt$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int F(x_0 + a f'n \omega t) \sin(n\omega t) dt$$

Так как линейная часть выполняет функцию фильтра низких частот, оставляем только первую гармонику

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

Отсюда найдем коэффициенты гармонической линеаризации и характеристику после:

$$\frac{A_0}{2} = F_0(x_0, a)$$

$$A_1 = q'(a) \cdot a$$

$$B_1 = q(a) \cdot a$$

$$y(t) = F_0(x_0, a) + q(a) \cdot a \sin(\omega t) + q'(a) a \cos(\omega t)$$

$$x^* = a \sin(\omega t)$$

$$px''(t) = a\omega \cos(\omega t)$$

$$y = F(x) = F_0(x_0, a) + \int q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0) p}{\omega} \int x^*$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int F(x_0 + a \sin \psi) d\psi \quad \psi = \omega t$$

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

F_0 – постоянная составляющая

q, q' – коэффициенты гармонической линеаризации

$q' = 0$ для однозначных нелинейностей

y – гармоническая линеаризация нелинейности

Правая часть у линейна для данного конкретного периодического решения ($a = \text{const}$). При этом y сохраняет нелинейные свойства, т.к. коэффициенты

данного периодического решения зависят от искомого решения (от величины амплитуды x)

Гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена имеет вид

$$W_n(a, s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} s. \quad (4.12)$$

Амплитудно-фазовая характеристика нелинейного звена в результате подстановки $s = j\omega$ выражается в форме

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a). \quad (4.13)$$

7. Псевдолинейная коррекция

Псевдолинейными корректирующими устройствами называются такие нелинейные корректирующие устройства, у которых эквивалентные передаточные функции (а значит, и коэффициенты гармонической линеаризации) зависят только от частоты и не зависят от амплитуды. Однако, эта зависимость от частоты - нелинейная (отсутствует жесткая связь между амплитудными и фазовыми характеристиками). Это позволяет корректировать фазовые соотношения независимо от амплитудных, и наоборот.

Результат гармонической линеаризации при исследовании устойчивости для псевдолинейного устройства имеет вид

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} p \right] x,$$

а при исследовании колебательных переходных процессов

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} (p - \xi) \right] x.$$

В простейшем случае это выражение можно представить в виде апериодического звена:

$$F(x) = \frac{k^*(\omega)}{T^*(\omega) p + 1} x,$$

где

$$k^* = \frac{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}{q(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega q''(\omega)},$$

а для колебательных переходных процессов

$$k^* = \frac{q^2(\omega) q'^2(\omega)}{q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega \left[q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega) \right]}.$$

Пример:

Нелинейный фильтр с амплитудным ослаблением.

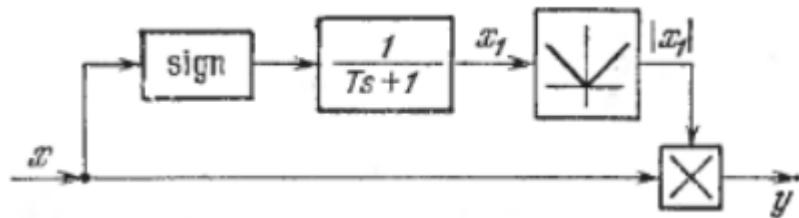
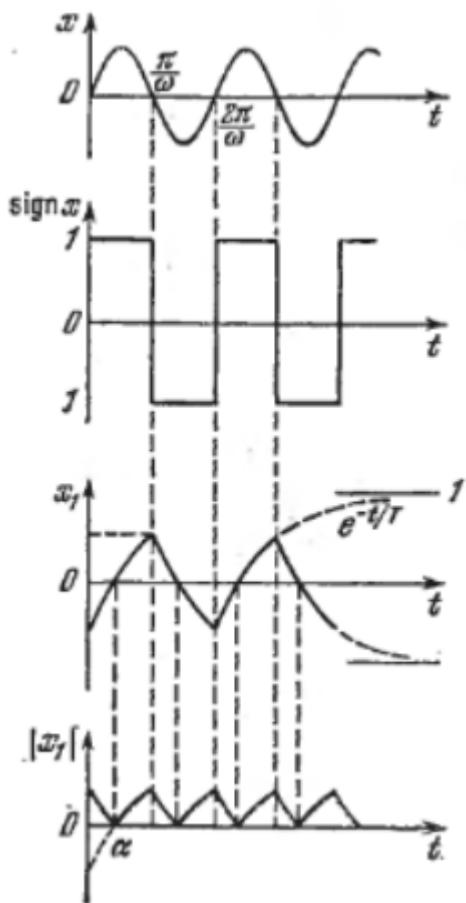


Схема позволяет получить ослабление амплитуды с ростом частоты без изменения фазы. Выходной сигнал $y = |x_1|x$ связан с x соотношением

$$(Tp + 1)x_1 = \operatorname{sign} x.$$

Формы колебаний входящих сюда переменных при $x = \sin(\omega t)$ показаны на рисунке:



Причем, $x_1 = x_{10}e^{-t/T} \pm (1 - e^{-t/T})_1$ где $x_{10} = \pm \frac{1 - e^{-\pi/\omega T}}{1 + e^{-\pi/\omega T}}.$

Используя формулы гармонической линеаризации,

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} (|kx| a \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$q' = \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} (|kx| a \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

нужно заменить в этих формулах kx на x_1 и разбить каждый интеграл на два: (0, альфа) и (альфа, ρ_1), где альфа - точка переменны знака x_1 , определяемая выражением

$$\alpha = \omega T \ln \frac{2}{2 + e^{-\pi/\omega T}}.$$

Результат интегрирования:

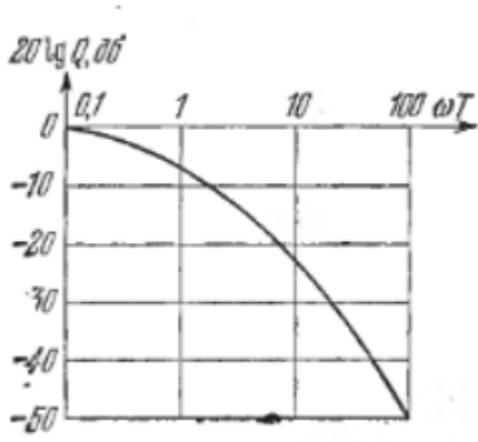
$$q = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2 \sin \alpha}{\pi(1 + 4\omega^2 T^2)} (\cos \alpha - 2\omega T \sin \alpha),$$

$$q' = -\frac{2 \sin \alpha}{\pi(1 + 4\omega^2 T^2)} (\sin \alpha + 2\omega T \cos \alpha)$$

Заметим, что q и q' зависят только от частоты.

Амплитудная характеристика такого псевдолинейного фильтра:

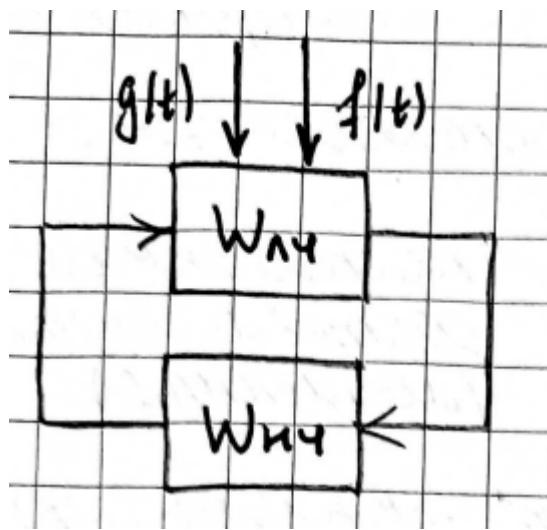
$$Q(\omega) = \sqrt{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}$$



Из характеристики видно эффективное подавление амплитуды колебаний.

8. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах

Рассмотрим случай, когда в системе имеется переменное внешнее воздействие и приложено внешнее периодическое воздействие



x – на входе нелинейного звена

y – на выходе нелинейного звена

$$f(t) = B \sin(\omega t)$$

$g(t)$ – медленный по сравнению с $f(t)$ (спектр возможных частот изменения $g(t)$ много меньше ω **честно говоря, я хз, что это значит**) – это значит, что за один период $1/(2\pi\omega)$ функция $g(t)$ не меняет своего значения или меняет незначительно (эмпирическое понятие)

$$W_{\text{ищ}}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

Уравнение динамики системы:

$$\frac{B(p)}{A(p)}x(t) + A(p)f(x) = S_1(p)g(t) + S_2(p)f(t).$$

Решение будем искать в виде:

$$x(t) = x_0 + a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = x_0 + x^*$$

$x_0(t)$ – медленная по сравнению с $x^*(t)$ (определяет процесс управления)

Полагая, что основной процесс управления $x_0(t)$ протекает настолько медленно, что за один период колебаний x^* можно приблизительно считать x_0 неизменной, применим метод гармонической линеаризации:

$$F(x) = F_0(x_0, a) + \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)p}{\omega} \right] x^+$$

$$\left. B(p)[x_0 + x^+] + A(p) \left[F_0(x_0, a) + x^+ \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)p}{\omega} \right] \right] \right] = S_1(p)g(t) + \\ + S_2(p)B(p)\delta m(w)$$

Разобьем уравнение на 2 составляющие:

$$\left\{ \begin{array}{l} B(p)x_0 + A(p)F(x_0, a) = S_1(p)g(t) - \text{постоянное} \\ \text{составляющее} \\ (\text{мгновенное}) \\ B(p)x^+ + A(p) \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)p}{\omega} \right] x^+ = B(p)\delta m(wt) \cdot S_2(p) - \\ \text{переменное (внешнее)} \\ \text{наученное) со-} \\ \text{ставляющее} \end{array} \right.$$

Не уверена, что это прям нужно в этом билете

При возникновении колебательного процесса в системе разрывные нелинейные характеристики для медленных процессов становятся гладкими. Этот процесс называется вибрационным сглаживанием, а линеаризация – вибрационной

$F(x_0, a) = k_m x_0$, k_m – характеризует вибрацион-
ной линеаризацией

$$k_m = \left. \frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}$$

9. Фазовое пространство и фазовая плоскость. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем.

Для исследования нелинейных систем широко используется метод фазового пространства. Удобство представления процесса в виде фазовых траекторий состоит в том, что вся совокупность возможных форм переходных процессов в системе при любых начальных условиях представлена в виде единого фазового портрета. Недостаток – нельзя рассмотреть системы выше второго порядка.

Нелинейное дифференциальное уравнение динамики системы в общем случае:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t; g(t), f(t)), i = 1, 2, \dots, n$$

x_i – координаты состояния системы

$g(t)$ – задающее воздействие

$f(t)$ – возмущающее воздействие

Уравнение динамики в векторном виде:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \varphi(\alpha, t, g, f)$$

Для рассмотрения переходных процессов, вызванных начальными отклонениями координат при отсутствии внешних воздействий для стационарных систем, имеем уравнения вида:

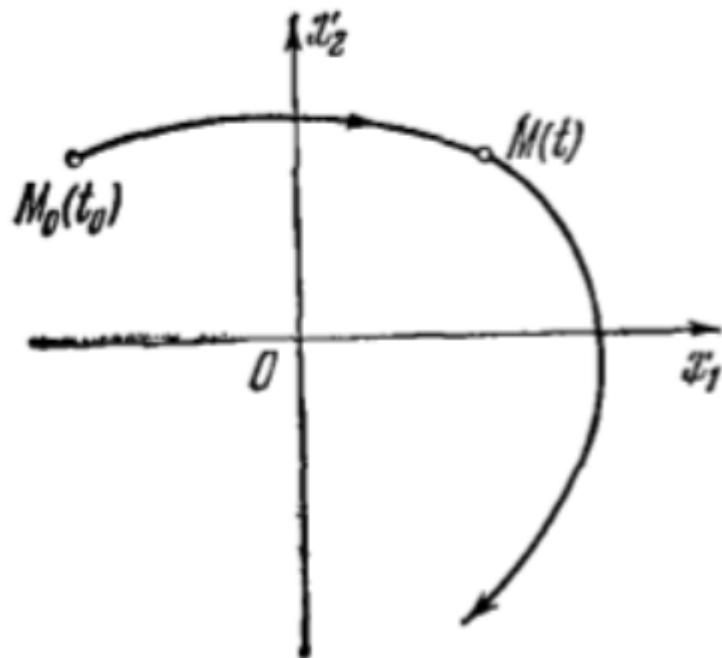
$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, n \quad / \quad \frac{d\alpha}{dt} = \varphi(\alpha) - \beta$$

(векторной форме)

Представим n -мерное пространство координат состояния системы (x_1, \dots, x_n), называемое **фазовым пространством**.

