

Вопросы к экзамену по нелинейному ТАУ в группах СМ7-61Б, СМ7-62Б, СМ7-65Б и СМ11-61Б

1 Исследование устойчивости предельных циклов с помощью критерия Михайлова. (Еще надо написать условия проведения гармонич. линеаризации)

Алгебраический способ определения симметричных автоколебаний и устойчивости



Рис. 4.2.

Рассмотрим определение симметричных автоколебаний алгебраическим способом на основе гармонической линеаризации нелинейности. Пусть система (рис. 4.2) с одной нелинейностью $F(x)$ имеет передаточную функцию линейной части

$$W_L(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

обладающую свойством фильтра. Уравнения линейной части системы и нелинейного звена:

$$Q(p)x = -R(p)y, \quad y = F(x), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Уравнение замкнутой системы примет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0 \quad (4.36)$$

Решение ищется приближенно в форме

$$x = a \sin \omega t \quad (4.37)$$

с двумя неизвестными a и ω . После гармонической линеаризации

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x$$

уравнение (4.36) принимает вид

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} x = 0 \quad (4.38)$$

Запишем характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы:

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} \lambda \right] = 0 \quad (4.39)$$

Периодическое решение (4.37) уравнения (4.38) соответствует паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ характеристического уравнения (4.39). Поэтому для отыскания этого решения подставим в него $\lambda = j\omega$. Получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega)[q(a) + jq'(a)] = 0.$$

Выделим в этом выражении вещественную и мнимую части в виде

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0.$$

В результате получим два алгебраических уравнения

$$X(a, \omega) = 0, \quad Y(a, \omega) = 0 \quad (4.40)$$

из которых и определяются искомые амплитуда a и частота ω периодического решения (4.37).

Заметим, что решение задачи упрощается в случае однозначной нелинейности $F(x)$: так как $q'(a) = 0$, то вместо (4.39) здесь имеем:

$$Q(\lambda) + R(\lambda)q(a) = 0$$

При подстановке $\lambda = j\omega$ выделим вещественные и мнимые части многочленов Q и R в виде

$$Q(j\omega) = X_Q(\omega) + jY_Q(\omega), \quad R(j\omega) = X_R(\omega) + jY_R(\omega).$$

Тогда вместо (4.40) получим

$$X_Q(\omega) + X_R(\omega)q(a) = 0, \quad Y_Q(\omega) + Y_R(\omega)q(a) = 0.$$

Эти два уравнения можно преобразовать к виду

$$q(a) = -\frac{X_Q(\omega)}{X_R(\omega)} \quad (4.40a)$$

$$X_Q(\omega)Y_R(\omega) - Y_Q(\omega)X_R(\omega) = 0$$

Сначала из второго уравнения определяется частота ω периодического решения, а затем из первого уравнения определяется амплитуда a . Видно, что частота зависит от параметров линейной части и не зависит от формы *однозначной* нелинейности. В случае же *петлевой* нелинейности это свойство нарушается и будет иметь место общий случай уравнений (4.40).

Определив таким образом периодическое решение, надо исследовать его устойчивость. Если оно устойчиво, то это означает автоколебательный процесс. Неустойчивое периодическое решение представляет собой неустойчивый предельный цикл.

Классический подход к исследованию устойчивости периодического решения состоит в следующем. Рассмотрим отклонение Δx от исследуемого периодического решения:

$$x = x^* + \Delta x, \quad x^* = a \sin \omega t.$$

С учетом этого уравнение динамики системы (4.36) примет вид

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)F(x^* + \Delta x) = 0$$

или

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p) \left[F(x^*) + \left(\frac{dF}{dx} \right)^* \Delta x + \dots \right] = 0$$

Но согласно (4.36)

$$Q(p)x^* + R(p)F(x^*) = 0$$

поэтому, отбросив слагаемые с производными высшего порядка, получаем уравнение в малых отклонениях

$$Q(p)\Delta x + R(p)\left(\frac{dF}{dx}\right)^*\Delta x = 0,$$

устойчивость которого надо исследовать.

Это линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Однако исследовать точными методами устойчивость уравнения высокого порядка с периодическими коэффициентами весьма сложно. Поэтому обратимся к приближенному способу.

Дадим малые начальные отклонения Δa амплитуды и $\Delta\omega$ частоты от их значений a и ω в периодическом решении. Тогда

$$x = (a + \Delta a)e^{-\xi t} \sin(\omega + \Delta\omega)t \quad (4.41)$$

Этим выражением описывается колебательный переходный процесс вблизи периодического (4.37). Для устойчивости найденного периодического процесса необходимо, очевидно, чтобы в выражении (4.41) величины Δa и ξ имели одинаковые знаки. В этом случае при положительном Δa амплитуда уменьшается, а при отрицательном Δa – увеличивается, стремясь к значению a .

Чтобы на этом основании вывести критерий устойчивости, используем символическую запись выражений (4.37) и (4.41); соответственно имеем

$$x = ae^{j\omega t}, \quad x = (a + \Delta a)e^{j(\omega + \Delta\omega + j\xi)t}.$$

Первое решение определялось уравнением

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0.$$

По аналогии с этим для нахождения второго решения запишем уравнение

$$X(a + \Delta a, \omega + \Delta\omega + j\xi) + jY(a + \Delta a, \omega + \Delta\omega + j\xi) = 0$$

Разложив это выражение в ряд Тейлора и использовав предыдущее выражение, получим

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) + j \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + j \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta\omega + j\xi) = 0$$

где звездочка означает подстановку значений a и ω , соответствующих исследуемому периодическому решению.

Если в этом выражении выделить вещественную и мнимую части, а из полученных в результате двух уравнений исключить величину $\Delta\omega$, то найдем

$$\xi = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^*}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta a.$$

Для устойчивости периодического решения, как уже говорилось, требуется одинаковость знаков ξ и Δa . Следовательно, требуется, чтобы

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* > 0 \quad (4.42)$$

В дополнение к этому нужно потребовать, чтобы в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы (4.39) все остальные корни (кроме использованной нами пары чисто мнимых) имели отрицательные вещественные части, т.е. чтобы многочлен

2 Гармоническая линеаризация несимметричных характеристик нелинейных звеньев.

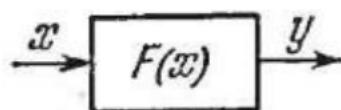
Метод гармонической линеаризации

Большинство реальных систем автоматического управления и регулирования описывается уравнениями более высокого, чем второй порядок. В связи с этим будут рассмотрены методы исследования нелинейных систем выше второго порядка. Наиболее распространённым на практике для этих целей является *метод гармонической линеаризации* (*метод гармонического баланса*). Основу этого приближенного метода составляют следующие положения.

Пусть имеется нелинейное звено с характеристикой

$$y = F(x) \quad (4.1)$$

Подадим на вход этого звена гармонический сигнал $x = a \sin \omega t$. На выходе получаем $y = F(a \sin \omega t)$. На рис. 4.1 дан пример графического представления функции $F(a \sin \omega t)$ (Рис. 4.1, б) для заданной нелинейной характеристики $F(x)$ (рис. 4.1, а).



Этот периодический выходной сигнал нелинейного звена можно разложить в ряд Фурье

$$y = F(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \quad (4.2)$$

где

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) dt \quad (4.3)$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \cos n\omega t dt \quad (4.4)$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \sin n\omega t dt$$

Будем рассматривать нелинейную автоматическую систему любой сложности по структуре, но с одной нелинейностью $y = F(x)$. Тогда, выделив эту нелинейность в отдельное звено, можно всю остальную часть системы, какую бы сложную структуру она не имела, объединить в единый блок – линейную часть (рис. 4.2). Передаточную функцию линейной части обозначим

$$W_L(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (4.5)$$

и будем считать, что степень многочлена $R(s)$ в числителе меньше, чем степень многочлена $Q(s)$ в знаменателе. Тогда амплитудная частотная характеристика линейной части $W_L(j\Omega)$ (рис. 4.3) будет стремится к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$. Начало этой частотной характеристики может иметь два варианта (1, 2, рис. 4.3) в зависимости от того, имеется или нет нулевой полюс передаточной функции (4.5).

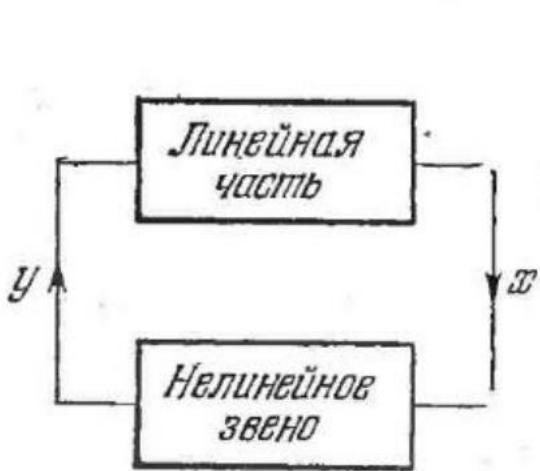


Рис. 4.2.

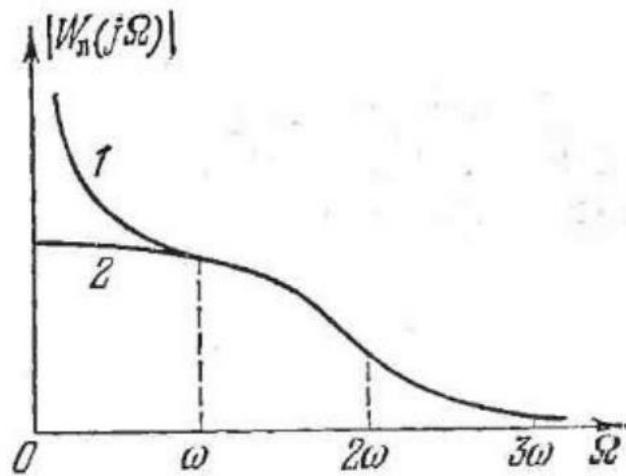


Рис. 4.3.

