# Домашнее задание №1 по курсу „Теория автоматического управления"

## Нелинейные системы

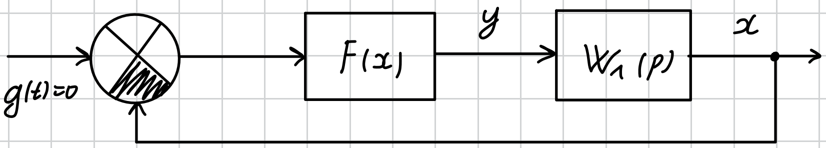

Вариант №18

Группа: СМ11-61Б

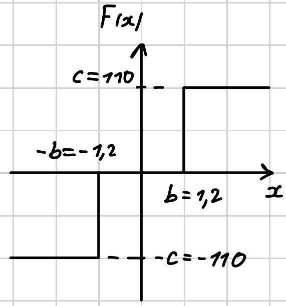
Татынов Д. А.

Исходные данные: нелинейность № 2; $b = 1{,}2$; $c = 110$; $k_1 = 16$; $T_1 = 0{,}1$; $T_2 = 0{,}05$

Линейная часть системы: $W_1(p) = \dfrac{k_1}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$




Характеристика нелинейного звена:

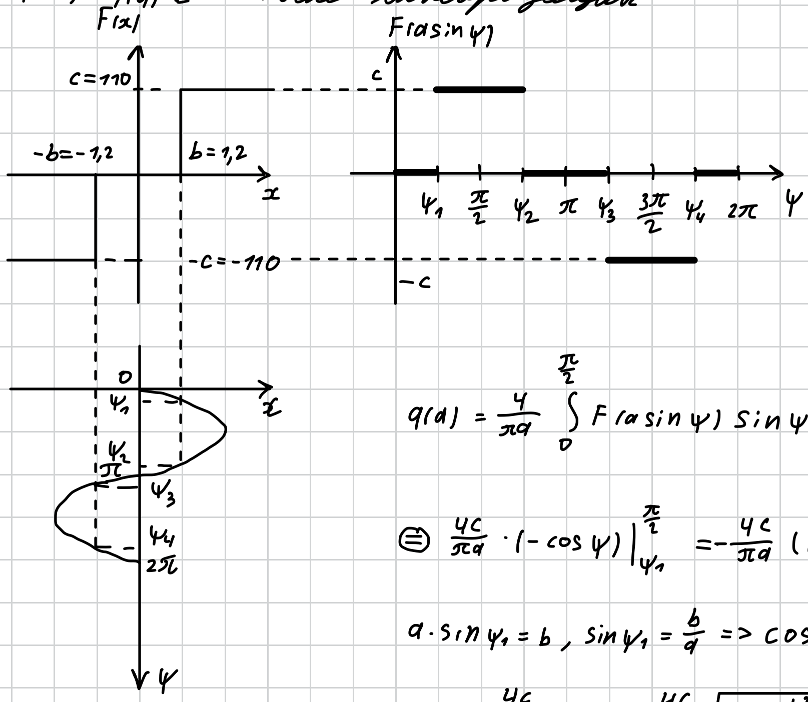



1) Вычислить коэффициенты гармонической линеаризации $q(a)$ и $q'(a)$ для заданной нелинейности.

Так как $F(x)$ однозначна, то $q'(a) = 0$

Так как $F(x)$ нечетно-симметрична, то $q(a) = \dfrac{4}{\pi a}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(a\sin\psi)\sin\psi\, d\psi$

$F(x) = q(a)\cdot x$ — после линеаризации




При $a < b$ $q(a) = 0$

$$q(a) = \frac{4}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(a\sin\psi)\sin\psi\, d\psi = \frac{4}{\pi a}\int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} c\cdot\sin\psi\, d\psi = \frac{4c}{\pi a}\int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\, d\psi \ominus$$

$$\ominus\ \frac{4c}{\pi a}\cdot(-\cos\psi)\Big|_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4c}{\pi a}\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} - \cos\psi_1\right) = \frac{4c}{\pi a}\cos\psi_1$$

$a\cdot\sin\psi_1 = b$, $\sin\psi_1 = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}\cos\psi_1 = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Получим, что $q'(a) = 0$, $q(a) = \dfrac{4c}{\pi a}\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

2) Определить приближенные значения параметров предельного цикла $a, \omega$ и исследовать его устойчивость алгебраическим способом (используя критерий Михайлова).

$W_1(p) = \dfrac{R(p)}{Q(p)}$; $y = F(x)$; $-x = y\cdot W_1$; $y\cdot W_1 + x = 0 \Rightarrow y\cdot\dfrac{R(p)}{Q(p)} + x = 0 \Rightarrow F(x)\cdot\dfrac{R(p)}{Q(p)} + x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q(a)\cdot x\cdot\dfrac{R(p)}{Q(p)} + x = 0 \ \Big|\cdot Q(p) \Rightarrow q(a)\cdot x\cdot R(p) + Q(p)\cdot x = 0$

$[q(a)\cdot R(p) + Q(p)]\cdot x = 0$ – уравнение линеаризованной системы

Решение ищем приближённо в форме $x = a\cdot\sin wt$, где $a$ и $w$ – неизвестное

$Q(\lambda) + R(\lambda)\cdot q(a) = 0$ – характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

Периодическое решение соответствует паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm jw$ характеристического уравнения. Поэтому для отыскания этого решения подставляем $\lambda = jw$

Тогда $Q(jw) + R(jw)\cdot q(a) = 0$

$$Q(jw) = jw(T_1\cdot jw + 1)(T_2\cdot jw + 1) = jw(-T_1\cdot T_2\cdot w^2 + T_1 jw + T_2 jw + 1) \circeq$$

$$\circeq -T_1 w^2 - T_2 w^2 + j(-T_1 T_2 w^3 + w)$$

$$R(jw) = K_1$$

Собираем уравнение:

$$-T_1 w^2 - T_2 w^2 + j(-T_1 T_2 w^3 + w) + K_1\cdot\frac{4c}{\pi a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = 0$$

Выделяем в этом уравнении действительную и мнимую части и приравниваем их к нулю (по критерию Михайлова).

$$\begin{cases} X(a,w) = -T_1 w^2 - T_2 w^2 + K_1\cdot\dfrac{4c}{\pi a}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} = 0 & (1)\\ Y(a,w) = -T_1 T_2 w^3 + w = 0 & (2)\end{cases}$$

