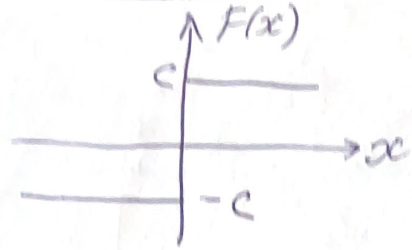
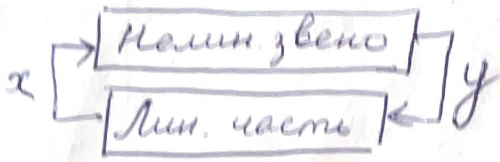
# ДЗ №1 по нелин. ТАУ (Вариант №0)




$$W_л = \frac{k_л}{(Tp+1)^3}$$

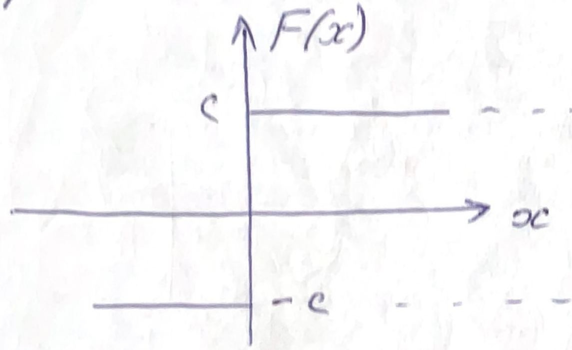
$c = 10$; $k_л = 50$; $T = 0{,}04$ с

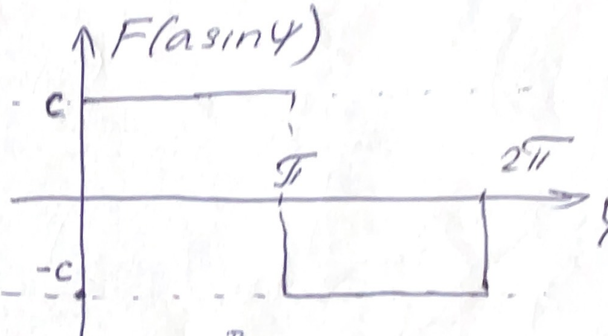


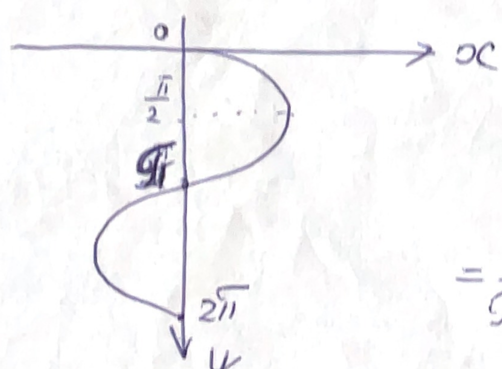

1) Вычислить $q(a)$ и $q'(a)$.
2) Найти $a$ и $\omega$ предельного цикла, исследовать уст-ть по Михайлову.
3) Найти $a$ и $\omega$ предельного цикла, исследовать уст-ть по Найквисту.

## Решение

1) Т.к. $F(x)$ однозначна и нечетно-симметрична, то $q'(a) = 0$; $F(x) = q(a)\cdot x$; $q(a) = \frac{4}{\pi a}\int_0^{\pi/2} F(a \sin\psi)\sin\psi\, d\psi$.




$$q(a) = \frac{4}{\pi a}\int_0^{\pi/2} c\cdot \sin\psi\, d\psi = \frac{4c}{\pi a}(-\cos\psi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4c}{\pi a}\Big(\underbrace{-\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos 0\Big) = \frac{4c}{\pi a}$$

q' – это не производная !!!

2) $W_л(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$; $y = F(x)$; $-x = y\cdot W_л$;

$y\cdot W_л + x = 0$; $y\cdot\frac{R(p)}{Q(p)} + x = 0$; $F(x)\cdot\frac{R(p)}{Q(p)} + x = 0$;

$q(a)\cdot x\cdot\frac{R(p)}{Q(p)} + x = 0$; $q(a)\cdot x\cdot R(p) + Q(p)\cdot x = 0$

$[q(a)\cdot R(p) + Q(p)]x = 0$ – уравнение линеаризованной системы

Решение ищем приближённо в форме $x = a \cdot \sin\omega t$, где $a$ и $\omega$ — неизвестные.

