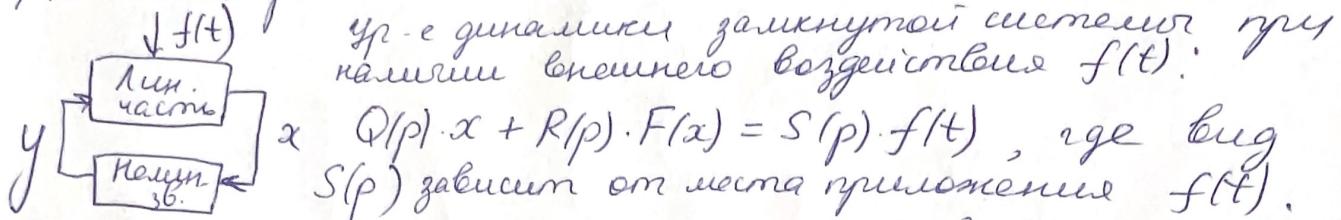


# Несимметричное автоколебание

Нелин. ТАУ  
Семинар

Причины появления:

- 1) постоянная составляющая не входит нач. звена или
- 2) несимметричность начального состояния.



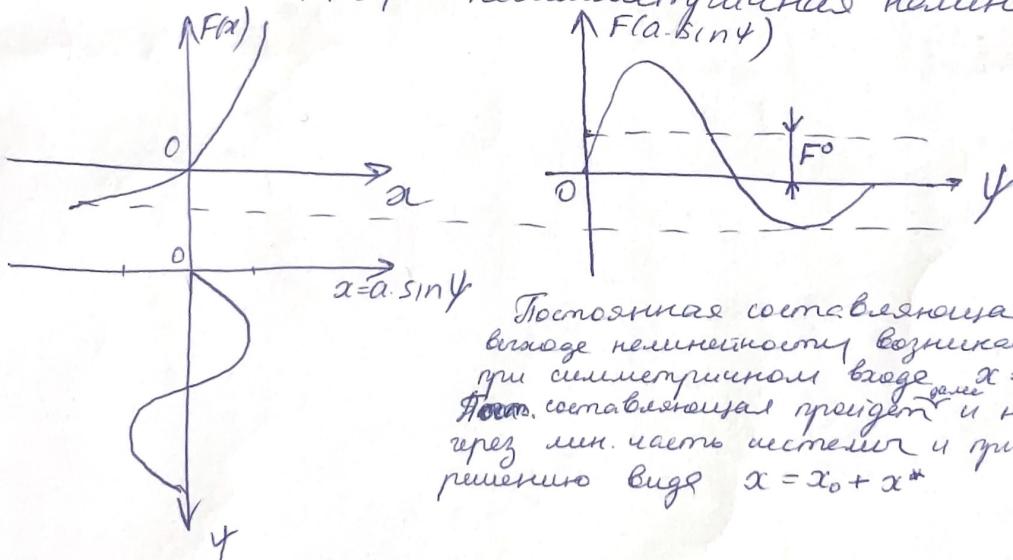
Пусть  $S(p) \cdot f(t) = \text{const} = c$ . Это и.д. в случае наугад:

- a)  $f(t) = \text{const} = f^o, c = S(0) \cdot f^o$  (и.е. для системы без авт. колеб.)
- б)  $f(t) = f^o + bt$  при  $S(p) = pS_1(p)$ ,  $c = b \cdot S_1(0)$  (для системы с авт. колеб.)

$Q(p) \cdot x + R(p) \cdot F(x) = c$  - за счет постоянной правой части уравнения появляется постоянная составляющая в периодическом решении (несимметричные автоколебания).  $\Rightarrow$

$$x = x_0 + x^*, \quad x^* = a \cdot \sin \omega t$$

Но. Несимметричные колебания и.д. при отсутствии внешнего воздействия, т.е. при нулевой правой части уравнения, если  $F(x)$  - несимметричная начальная



Постоянная составляющая  $F^o$  не входит начальную волнистость, возникает даже при симметричном виде  $x = a \cdot \sin \omega t$ .  
Но. составляющая пропадет и не ведет  $x$  через нач. часть цикла и приведет к решению вид  $x = x_0 + x^*$