Допустим, что в данной замкнутой системе возможны собственные периодические колебания (автоколебания). Отметим на оси абсцисс (рис. 4.3) частоту первой гармоники этих колебаний ω и высшие гармоники $2\omega, 3\omega, \dots$ Предположим, что наша система обладает тем свойством, что величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем для первой:

$$|W_L(jn\omega)| \ll |W_L(j\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Это свойство называется *свойством фильтра* линейной части системы. При наличии свойства фильтра линейное часть системы (рис. 4.2) будет хорошо пропускать первую гармонику нелинейных колебаний y и ослаблять все высшие гармоники. Поэтому переменная x на выходе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде:

$$x \approx a \sin \omega t \quad (4.6)$$

При несимметричных колебаниях появится ещё постоянная составляющая x_0 :

$$x \approx x_0 + a \sin \omega t \quad (4.7)$$

В итоге вся задача сводится к определению двух неизвестных: частоты ω и амплитуды a первой гармоники колебаний переменной x в случае *симметричных колебаний* (4.6). В случае же несимметричных колебаний (4.7) речь будет идти о трех неизвестных: a, ω и постоянной составляющей x_0 .

Запишем выражения первый гармоники переменной y согласно (4.2):

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \quad (4.8)$$

отбросив высшее гармоники.

Условия проведения гармонической линеаризации:

- 1) К нелинейности можно применить преобразование Фурье
- 2) Нелинейная система одна или сводима к одной
- 3) Линейная часть выполняет функцию фильтра низких частот

Несимметричные колебания. При этом, согласно (4.7), будем иметь

$$x = x_0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t \quad (4.14)$$

Поэтому в результате гармонической линеаризации вместо (4.10) – (4.11), согласно (4.8), (4.3) и (4.4), получим

$$y = F(x) = F_0(x_0, a) + \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p \right] x^* \quad (4.15)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) d\psi \quad (4.16)$$

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi \end{aligned}} \quad (4.17)$$

Как видно из (4.15), выходная величина нелинейности y содержит постоянную составляющую F_0 и периодическую составляющую, выраженную через $x^* = a \sin \omega t$. Однако каждая из них зависит не только от соответствующей составляющей входа (т.е. F_0 зависит не только от x_0 и периодическая – не только от a), но и от обеих сразу. Это является существенным отличием нелинейного звена от линейного и обуславливает неприменимость здесь принципа суперпозиции, который составлял важное свойство линейных систем.

3. Скользящие процессы.

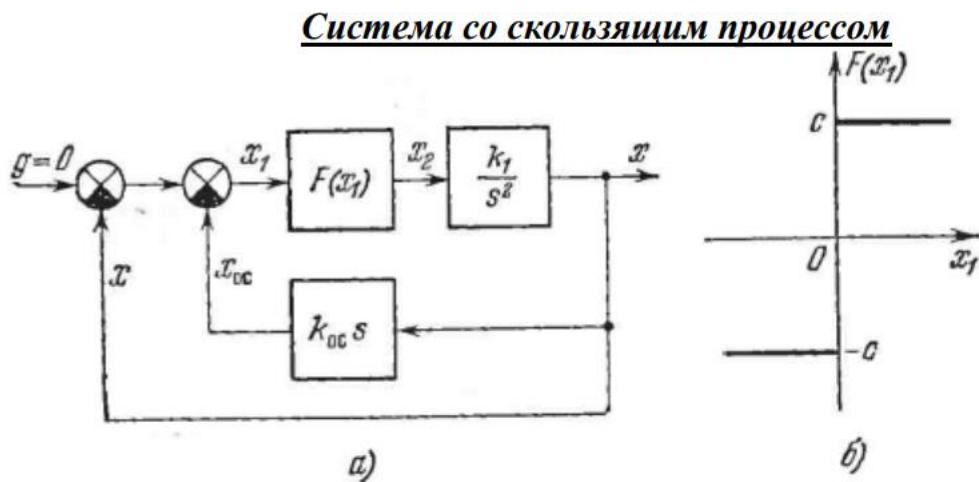


Рис. 2.6.

Уравнения, описывающие систему:

- 1) $\varepsilon(t) = g(t) - x(t) = -x(t)$
- 2) $x_1(t) = \varepsilon(t) - x_{oc}(t)$
- 3) $x_2(t) = F(x_1)$
- 4) $\ddot{x}(t) = kx_2(t)$
- 5) $x_{oc}(t) = k_{oc}\dot{x}(t)$

Принимаем: $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$

Преобразуем (2): $x_1(t) = -x(t) - k_{oc}\dot{x}(t)$

Преобразуем (3): $x_2(t) = c \cdot sign(-x(t) - k_{oc}\dot{x}(t))$

Преобразуем (4): $\ddot{x}(t) = k \cdot c \cdot sign(-x(t) - k_{oc}\dot{x}(t))$

Принимаем: $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = kc \cdot sign(-x(t) - k_{oc}\dot{x}(t))$

Линия переключения на фазовой плоскости, описывается уравнением:

$$y_2 = -\frac{1}{k_{oc}}y_1$$

В правой части от линии переключения:

$$\dot{y}_2 = -kc$$

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -kc$$

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{kc}{y_2}$$

$$y_2 dy_2 = -kc dy_1$$

Проинтегрируем и получим:

$$\frac{y_2^2}{2} = -kcy_1 + c_1$$

Таким образом, фазовые траектории – это параболы, ветви которых направлены в отрицательную сторону оси x . Положение вершины параболы определяется начальными условиями.

Слева от линии переключения:

$$y_2 dy_2 = kcdy_1$$

$$\frac{y_2^2}{2} = kcy_1 + c_1$$

Полученная фазовая траектория:

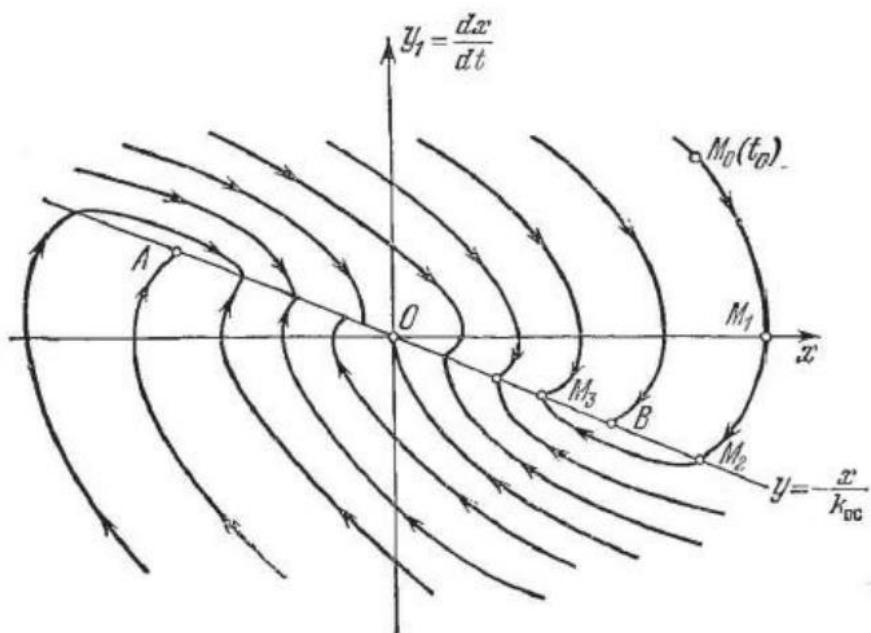
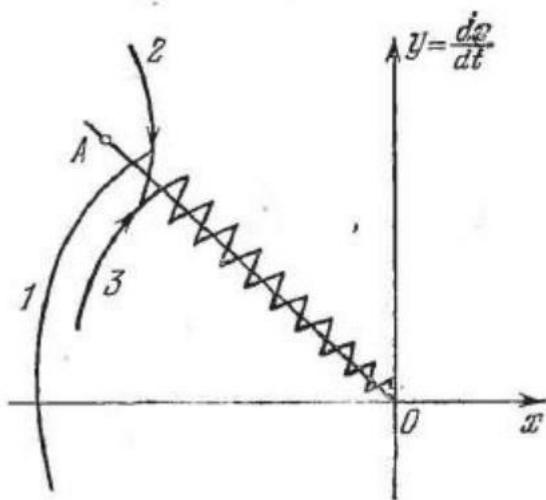


Рис. 2.7.

Проанализируем полученную картинку:

Видно, что на отрезке линии пересечения АВ фазовые траектории встречаются, упираясь в этот отрезок. Это можно расшифровать следующим образом.



Пусть процесс идет по фазовой траектории 1. Как только фазовая траектория пересечет линию пресечения ОА, вступит в свои права фазовая траектория 2, которая вернет процесс к отрезку ОА. Но тут встретится фазовая траектория 3 и т.д. В результате изображающая точка путем колебаний около линии переключения переместится к началу координат О. Таким образом наблюдается скользящий процесс.

Скользящий процесс – это процесс движения изображающей точки по фазовой плоскости к началу координат с бесконечно большой частотой и бесконечно малой амплитудой.

Найдем закон движения в скользящем процессе. На линии переключения имеет место дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} + \frac{1}{k_{oc}} x = 0$$

Решением этого уравнения является:

$$x = c_3 e^{-t/k_{oc}}$$

Здесь важно отметить следующее. Нелинейная система второго порядка на участке скользящего процесса вырождается в линейную систему первого порядка. При этом закон движения в скользящем процессе не зависит от параметров прямой цепи системы и определяется только коэффициентом обратной связи. Например, при начальном положении M_0 получим фазовую траекторию $M_0M_1M_2M_3$, переходящую в скольжение по линии M_3O .

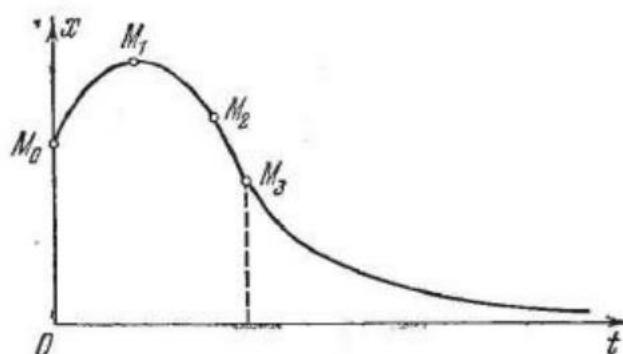


Рис. 2.9.

4. Приближенное определение параметров предельных циклов и их устойчивости с использованием ЛЧХ.