$Q(\lambda) + R(\lambda) \cdot q(a) = 0$ — характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы.

Периодическое решение соответствует паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ характ. ур-я. Поэтому для отыскания этого решения подставляем $\lambda = j\omega$. Тогда $Q(j\omega) + R(j\omega) \cdot q(a) = 0$.

$$Q(j\omega) = (Tj\omega + 1)^3 = -T^3 j\omega^3 - 3T^2\omega^2 + 3Tj\omega + 1 =$$
$$= 1 - 3T^2\omega^2 + j(3T\omega - T^3\omega^3);$$

$R(j\omega) = k_л$. Собираем уравнение:

$$1 - 3T^2\omega^2 + j(3T\omega - T^3\omega^3) + k_л \frac{4c}{\pi a} = 0$$

Выделяем в этом уравнении действ. и мнимую части и приравниваем их к нулю (по критерию Михайлова):

$$\begin{cases} X(a,\omega) = 1 - 3T^2\omega^2 + k_л \dfrac{4c}{\pi a} = 0 \\ Y(a,\omega) = 3T\omega - T^3\omega^3 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $\omega$:

$\omega(3T - T^3\omega^2) = 0$; $\cancel{\omega = 0}$

$3T - T^3\omega^2 = 0$; $3 - T^2\omega^2 = 0$, $\omega = \dfrac{\sqrt{3}}{T} \approx \dfrac{1{,}75}{0{,}04} = 43{,}75 \approx 44$

$T^2\omega^2 = 3$; $\omega^2 = \dfrac{3}{T^2}$;

Подставляем $\omega$ в первое уравнение находим $a$.

$1 - 3T^2 \dfrac{3}{T^2} + k_л \dfrac{4c}{\pi a} = 0$, $k_л \dfrac{4c}{\pi a} = 8$; $\dfrac{k_л c}{\pi a} = 2$

$$a = \frac{k_л c}{2\pi} = \frac{50 \cdot 10}{2 \cdot 3{,}14} \approx 79{,}6 \approx 80.$$

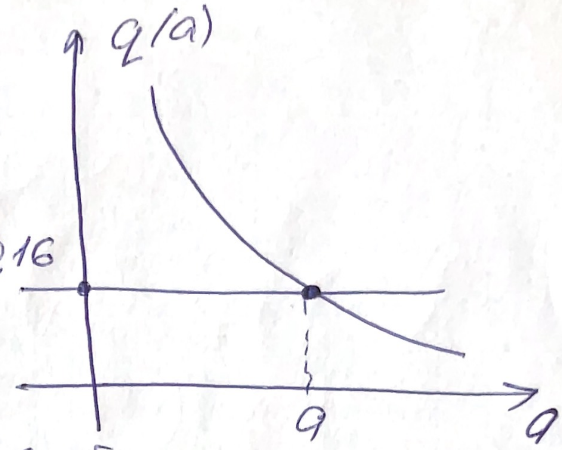
Если $a$ найти из уравнения затруднительно, то выражаем из этого уравнения $q(a)$ и находим решение (амплитуду $a$) графически.

$X(a,\omega) = 1 - 3T^2\omega^2 + k_л \cdot q(a) = 0$, $\omega^2 = \dfrac{3}{T^2}$

$-8 + k_л \cdot q(a) = 0$; $q(a) = \dfrac{8}{k_л} = \dfrac{8}{50} = 0{,}16$

$q(a) = \frac{4c}{\pi a} = 0,16$

В точке пересечения графиков - искомая амплитуда $a$.




Предельный цикл устойчивый, если выполняется условие:

$$\frac{\partial X}{\partial a}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial Y}{\partial a} > 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \;; \quad \frac{\partial X}{\partial a}\cdot\frac{\partial Y}{\partial \omega} > 0 \;;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = 3T - T^3\cdot 3\omega^2 = 3T - T^3\, 3\frac{3}{T^2} = 3T - 9T = -6T < 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial k_л q(a)}{\partial a} = k_л \frac{\partial q(a)}{\partial a} < 0$$ - из графика (для убывающей функции производная меньше нуля)

Следовательно, при $\omega \approx 44$ и $a \approx 80$ имеем устойчивые колебания.