Из уравнения (2) найдем $w$:

$$w(1 - T_1 T_2 w^2) = 0, \quad \cancel{w = 0}$$

$$1 - T_1 T_2 w^2 = 0 \Rightarrow w^2 = \frac{1}{T_1 T_2}, \quad w = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}1\cdot 0{,}05}} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$$

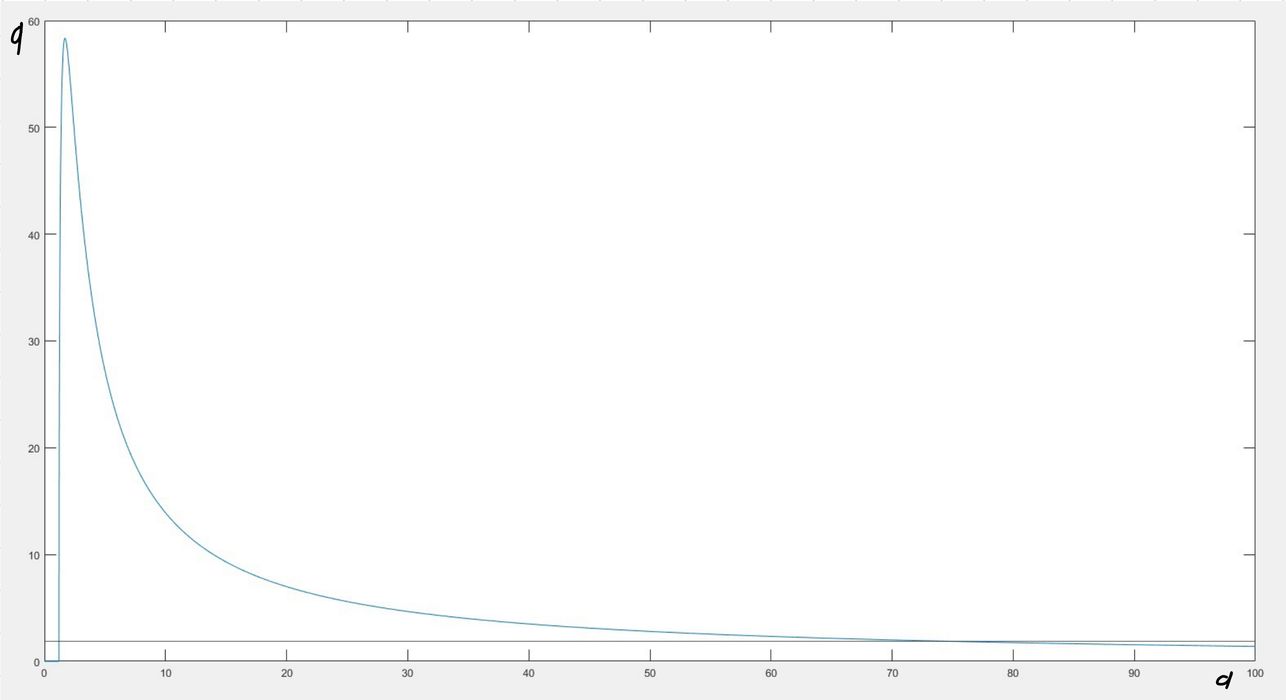
Подставим $w$ в (1) уравнение и найдем решение (амплитуду $a$) графически

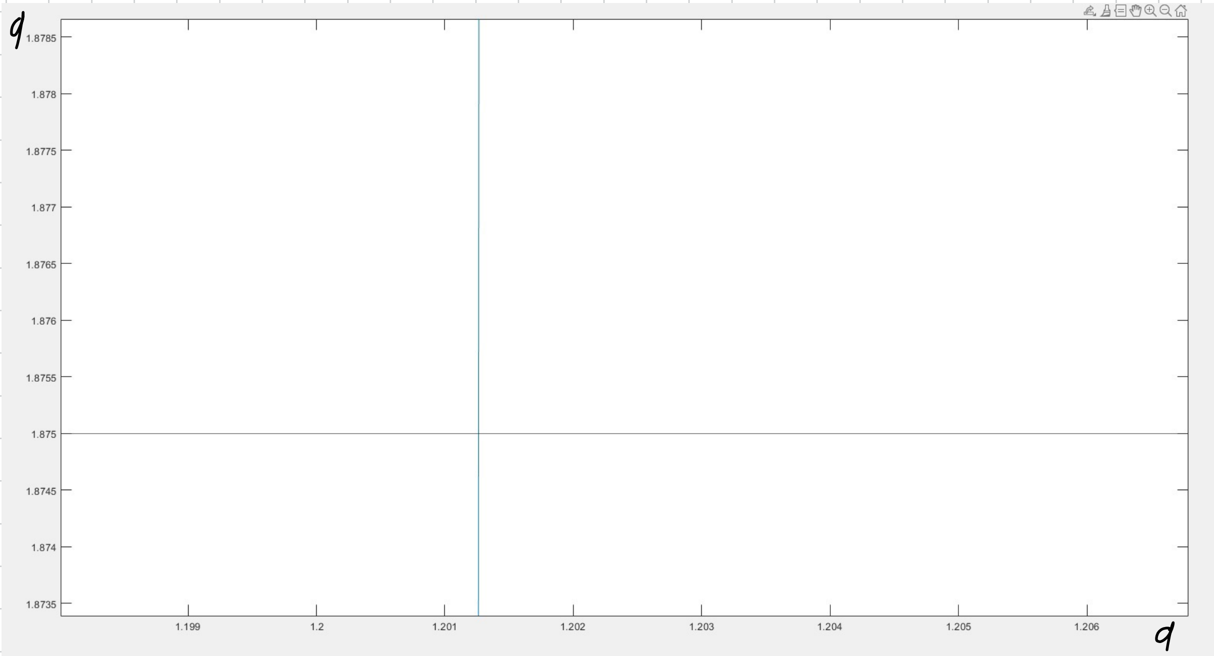
$$-\cancel{T_1}\cdot\frac{1}{\cancel{T_1}T_2} - \cancel{T_2}\cdot\frac{1}{T_1\cancel{T_2}} + K_1\cdot q(a) = 0, \quad q(a)\cdot K_1 = \frac{T_1+T_2}{T_1\cdot T_2}, \quad q(a) = \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2\cdot K_1} = \frac{0{,}1+0{,}05}{0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 16} = \frac{0{,}15}{0{,}08} = 1{,}875$$