Начальное состояние системы $x(t_0)$ изобразится определенной точкой, а процесс во времени получит изображение в виде кривой, называемой **фазовой траекторией** данной системы.

Точка, соответствующая состоянию системы в произвольный момент времени t , называется **изображающей точкой** (на рисунке - точка M).



Для систем второго порядка можно реально изображать фазовые траектории на плоскости.

Фазовая плоскость – это плоскость с осями координат, на которых отложены значения координат состояния системы x_1, \dots, x_n . Каждая точка соответствует определенному состоянию системы.

Фазовая траектория – совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состоянию системы в процессе изменения со временем переменных x_1, \dots, x_n согласно заданным уравнениям исследуемой системы.

Фазовый портрет – совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных

ДУ фазовой траектории:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\varphi_2(x_1, x_2)}{\varphi_1(x_1, x_2)}$$

Особые точки – точки равновесного состояния системы ($dx_1/dt = 0$, $dx_2/dt = 0$). Называются особыми, потому что при условиях в скобках правая часть ДУ фазовой траектории становится неопределенной.

Методика построения фазовой траектории для нелинейных систем:

- 1) Определяем точки равновесного состояния (приравниваем ду к 0)
- 2) Проводим линеаризацию в окрестности особых точек

$$\dot{x}_1 \rightarrow \dot{x}_1 + \Delta \dot{x}_1, \quad x_2 \rightarrow x_2 + \Delta x_2$$

- 3) Определяем тип особых точек
- 4) С помощью метода изоклин получаем более качественную картинку фазового портрета

Метод изоклин:

Для уточнения качественной картины фазовых траекторий можно применять *метод изоклин*. Изоклиной называется линия, соединяющая точки фазовых траекторий с одинаковым наклоном касательной, т.е. для каждой изоклины $dx_2/dx_1 = c$. Поэтому уравнение изоклины, согласно (1.6), имеет вид:

$$\frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} = c \quad (1.10)$$

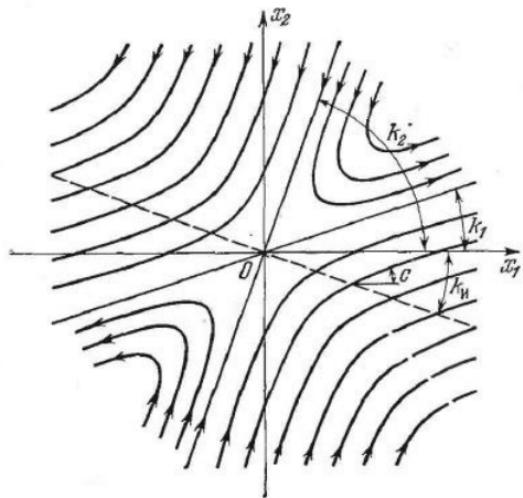
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \quad (1.6)$$

– ДУ фазовых траекторий

Следовательно, любая прямая $x_2 = k_i x_1$ будет изоклиной с соответствующим значением постоянной c . Задаваясь определенной величиной k_i , согласно (1.10) находим

$$c = \frac{a_{21} + a_{22}k_i}{a_{11} + a_{12}k_i}$$

Нанеся несколько изоклин и зная для каждой из них крутизну наклона с пересекающих ее фазовых траекторий, можно уточнить всю картину фазовых траекторий.



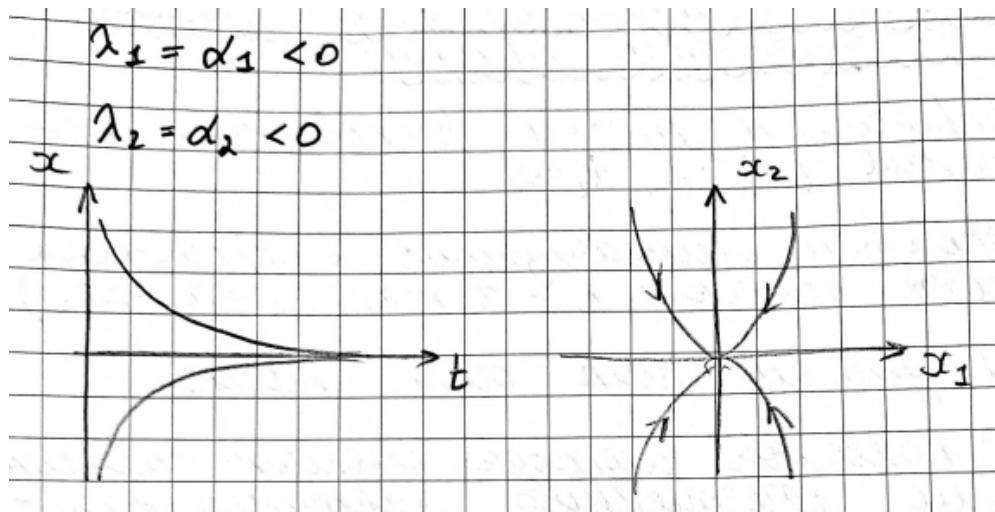
- 5) Находим сепаратрисы (линии, определяющие зоны влияния особых точек; проходит через начало координат)
- 6) Находим асимптоты
 - ищем их в случае, если особая точка седло или узел
- 7) Строим фазовые траектории и определяем их направления
 - смотрим направления либо беря пробные точки, либо по знакам корней характеристического уравнения

Методика построения фазовых портретов для систем со статическими нелинейностями:

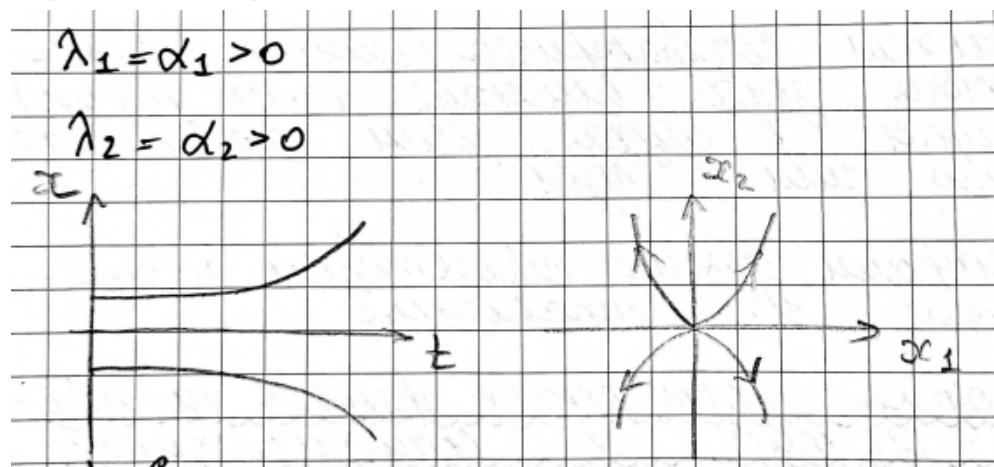
- 1) Определяем области на фазовой плоскости, в которых система ведет себя как линейная
- 2) Строим фазовую траекторию в каждой области
- 3) Определяем точки переключения фазовой траектории для каждой области

Типы особых точек:

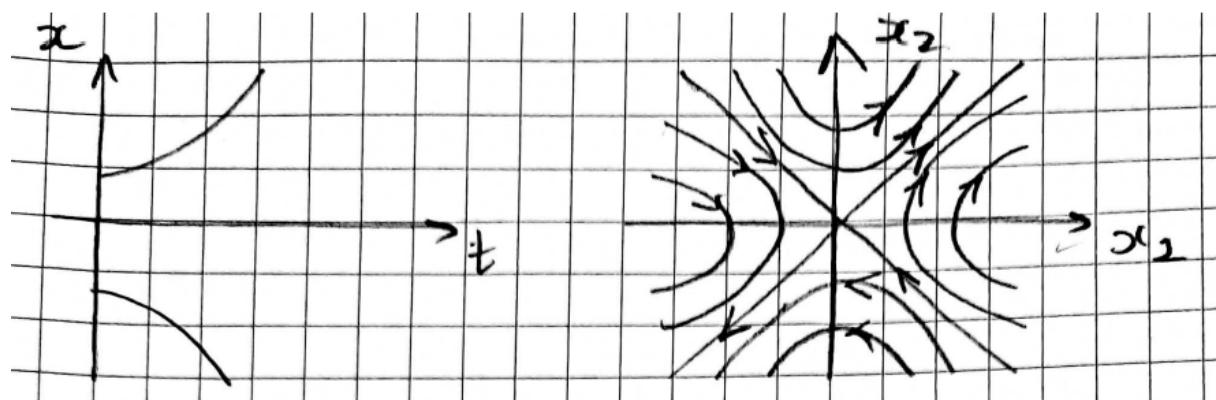
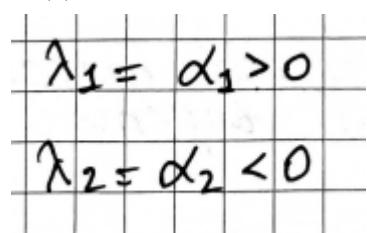
- 1) Устойчивый узел