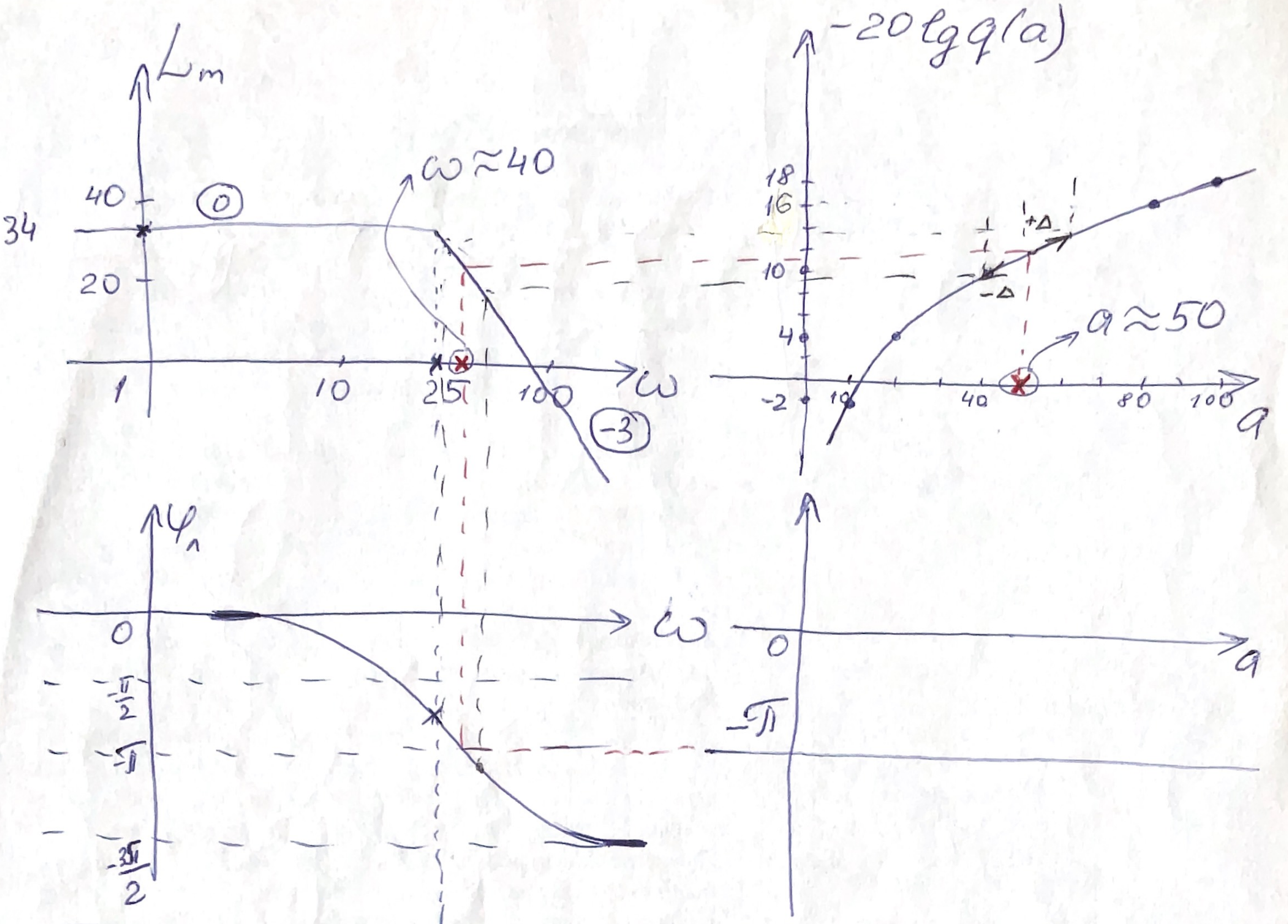
3) $$\begin{cases} 20\lg|W_л(j\omega)| = -20\lg q(a) \\ \varphi_л(\omega) = -\pi \end{cases}$$