Определение параметров симметричных автоколебаний частотным методом

$$W_{\text{н.ч.}}(q) = q(a) + \frac{q'(a)p}{\omega} \quad W_{\text{л.ч.}}(S) = \frac{A(S)}{B(S)}$$

$$W(j\omega) = W_{\text{л.ч.}}(j\omega) * W_{\text{н.ч.}}(a)$$

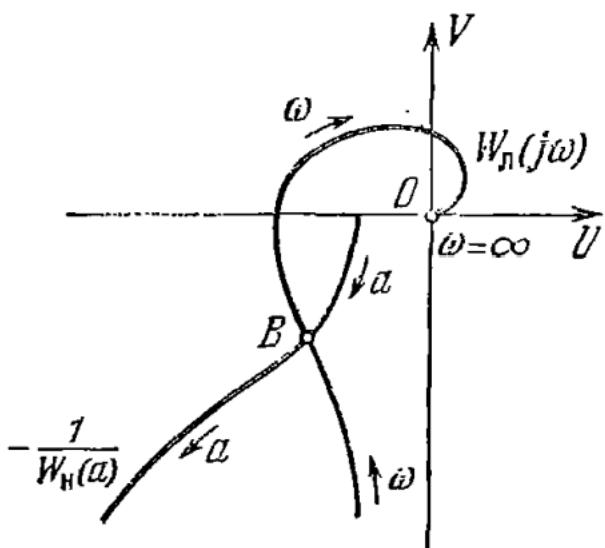
Периодическое решение линеаризованной системы получается при наличии в характеристическом уравнении замкнутой системы пары чисто мнимых корней. А это по критерию Найквиста соответствует прохождению $W(j\omega)$ через точку -1. Следовательно, периодическое решение определяется равенством:

$$W_{\text{л.ч.}}(j\omega) * W_{\text{н.ч.}}(a) = -1$$

или

$$W_{\text{л.ч.}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н.ч.}}(a)}, \quad \text{где } W_{\text{н.ч.}}(a) = q(a) + jq'(a)$$

Это уравнение решается графически следующим образом. На комплексной плоскости (U, V) вычерчивается АФЧХ линейной части $W_{\text{л.ч.}}(j\omega)$, а также обратная АФХ нелинейности с обратным знаком $-\frac{1}{W_{\text{н.ч.}}(a)}$. Точка В их пересечения и определяет величины a и ω , причем значение a отсчитывается по кривой $-\frac{1}{W_{\text{н.ч.}}(a)}$, а значение ω – по кривой $W_{\text{л.ч.}}(j\omega)$.



Вместо этого можно пользоваться двумя скалярными уравнениями:

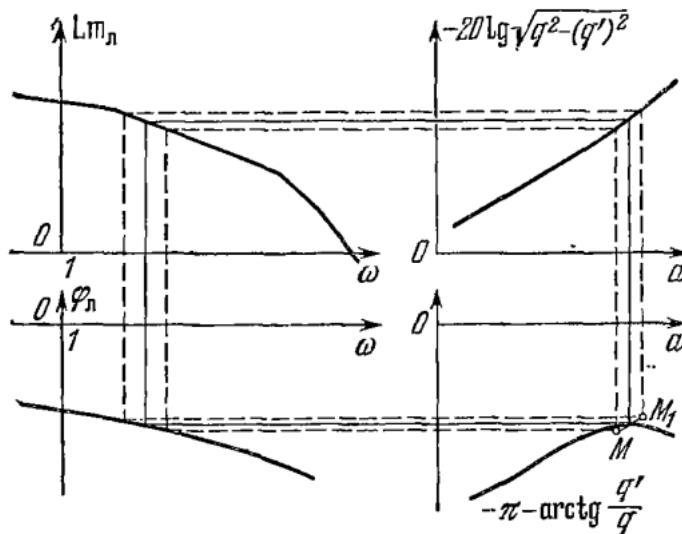
$$|W_{\text{л.ч.}}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}}, \quad \arg W_{\text{л.ч.}}(j\omega) = -180^\circ - \arctg \frac{q'(a)}{q(a)},$$

которые также определяют две искомые величины a и ω .

Последними двумя уравнениями удобнее пользоваться в логарифмическом масштабе, привлекая логарифмические частотные характеристики линейной части. Тогда будем иметь следующие два уравнения:

$$Lm_{\text{л.ч.}}(\omega) = -20 \lg \sqrt{q^2(a) + [q'(a)]^2}$$

$$\varphi_{\text{л.ч.}}(\omega) = -180^\circ - \arctg \frac{q'(a)}{q(a)}$$



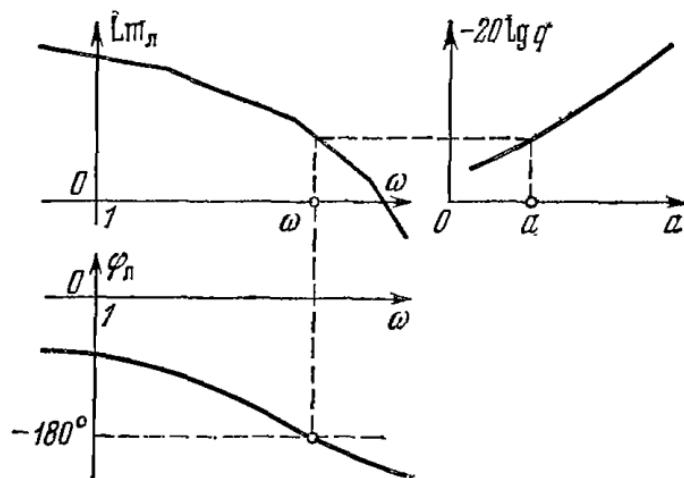
Слева изображены графики левых частей уравнений, а справа – правых частей этих уравнений. При этом по оси абсцисс слева частота ω откладывается, как обычно, в логарифмическом масштабе, а справа – амплитуда a в натуральном масштабе. Решением этих уравнений будут такие значения a и ω , чтобы при них одновременно соблюдались оба равенства выше. Такое решение показано на рисунке тонкими линиями в виде прямоугольника.

Очевидно, что сразу угадать это решение не удается. Поэтому делаются попытки, показанные штриховыми линиями. Последние точки этих пробных прямоугольников M и M_1 не попадают на фазовую характеристику нелинейности. Но если они расположены по обе стороны характеристики, то решение находится интерполяцией – путем проведения прямой MM_1 .

Если $q'(a)=0$, то логарифмические уравнения принимают вид:

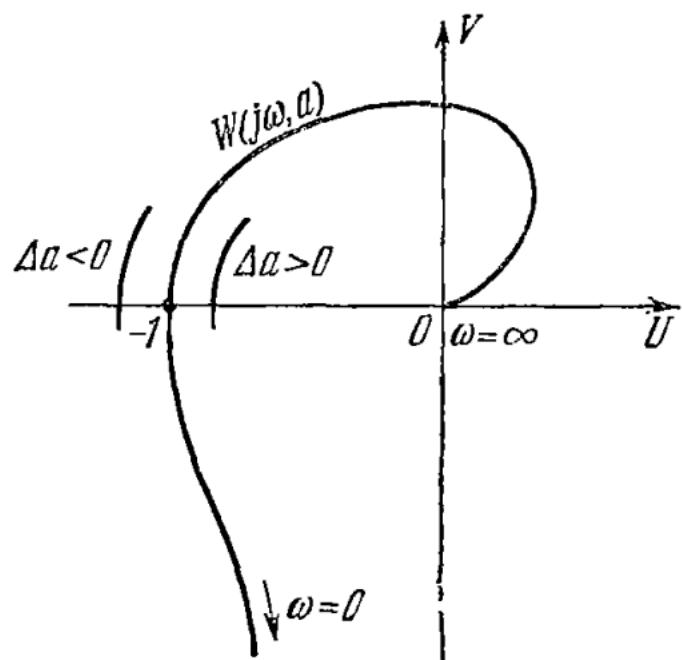
$$Lm_{\text{л.ч.}}(\omega) = -20 \lg q(a)$$

$$\varphi_{\text{л.ч.}}(\omega) = -180^\circ$$



После определения периодического решения надо исследовать его устойчивость. Дадим амплитуде отклонение Δa . Система будет возвращаться к периодическому решению, если при $\Delta a > 0$ колебания затухают, а при $\Delta a < 0$ – расходятся. Следовательно, при $\Delta a > 0$ характеристика $W(j\omega, a)$ должна

деформироваться так, чтобы критерий устойчивости Найквиста соблюдался, а при $\Delta a < 0$ – нарушался.



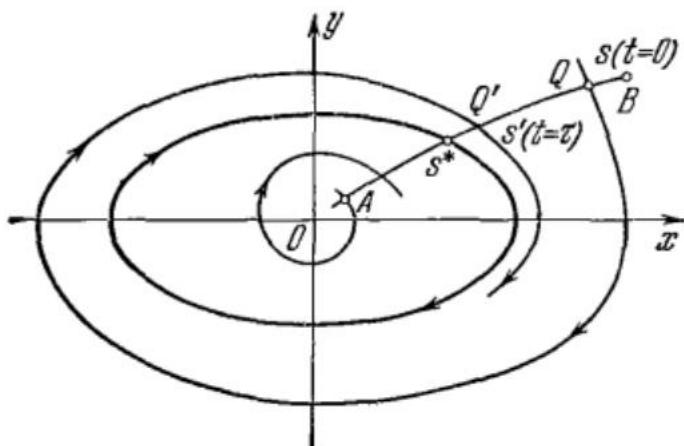
5. Метод точечного преобразования.

Метод точечного преобразования.

Метод точечного преобразования представляет собой усовершенствование метода припасовывания с привлечением геометрических представлений в фазовом пространстве. Он заключается в анализе заполнения отрезка точками фазовой траектории. Запишем в общем виде уравнения динамики нелинейной системы второго порядка без внешнего воздействия:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y)$$

На фазовой плоскости (x, y) возьмем какой-нибудь отрезок линии AB , который пересекается фазовыми траекториями в одном направлении.



Обозначим через s координату произвольной точки Q на отрезке AB , отсчитываемую вдоль дуги AB от начала A .