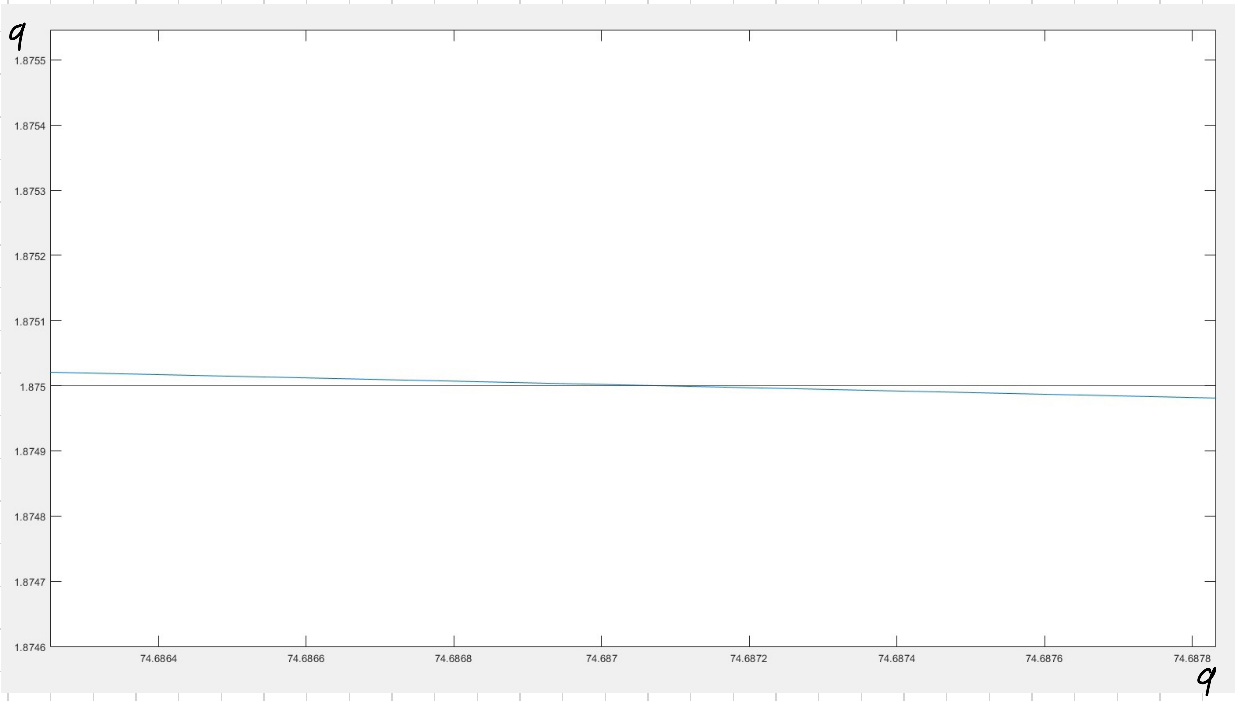
$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{4\cdot 110}{\pi\cdot a}\sqrt{1-\frac{1{,}2^2}{a^2}} = 1{,}875$$

Построим графики в MATLAB

```
a = 0:0.01:100;
q = (4 .* 110) ./ (pi .* a) .* sqrt(1 - 1.2 .^ 2 ./ a .^ 2);
figure;
plot(a,q);
yline(1.875)
```


q
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
q


q
1.8785
1.878
1.8775
1.877
1.8765
1.876
1.8755
1.875
1.8745
1.874
1.8735
1.199
1.2
1.201
1.202
1.203
1.204
1.205
1.206
q


q
1.8755
1.8754
1.8753
1.8752
1.8751
1.875
1.8749
1.8748
1.8747
1.8746
74.6864
74.6866
74.6868
74.687
74.6872
74.6874
74.6876
74.6878
q

Из графиков получаем, что $a \simeq 1{,}2$ и $a \simeq 74{,}7$

Предельный цикл устойчивый, если выполняется следующие условие:

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial w} - \frac{\partial X}{\partial w} \cdot \frac{\partial Y}{\partial a} > 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial w} > 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial w} = -3T_1T_2w^2 + 1 = -3\cancel{T_1T_2} \cdot \frac{1}{\cancel{T_1T_2}} + 1 = -2 < 0$$

Для того, чтобы выполнялось условие, необходимо, чтобы $\frac{\partial X}{\partial a} < 0$

$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial K_1 \cdot q(a)}{\partial a} = K_1 \cdot \frac{\partial q(a)}{\partial (a)} < 0$, из полученного графика видно, что производная будет меньше 0 при $a \simeq 74{,}7$

Следовательно, при $w \simeq 14{,}1$ и $a \simeq 74{,}7$ имеем устойчивые колебания

3 Определить приближенные значения параметров предельного цикла и исследовать его устойчивость, используя логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики (частотным способом, по критерию Найквиста).

$W_л \cdot W_н = -1$ – условие наличия чисто мнимых корней по критерию Найквиста

$$W_л = -\frac{1}{W_н}$$

$$W_н = q(a) + j q'(a)$$

АФЧХ можно разделить на АЧХ и ФЧХ

$$\begin{cases} |W_л(jw)| = \left| -\frac{1}{\sqrt{q^2 + (q')^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{q^2 + (q')^2}} \\ \arg W_л(jw) = -\pi - \mathrm{arcctg}\, \frac{q'(a)}{q(a)} \end{cases}$$

Переведем в логарифмический масштаб:

$$\begin{cases} 20\lg |W_л| = \cancel{20\lg 1}^{\,0} - 20\lg \sqrt{q^2 - (q')^2} \\ \varphi_л = -\pi - \mathrm{arcctg}\, \frac{q'}{q} \end{cases}$$

В нашем случае $q' = 0$, поэтому:

$$\begin{cases} 20\lg |W_л(jw)| = -20\lg q(a) \\ \varphi_л(w) = -\pi \end{cases}$$