Для линейной части: $\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,04} = 25\,\frac{1}{c}$,

$20\lg k_л = 20\lg 50 \approx 20\cdot 1,7 = 34$ дБ

$q(a) = \frac{4c}{\pi a} = \frac{4\cdot 10}{3,14\cdot a} \approx 12,7\frac{1}{a} \approx \frac{13}{a}$

| $a$ | 0,1 | 0,2 | 1 | 2 | 3 | 10 | 20 | 40 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q(a)$ | 130 | 65 | 13 | 6,5 | 4,3 | 1,3 | 0,65 | 0,325 | 0,163 | 0,13 |
| $\lg q(a)$ | 2,1 | 1,8 | 1,1 | 0,8 | 0,6 | 0,1 | −0,187 | −0,488 | −0,789 | −0,886 |
| $-20\lg q(a)$ | −42 | −36 | −22 | −16 | −12 | −2 | 3,74 ≈4 | 9,76 ≈10 | 15,78 ≈16 | 17,72 ≈18 |




Проверка уст-ти. Даем отрицательное и положительное приращение в окрестности точки a. Если при $\Delta a > 0$ критерий Найквиста выполняется, а при $\Delta a < 0$ не выполняется, то колебания устойчивые. Что мы в данном случае и имеем.

* Значение амплитуды, найденное по Найквисту, очень ощутимо отличается от значения амплитуды, найденного по Михайлову, так как график $-20\lg(q(a))$ построен ну очень приблизительно.

Примечания к выполнению ДЗ:

1) в первом пункте - при линеаризации нелинейностей - разбираем отдельно случаи $a < b$ и $a \geq b$.
2) на всех графиках очень аккуратно и внимательно расставляем обозначения осей;
3) в компьютерной части в итоге должно быть представлено пять графиков: $q(a)$ и четыре графика для использования критерия Найквиста. К каждому графику прикладывается способ его получения. Используемые программы: Exel, Маткад, Матлаб - на выбор.

Нахождение параметров предельного цикла с использованием критерия Найквиста.

$W_л \cdot W_н = -1$ — условие наличия чисто мнимых корней по критерию Найквиста

$\Rightarrow W_л = -\dfrac{1}{W_н}$ — можно решить графически

$W_н = q(a) + jq'(a)$

АФЧХ можно разделить на АЧХ и ФЧХ (на модуль и аргумент):

$$\begin{cases} |W_л(j\omega)| = \left| -\dfrac{1}{\sqrt{q^2+(q')^2}} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{q^2+(q')^2}} \\ \arg W_л(j\omega) = -\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{q'(a)}{q(a)} \end{cases}$$

Переводим эти характеристики в логарифмический масштаб.

$$\begin{cases} 20\lg|W_л(j\omega)| = \cancel{20\lg 1}^{\,0} - 20\lg\sqrt{q^2+(q')^2} = \\ \qquad = -20\lg\sqrt{q^2+(q')^2} \\ \varphi_л(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{q'}{q} \end{cases}$$