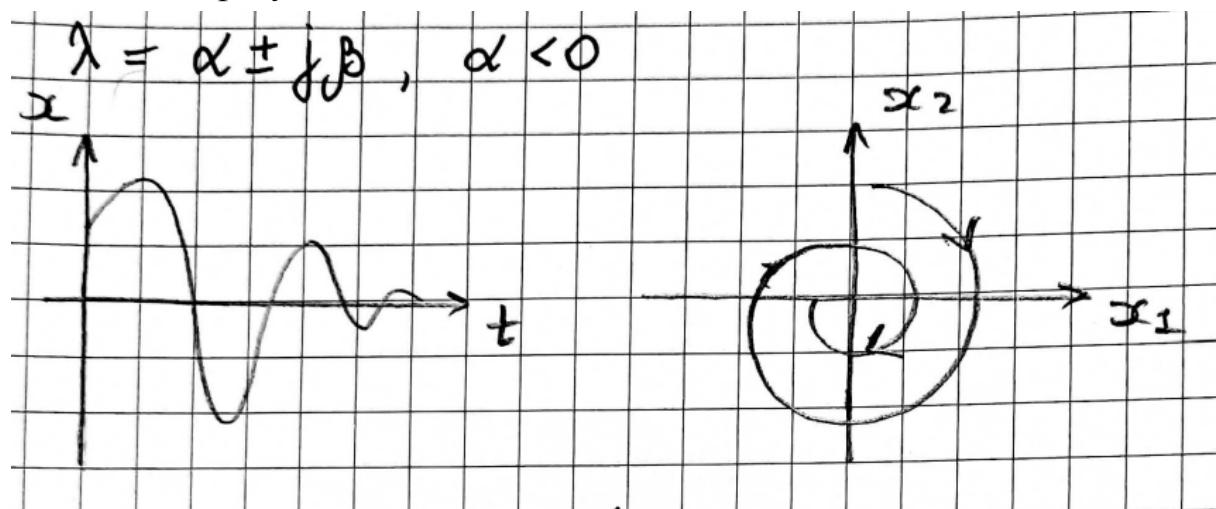
2) Неустойчивый узел



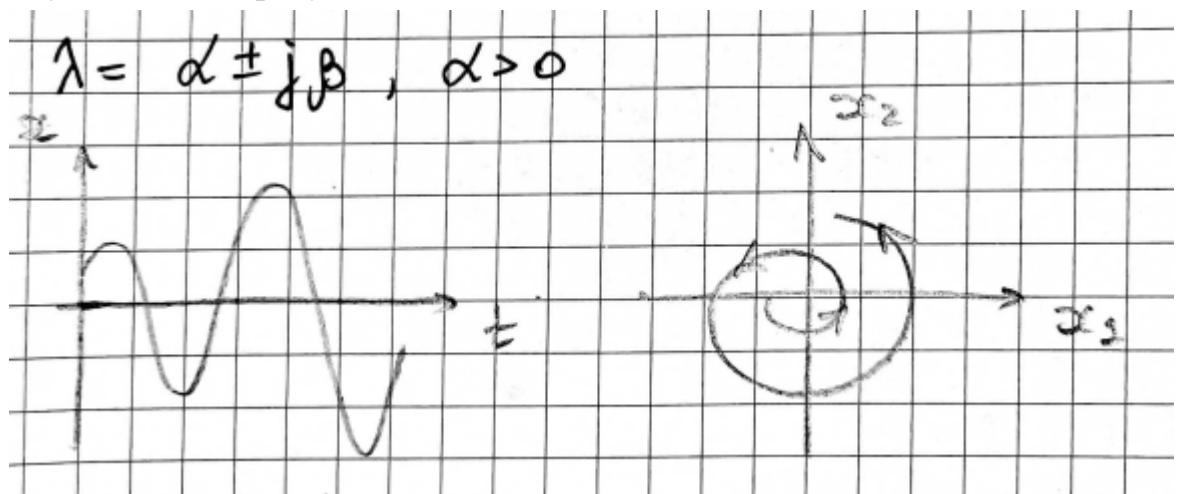
3) Седло



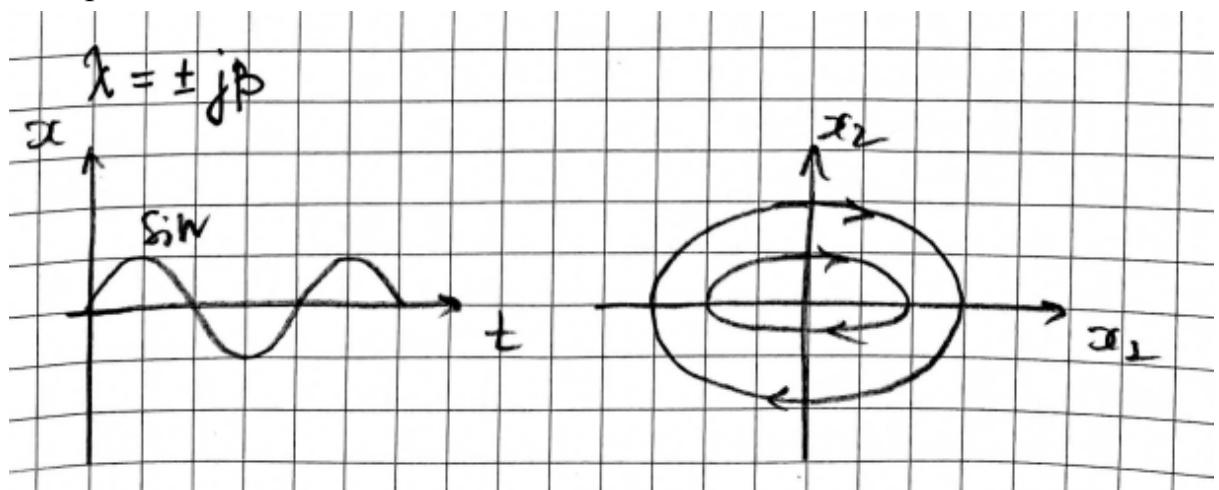
4) Устойчивый фокус



5) Неустойчивый фокус



6) Центр



10. Сравнение фазовых портретов в линейных и нелинейных системах

Особенности процессов в нелинейных системах. Во первых, в нелинейных системах существует возможность наличия двух или нескольких равновесных состояний (особых точек). В соответствии с этим на фазовой плоскости получаются области с различным типом фазовых траекторий. Кривые, разделяющие области с различными типами фазовых траекторий называются сепаратрисами.

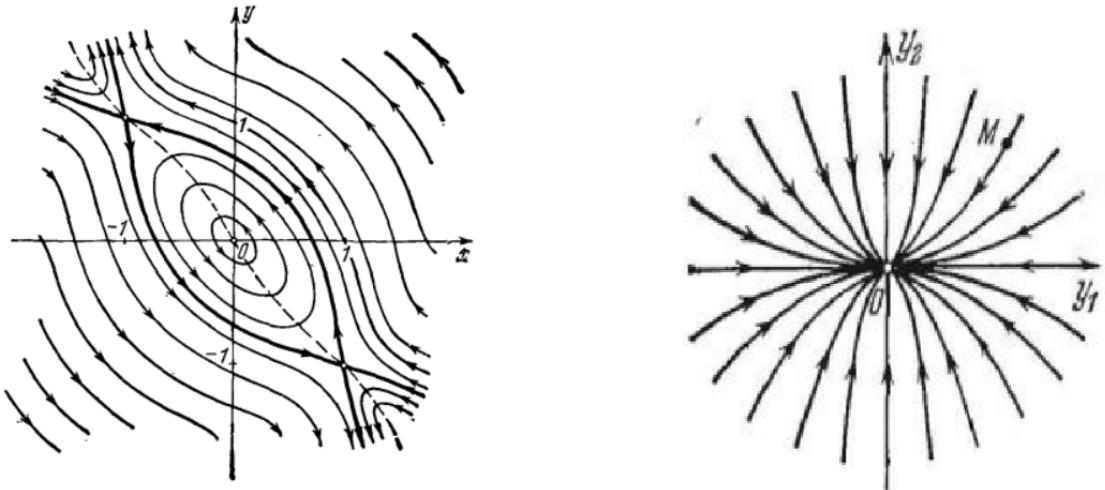


Рис. 1.25.

На рисунке слева - фазовый портрет нелинейной системы (несколько типов фазовых траекторий на фазовой плоскости). Сепаратрисы - жирные линии. На рисунке справа - фазовый портрет линейной системы (один тип фазовой траектории).

Единственная особая точка в линейных системах берется отсюда:

Типы особых точек и фазовые портреты линейных систем.

В качестве исходного материала, используемого в дальнейшем при изучении нелинейных систем, рассмотрим особые точки линейных систем второго порядка. Уравнения линейной системы имеют вид (1.5):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

или в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

при условии, что матрица А не вырожденная, т.е $\det(A) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий, согласно (1.5), имеют вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \quad (1.6)$$

Единственной особой точкой (точкой равновесного состояния) является точка $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Решением этих уравнений является

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.7)$$

Несколько особых точек в нелинейных системах:

$$x'_1 = 2x_1 + x_2^2 - 1$$

$$x'_2 = 6x_1 - x_2^2 + 1$$

$$\begin{cases} x'_1 = 0 \\ x'_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 6x_1 - x_2^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2^2 = 1, x_2 = \pm 1$$

2 особые точки

Также, в отличие от линейных систем, в нелинейных системах типы динамических процессов могут зависеть от начальных условий.

Также, в отличие от линейных систем изоклина может быть криволинейной.

Еще один тип особых кривых - предельные циклы. Предельные циклы - замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам, в окрестности которых имеют место колебательные переходные процессы.

В системах с зоной нечувствительности и сухим трением существуют, как известно, области застоя, когда установившемуся состоянию при данных внешних условиях (данной нагрузке) соответствует не одна точка, а целая область возможных равновесных состояний системы. На фазовой плоскости это

выражается, в том, что особая точка вытягивается в особый отрезок

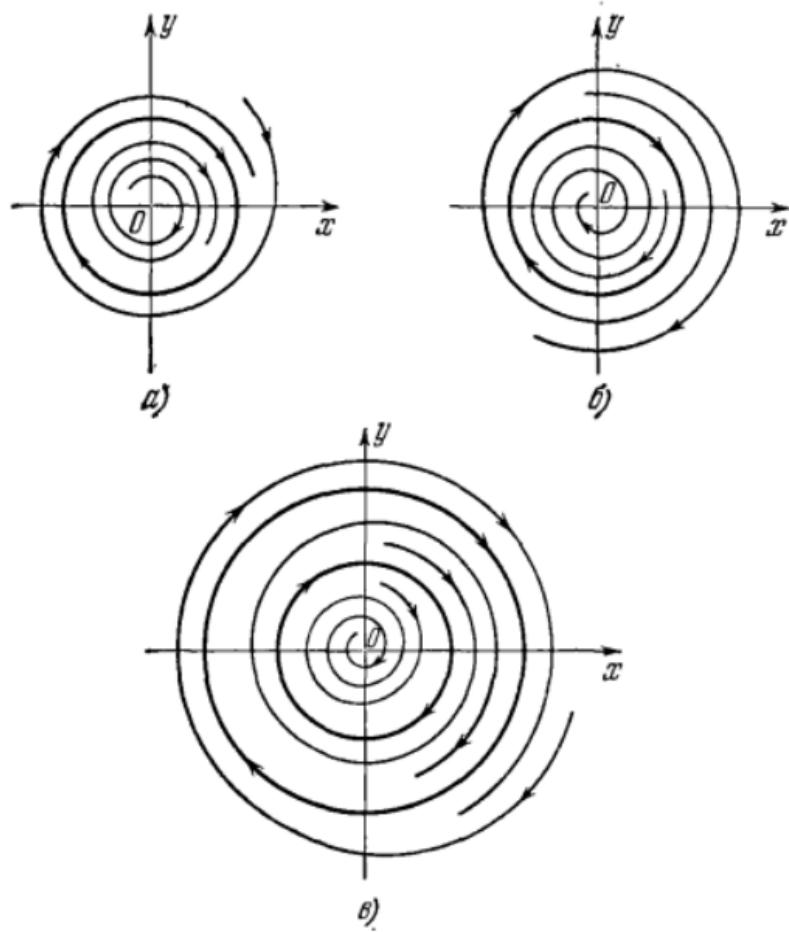


Рис. 1.26.

Если эти фазовые траектории изнутри и снаружи сходятся к данному предельному циклу (1.26 а), то это устойчивый предельный цикл. Если расходятся (1.26 б) - неустойчивый. 1.26 в - устойчивый и неустойчивый предельный цикл.

Процессы, соответствующие 1.26 а,б:

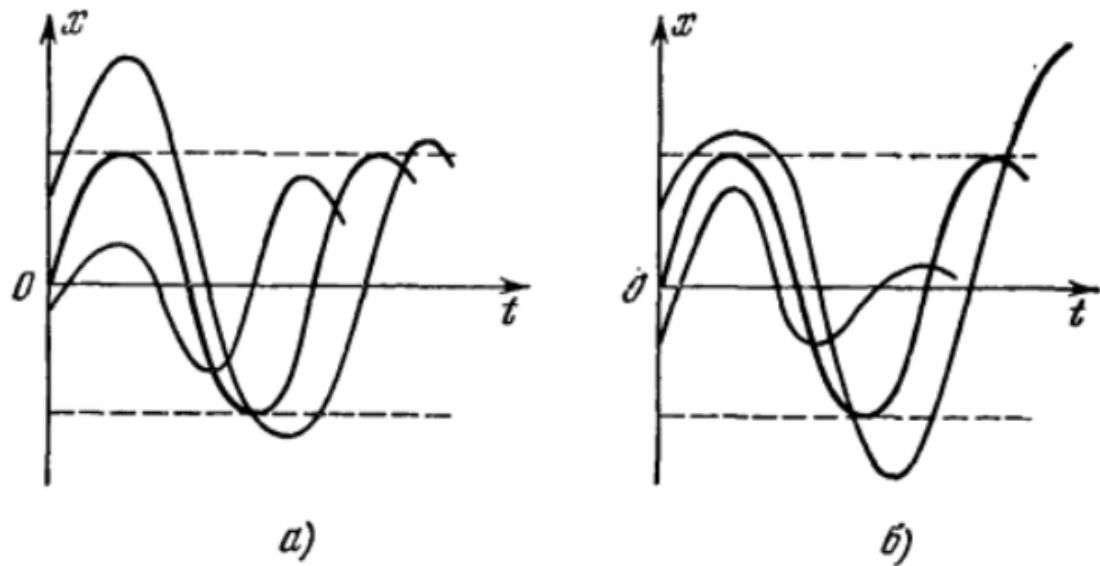


Рис. 1.27.

Дополнительная теория, которая не вошла в вопросы, но может понадобиться:

Виды устойчивости:

1. Устойчивость неасимптотическая

Устойчива в пределах заданной ошибки

2. Устойчивость асимптотическая

3. Устойчивость на ограниченном интервале времени

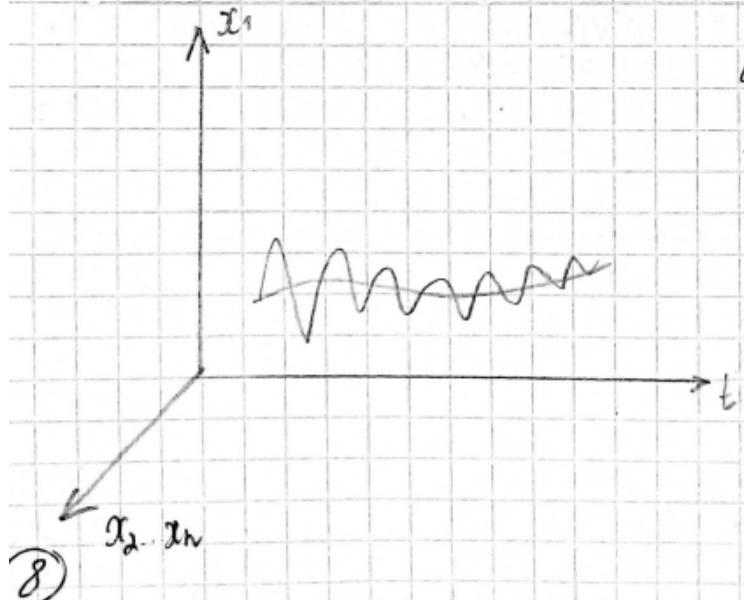
4. Устойчивость в целом

Асимптотически устойчивость для любых начальных условий

5. Абсолютная устойчивость

Асимптотическая устойчивость при любых начальных условиях для заданного класса нелинейностей

1. Устойчивость неасимптотическая



$$\delta < \delta_{\text{заг}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) < \epsilon_{\text{заг}}$$

2. Устойчивость асимптотическая

$$\epsilon(t) = g_3(t) - x_1(t) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$$

3. Устойчивость на ограниченном времене

4. Устойчивость в узлах

А.У. + д.Н.У.