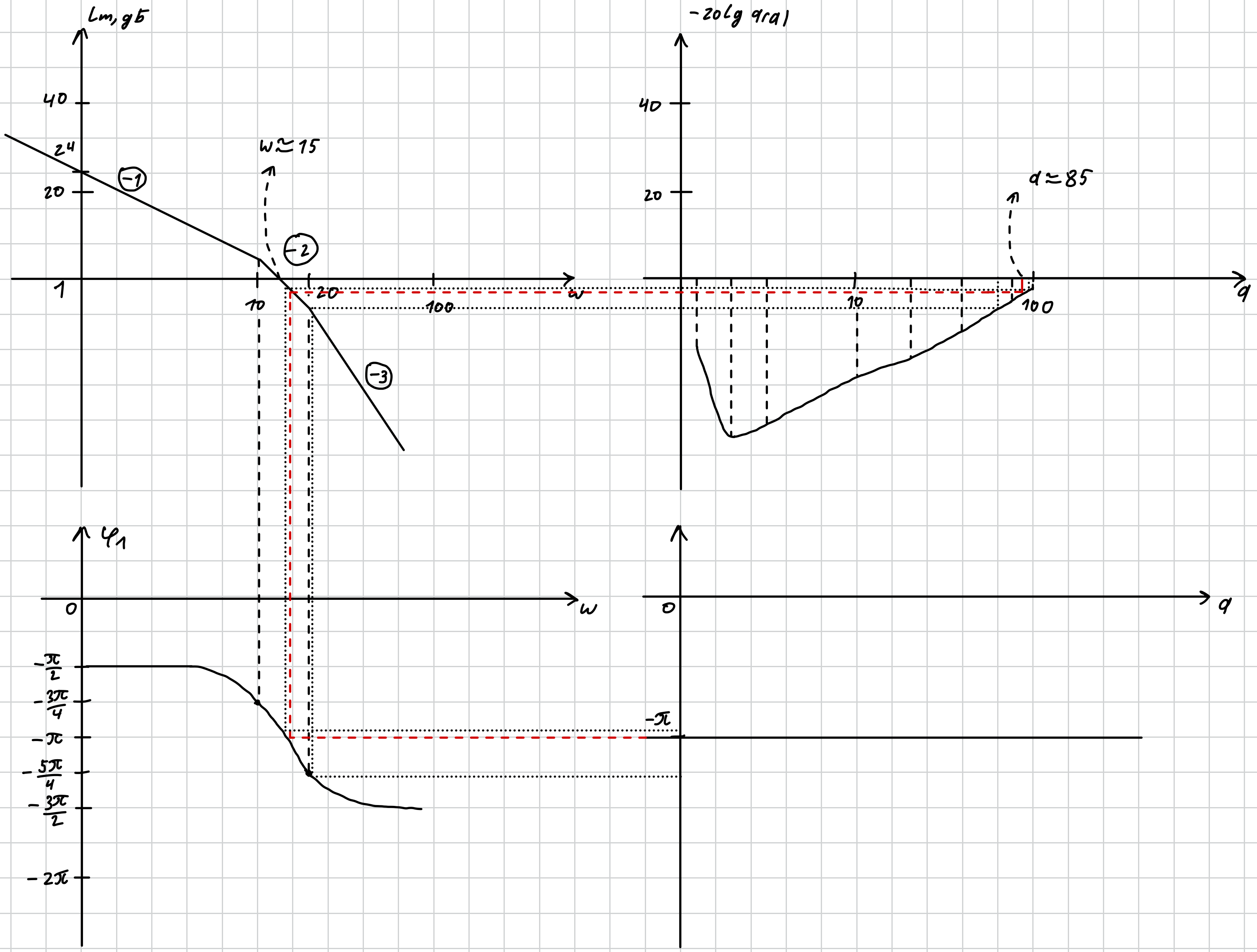
$$W_1(p) = \frac{k_1}{p(T_1p+1)(T_2p+1)}$$

Для линейной части: $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10\left(\frac{1}{c}\right)$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,05} = 20\left(\frac{1}{c}\right)$

$20\lg k_1 = 20\lg 16 \approx 24$ дБ

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{4\cdot 110}{\pi\, a}\sqrt{1-\frac{1{,}2^2}{a^2}} \approx \frac{140}{a}\sqrt{1-\frac{1{,}44}{a^2}}$$

| a | 1,21 | 2 | 3 | 10 | 20 | 40 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| q(a) | 14,8 | 56 | 42,8 | 13,9 | 7 | 3,5 | 1,7 | 1,4 |
| lg q(a) | 1,17 | 1,75 | 1,63 | 1,14 | 0,85 | 0,54 | 0,23 | 0,15 |
| −20lg q(a) | −23,4 | −35 | −32,6 | −22,8 | −17 | −10,8 | −4,6 | −3 |