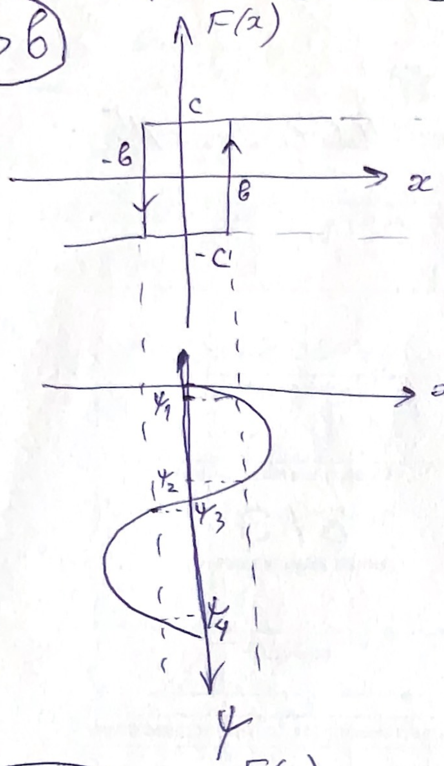
Если $q'(a) = 0$, то

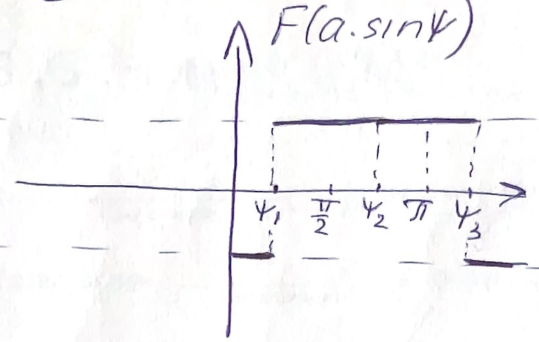
$$\begin{cases} 20\lg|W_л(j\omega)| = -20\lg q(a) \\ \varphi_л(\omega) = -\pi \end{cases}$$

Графики для левых частей этих уравнений строим привычным образом — ЛАЧХ и ЛФЧХ по заданной передаточной функции линейной части.

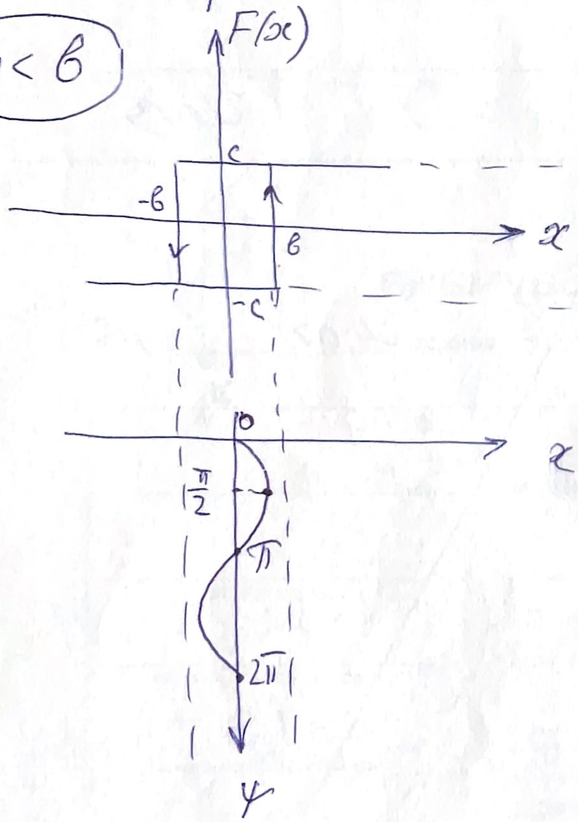
Вариант с гистерезисом: варианты $F(a\cdot\sin\psi)$

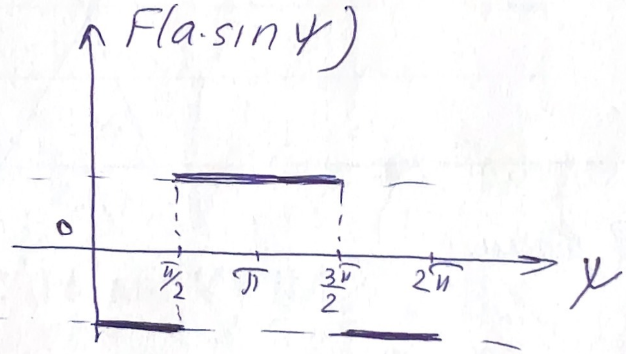
$a>b$




$a<b$



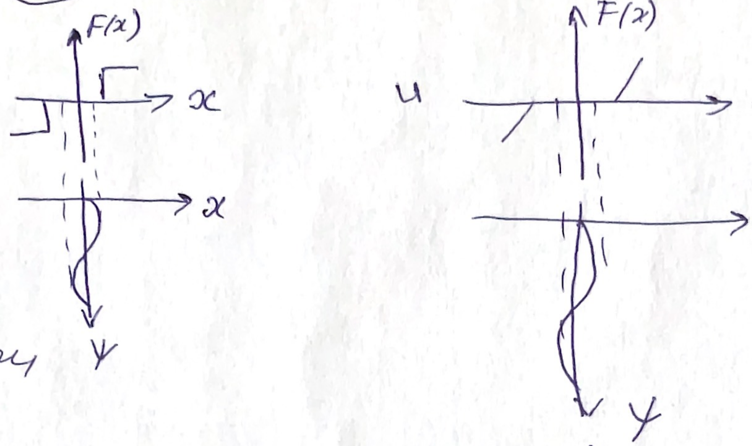

?