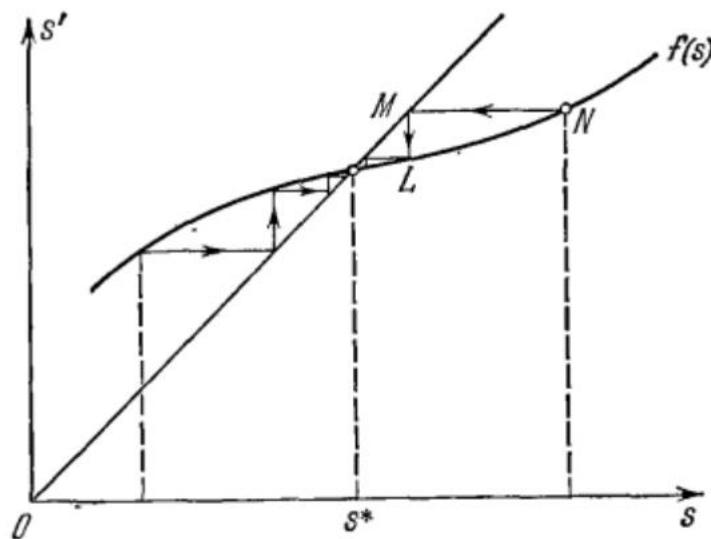
Пусть решение уравнений выше $x=x(t)$, $y=y(t)$ дает фазовую траекторию, проходящую через точку Q . Допустим далее, что с увеличением t эта фазовая траектория снова пересечет отрезок AB в некоторой другой точке Q' . Координату точки Q' по дуге AB обозначим s' .

Точка Q' (первого следующего пересечения отрезка AB той же фазовой траекторией) называется последующей по отношению к исходной точке Q . Зависимость $s'=f(s)$, соответствующая ходу фазовой траектории в силу решения начальных уравнений, называется функцией последования. Функция последования определяет закон точечного преобразования для данной нелинейной системы.

Определение последующих точек по заданным исходным на отрезке AB и называется точечным преобразованием отрезка AB в самого себя. Ввиду непрерывности расположения фазовых траекторий исходные и последующие точки заполняют весь отрезок. Однако каждая точка отрезка AB не обязательно имеет последующую внутри этого отрезка. Фазовые траектории, пересекающие отрезок, могут и не возвращаться к нему.

Возможен такой случай, что последующая точка Q' совпадает с исходной Q , т.е. $f(s)=s=s^*$. Такой случай называют точечным преобразованием точки Q самой в себя.

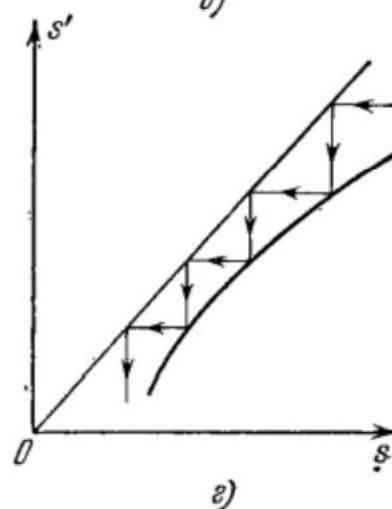
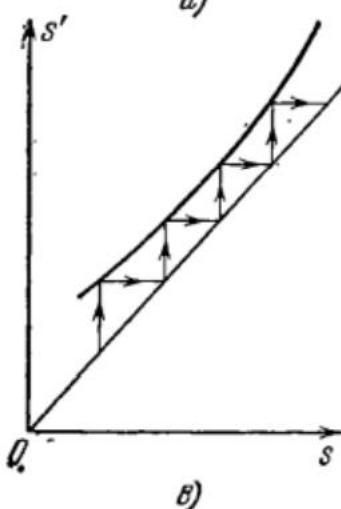
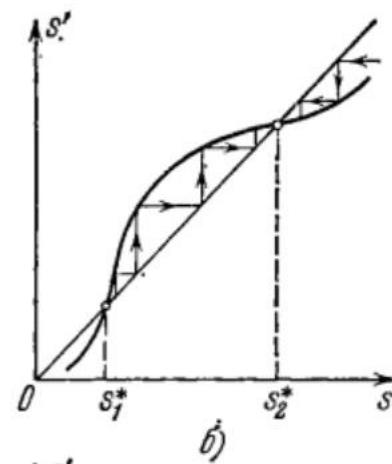
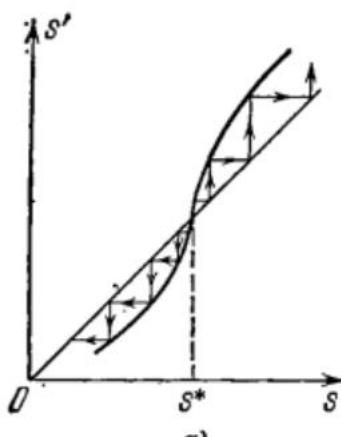
Изобразим графически функцию $s' = f(s)$:



Условие устойчивости предельного цикла:

$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)_{s=s^*} < 1$$

Примеры различных случаев предельных циклов:



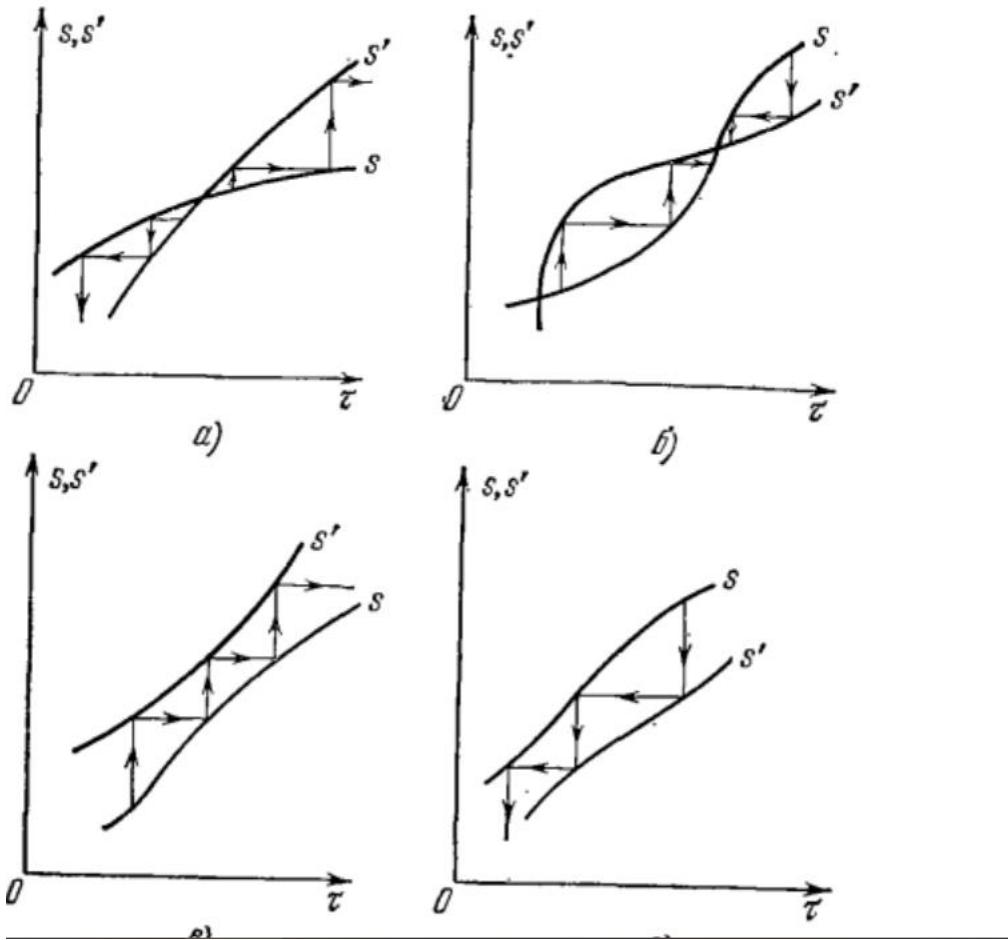
а) неустойчивый предельный цикл

б) случай двух предельных циклов, из которых один неустойчивый, а второй устойчивый

в) случай расходящихся колебаний

г) случай затухающих колебаний

Графики такого типа называются диаграммами точечного преобразования. Однако найти функцию $s' = f(s)$ в явной форме не всегда оказывается возможным. Поэтому в большинстве случаев функцию бывает легче представить в параметрической форме, куда в качестве параметра входит время t . Далее представлены графики, соответствующие графикам выше, но построенные в параметрической форме:



6. Гармоническая линеаризация несимметричных характеристик нелинейных звеньев (общие вопросы). Понятие фильтра низких частот.

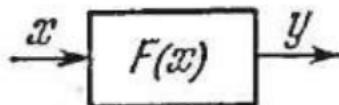
Метод гармонической линеаризации

Большинство реальных систем автоматического управления и регулирования описывается уравнениями более высокого, чем второй порядок. В связи с этим будут рассмотрены методы исследования нелинейных систем выше второго порядка. Наиболее распространённым на практике для этих целей является *метод гармонической линеаризации* (*метод гармонического баланса*). Основу этого приближенного метода составляют следующие положения.

Пусть имеется нелинейное звено с характеристикой

$$y = F(x) \quad (4.1)$$

Подадим на вход этого звена гармонический сигнал $x = a \sin \omega t$. На выходе получаем $y = F(a \sin \omega t)$. На рис. 4.1 дан пример графического представления функции $F(a \sin \omega t)$ (Рис. 4.1, б) для заданной нелинейной характеристики $F(x)$ (рис. 4.1, а).



Этот периодический выходной сигнал нелинейного звена можно разложить в ряд Фурье

$$y = F(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \quad (4.2)$$

где

$$A_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) dt \quad (4.3)$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \cos n\omega t dt \quad (4.4)$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F(a \sin \omega t) \sin n\omega t dt$$

Будем рассматривать нелинейную автоматическую систему любой сложности по структуре, но с одной нелинейностью $y = F(x)$. Тогда, выделив эту нелинейность в отдельное звено, можно всю остальную часть системы, какую бы сложную структуру она не имела, объединить в единый блок – линейную часть (рис. 4.2). Передаточную функцию линейной части обозначим

$$W_L(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} \quad (4.5)$$

и будем считать, что степень многочлена $R(s)$ в числителе меньше, чем степень многочлена $Q(s)$ в знаменателе. Тогда амплитудная частотная характеристика линейной части $W_L(j\Omega)$ (рис. 4.3) будет стремится к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$. Начало этой частотной характеристики может иметь два варианта (1, 2, рис. 4.3) в зависимости от того, имеется или нет нулевой полюс передаточной функции (4.5).