5. Абсолютная устойчивость

А.У + д.Н.У + заданный класс непрерывности

Автоколебания – собственные периодические колебания системы, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия. При этом частота и амплитуда автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяются внутренними свойствами системы

Квадратичной формой n переменных называют однородный многочлен 2-й степени, каждое слагаемое которого содержит либо квадрат переменной, либо парное произведение переменных.

- 1) Квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство $Q(x) > 0$ ($Q(x) < 0$).
- 2) Квадратичная форма $Q(x)$ называется знакопеременной, если она принимает как положительные так и отрицательные значения.
- 3) Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) полуопределенной, если $Q(x) \geq 0$ ($Q(x) \leq 0$) для любого x .

Для решения вопроса о том, является ли данная квадратичная форма положительно (отрицательно) определенной, используется **критерий Сильвестра**:

- 1) Квадратичная форма является положительно определенной, тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы строго положительны (больше нуля).
- 2) Квадратичная форма является отрицательно определенной, тогда и только тогда, когда знаки всех угловых миноров ее матрицы чередуются, причем минор порядка 1 отрицателен.

$$Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x^T \cdot A \cdot x, \text{ где:}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец переменных;}$$

$$x^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n) - \text{его транспонированная строка;}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{Матрица квадратичной формы.}$$

матрица A - симметричная, на главной диагонали коэффициенты при x_1^2, x_2^2, \dots на остальных местах - коэффициенты при $x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_3, \dots$, деленные пополам

например это $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$ равносильно этом

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Модуль 2

1. Коррекция нелинейных систем. Линейные корректирующие устройства

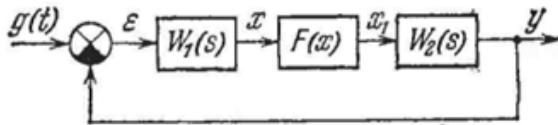
Цель – удовлетворение предъявляемых к системе технических требований

Можно вводить последовательное или параллельное линейное звено

$$F(x) = q(a)x,$$

Пусть нелинейность после линеаризации имеет вид:

$$0 \leq q(a) \leq q_m \quad \text{или} \quad q_n \leq q(a) \leq q_m.$$



$$q(a) = kq_0(a),$$

Пусть коэф. гармонический линеаризации имеет вид:

Тогда: $q_0(a) = \frac{1}{k} q(a).$ Величину $q_0(a)$ будем называть нормированным коэффициентом гармонической линеаризации.

Коэф. усиления к будем относить к линейной части:

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_{\text{п}}(s) = kW_1(s)W_2(s),$$

(пл – приведенная линейная)

Алгоритм коррекции:

- Строится логарифмическая амплитудная частотная характеристика первоначально заданной приведенной линейной части системы:

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_1(s)W_2(s),$$

где k – коэффициент усиления, перенесенный из нелинейности

2. Формируется желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика линейной части $W_{\text{желаемая}}(s)$ в соответствии с требованиями точности и качества процессов
3. Синтезируется линейное корректирующее устройство также методом линейной теории.
4. Вычерчивается логарифмическая фазовая частотная характеристика полученной скорректированной линейной части системы.
5. Для данной нелинейности с использованием нормированного коэффициента строится «запретная» зона, соответствующая желаемому показателю колебательности M . Та кривая $M = \text{const}$, которой касается полученная фазовая характеристика, определяет значение показателя колебательности данной скорректированной системы.
6. Если необходимо уменьшить M , то нужно несколько изменить параметры полученного выше линейного корректирующего устройства, следя затем, чтобы не допускать существенного искажения желаемых свойств логарифмической амплитудно-частотной характеристики приведённой линейной части, положенных первоначально в основу расчёта.

Пример:

Передаточная ф-я разомкнутой системы после гармонической линеаризации нелинейности и добавления линейного корректирующего звена:

$$W(s, a) = W_{\text{л}}(s)kq_0(a) = q_0(a)W_{\text{пл}}(s).$$

$$\Phi(s, a) = \frac{W(s, a)}{1 + W(s, a)} = \frac{q_0(a)W_{\text{пл}}(s)}{1 + q_0(a)W_{\text{пл}}(s)}.$$

Тогда замкнутая:

Преобразования:

$$W_{\text{пл}}(s) = U(\omega) + jV(\omega).$$

$$M = |\Phi(j\omega, a)|$$

$$M = \frac{q_0 \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + q_0 U)^2 + (q_0 V)^2}}$$

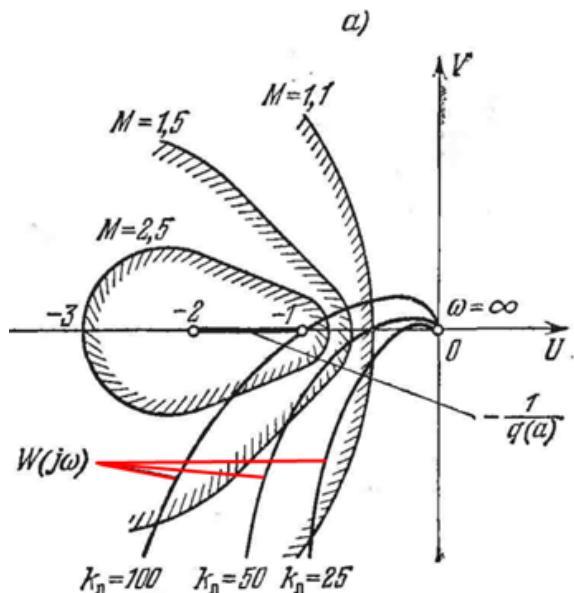
$$(U - U_0)^2 + V^2 = R^2$$

$$U_0 = -\frac{M^2}{q_0(M^2 - 1)}, \quad R = \frac{M}{q_0(M^2 - 1)}$$

U_0 – центр окружности

R – радиус

Построим графики запретных зон, варьируя M , и графики амплитудно-фазовой характеристики линейной части при разных значениях K_L .



По графику делаем вывод, при каких параметрах линейной части какой показатель колебательной M будет у системы.

Интересно также отметить то, что автоколебания в нелинейной системе определяются (см. § 4.4) условием

$$W_L(j\omega) = -\frac{1}{q(a)}.$$

Линейная же система устойчива, если кривая $W(j\omega)$ пересекает вещественную ось правее точки -1 .

Следовательно, если бы зона $-1/q(a)$ оказалась бы правее -1 , то мы бы сузили область, в которой система устойчива

Также устойчивость системы можно отследить по логарифмическим частотным характеристикам:

На рисунке 7.3 (а) изображена запретная зона в амплитудно-фазовом виде. На 7.3 (б) она перенесена на логарифмически-частотный график.

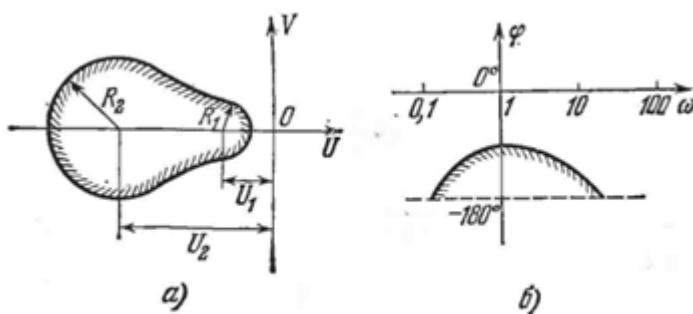


Рис. 7.3.

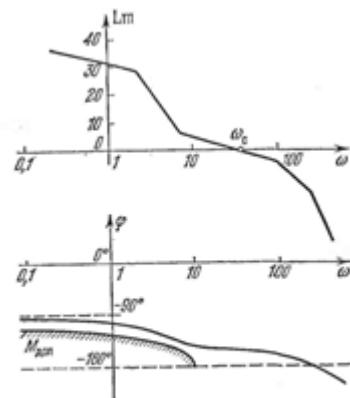


Рис. 7.5.

Логарифмические частотные характеристики скорректированной по изложенной выше процедуре системы должны быть такими, чтобы фазовая характеристика линейной части $\phi(\omega)$ не заходила внутрь запретной зоны, определяемой допустимым значением показателя колебательности M (рис. 7.5).

2. Коррекция линейных систем. Нелинейные корректирующие устройства

Преимущества – нелинейная коррекция обладает более широкими возможностями, дает больше разнообразных форм частотных характеристик и позволяет менять форму частотных характеристик в зависимости от амплитуды сигнала.

Цели – достижение желаемых свойств процессов управления и ослабить влияние имеющихся вредных нелинейностей (люфт, зона нечувствительности...)

Примеры (4 штуки):

1. Напряжение, пропорциональное модулю ошибки, подается на вход умножителя и вычитается из напряжения тахогенератора. Сигнал обратной связи уменьшается, когда ошибка возрастает, что приводит к убыстрению отработки больших отклонений и уменьшению скорости отработки в конце процесса

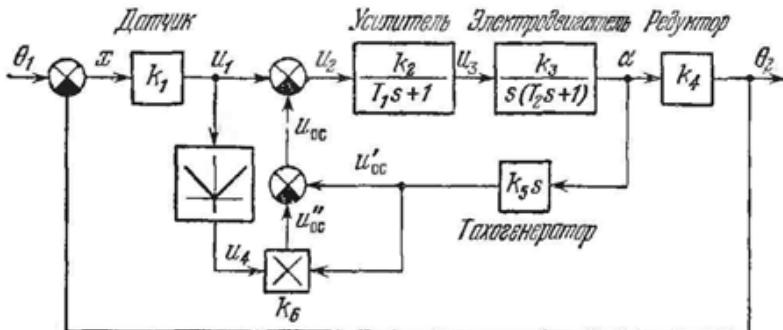


Рис. 7.10.

Нужно ли описывать математику - не ясно. Возможно, достаточно описания схемы.

$$\begin{aligned} x &= \theta_1 - \theta_2, \quad u_1 = k_1 x, \quad u_2 = u_1 - u_{oc}, \\ (T_1 p + 1) u_s &= k_2 u_2, \quad (T_2 p + 1) p \alpha = k_3 u_s, \\ \theta_2 &= k_4 \alpha, \quad u_{oc} = u'_{oc} - u''_{oc}, \\ u'_{oc} &= k_5 p \alpha, \quad u''_{oc} = k_6 u_4 u'_{oc}, \quad u_4 = |u_1|. \end{aligned}$$

При входном сигнале равном нулю уравнение системы в переходном процессе:

$$[T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_{oc}) p + k] x - k'_{oc} |x| p x = 0, \quad (7.12)$$

где $k_{oc} = k_2 k_3 k_5$, $k'_{oc} = k_1 k_6 k_{oc}$, $k = k_4 k_2 k_6$.

$$F(x) = |x| / \rho x$$

Нелинейность:

$$\begin{aligned} x &= a(t) \cdot \sin \psi(t) \\ \dot{a} &= a \dot{\psi} \\ \dot{\psi} &= \omega \end{aligned}$$

$$a(t) = a_0 e^{\frac{\omega}{\zeta} t}.$$



- показатель затухания (предполагаем, что колебания будут затухающие)

$\zeta < 0$ (самой же парой т.к. нужно, чтобы
коэффициент затухания)

После линеаризации:

$$F(x) = \left[q(a) + q'(a) \frac{p - \xi}{\omega} \right] x,$$

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} |a \sin \psi| (a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} |a \sin \psi| (a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}, \quad \cos \omega t = \frac{p - \xi}{a\omega} x$$

После интегрирования:

$$q = \frac{8}{3\pi} a\xi, \quad q' = \frac{4}{3\pi} a\omega.$$

Тогда характеристическое уравнение системы (7.12)

примет вид

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + (1 + k_{oc}) \lambda + k + k_{oc} \frac{4a}{3\pi} (\lambda + \xi) = 0$$

Подстановка $\lambda = \xi + j\omega$ дает два уравнения

$$T_1 T_2 \xi^2 + (T_1 + T_2) \xi^2 + \xi \left(1 + k_{oc} - 3T_1 T_2 \omega^2 - \frac{8}{3\pi} k_{oc}' a \right) + k - (T_1 + T_2) \omega^2 = 0,$$

$$3T_1 T_2 \xi^2 \omega + 2\omega (T_1 + T_2) \xi + \left(1 + k_{oc} - \frac{4}{3\pi} k_{oc}' a - T_1 T_2 \omega^2 \right) \omega = 0.$$

Из второго уравнения

$$\omega^2 = 3\xi^2 + 2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \xi + \frac{1 + k_{oc}}{T_1 T_2} - \frac{4k_{oc}'}{3\pi T_1 T_2} a$$

а из первого —

$$a = \frac{3\pi}{2k_{oc}' \left(\xi + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right)} \left[4T_1 T_2 \xi^3 + 4(T_1 + T_2) \xi^2 + (1 + k_{oc}) \xi + \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \xi - k + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} (1 + k_{oc}) \right].$$

Строим диаграммы качества нелинейных переходных процессов и делаем вывод, улучшились ли показатели нашей системы.