Гарм. линеаризация в случае несимметр. колебаний:

$$F(x) = F^o(x_0^*, a) + [q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p] x^*, \text{ где}$$

$$F^o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \cdot \sin \theta) d\theta,$$

$$q = \frac{1}{Tia} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \cdot \sin \theta) \cdot \sin \theta d\theta,$$

$$q' = \frac{1}{Tia} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \cdot \sin \theta) \cdot \cos \theta d\theta$$

Подставляем  $^o$  результат линеаризации в ур-е силены (Лисиц)

$$Q(p)(x_0 + x^*) + R(p) \cdot F^0 + R(p)[q + \frac{q'}{\omega} p]x^* = c$$

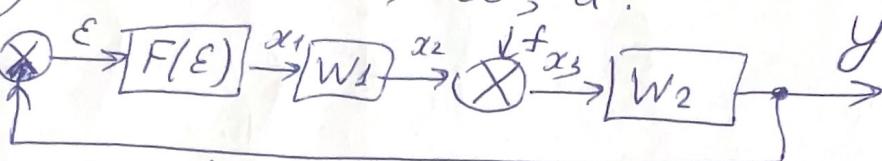
из этого уравнения выделяем:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(0) \cdot x_0 + R(0) \cdot F^0 = c, \text{ - ур.-е для постоянных} \\ \text{составляющих.} \end{array} \right.$$

$$\left[ Q(p) + R(p)[q + \frac{q'}{\omega} p] \right] x^* = 0 \text{ - ур.-е для периодических} \\ \text{составляющих}$$

$$\Rightarrow x_0 = x_0(a) \Rightarrow \omega, a.$$

Пример.  
Исследование  
автоколебаний



$$\varepsilon = g - y$$

$$x_1 = F(\varepsilon)$$

$$x_2 = x_1 \cdot W_1$$

$$x_3 = x_2 + f$$

$$y = x_3 \cdot W_2$$

$$\begin{aligned} y &= (x_2 + f) \cdot W_2 = (x_1 \cdot W_1 + f) \cdot W_2 = \\ &= (F(\varepsilon) \cdot W_1 + f) \cdot W_2 \end{aligned}$$

$$y = g - \varepsilon$$

$$g - \varepsilon = F(\varepsilon) \cdot W_1 \cdot W_2 + f \cdot W_2 ; \text{ пуск}$$

$$\underline{W_1 = R_1/Q_1}, \quad W_2 = R_2/Q_2 ; \text{ тогда}$$

$$g - \varepsilon = \frac{R_1 \cdot R_2}{Q_1 \cdot Q_2} \cdot F(\varepsilon) + \frac{R_2}{Q_2} \cdot f ;$$

$$Q_1 Q_2 \cdot g - Q_1 Q_2 \cdot \varepsilon = R_1 R_2 \cdot F(\varepsilon) + Q_1 R_2 \cdot f$$

$$R_1 R_2 \cdot F(\varepsilon) + Q_1 Q_2 \cdot \varepsilon = Q_1 Q_2 g - Q_1 R_2 \cdot f .$$

$$\text{Пусть } R_1 R_2 = R(p), Q_1 Q_2 = Q(p), Q_1 R_2 = S(p), \text{ тогда}$$

$$R(p) \cdot F(\varepsilon) + Q(p) \cdot \varepsilon = Q(p) g - S(p) \cdot f$$

$$\text{Если } g = \text{const}, f = \text{const}, \text{ то } pg = 0, pf = 0 \text{ и}$$

$$R(p) \cdot F(\varepsilon) + Q(p) \cdot \varepsilon = Q(0) \cdot g - S(0) \cdot f$$

Если правая часть  $\neq 0$ , то могут возникнуть

некомпенсированные колебания в системе;  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^*$

Производим гармоническое линеаризацию начальных условий.  
(с учетом  $x_0, F^0$  !)