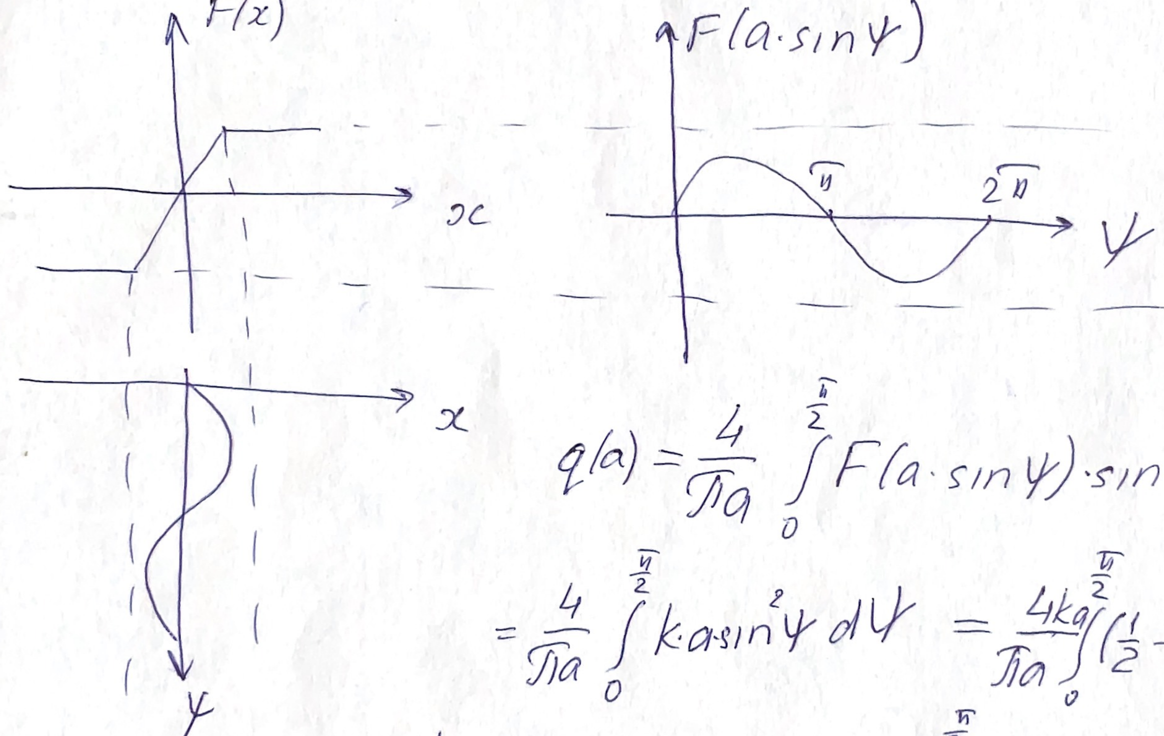
Внутри гистерезиса нет точек перехода

Варианты $F(a\cdot\sin\psi)$ для разных нелинейностей.

Случай $a < b$

$F(a\cdot\sin\psi) = 0$,
т.к. синусоида попадает в зону нечувствительности




$$q(a) = \frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(a\cdot\sin\psi)\cdot\sin\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cdot a\sin^2\psi\, d\psi = \frac{4ka}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\psi\right)d\psi =$$

$$= \frac{4ka}{\pi a}\left(\frac{1}{2}\psi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\psi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{ka4}{\pi a}\left(\frac{1}{2}\psi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2\psi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4ka}{\pi a}\left(\frac{\pi}{4} - 0 - \left(\frac{1}{4}\sin\pi - \sin 0\right)\right) =$$

$$= \frac{4ka}{\pi a}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = k$$

$$F(x) = q(a)\cdot x = kx.$$

Получим коэффициент усиления $k$, система ведёт себя как линейная

Лист 2