2. Усовершенствованная схема из 1 примера

2. Рассмотрим более совершенную систему, схема которой изображена на рис. 7.11. Система отличается от прежней тем, что сигнал нелинейной коррекции u_{oc} проходит через контакты реле. В результате при $u_5 < 0$ (т. е. в четных четвертях колебаний) сигнал нелинейной коррекции не подается на вход усилителя. Это — существенное улучшение в сравнении с предыдущей системой, так как там уменьшение демпфирования давалось во всех четвертях колебаний, в то время как в четных чет-

вертях это уменьшение пользы не приносит. Здесь оно исключается за счет отключения коррекции при $u_5 < 0$.

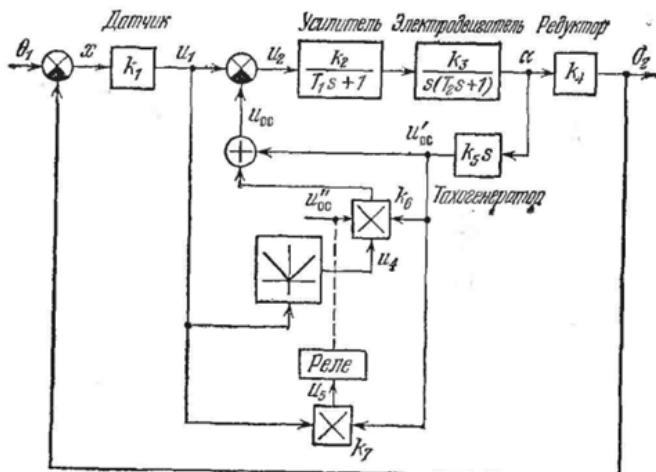


Рис. 7.11.

Пояснение: $u_5 < 0$, когда $u_1 < 0$ и производная от альфа > 0 + когда $u_1 > 0$ и производная от альфа < 0 (т.к. u_1 и альфа перемножаются)

Уравнение динамики процесса:

$$x = \theta_1 - \theta_2 = -\theta_2$$

$$u_2 = u_1 - u_{loc}$$

$$u_{loc} = u_{loc}' + u_{loc}'' \cdot \gamma_{k_1} \cdot k_6 \cdot u_{loc}' = u_{loc}' / (1 + u_4 u_{loc}'' k_6)$$

$$\theta_2 = \alpha k_4$$

$$\alpha = u_2 \cdot \frac{k_2}{T_1 S + 1} \cdot \frac{k_3}{S(T_2 S + 1)}$$

$$u_{loc}' = k_5 S \cdot \alpha$$

$$u_{loc}'' = \begin{cases} 1, & u_5 > 0 \\ 0, & u_5 \leq 0 \end{cases}$$

$$u_5 = u_1 \cdot k_2 \cdot u_{loc}'$$

$$x = -\theta_2 = -\alpha k_4 = -u_2 \frac{k_2}{T_1 S + 1} \cdot \frac{k_3}{S(T_2 S + 1)} k_4 =$$

$$= (u_{loc} - u_1) \frac{k_2}{T_1 S + 1} \cdot \frac{k_3}{S(T_2 S + 1)} k_4 =$$

$$= (u_{loc}' / (1 + u_4 u_{loc}'' k_6)) - \alpha k_1 \frac{k_2 k_3 k_4}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)} =$$

$$= (k_5 S \alpha (1 + \exp(x) u_{loc}'' k_6) - \alpha k_1) \frac{k_2 k_3 k_4}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}$$

$$-\alpha k_4 S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) = k_2 k_3 k_4 / (k_5 S \alpha (1 + \exp(x) u_{loc}'' k_6) - \alpha k_1)$$

$$-\alpha S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) = k_2 k_3 (k_5 S \alpha + k_5 k_6 F(x) \alpha - \alpha k_1)$$

$$\alpha S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) + k_2 k_3 k_5 S \alpha + k_2 k_3 k_5 k_6 F(x) \alpha = \alpha k_1 k_2 k_3$$

$$S \rightarrow p$$

$$\alpha [P/T_1 P + 1)(T_2 P + 1) + k_2 k_3 k_5 P + k_2 k_3 k_5 k_6 F(x)] = k_1 k_2 k_3 x$$

$$k = k_1 k_2 k_3 k_4$$

$$k_{oc} = k_2 k_3 k_4$$

$$k'_{oc} = k_2 k_3 k_5 k_6 = k_6 k_{oc}$$

$$\alpha = -\frac{x}{k_4}$$

$$\alpha [p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k_{oc} p] + k'_{oc} p F(x) + x \cdot k = 0$$

$$\alpha [T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + (1 + k_{oc}) p + k] + k'_{oc} F(x) = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} -|x|/px, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = [q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} (p - s)]x$$

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} -|a \sin \psi| (\omega \cos(\omega t) + \xi x) \sin \psi d\psi$$

$$q'(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} -|a \sin \psi| (\omega \cos(\omega t) + \xi x) \cos \psi d\psi$$

3. Еще один пример

Применение такой нелинейной обратной связи позволяет уменьшить величину ошибки в динамике при большой скорости отработки (улучшает качество переходного процесса), сохраняя возможность обеспечения необходимого значения k_{oc} при малых скоростях, исходя из требования

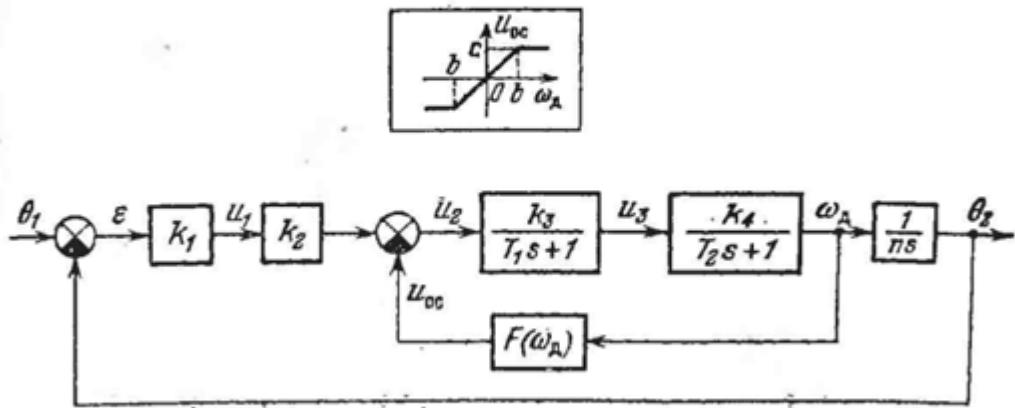


Рис. 7.12.

статической точности.

Управление динамикой:

$$\varepsilon = -\theta_2$$

$$u_1 = k_1 \varepsilon$$

$$u_2 = u_1 k_2 - u_{oc}$$

$$u_3 = u_2 \frac{k_3}{T_1 s + 1}$$

$$w_g = u_3 \frac{k_4}{T_2 s + 1}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{\pi S} \omega g$$

$$U_{oc} = F(\omega g) = \left[q/a + \frac{q/a \cdot (p-3)}{\omega} \right] \omega g$$

0 м.т. нелинейность
однозначная

$$E = -\Theta_2 = -\frac{1}{\pi S} \omega g = -\frac{1}{\pi S} U_3 \frac{k_4}{T_2 S + 1} = -\frac{1}{\pi S} \cdot U_2 \cdot \frac{k_3}{T_1 S + 1} \times$$

$$\times \frac{k_4}{T_2 S + 1} = -\frac{1}{\pi S} \cdot (U_1 k_2 - U_{oc}) \frac{k_3 k_4}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{\pi S} \cdot (k_1 k_2 E - F(\omega g)) \frac{k_3 k_4}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)} =$$

$$= -\frac{1}{\pi S} (k_1 k_2 E - q/a \omega g) \frac{k_3 k_4}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}$$

$$E(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) \pi S = -k_3 k_4 (k_1 k_2 E - q/a \omega g)$$

$$\omega g = \Theta_2 \pi S = -E \pi S$$

$$E(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) \pi S = -k_3 k_4 (k_1 k_2 E + q/a E \pi S)$$

$$E(T_1 S + 1)(T_2 S + 1) \pi S = -k_1 k_2 k_3 k_4 E - E k_3 k_4 q/a \pi S$$

$$S \rightarrow P$$

$$E(T_1 T_2 P^2 + (T_1 + T_2)P + 1) \pi P = -k_1 k_2 k_3 k_4 E - \pi P E k_3 k_4 q/a$$

$$E[T_1 T_2 P^3 \pi + \pi(T_1 + T_2)P^2 + \pi P + \pi P \cdot q/a] k_3 k_4 + k_1 k_2 k_3 k_4 = 0$$

$$T_1 T_2 P^3 \pi + \pi(T_1 + T_2)P^2 + \pi P(1 + k_3 k_4 q/a) + k_1 k_2 k_3 k_4 = 0$$

$$T_1 T_2 P^3 + (T_1 + T_2)P^2 + (1 + k_3 k_4 q/a)P + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{\pi} = 0$$

$$P = 1 = \xi + j\omega$$

$$q/a = \frac{2}{\pi} k_{oc} \left(a \cos \frac{\theta}{a} + \frac{\theta}{a} \sqrt{1 - (\frac{\theta}{a})^2} \right)$$

Х3, откуда они там берут кос, потому что в схеме его я как бы не вижу

4. Нелинейное система с нелинейным корректирующим

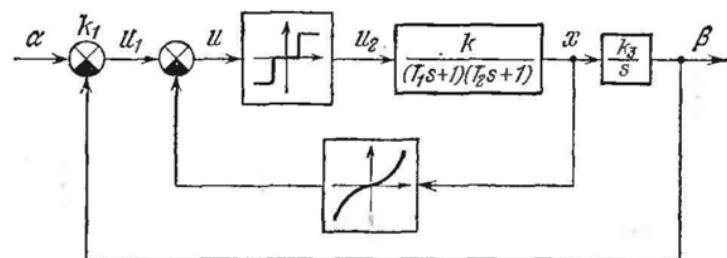


Рис. 7.14.

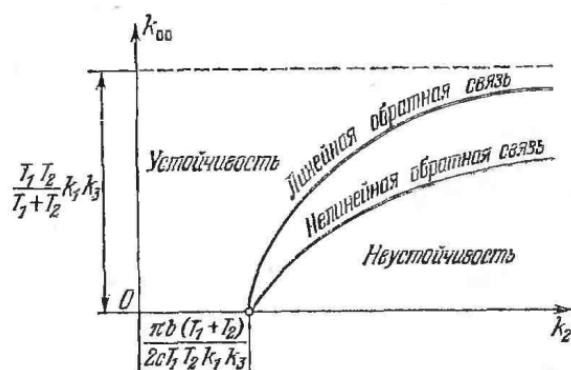


Рис. 7.17.