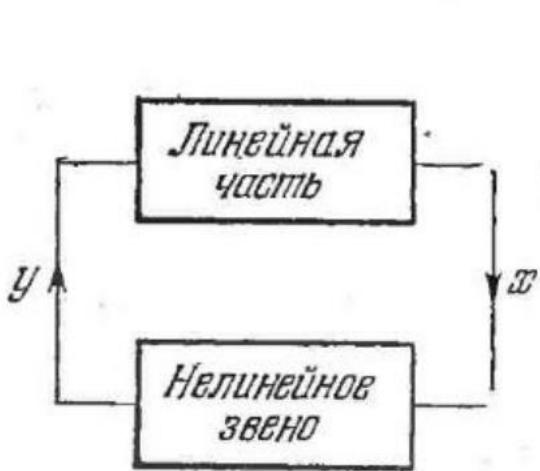


Рис. 4.2.

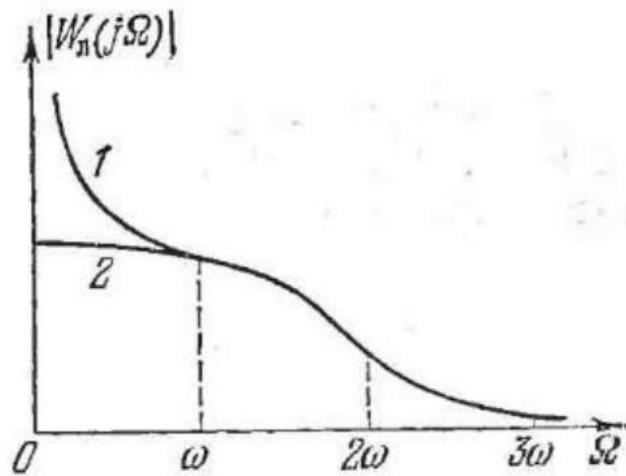


Рис. 4.3.

Допустим, что в данной замкнутой системе возможны собственные периодические колебания (автоколебания). Отметим на оси абсцисс (рис. 4.3) частоту первой гармоники этих колебаний ω и высшие гармоники $2\omega, 3\omega, \dots$ Предположим, что наша система обладает тем свойством, что величина амплитудной характеристики на частотах высших гармоник значительно меньше, чем для первой:

$$|W_L(jn\omega)| \ll |W_L(j\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Это свойство называется *свойством фильтра* линейной части системы. При наличии свойства фильтра линейное часть системы (рис. 4.2) будет хорошо пропускать первую гармонику нелинейных колебаний y и ослаблять все высшие гармоники. Поэтому переменная x на выходе нелинейного звена окажется близкой к синусоиде:

$$x \approx a \sin \omega t \quad (4.6)$$

При несимметричных колебаниях появится ещё постоянная составляющая x_0 :

$$x \approx x_0 + a \sin \omega t \quad (4.7)$$

В итоге вся задача сводится к определению двух неизвестных: частоты ω и амплитуды a первой гармоники колебаний переменной x в случае *симметричных колебаний* (4.6). В случае же несимметричных колебаний (4.7) речь будет идти о трех неизвестных: a, ω и постоянной составляющей x_0 .

Запишем выражения первый гармоники переменной y согласно (4.2):

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \quad (4.8)$$

отбросив высшее гармоники.

Условия проведения гармонической линеаризации:

- 1) К нелинейности можно применить преобразование Фурье
- 2) Нелинейная система одна или сводима к одной
- 3) Линейная часть выполняет функцию фильтра низких частот

Несимметричные колебания. При этом, согласно (4.7), будем иметь

$$x = x_0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t \quad (4.14)$$

Поэтому в результате гармонической линеаризации вместо (4.10) – (4.11), согласно (4.8), (4.3) и (4.4), получим

$$y = F(x) = F_0(x_0, a) + \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p \right] x^* \quad (4.15)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) d\psi \quad (4.16)$$

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi \\ q' &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(x_0 + a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi \end{aligned}} \quad (4.17)$$

Как видно из (4.15), выходная величина нелинейности y содержит постоянную составляющую F_0 и периодическую составляющую, выраженную через $x^* = a \sin \omega t$. Однако каждая из них зависит не только от соответствующей составляющей входа (т.е. F_0 зависит не только от x_0 и периодическая – не только от a), но и от обеих сразу. Это является существенным отличием нелинейного звена от линейного и обуславливает неприменимость здесь принципа суперпозиции, который составлял важное свойство линейных систем.

7. Псевдолинейная коррекция.

Псевдолинейная коррекция

Псевдолинейными корректирующими устройствами называются такие нелинейные корректирующие устройства, у которых эквивалентные передаточные функции (а значит, и коэффициенты гармонической линеаризации) в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе, зависят только от частоты и не зависят от амплитуды. Однако это зависимость от частоты – нелинейная в том смысле, что характер её отличается от частотной зависимости линейных передаточных функций и может быть произвольным, т.е. отсутствует жёсткая связь между амплитудными и фазовыми характеристиками, которая имеется у линейных звеньев. Это важное достоинство псевдолинейных устройств позволяет корректировать фазовые соотношения независимо от амплитудных и наоборот, что невозможно сделать линейными средствами.

Результат гармонической линеаризации при исследовании устойчивости для псевдолинейного устройства $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} p \right] x,$$

а при исследовании колебательных переходных процессов

$$F(x) = \left[q(\omega) + \frac{q'(\omega)}{\omega} (p - \xi) \right] x.$$

Эти выражения можно представить в другой форме:

$$F(x) = \frac{k^*(\omega)}{T^*(\omega)p + 1} x, \quad (7.29)$$

где для исследования устойчивости имеем

$$k^* = \frac{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}{q(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega \cdot q(\omega)}, \quad (7.30)$$

а для колебательных переходных процессов

$$k^* = \frac{q^2(\omega) + q'^2(\omega)}{q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega)}, \quad T^* = \frac{-q'(\omega)}{\omega \left[q(\omega) + \frac{\xi}{\omega} q'(\omega) \right]} \quad (7.31)$$

Такие псевдолинейные корректирующие устройства тоже обладают большими дополнительными возможностями улучшения качества процессов управления по сравнению с линейными устройствами.

8. Прохождение медленно меняющихся сигналов в автоколебательных системах.

Определение параметров при несимметричных колебаниях. Постоянные ошибки.

Комментарий: В Попове описан более общий случай этой темы, его я и приведу, также немного отличаются обозначения: на лекциях мы рассматриваем $W_L = A(s)/B(s)$ и входное воздействие $g(t)$, а в Попове $W_L = R(s)/Q(s)$ и входное воздействие $f(t)$, где $f(t)$ соответствует любому внешнему воздействию (входному или возмущающему). Но суть темы от этого не меняется.

Обратимся к нелинейной системе с внешним воздействием $f(t)$ (рис. 4.29). Тогда уравнение динамики замкнутой системы будет иметь вид:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t), \quad (4.58)$$

где операторный многочлен $S(p)$ зависит от места приложения внешнего воздействия.

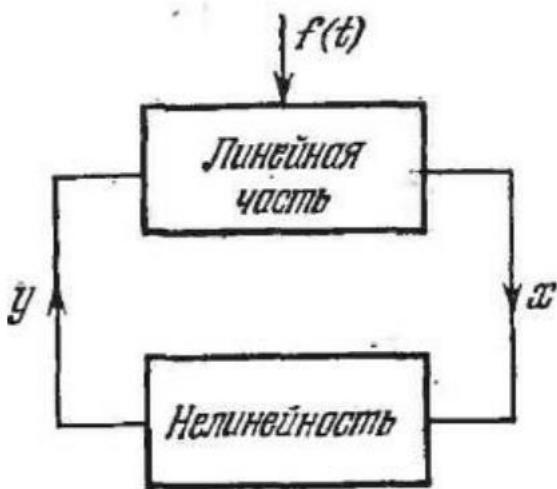


Рис. 4.29.

Положим правую часть уравнения (4.58) постоянной:

$$S(p)f(t) = C_f. \quad (4.60)$$

Итак, рассмотрим уравнение системы в виде:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = C_f \quad (4.60)$$

В этом случае за счет постоянной правой части уравнения появится постоянная составляющая в периодическом решении (несимметричные автоколебания). Поэтому решение ищется в виде:

$$x = x_0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t. \quad (4.61)$$

Величина x_0 характеризует постоянную статическую или скоростную ошибку системы.

Однако несимметричные автоколебания могут иметь место и при отсутствии внешнего воздействия, т.е. в системе

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0 \quad (4.62)$$

если $F(x)$ – несимметричная нелинейность. Это проиллюстрировано на рис. 4.30, где постоянная составляющая F^0 на выходе нелинейности возникает даже при симметричном входе $x = a \sin \omega t$. Затем постоянная составляющая, вообще говоря, пройдет и на вход x через линейную часть системы и приведет к решению вида:

$$x = x_0 + x^*, \quad x^* = a \sin \omega t.$$

Следовательно, статическая ошибка в нелинейной системе может иметь место и без внешнего воздействия – за счет несимметрии нелинейности.

Гармоническая линеаризация в случае несимметричных колебаний имеет вид

$$y = F(x) = F^0(x_0, a) + \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p \right] x^* \quad (4.63)$$

где x_0 – постоянная составляющая, q и q' - коэффициенты гармонической линеаризации. Их вычисление было показано ранее.