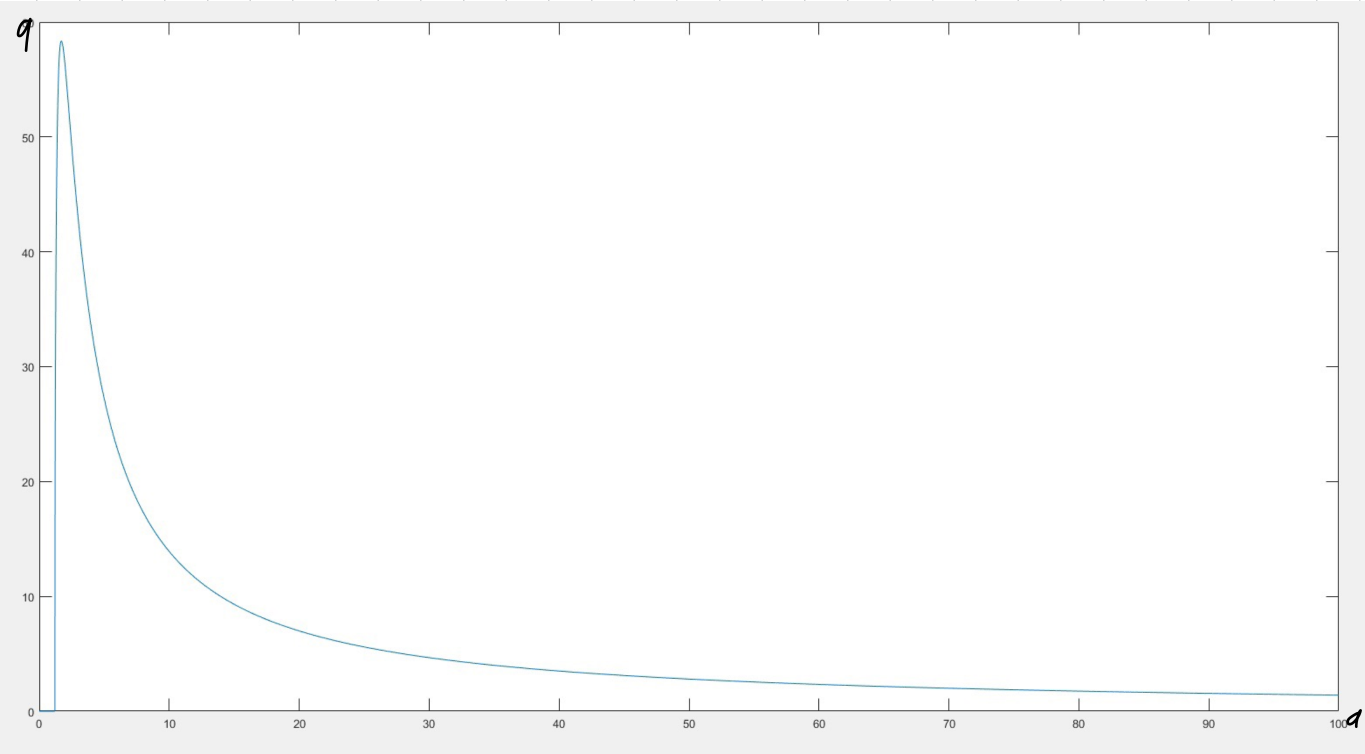



Выполним проверку устойчивости. Для этого дадим отрицательное и положительное приращение в окрестности точки a.

Если при Δa > 0 критерий Найквиста выполняется, а при Δa < 0 не выполняется, то колебания устойчивые, что мы в данном случае и имеем.

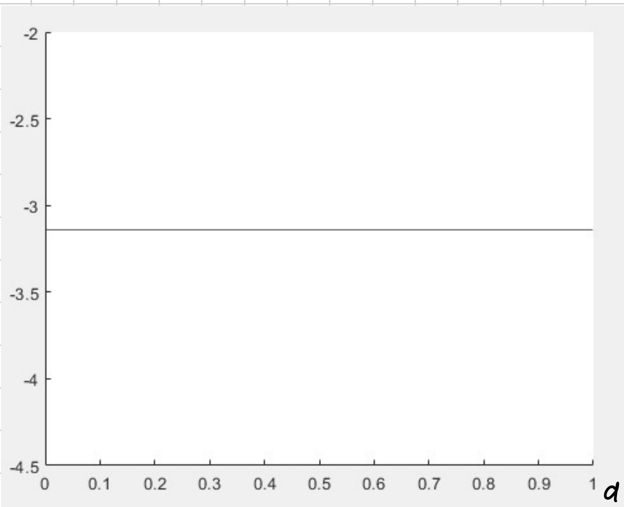