за счет нелинейности обратной связи можно расширить область устойчивости, как показано на рис. 7.17.

y_1 -наме динамиканы:

$$u_1 = -k_1 \beta$$

$$u = u_1 - F_{oc}(x)$$

$$u_2 = F(u)$$

$$x = u_2 \frac{k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$\beta = x \cdot \frac{k_3}{s}$$

$$F_{oc} = [q_{oc}(a) + \frac{q'_{oc}(a)}{\omega} p] x \xrightarrow{0}, \text{м.к. нелинейность однозначна}$$

$$F = [q(a) + \frac{q'(a)p}{\omega}] u \xrightarrow{0}, \text{м.к. нелинейность однозначна}$$

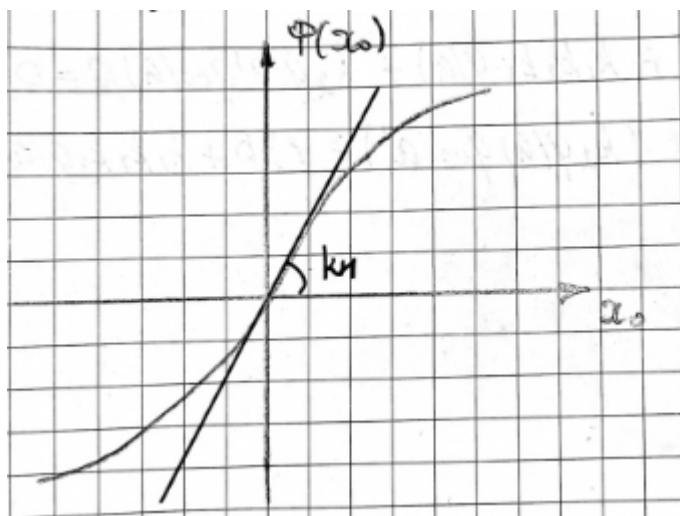
$$u_1 = -k_1 \beta = -k_1 x \frac{k_3}{s} = -\frac{k_1 k_3}{s} \cdot u_2 \frac{k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -F(u) \frac{k_1 k_2 k_3}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)} = -g(a) \cdot u \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)} \\
 &-k_1 \cdot x \cdot \frac{k_3}{S} = -g(a) u \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)} \\
 &-\frac{k_1 k_3}{S} x = -g(a) \left[-k_1 \cdot \frac{k_3}{S} x - g_{oc}(a') x \right] \cdot \frac{k_1 k_2 k_3}{S(T_1 S+1)(T_2 S+1)} \\
 &-k_1 k_3 x (T_1 S+1)(T_2 S+1) = -g(a) \left[-k_1 \frac{k_3}{S} x - g_{oc}(a') x \right] k_1 k_2 k_3 \\
 &-x (T_1 S+1)(T_2 S+1) = -k_2 g(a) \left[-k_1 \frac{k_3}{S} x - g_{oc}(a') x \right] \\
 &x \left[(T_1 S+1)(T_2 S+1) + g(a) \cdot k_1 k_2 k_3 \cdot \frac{1}{S} + k_2 g(a) g_{oc}(a') \right] = 0 \\
 &S \Rightarrow P \\
 &p(T_1 p+1)(T_2 p+1) + k_1 k_2 k_3 \cdot g(a) + k_2 g(a) g_{oc}(a') p = 0 \\
 &T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + (k_2 g(a) g_{oc}(a') + 1)p + k_1 k_2 k_3 g(a) = 0
 \end{aligned}$$

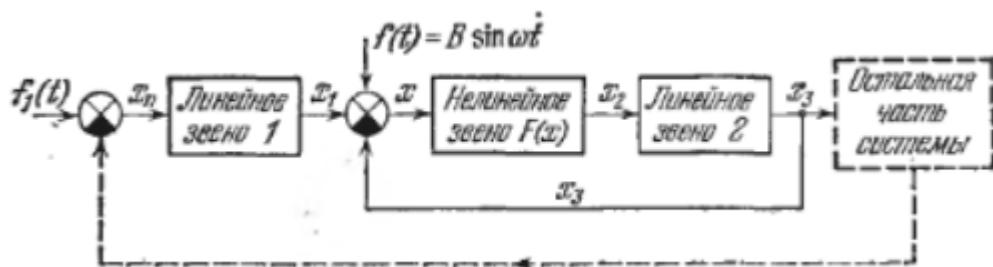
3. Вибрационное сглаживание и вибрационная помехоустойчивость

При возникновении колебательного процесса в систему разрывные нелинейные характеристики для медленных процессов становятся гладкими. Этот процесс называется вибрационным сглаживанием, а линеаризация – вибрационной. (из семов Ипполитовой)

Свойство плавности функции $\Phi(x_0)$ как характеристики прохождения медленного сигнала в процессе управления $x_0(t)$ через нелинейное звено при любом очертании нелинейности, имеющей скачки и петли, называется **вибрационным сглаживанием** для процесса управления при наличии вынужденных вибраций. За счет этого возникает возможность обычной линеаризации полученной сглаженной характеристики в виде $\Phi = k_n * x_0$, то говорят также о **вибрационной линеаризации нелинейности** (из Попова) (грубо говоря, мы сначала убираем различные петли, зоны нечувствительности и получаем гладкую кривую, а потом мы эту кривую линеаризуем, проводя прямую с наклоном k_n)



В технике вибрационное сглаживание применяется следующим образом:



Непосредственно у входа нелинейного звена прикладывается внешнее вибрационное воздействие $f(t) = B \sin(\omega t)$ с частотой выше полосы пропускания линейного звена 2. Тогда вынужденные вибрации локализуются во внутренней части системы.

Сигнал на входе нелинейного звена имеет вид:

$$x = x^0 + x^* = x_1 - x_3 + f(t),$$

причем

$$x^0 = x_1 - x_3, \quad x^* = f(t) = B \sin(\omega t).$$

Отсюда следует, что амплитуда a_s и фаза ϕ симметричных вынужденных вибраций переменной x равны $a_s = B$, $\phi = 0$.

$$k_n = \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_0} \right)_{x=0} \Rightarrow k_n = f(B) \Rightarrow \text{шестко кн резу-} \\ \text{шновато ампли-} \\ \text{тузой}$$

Таким образом можно ликвидировать гистерезисную петлю или зону нечувствительности и получить для сигнала управления линейную характеристику с соответствующим коэффициентом K_n .

Аналогично можно преобразовать сухое трение в трение, пропорциональное скорости и т.п.

Вибрационная помехоустойчивость:

Устойчивость нелинейной системы зависит от внешнего сигнала

Пусть $f_1(t) = B \sin(\omega t)$ – вибрационная помеха

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t) + S_1(p)f_1(t),$$

Характеристическое уравнение системы для полезного сигнала в процессе управления имеет вид:

$$Q(\lambda) + k_u R(\lambda) = 0,$$

*$k_u = f(B, \omega) \Rightarrow$ от параметров помехи
будет зависеть качество процесса
управления и устойчивость системы*

Коэффициент k зависит от амплитуды B и частоты ω в внешней вибрационной помехи. От этих параметров помехи будет зависеть качество процесса управления и устойчивость системы. Предельное значение амплитуды вибрационной помехи B , до которой система остается еще устойчивой, называется **границей вибрационной помехоустойчивости системы**.

k в этой формуле (как я поняла) коэффициент вибрационной линеаризации
Вкратце как пользоваться этой инфой на основе примера из Попова:

1. Выводим характеристическое уравнение системы для процесса управления (исходя из уравнений динамики системы)
2. Оно получится зависящим от коэффициента вибрационной линеаризации k_n
3. Используем критерий устойчивости Гурвица
4. На основании него находим подходящее значение k_n
5. Из найденного k_n можем найти B_{max}
6. В зависимости от того, какая у нас амплитуда помехи, мы можем подбирать коэффициенты, которые нам нужны (например, как в Попове, коэффициент обратной связи). То есть делать такую систему, которая выдержит предполагаемые помехи

4. Устойчивость неавтономных систем. Теоремы Ляпунова.

Пусть система (1) описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Начало координат, т. е. точка $x = 0$, является положением равновесия: $X(0, t) = 0$ при всех $t > 0$. Правая часть приведенных уравнений зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются неавтономными системами.

Рассмотрим функцию $V(x, t)$. Производная этой функции по времени, вычисленная на траекториях системы, имеет вид

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \mathbf{X}(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}.$$

Теорема Ляпунова об устойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (1) устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(x, t)$ такая, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы (1) является отрицательно полуопределенной функцией.

Чтобы доказательство было более понятным, надо знать определение неасимптотической устойчивости по Ляпунову

Положение равновесия $x=0$ системы (1) называется неасимптотически устойчивым по Ляпунову, если для любого $\epsilon > 0$ существует d больше нуля такая, что для любого $t \geq t_0$ расстояние изображающей точки до начала координат меньше ϵ при начальном отклонении меньше d

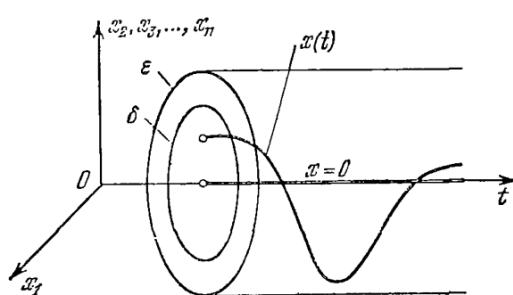


Рис. 5.2.

Доказательство:

Доказательство

зададим $\varepsilon > 0$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

область значений x ограничена $\rho(0)$
корниой

$\|x\| = \varepsilon$ / грубо говоря, это просто длина вектора, приведенного к этому-
также (настоящее до начала координат)
стремле гицется последовательно опреде-
лению функции международного

$$V(x) > 0$$

Ограничим значение функции $V(x)$ сквозь
при $\|x\| = \varepsilon$ через $\alpha > 0$

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha > 0$$

$V(0) = 0$ (м.к. по определению)

Возьмем $\delta > 0$: $V(x) < \alpha$ при $\|x\| < \delta$

также начальное условие несет в себе

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow V(x(t_0)) < \alpha$$

тогда для $x(t)$ при $t > t_0$ $V(x(t))$ - невозраста-
ющий, м.к. по условию теоремы

$$\dot{V} \leq 0$$

тогда

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) < \alpha$$

значит $\|x(t)\| < \varepsilon$

Если бы $\|x(t)\| > \varepsilon$, то $V(x) \geq \inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha$, —
— противоречие $V(x(t)) \leq V(x(t_0)) < \alpha$

Еще одно доказательство:

Доказательство. В соответствии с определением 2.3 устойчивости по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ нужно показать, каково бы ни было положительное число ε , найдется такое положительное число δ , что возмущенное движение $x(x^0, t)$ удовлетворяет условию:

$$|x(x^0, t)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t \geq t_0, \quad \text{если только } |x^0| < \delta$$

Обозначим S_ε и S_δ сферы радиусов ε и δ соответственно:

$$S_\varepsilon = \{x: |x| = \varepsilon\}, \quad S_\delta = \{x: |x| = \delta\}.$$

Пусть функция $V(x, t)$ удовлетворяет условию теоремы и принимает на сфере S_ε в начальный момент t_0 минимальное значение m :

$$m = \min_{x \in S_\varepsilon} V(x, t_0)$$

Выберем число δ так, чтобы внутри сферы S_δ выполнялось неравенство $V(x, t_0) < m$. Такая сфера существует, так как функция $V(x, t_0)$ непрерывна и $V(0, t_0) = 0$. Так как по условию $\dot{V}(x, t) \leq 0$, то

$$V(x, t) \leq V(x^0, t_0) < m, \quad \text{если } |x(t_0)| < \delta.$$

Следовательно, траектория $x(x^0, t)$ никогда не достигнет сферы S_ε , на которой $V(x, t) \geq m$, если только $|x^0| < \delta$. Теорема доказана. ■

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости:

Положение равновесия неавтономной системы (1) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы (1) является отрицательно определенной функцией.

Теорема об асимптотической устойчивости в целом:

Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (1) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел и бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (1) неустойчиво, если существует функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $\dot{V}(x, t)$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и при всех $t > t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x_0$, в которой функция $V(x, t)$ принимает положительное значение.

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (1) неустойчиво, если существует функция $V(x,t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $\dot{V}(x,t)$ в силу уравнения этой системы имеет вид

$$\dot{V}(x,t) = \alpha V(x,t) + w(x,t),$$

где $w(x,t)$ — положительно полуопределенная функция, и при всех $t > t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x_0$, в которой функция $V(x,t)$ принимает положительное значение.

5. Теоремы Ляпунова. Исследование устойчивости нелинейных систем прямым методом Ляпунова.