Выделяем из ур.-е линейную ур.-е для постоянных  
составляющих и ур.-е для переменных составляющих.

$$\text{Пусть } W_1 = \frac{1}{0,5p+1}, \quad W_2 = \frac{1}{p(0,5p+1)}, \quad \varepsilon = \frac{F(\varepsilon)}{c}, \quad c = T_1$$

$$g(t) = 1(t), \quad f(t) = 0,5 \cdot 1(t). \quad \text{Тогда}$$

$$R_1(p) = R_2(p) = R(p) = R(0) = 1.$$

$$Q(p) = p/(0,5p+1)^2, \quad Q(0) = 0.$$

$$S(p) = 0,5p+1, \quad S(0) = 1.$$

Уравнение метода приближенных решений.

$$R(p) \cdot F(\varepsilon) + Q(p) \cdot \varepsilon = -f.$$

$$\text{Для идеального реле } F^\circ = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon_0}{a},$$

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^2}, \quad q' = 0.$$

$$R(p) \cdot (F^\circ + q^* \cdot \varepsilon^*) + Q(p) \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon^*) = -f$$

$$\begin{cases} F^\circ = -f - \text{пр-е гид. постоянных сопротивлений,} \\ q \cdot \varepsilon^* + Q(p) \cdot \varepsilon^* = 0 - \text{пр-е гид. нелинейности} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{\pi} \cdot \arcsin \frac{\varepsilon_0}{a} = -0,5; \quad \arcsin \frac{\varepsilon_0}{a} = -0,25$$

$$\frac{\varepsilon_0}{a} = -\sin 0,25 \approx -0,25.$$

$$\begin{cases} p \rightarrow s, \\ s = j\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow q + Q(j\omega) = 0$$

$$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)^2} + j\omega (0,5j\omega + 1)^2 = 0$$

~~$$\frac{4}{a} \sqrt{1 - 0,25^2} + j\omega (-0,25\omega^2 + j\omega + 1) = 0$$~~

~~$$\frac{4}{a} \sqrt{1 - 0,25^2} - 0,25j\omega^3 - \omega^2 + j\omega = 0$$~~

Разделяем на действ. и мнимую части.

$$-\omega^2 + \frac{4}{a} \sqrt{1 - 0,25^2} = 0$$

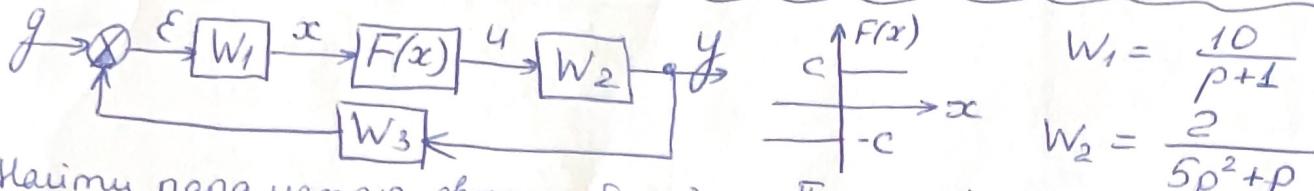
$$\omega - 0,25\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = 2$$

$$\Rightarrow a \approx 0,97.$$

$$\text{Смещение } \varepsilon_0 = -0,25a = -0,24$$

$$\varepsilon = -0,24 + 0,97 \sin 2t$$

Вариант задачи с отсутствием автоколебаний.



$$W_1 = \frac{10}{p+1}$$

$$W_2 = \frac{2}{5p^2+p}$$

Найти параметры автоколебаний  $c = \frac{\pi}{2}$ ;  $g = 0,5T$ ;  $W_3 = p+1$

Решение.

$$\begin{cases} x^0 + W_1 W_2 W_3 \cdot F^0 = W_1 g & (1) \\ x^* + W_1 W_2 W_3 \cdot g \cdot x^* = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): Q_1 Q_2 Q_3 + R_1 R_2 R_3 \cdot q = 0 \text{ - характерист. урн - e}$$

$$(p+1)(5p^2+p) + 20(p+1)q = 0$$

$$5p^3 + 6p^2 + p + 20pq + 20q = 0; p \rightarrow s = j\omega$$

$$-5j\omega^3 - 6\omega^2 + j\omega + 20j\omega q + 20q = X + jY = 0$$

$$\begin{cases} X = -6\omega^2 + 20q = 0, & (3) \\ Y = \omega(1+20q - 5\omega^2) = 0, & (4) \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \frac{10}{3}q; \quad \frac{10}{3}q = \frac{1+20q}{5}; \quad 10q = \frac{3+60q}{5}$$

$$\omega^2 = \frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = -1 \text{ - не имеет решений}$$

$$50q = 3+60q$$

$$q = -\frac{3}{10}$$

В системе нет автоколебаний.