Подставим искомое решение (4.61) и результат гармонической линеаризации нелинейности (4.63) в заданное уравнение системы (4.60):

$$Q(p)(x_0 + x^*) + R(p) \left[F^0 + \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right) x^* \right] = C_f.$$

Выделим отсюда *уравнение для постоянных составляющих*:

$$Q(0)x_0 + R(0)F^0(x_0, a) = C_f \quad (4.64)$$

и *уравнение для периодических составляющих*:

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x_0) + \frac{q'(a, x_0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = 0. \quad (4.65)$$

Подставляем: $p = j\omega$.

$$\{Q(j\omega) + R(j\omega)[q(a, x_0) + j q'(a, x_0)]\}x^* = 0. \quad (*)$$

Далее уравнение (*) раскладывается на действительную и мнимую части:

$$X(a, \omega, x_0) = 0 \quad (* .1)$$

$$Y(a, \omega, x_0) = 0 \quad (* .2)$$

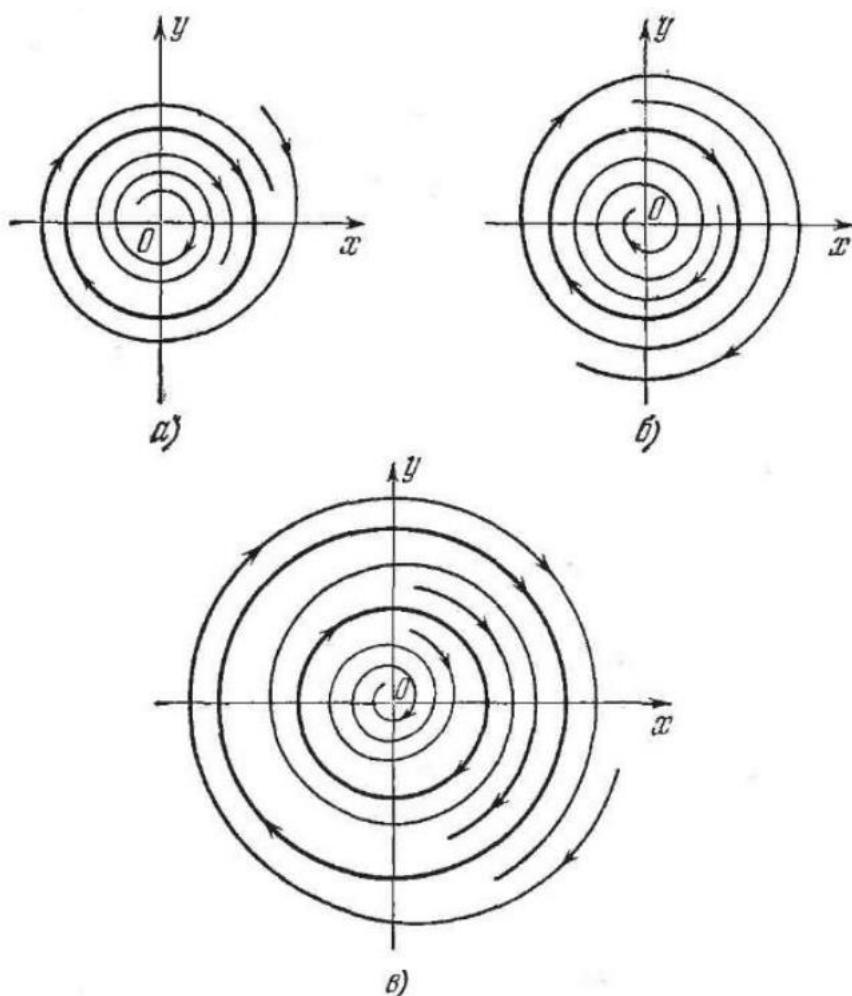
Получили 3 уравнения (4.64), (* .1), (* .2) для определения 3 неизвестных a, ω, x_0 .

9. Фазовое пространство и фазовая плоскость. Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем.

Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем

Отметим некоторые общие особенности процессов в нелинейных системах. Прежде всего, это возможность наличия двух или нескольких *равновесных состояний* (особых точек), как уже было приведено в примерах выше. В соответствии с этим на фазовой плоскости получаются области с различными типами фазовых траекторий. Такие *особые кривые*, разделяющие области с разными типами фазовых траекторий, называются *сепаратрисами*.

Существуют и другого типа особые кривые. Важным типом особых кривых являются *предельные циклы* – замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам, в окрестности которых имеют место колебательные переходные процессы. Если эти фазовые траектории изнутри и снаружи сходятся к данному предельному циклу (рис. 1.26, а), то мы имеем *устойчивый предельный цикл*. Если же они удаляются (рис. 1.26, б), – *неустойчивый предельный цикл*. Возможен и случай двух предельных циклов (рис. 1.26, в), из которых один устойчивый (в данном случае внешний), а второй неустойчивый.



Особая точка O на рис. 1.26 представляет собой в первом случае неустойчивое равновесное состояние, а во втором и третьем – устойчивое. Картина процессов во времени, соответствующая рис. 1.26, *a*,*б*, изображена на рис. 1.27, *а*,*б*.

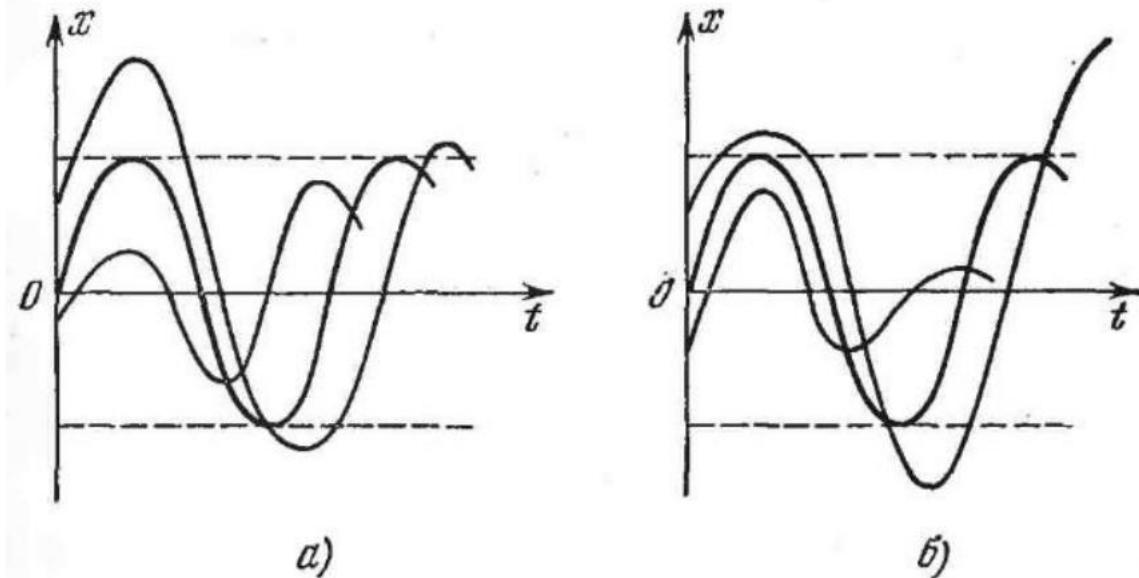


Рис. 1.27.

Физический смысл устойчивого периодического процесса, отвечающего предельному циклу, – *автоколебания системы*. Это собственные периодические колебания, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия, причем амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяются внутренними свойствами системы. Автоколебания могут возникать только в нелинейных системах. Что же касается линейных систем, то в них собственные периодические колебания возможны только на границе устойчивости ($\lambda_{1,2} = \pm j\omega$), причем амплитуда их определяется начальными условиями.

Физический смысл неустойчивого предельного цикла совсем иной. Как видно из рис. 1.26, *б*, неустойчивый предельный цикл – это *граница областей начальных условий*. При начальных условиях $x(t_0), y(t_0)$, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, получается затухающий переходный процесс, если же они лежат снаружи – расходящийся. Следовательно, равновесное состояние O в данном случае устойчиво при небольших начальных отклонениях, а при больших – система неустойчива. Говорят: система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

Здесь важно отметить, что, в отличие от линейных систем, типы динамических процессов нелинейных систем могут существенно зависеть от начальных условий.

10. Сравнение фазовых траекторий в линейных и нелинейных системах.

Типы особых точек и фазовые портреты линейных систем.

В качестве исходного материала, используемого в дальнейшем при изучении нелинейных систем, рассмотрим особые точки *линейных* систем второго порядка. Уравнения линейной системы имеют вид (1.5):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

или в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

при условии, что матрица A не вырожденная, т.е $\det(A) \neq 0$.

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий, согласно (1.5), имеют вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2} \quad (1.6)$$

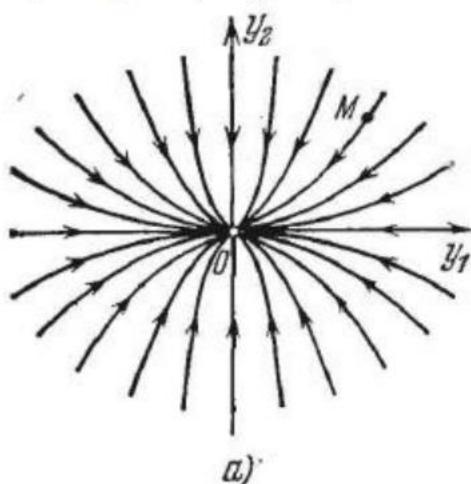
Единственной особой точкой (точкой равновесного состояния) является точка $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Решением этих уравнений является

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.7)$$

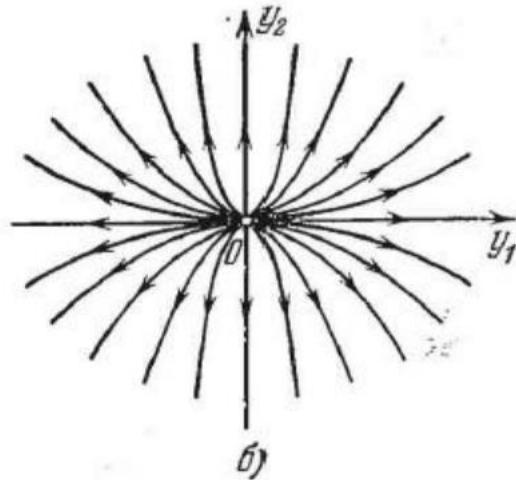
Рассмотрим различные виды фазовых траекторий в зависимости от корней характеристического уравнения:

a) $\lambda_1 = \alpha_1 < 0, \lambda_2 = \alpha_2 < 0$



Такой тип особой точки называется *точкой типа «устойчивый узел»*.

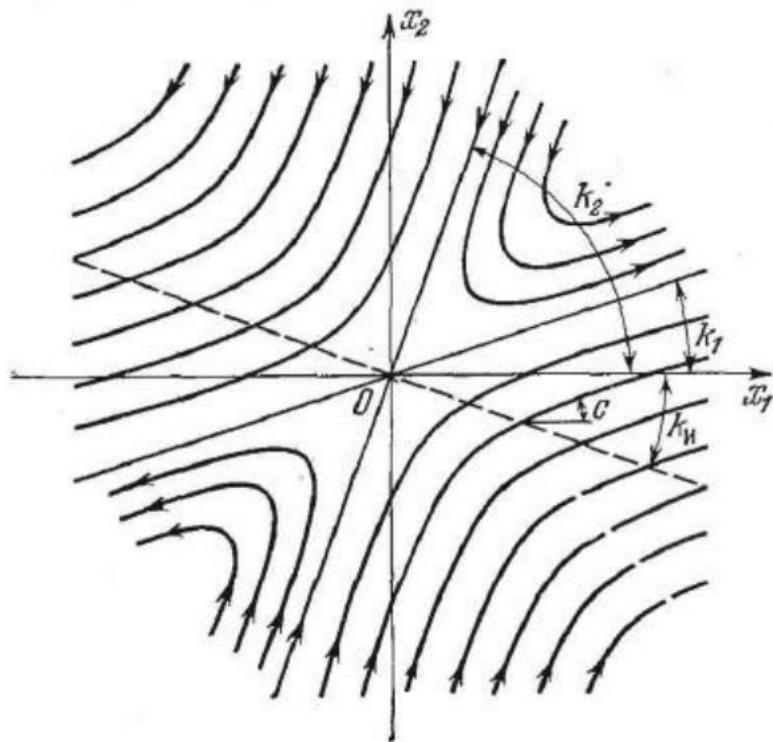
b) $\lambda_1 = \alpha_1 > 0, \lambda_2 = \alpha_2 > 0$



Такой тип особой точки называется *точкой типа «неустойчивый узел»*.