Пусть имеется нелинейная система, описываемая уравнениями динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Теоремы прямого метода Ляпунова:

Теорема Ляпунова об устойчивости

Если для системы уравнений (1) существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой $dV/dt=W(x)$ является знакопостоянной противоположного знака, то решение системы $x=0$ устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости

Если для системы уравнений (1) существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой $dV/dt=W(x)$ является тоже знакоопределенной, но противоположного знака, то решение системы $x=0$ будет устойчивым асимптотически.

Теорема Ляпунова о неустойчивости

Если для системы уравнений (1) существует какая-нибудь функция $V(x)$, производная которой $dV/dt=W(x)$ является знакоопределенной функцией, причем в любой сколь угодно малой окрестности начала координат, имеется область в которой знак $V(x)$ совпадает со знаком $W(x)$, то решение системы $x=0$ неустойчиво.

Прямой метод Ляпунова основан на формировании и рассмотрении специальных функций $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающая вещественные значения и удовлетворяющая свойствам:

1. Функция однозначная;
2. $V(0,0,\dots,0)=0$;
3. Непрерывная вместе со своими частными производными.

(Из Попова: различают теоремы первого и второго методов Ляпунова. Теоремы первого метода Ляпунова использовались при исследовании устойчивости линеаризованных систем. Теоремы второго метода Ляпунова также называют прямым методом Ляпунова)

Способы формирования функции Ляпунова:

1. Энергетический подход.

При таком подходе в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимают полную энергию, представляющую сумму потенциальной и кинетической энергий.

2. Метод разделения переменных.

Этот метод состоит в следующем: Кандидата на функцию Ляпунова ищут среди функций, которые сами, как и их производные по времени, в силу заданных уравнений системы представляют сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n F_i(x_i), \quad V'(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x_i)$$

3. Метод Лурье-Постникова.

Рассматривают одну нелинейность $\sigma = f(e)$, и принимают в качестве кандидата на функцию Ляпунова сумму из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции, т.е. функцию вида:

$$V(x) = x^T B x + \int_0^e f(e) de,$$

где в общем случае $e = c^T x$.

4. Метод Красовского.

Этот метод состоит в том, что при рассмотрении устойчивости автономной системы $x' = X(x)$, $X(0) = 0$, $x \in R^n$, в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассматривают

квадратичную форму $V(x) = X^T B X$.

Симметричную матрицу В нужно выбрать так, чтобы сама квадратичная форма была положительно определенной, а ее производная по времени в силу заданного уравнения системы – отрицательно определенной.

5. Метод Вокера - Кларка

Пусть система описывается уравнением,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + f\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) = 0,$$

или, в нормальной форме

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

.....

$$x'_n = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова при этом методе рассматривается функция

$$V(x) = \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где неизвестная функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выбирается так, чтобы производная $V'(x)$ в силу заданных уравнений системы была отрицательно полуопределенной.

Пример:

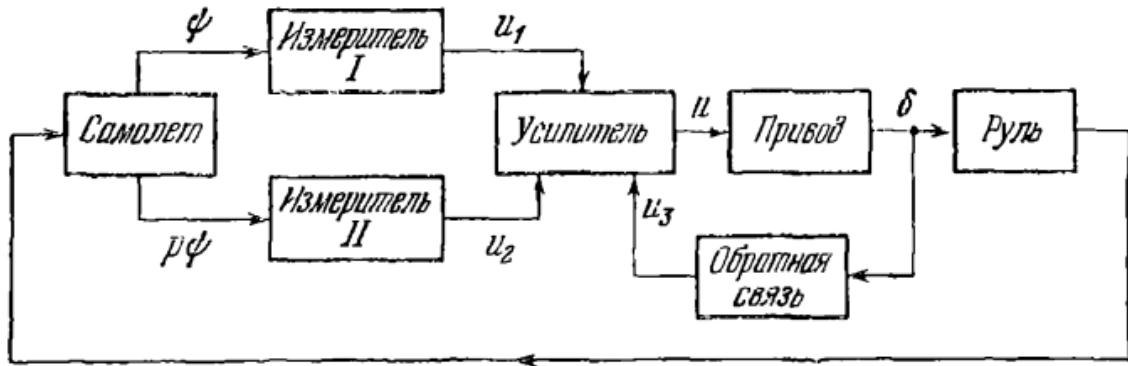
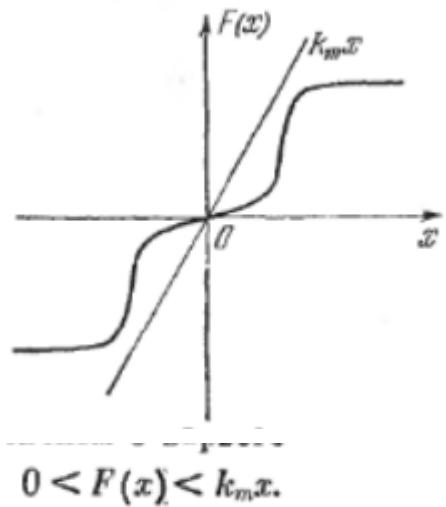


Рис. 5.9.

6. Исследование устойчивости нелинейных систем. Частотный критерий устойчивости Попова.

Критерии Попова дают достаточные условия абсолютной устойчивости по виду частотной характеристики линейной части системы

Рассмотрим случай, когда нелинейная характеристика расположена в секторе $[0; K_m]$.



$$Q(p)x = -R(p)y,$$

Линейная часть описывается уравнением:

Причем, степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$. Передаточная функция $W(s)=R(s)/Q(s)$ имеет полюсы с отрицательными вещественными частями, причем допускается наличие не более двух нулевых полюсов.

Теорема Попова:

Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если нелинейная характеристика находится в секторе $[0;K_m]$ и существует такое действительное число h , что при всех $w \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega h) W(j\omega)] + \frac{1}{k_m} > 0,$$

Для удобства графического представления этого критерия вводится модифицированная частотная характеристика линейной части

$$W_n(j\omega) = U_n(\omega) + jV_n(\omega),$$

где

$$U_n(\omega) = U(\omega), \quad V_n(\omega) = \omega V(\omega).$$

Поскольку выражение из теоремы можно записать в виде

$$U(\omega) - \omega h V(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0,$$

то с подстановкой U_m и V_m оно преобразуется к виду

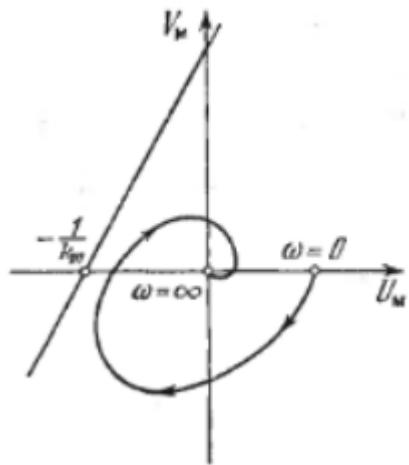
$$U_m(\omega) - h V_m(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0.$$

$$U_m - hV_m + \frac{1}{k_m} = 0$$

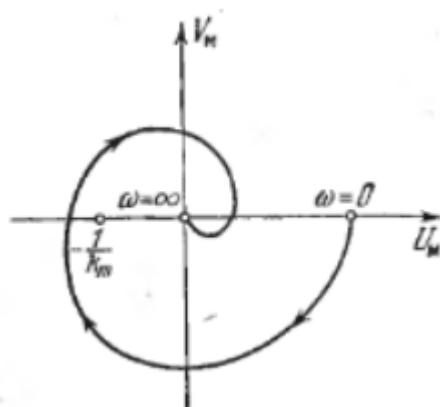
Выражение $U_m - hV_m + \frac{1}{k_m} = 0$ представляет собой уравнение прямой на плоскости прямоугольных координат U_m , V_m . Эта прямая проходит через точку $-1/k_m$ на оси U_m и имеет крутизну наклона $1/h$.

Отсюда вытекает формулировка **критерия абсолютной устойчивости**: Состояние равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика $F(x)$ находится внутри сектора $[0; k_m]$ и можно провести через точку $-1/k_m$ прямую так, что она не пересечет модифицированную частотную характеристику (последняя лежит справа).

Критерий выполняется:



Критерий не выполняется:



Рассмотрим случай, когда нелинейная характеристика $F(x)$ расположена в секторе $[K_0; k_m]$.

$$k_0x < F(x) < k_m x,$$

Здесь неравенство в теореме Попова, принимает вид:

$$\operatorname{Re}\left[\left(1+j\omega h\right)\frac{W(j\omega)}{1+k_0 W(j\omega)}\right] + \frac{1}{k_m - k_0} > 0.$$

После преобразований приходим к выражению:

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m}\right) U(\omega) - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m}\right) h\omega V(\omega) + \\ + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 k_m} > 0.$$

Используя модифицированную частотную характеристику, получаем, что уравнение

$$U_m^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m}\right) U_m - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m}\right) hV_m + V_m^2 + \frac{1}{k_0 k_m} = 0$$

на плоскости

координат модифицированной частотной характеристики U_m , V_m дает параболу, проходящую через точки $-1/k_0$ и $-1/k_m$ и имеющую в этих точках крутизну наклона касательных соответственно $-1/h$ и $1/h$.

В этом случае **критерий абсолютной устойчивости** формулируется следующим образом:

Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика находится внутри сектора $[K_0 : K_m]$ и можно провести через точки $-1/K_0$ и $-1/K_m$ такую параболу в вертикальной оси, чтобы модифицированная характеристика линейной части лежала вне этой параболы.

Линейная часть неустойчива:

Теорема:

Положение равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво, если новая линейная часть устойчива, а нелинейная часть принадлежит $[0, k_{\max}-r]$ и выполняется условие:

$$\operatorname{Re} \left[(1 + j\omega h) W_L(j\omega) \right] + \frac{1}{k_{\max} - r} > 0$$

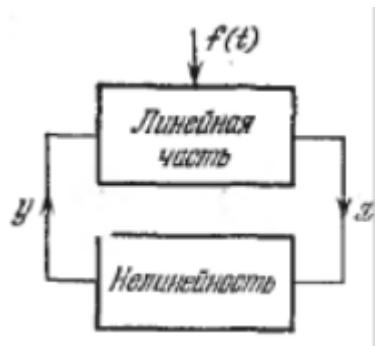
Критерий:

Положение равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво в $[r, k_{\max}]$, если можно провести такую параболу, что модифицированная частотная характеристика лежит вне этой параболы

7. Одночастотные вынужденные колебания. Частотные характеристики.

Одночастотные вынужденные колебания - это колебания нелинейной системы с частотой внешнего периодического воздействия.

Рассмотрим нелинейную систему с внешним воздействием $f(t)$



$$f(t) = B \sin \omega t. \quad (6.1)$$

Уравнение динамики системы имеет вид:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t). \quad (6.2)$$

Решение для вынужденных колебаний будем искать приближенно в форме

$$x = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.3) \quad \text{где } w - \text{ задано.}$$

Произведем гармоническую линеаризацию нелинейности:

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x_t \quad (6.4)$$

Подставим (6.1), (6.3) и (6.4) в уравнение системы (6.2):

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} a \sin(\omega t + \varphi) = S(p) B \sin \omega t. \quad (6.5)$$

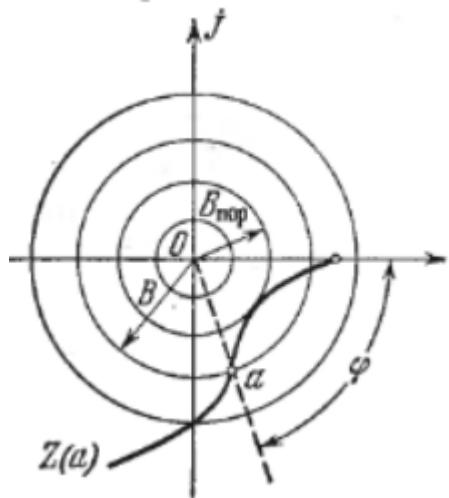
Используем символьический метод определения периодического решения, подставив сюда $p=j\omega$, а вместо $\sin(\omega t)$ выражение $e^{j\omega t}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \{Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a) + \\ & + jq'(a)]\} ae^{j(\omega t+\varphi)} = \\ & = S(j\omega) Be^{j\omega t}, \end{aligned}$$

или

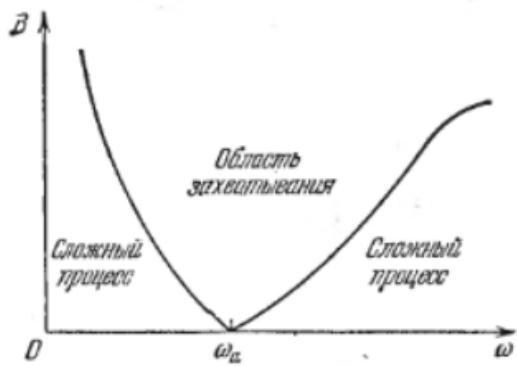
$$Z(a) = Be^{-j\varphi_s} \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) можно решить графически. Правая часть изображается в виде окружности радиуса B , а левая часть $Z(a)$ строится как кривая по точкам с переменным параметром a .