д  $X^0$  не учтено?!

б (1) уравнение

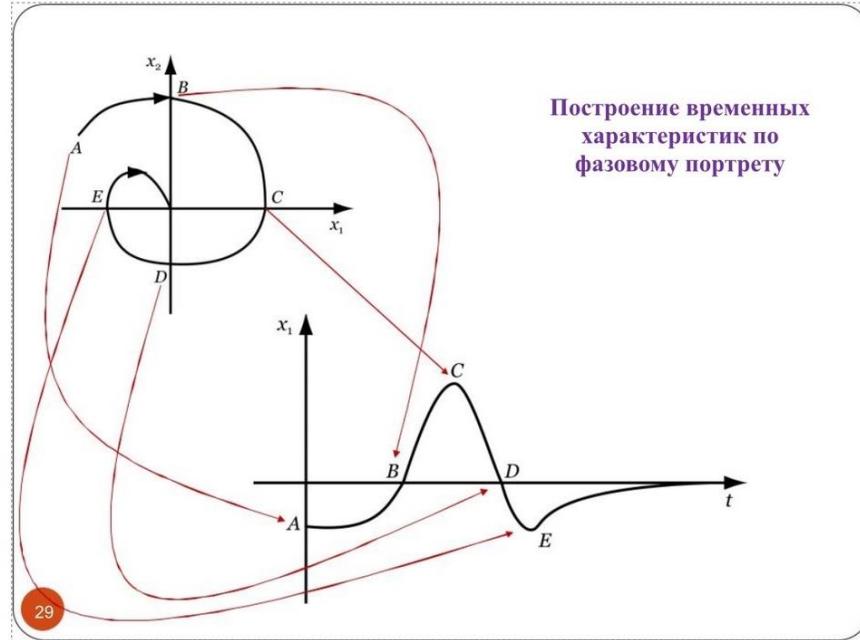
✓ Проверка 14 (1)

справа налево, так как  $x_1, x_2 \propto$  и  $x_1$  убывает.

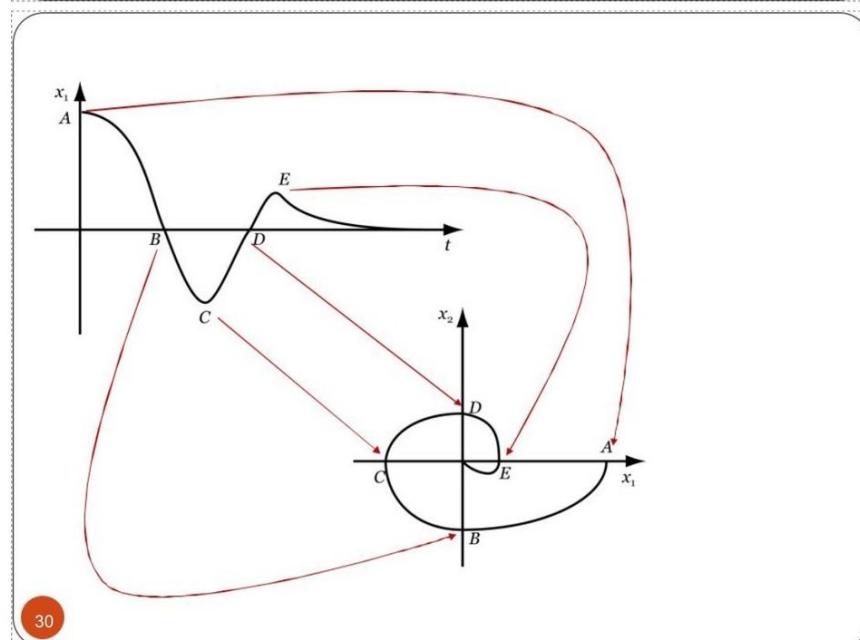
- На оси абсцисс ( $x_2 = 0$ ) производная  $dx_2/dx_1 = \infty$  (за исключением точек равновесия), и поэтому фазовые траектории пересекают ось абсцисс под прямым углом.