4 С помощью ЭВМ определить точные значения параметров автоколебаний

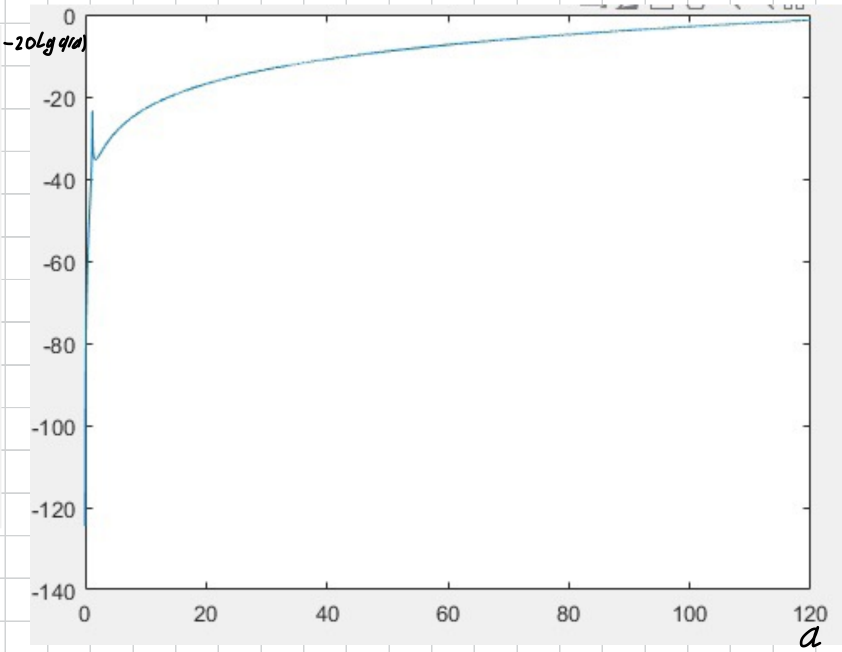
```
a = 0:0.01:100;
q = (4 .* 110) ./ (pi .* a) .* sqrt(1 - 1.2 .^ 2 ./ a .^ 2);
figure;
plot(a,q);
```



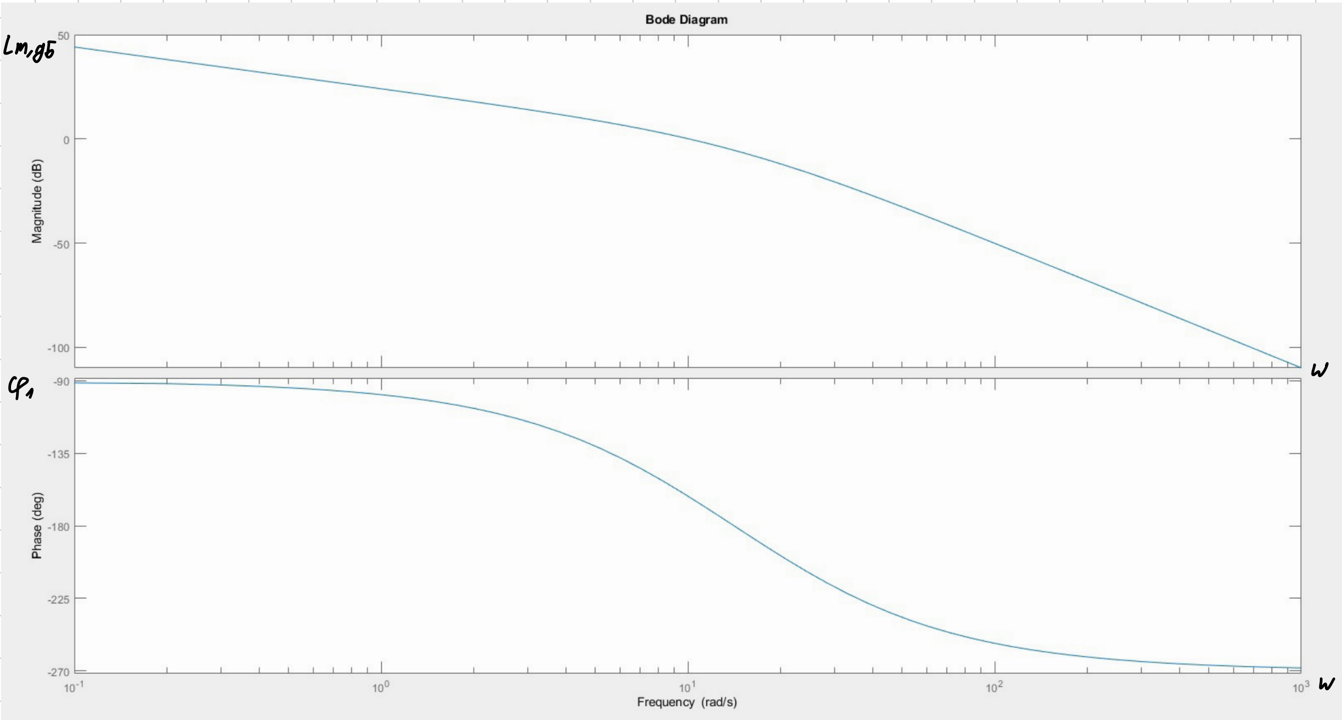

```
a = 0:0.01:120;
q = -20 * log10((4 .* 110) ./ (pi .* a) .* sqrt(1 - ((1.2 .^ 2) ./ (a .^ 2))));
figure;
plot(a,q);
```