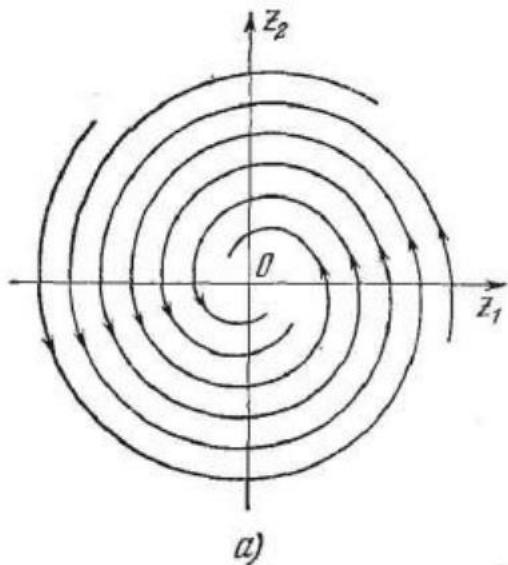
c) $\lambda_1 = \alpha_1 > 0, \lambda_2 = \alpha_2 < 0$

Устойчиво если коэффициент с при экспоненте с положительным корнем равен нулю.



Такой тип особой точки называется *точкой типа «седло»*.

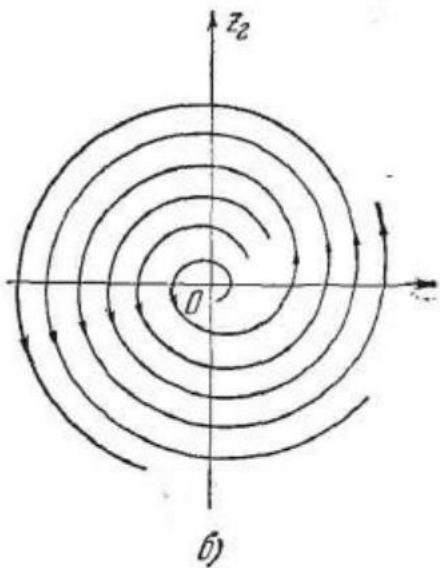
d) $\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$, $\alpha < 0$



a)

Такой тип особой точки называется *точкой типа «устойчивый фокус»*.

e) $\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$, $\alpha > 0$



b)

Такой тип особой точки называется *точкой типа «неустойчивый фокус»*.

$$f) \quad \lambda_1 = \alpha + j\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta, \quad \alpha = 0$$

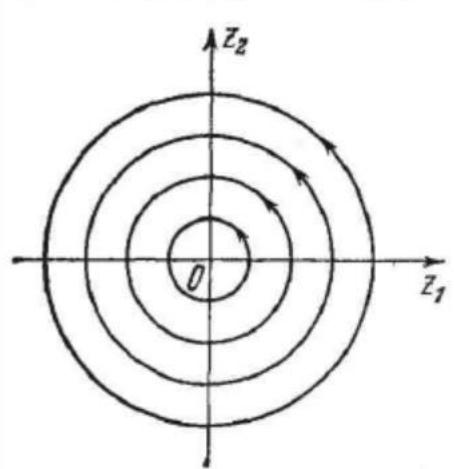


Рис. 1.22.

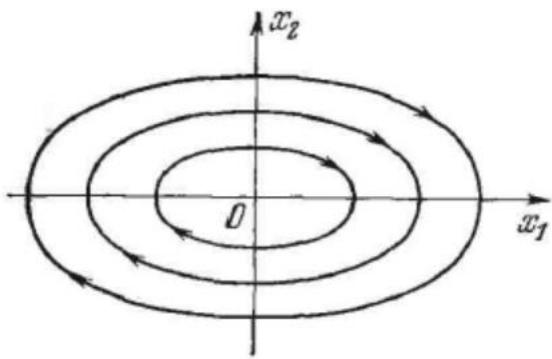


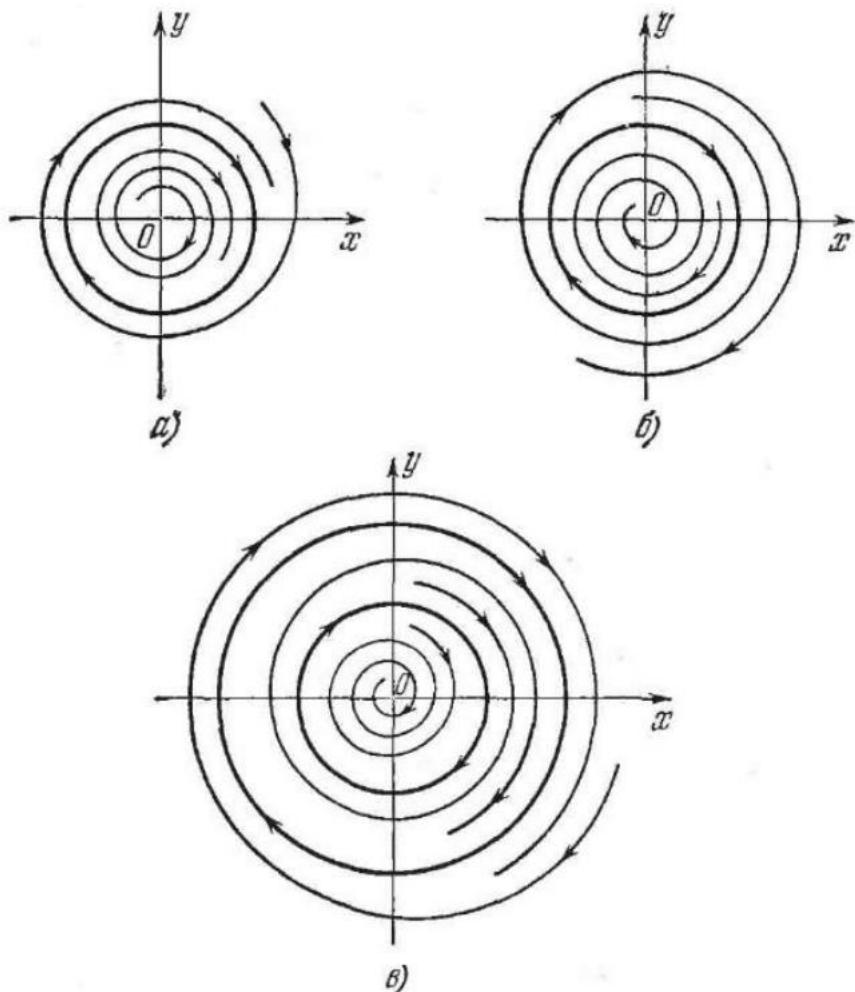
Рис. 1.23.

Такой тип особой точки называется *точкой типа «центр»*.

Особые точки и фазовые портреты нелинейных систем

Отметим некоторые общие особенности процессов в нелинейных системах. Прежде всего, это возможность наличия двух или нескольких *равновесных состояний* (особых точек), как уже было приведено в примерах выше. В соответствии с этим на фазовой плоскости получаются области с различными типами фазовых траекторий. Такие *особые кривые*, разделяющие области с разными типами фазовых траекторий, называются *сепаратрисами*.

Существуют и другого типа особые кривые. Важным типом особых кривых являются *предельные циклы* – замкнутые кривые, соответствующие периодическим процессам, в окрестности которых имеют место колебательные переходные процессы. Если эти фазовые траектории изнутри и снаружи сходятся к данному предельному циклу (рис. 1.26, *a*), то мы имеем *устойчивый предельный цикл*. Если же они удаляются в обе стороны (рис. 1.26, *б*), – *неустойчивый предельный цикл*. Возможен и случай двух предельных циклов (рис. 1.26, *в*), из которых один устойчивый (в данном случае внешний), а второй неустойчивый.



Особая точка O на рис. 1.26 представляет собой в первом случае неустойчивое равновесное состояние, а во втором и третьем – устойчивое. Картина процессов во времени, соответствующая рис. 1.26, a, b , изображена на рис. 1.27, a, b .

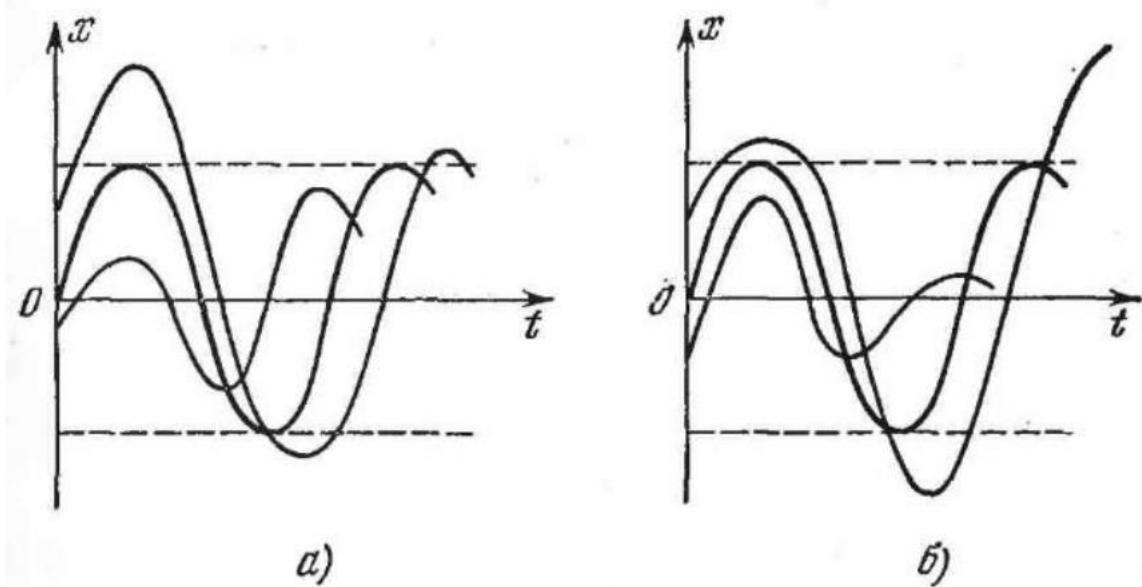


Рис. 1.27.