Точки пересечения кривой и окружности дают решение, причем амплитуды вынужденных колебаний определяется в точке пересечения по отметкам на кривой Z , а фаза по величине угла.

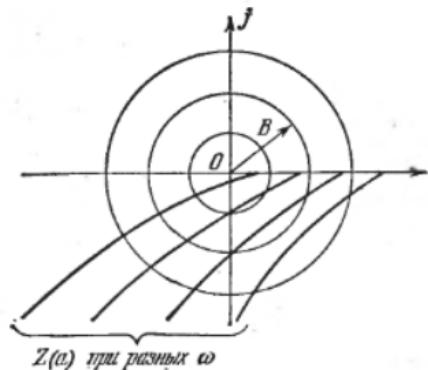
Одночастотные вынужденные колебания (в данном случае) возможны только при амплитуде $B > B_{\text{пор}}$, а при меньшей амплитуде будет иметь место сложный процесс.



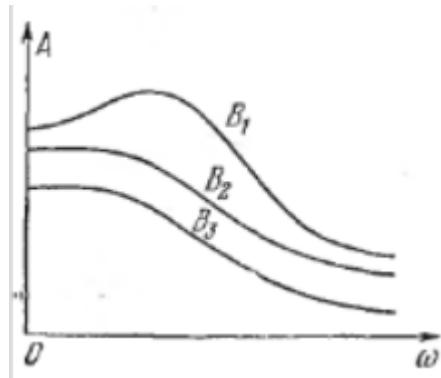
Wa-частота автоколебаний.

Область захватаивания - область значений B и w , в которой существуют одночастотные вынужденные колебания. Область захватаивания определяется экспериментально
Сложный процесс - сумма колебаний собственной частоты+внешнее воздействие.

Построим серию кривых $Z(a)$ для разных значений w



На основании этого рисунка можно построить зависимости $a(w)$ и $\phi(w)$, т.е. частотные характеристики замкнутой нелинейной системы по первой гармонике. В нелинейных системах, в отличие от линейных, характер частотных характеристик может существенно зависеть от B . Поэтому для разных значений B получается серия частотных характеристик:



8. Исследование устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения.

Пусть имеем системы дифференциальных уравнений (1):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и пусть $x_i=0, i=1,2,\dots,n$, есть точка покоя системы, т.е. $f_i(0, 0, \dots, 0)=0, i=1,2,\dots,n$.

С помощью формулы Тейлора, разложим функции f_i по x в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

или, учитывая $f_i(0, 0, \dots, 0)=0, i=1,2,\dots,n$,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, 0, \dots, 0)}{\partial x_j} = \text{const},$$

Малой k -го порядка малости относительно бесконечно малой величины $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}$ не равный нулю.

а слагаемые R_i содержат члены не ниже второго порядка малости относительно x_1, x_2, \dots, x_n . Система дифференциальных уравнений (1) примет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a_{ij} = \text{const}. \quad (2)$$

Так как понятие устойчивости точки покоя $O(0,0,\dots,0)$ связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, то поведение решения (1) будет определяться главными линейными членами разложения. Поэтому рассмотрим систему, называемую **системой уравнений первого приближения**:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Теоремы об устойчивости по первому приближению:

Теорема 1

Если все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части, то точка покоя $x_i=0$, $i=1,2,\dots,n$, системы (3) и системы (2) асимптотически устойчива.

При выполнении условий теоремы возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Теорема 2

Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x_i=0$ системы (3) и системы (2) неустойчива. В этом случае также возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

Критический случай:

В случае, когда все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, на устойчивость начинают влиять нелинейные члены R_i и исследование на устойчивость по первому приближению становится невозможным.

9. Процессы управления, сопровождающиеся вынужденными вибрациями.

Рассмотрим случай, когда в системе при наличии переменного внешнего воздействия протекает некоторый процесс управления, а кроме того к системе приложено внешнее периодическое воздействие.

Уравнение динамики системы в этом случае:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t) + S_1(p)f_1(t),$$

где

$f_1(t) = B \sin(\omega t)$, а $f(t)$ - медленное воздействие (по сравнению с $f_1(t)$).

Решение будем искать в виде:

$$x = x^0(t) + x^*(t), \quad x^* = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.9)$$

где $x_0(t)$ - тоже медленная по сравнению с $x^*(t)$ функция времени, определяющая процесс управления при наложенных на него вынужденных вибрациях x^* .

Полагая, что основной процесс управления протекает настолько медленно, что за один период колебаний x^* можно приблизительно считать величину x_0 неизменной. Поэтому можно использовать "обычные" формулы гармонической линеаризации:

$$F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^* \quad (6.10)$$

Подставив (6.10) и (6.9) в уравнение динамики системы, разобьем его на два:

1. Для медленных составляющих (процесс управления):

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0(x^0, a) = S(p)f(t),$$

2. Для вибрационных составляющих:

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = S_1(p) B \sin \omega t.$$

Неизвестные x_0 и a могут быть найдены только на основе совместного решения обоих уравнений. В ходе решения найдем новую нелинейную функцию:

$$\Phi(x^0) = F^0(x^0, a(x^0)).$$

Тогда уравнение для процесса управления примет вид:

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S(p)f(t).$$

Функцию $\Phi(x_0)$ можно линеаризовать обычным порядком, определив крутизну в начале координат:

$$\Phi = k_H x^0, \quad k_H = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}.$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial a} \frac{da}{dx^0} \right)_{x^0=0}$$

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial a} \right)_{x^0=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=a \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0,$$

В соответствии с этим получаем:

$$k_H = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}.$$

Это значит, что для определения k_H не нужно находить зависимости $a(x_0)$ и строить новую нелинейную функцию $\Phi(x_0)$.

С заменой уравнение для процесса управления принимает вид линейного уравнения

$$[Q(p) + k_n R(p)]x^0 = S(p)f(t),$$

где

k_n - коэффициент усиления нелинейности в процессе управления.

Итак, пользуясь значениями коэффициента усиления k_n , мы можем определять процесс управления в нелинейной системе по линейному уравнению. Однако при этом надо учитывать, что коэффициент k_n зависит от амплитуды симметричных вынужденных колебаний. Эта амплитуда в свою очередь зависит от структуры и параметров линейной части системы и от амплитуды B и частоты ω внешнего вибрационного воздействия. Поэтому при синтезе системы, т.е. при выборе ее

структур и параметров надо знать зависимость $k_n(k_i, T_i)$, а зная (или выбирая) внешнее вибрационное воздействие, надо учитывать также зависимость $k_n(B, \omega)$.

Итак, процесс управления при наложенных на него вынужденных вибрациях исследуется по линейному уравнению без определения зависимости $a(x_0)$.

10. Устойчивость автономных систем. Теоремы Ляпунова.

Пусть система (2) описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Начало координат, т. е. точка $x = 0$, является положением равновесия: $X(0) = 0$. Правая часть приведенных уравнений не зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются автономными системами.

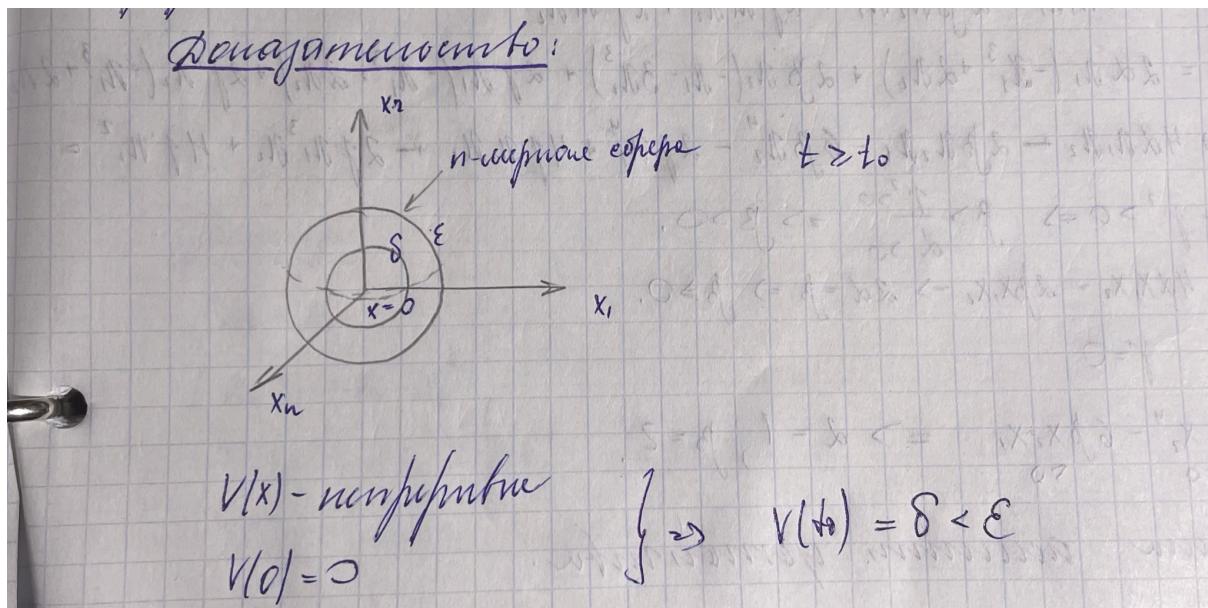
При исследовании устойчивости автономных систем в качестве функций Ляпунова используются функции $V(x)$, не зависящие явно от времени. Производная по времени функции $V(x)$ в силу уравнений определяется следующим образом:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Теорема Ляпунова об устойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (2) устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(x)$ такая, что ее производная по

времени в силу уравнения этой системы (2) является отрицательно полуопределенной функцией.



Доказательство из Попова:

Доказательство теоремы. Зададим некоторое значение $\varepsilon > 0$ и область значений вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ограниченную величиной его нормы $\|x\| = \varepsilon$. Пусть имеется положительно определенная функция $V(x) > 0$. Обозначим точную нижнюю грань значений

Функции $V(x)$ при $\|x\| = \varepsilon$ через $\alpha > 0$, т. е.

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha > 0. \quad (5.10)$$

Поскольку $V(0) = 0$, то из непрерывности определенно положительной функции $V(x)$ следует, что можно взять такое значение $\delta > 0$, чтобы $V(x) < \alpha$ при $\|x\| < \delta$.

Пусть начальные условия лежат внутри области δ , т. е. $\|x(t_0)\| < \delta$ и, следовательно, $V(x(t_0)) < \alpha$. Тогда для решения $x(t)$ при $t > t_0$ функция $V(x(t))$ будет невозрастающей, так как по условию теоремы

$$\frac{dV}{dt} = W(x) \leq 0. \quad (5.11)$$

Итак, получаем

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) < \alpha. \quad (5.12)$$

При этом неизбежно

$$\|(x(t))\| < \varepsilon, \quad (5.13)$$

так как, если бы было $\|x(t)\| > \varepsilon$, то получилось бы

$$V(x) \geq \inf_{\|x\|=\varepsilon} V(x) = \alpha,$$

что противоречит (5.12). Теорема доказана.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости:

Положение равновесия автономной системы (2) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.

Обобщенная теорема об асимптотической устойчивости:

Положение равновесия $x=0$ автономной системы (2) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией и она обращается в нуль вне начала координат на множестве $M \subset D$ не содержащих целых траекторий.

Теорема об асимптотической устойчивости в целом:

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (2) асимптотически устойчиво в целом, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.

Теорема Барабашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом:

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (2) асимптотически устойчиво в целом, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$,

допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве M , не содержащем целых траекторий.

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (2) неустойчиво, если существует функция $V(x)$ такая, что ее производная $V'(x)$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x_0$, в которой функция $V(x)$ принимает положительное значение.

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости:

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (2) неустойчиво, если существует функция $V(x)$, такая, что ее производная $V'(x)$ в силу уравнения этой системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + w(x),$$

где $\alpha > 0$, $w(x)$ — положительно полуопределенная функция, и в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x_0$, в которой функция $K(x)$ принимает положительное значение.

Поздравляю, вы дошли до конца