По фазовому портрету можно судить о характере переходных процессов. В частности, по фазовой траектории можно построить без расчетов качественно временную характеристику – кривую зависимости  $x_1$  от времени, и, наоборот, по временной характеристике можно качественно построить фазовую траекторию.

28



29



30

&lt; Предыдущая

3 / 7

Следующая &gt;



$$q = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi. \quad (4.19)$$

Для петлевой нелинейности  $F(x)$  (нечетно-симметричной) будет иметь место полное выражение (4.10)

$$F(x) = \left[ q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x, \quad (4.20)$$

причем можно пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ q' &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

т. с. удвоением результата интегрирования на полупериоде.

Пример 1. Исследуем кубическую нелинейность (рис. 4.4, а):

$$\begin{aligned} F(x) &= k_1 x + k_3 x^3, \\ q' &= 0, \quad q = k_1 + \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} k_3 a^3 \sin^3 \psi \sin \psi d\psi = k_1 + \frac{3}{4} k_3 a^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Зависимость  $q(a)$  показана на рис. 4.4, б. Из рис. 4.4, а видно, что при заданной амплитуде  $a$  прямая  $q(a)x$  осредняет криволинейную зависимость  $F(x)$  на данном

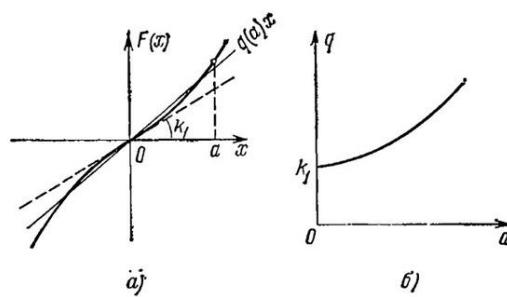
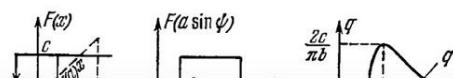


Рис. 4.4.

участке  $-a \leq x \leq a$ . Естественно, что крутизна  $q(a)$  наклона этой осредняющей прямой  $q(a)x$  увеличивается с увеличением амплитуды  $a$  (для кубической характеристики это увеличение происходит по квадратичному закону).



AA

studizba.com



Пример 5. Как частные случаи, соответствующие коэффициенты  $q(a)$  для двух характеристик (рис. 4.8, а, в) равны

$$q = k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b. \quad (4.27)$$

$$q = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \quad a \geq b, \quad (4.28)$$

что изображено графически на рис. 4.8, б, г. При этом для характеристики с насыщением (рис. 4.8, а) имеем  $q = k$  при  $0 \leq a \leq b$ .

Покажем теперь примеры вычисления коэффициентов гармонической линеаризации для несимметричных колебаний при тех же нелинейностях.

Пример 6. Для случая кубической нелинейности  $F(x) = kx^3$  по формуле (4.16) имеем

$$F^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x^0 + a \sin \psi)^3 d\psi = k \left[ (x^0)^3 + \frac{3}{2} x^0 a^2 \right], \quad (4.29)$$

а по формулам (4.17)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} k(x^0 + a \sin \psi)^3 \sin \psi d\psi = 3k \left[ (x^0)^2 + \frac{a^2}{4} \right], \\ q' &= 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Пример 7. Для петлевой релейной характеристики (рис. 4.5, а) по тем же формулам имеем

$$F^0 = \frac{c}{\pi} \left( \arcsin \frac{b+x^0}{a} - \arcsin \frac{b-x^0}{a} \right), \quad (4.31)$$

$$q = \frac{2c}{\pi a} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{b+x^0}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{b-x^0}{a} \right)^2} \right],$$

$$q' = -\frac{4cb}{\pi a^2}. \quad (4.32)$$

Пример 8. Для характеристики с воной нечувствительности (рис. 4.9) будут иметь место те же выражения  $F^0$  и  $q$ . Графики их представлены на рис. 4.9, а, б. При этом  $q' = 0$ . Для идеальной же релейной характеристики (рис. 4.10) получаем

$$F^0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x^0}{a}, \quad q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left( \frac{x^0}{a} \right)^2}, \quad q' = 0, \quad (4.33)$$

что изображено на рис. 4.10, а и б.