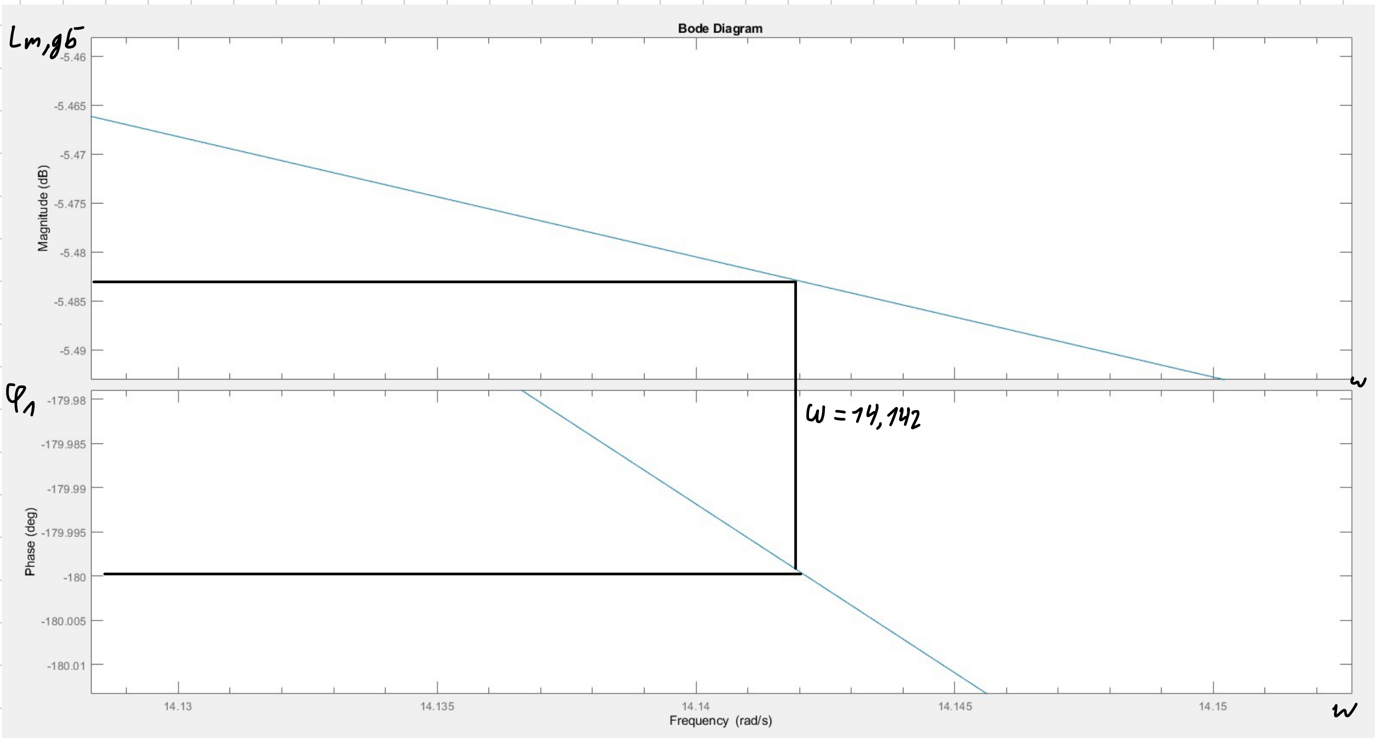
```
yline(-pi)
```

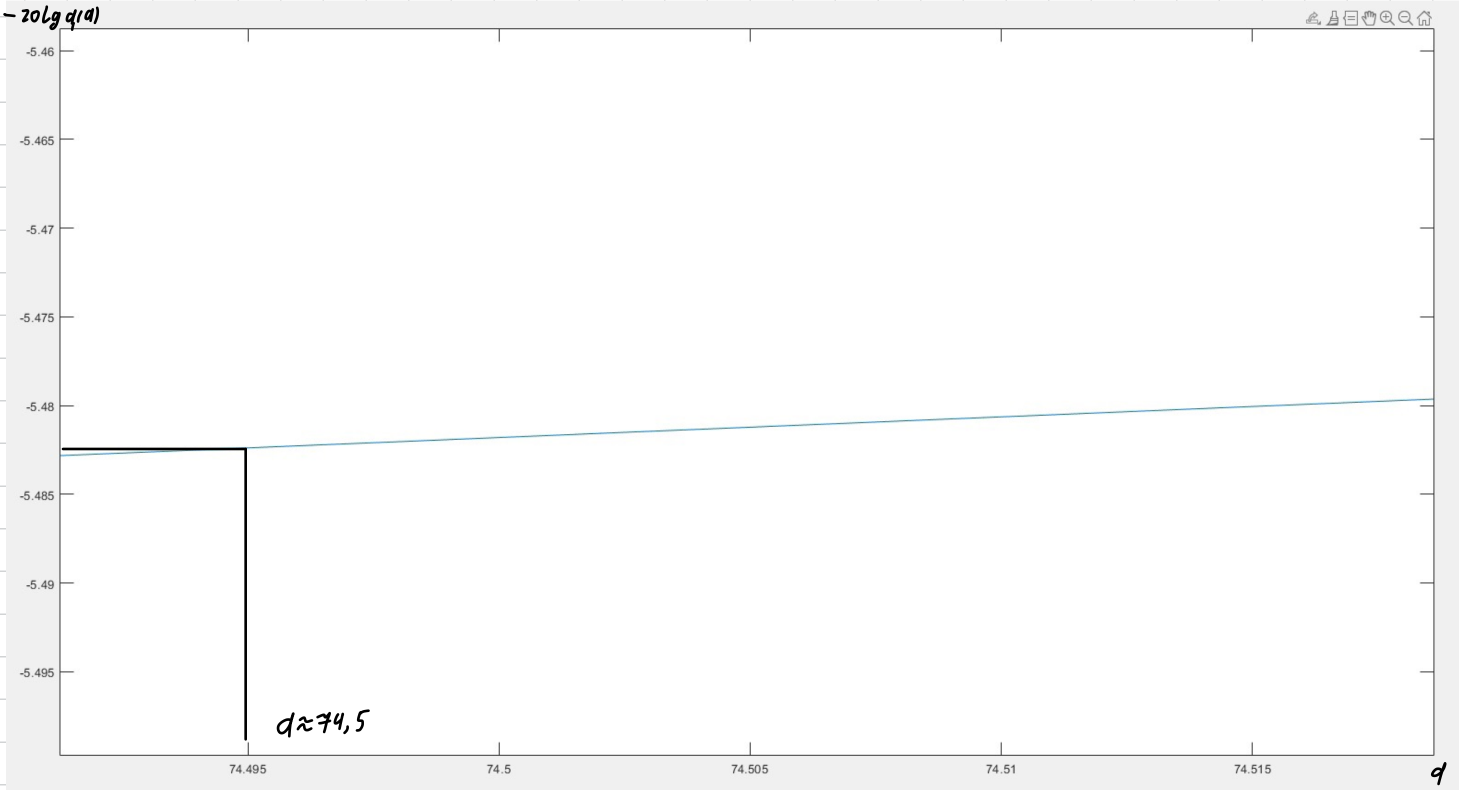


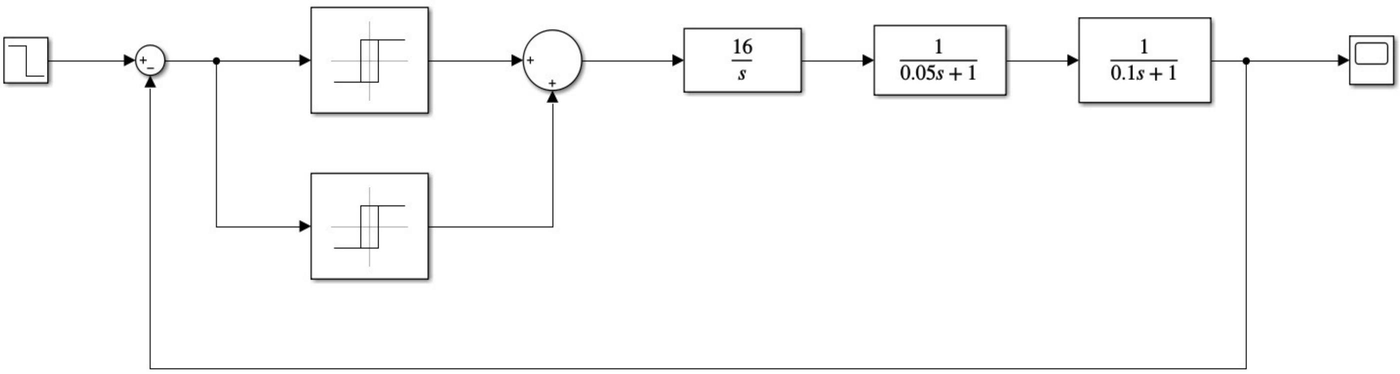
```
w=tf([16], [0.005 0.15 1 0])
bode(w)
```



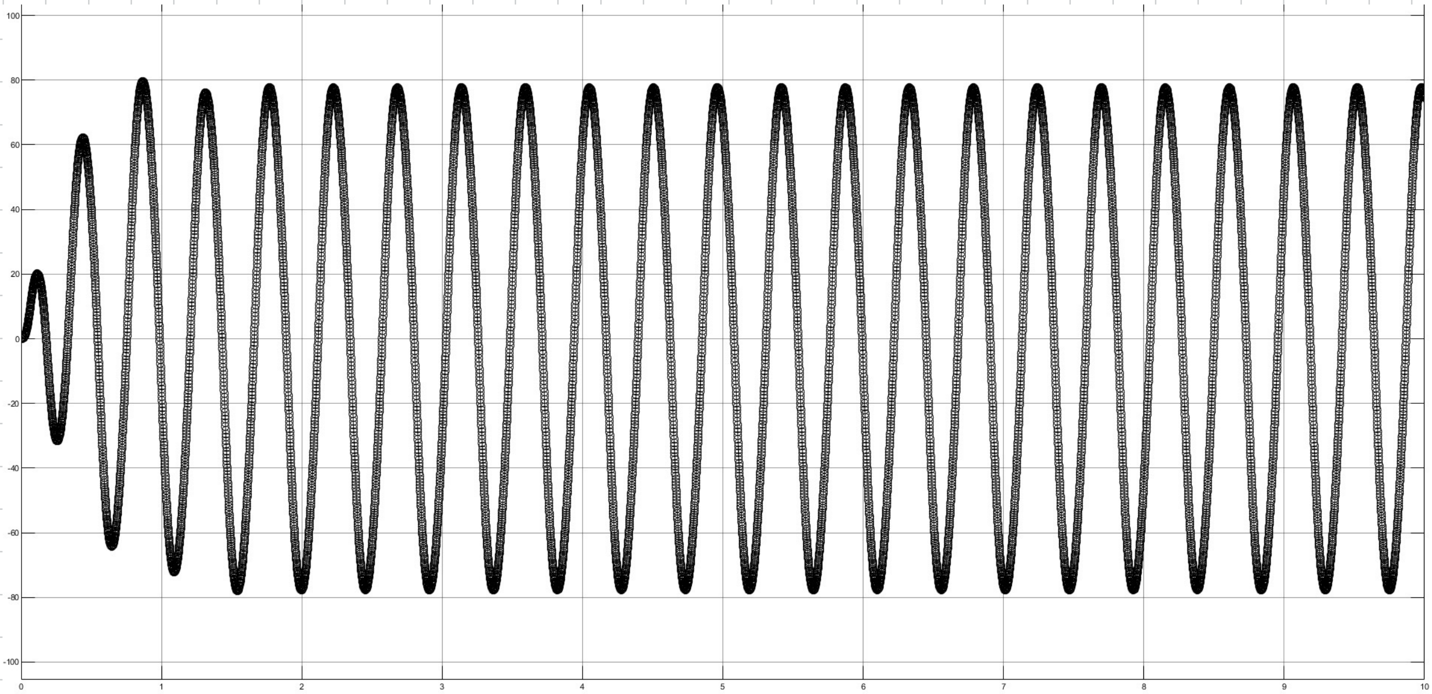



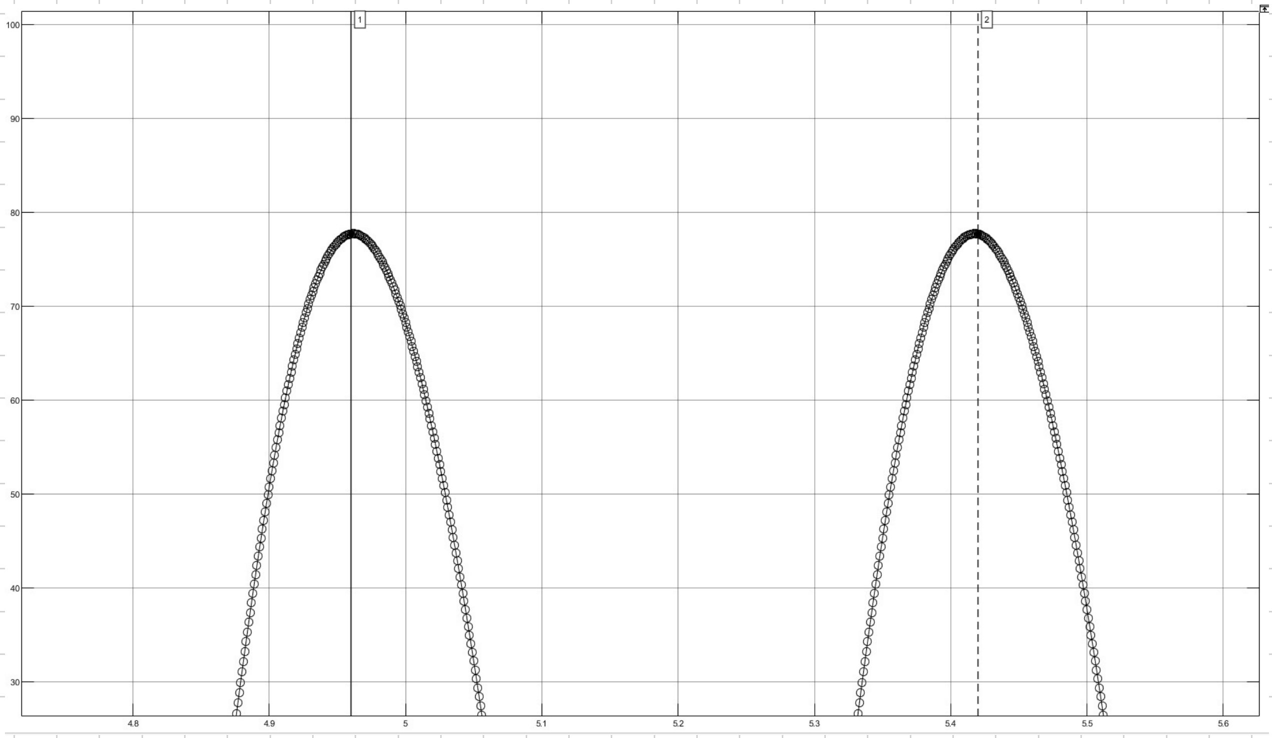


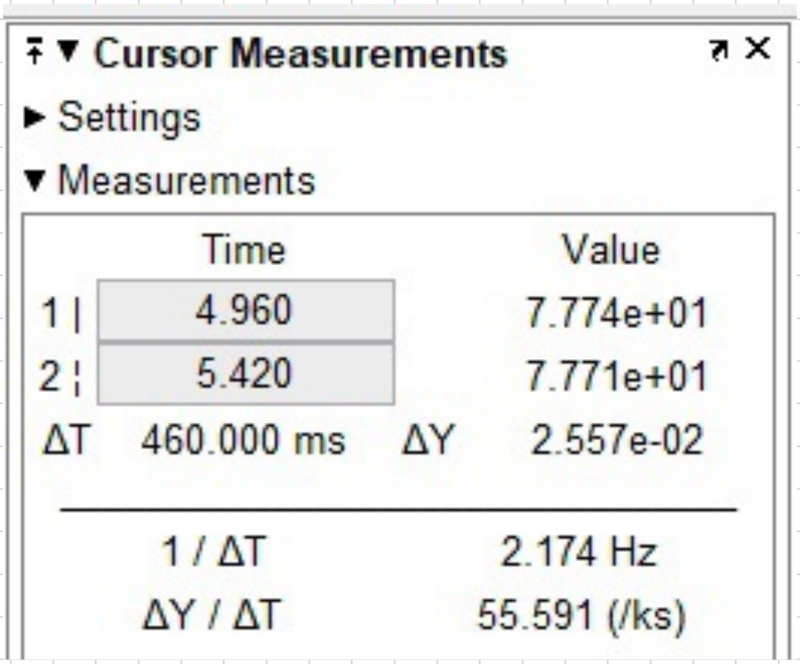
$-20\lg q(a)$
-5.46
-5.465
-5.47
-5.475
-5.48
-5.485
-5.49
-5.495
$a \approx 74,5$
74.495
74.5
74.505
74.51
74.515
$a$

+
−
+
+
$\frac{16}{s}$
$\frac{1}{0.05s+1}$
$\frac{1}{0.1s+1}$




Получили, что $a \approx 77{,}7$ , а $w \approx \frac{2\pi}{5{,}42-4{,}96} \approx 13{,}7$