Физический смысл устойчивого периодического процесса, отвечающего предельному циклу, – *автоколебания системы*. Это собственные периодические колебания, происходящие при отсутствии внешнего периодического воздействия, причем амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяются внутренними свойствами системы. Автоколебания могут возникать только в нелинейных системах. Что же касается линейных систем, то в них собственные периодические колебания возможны только на границе устойчивости ($\lambda_{1,2} = \pm j\omega$), причем амплитуда их определяется начальными условиями.

Физический смысл неустойчивого предельного цикла совсем иной. Как видно из рис. 1.26, б, неустойчивый предельный цикл – это *граница областей начальных условий*. При начальных условиях $x(t_0), y(t_0)$, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, получается затухающий переходный процесс, если же они лежат снаружи – расходящийся. Следовательно, равновесное состояние О в данном случае устойчиво при небольших начальных отклонениях, а при больших – система неустойчива. Говорят: система устойчива «в малом» и неустойчива «в большом».

Здесь важно отметить, что, в отличие от линейных систем, типы динамических процессов нелинейных систем могут существенно *зависеть от начальных условий*.

Построение фазовой траектории динамических нелинейных систем.

1. Найти точки равновесного состояния

$$\dot{x}_1 = 0 \text{ и } \dot{x}_2 = 0$$

2. Провести линеаризацию в окрестности равновесных состояний

$$x_1^* = x_1 + \Delta x_1$$

$$x_2^* = x_2 + \Delta x_2$$

3. Определить тип каждой особой точки

4. Построить фазовую траекторию, при необходимости уточнив методом изоклин и сепаратрис.

Сепаратриса – линия, разделяющая области влияния особых точек.

Часть 2

1. Коррекция нелинейных систем. Линейные корректирующие устройства

Линейные корректирующие устройства

В этой главе рассматривается задача синтеза нелинейных систем как задача введения в заданную систему дополнительных устройств (корректирующих) для удовлетворения предъявляемым к системе техническим требованиям.

Для достижения требуемой точности и качества процесса в нелинейные системы можно вводить линейные корректирующие устройства такие же, как и в линейных системах. Эти линейные корректирующие устройства могут быть последовательными (с введением производных, интегралов и т.п.) и параллельными (в виде местных обратных связей различного типа).

Рассмотрим системы с одной нечетно-симметричной однозначной нелинейностью $F(x)$, гармоническая линеаризация которой имеет вид

$$F(x) = q(a)x \quad (7.1)$$

где коэффициент гармонической линеаризации принимает ограниченные значения

$$0 \leq q(a) \leq q_m \quad \text{или} \quad q_n \leq q(a) \leq q_m. \quad (7.2)$$

К такого типа нелинейностям относятся, например, нелинейности, изображённые на рис. 1.1, а, б, г, д, е и рис. 1.2, б, в.

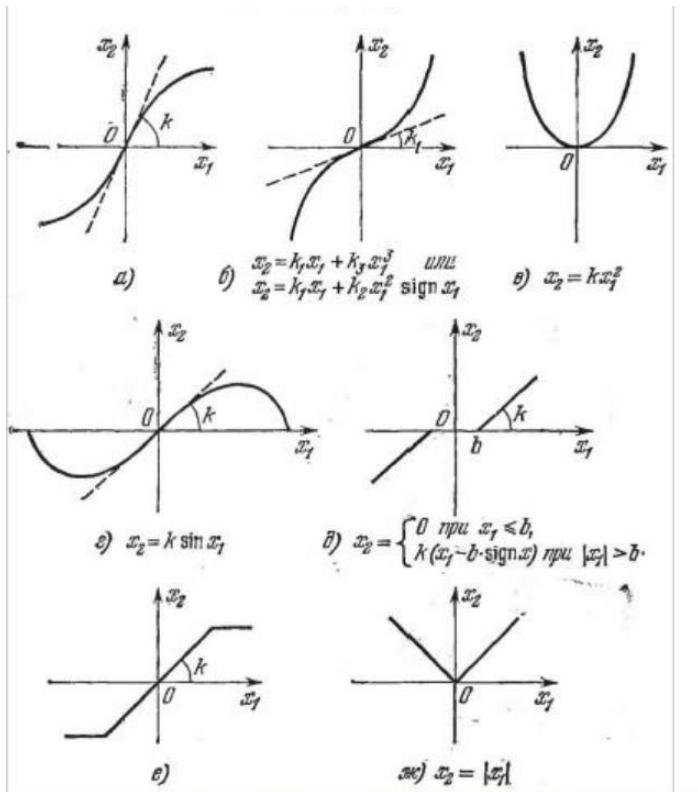


Рис. 1.1.

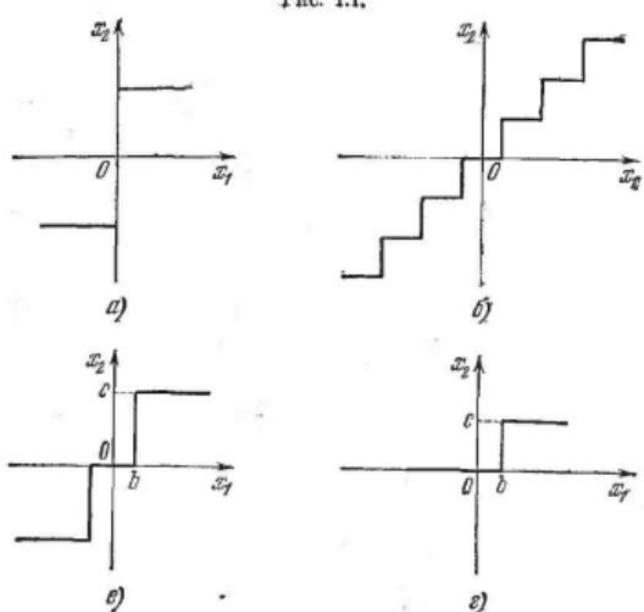
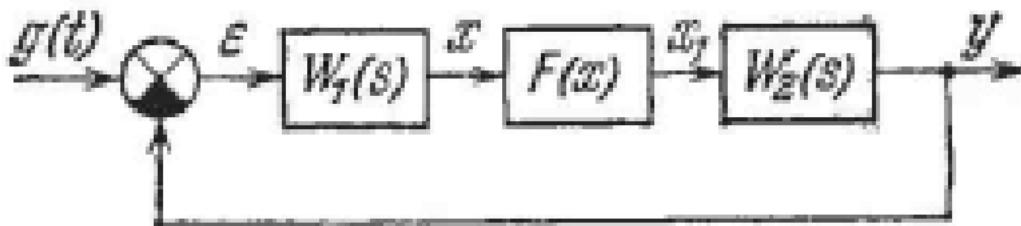


Рис. 1.2.

В случае наличия нелинейности вида рис. 1.2, *a*, когда коэффициент $q(a)$ принимает бесконечное значение при $a = 0$, здесь не рассматриваются, так как в этих случаях невозможно обеспечить устойчивое равновесное состояние системы в нулевой точке и установившийся режим будет

автоколебательным. В этих случаях путём введения линейных корректирующих устройств можно добиваться приемлемых значений параметров (a, ω) автоколебаний. Но это следует делать с помощью методов расчёта автоколебаний. Здесь мы будем рассматривать точность и качество процессов *около устойчивого равновесного состояния в нулевой точке*.

Пусть схема системы имеет вид, изображённый на рис. 7.1. Положим, что линейное корректирующее устройство любого типа вводится в одну из линейных частей, т.е. в блок $W_1(s)$ или $W_2(s)$, не охватывая нелинейного звена $F(x)$.



Условимся в формуле гармонической линеаризации (7.1) записывать

$$q(a) = kq_0(a) \quad (7.3)$$

где k – коэффициент усиления (его определение для различных нелинейностей показано на рис. 1.1).

Тогда выражение $q_0(a)$ можно получить в виде

$$q_0(a) = \frac{1}{k} q(a)$$

Указанный в формуле (7.3) коэффициент k будем относить к передаточной функции линейной части системы. Так, для схемы рис. 7.1 передаточную функцию такой приведённой линейной части будем записывать в виде

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_{\text{л}}(s) = kW_1(s)W_2(s) \quad (7.4)$$

где k – коэффициент, выделенный из нелинейности согласно (7.3).

Соответственно в случае релейной характеристики (рис. 1.2, *b*) в качестве величины k примем значение q_{\max} , т.е.

$$k = \frac{2c}{\pi b} \quad (7.5)$$

Величину $q_0(a)$ будем называть *нормированным коэффициентом гармонической линеаризации*. Тогда синтез корректирующего устройства можно производить следующим образом.

1. Строится логарифмическая амплитудная частотная характеристика первоначально заданной приведённой линейной части системы:

$$W_{\text{пл}}(s) = kW_1(s)W_2(s),$$

где k – коэффициент усиления, перенесенный из нелинейности.

2. Формируется желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика линейной части $W_{ж}(s)$ в соответствии с требованиями точности и качества процессов, как это изложено в теории линейных систем.

3. Синтезируется линейное корректирующее устройство также методом линейной теории.

4. Вычерчивается логарифмическая фазовая частотная характеристика полученной скорректированной линейной части системы.

В дополнение ко всем этим операциям, выполняемым по линейной теории, добавляется ещё один пункт, учитывающий нелинейность $F(x)$ в нормированном виде.

5. Для данной нелинейности с использованием нормированного коэффициента $q_0(a)$ строится «запретная» зона, соответствующая желаемому показателю колебательности M . Внутрь этой зоны не должна заходить в фазовая частотная характеристика скорректированной линейной части системы. Та кривая $M = \text{const}$, которой касается полученная фазовая характеристика, определяет значение показателя колебательности данной скорректированной системы. Если необходимо его уменьшить, то нужно несколько изменить параметры полученного выше линейного корректирующего устройства, следя затем, чтобы не допускать существенного искажения желаемых свойств логарифмической амплитудно-частотной характеристики приведённой линейной части, положенных первоначально в основу расчёта.

Этот пятый пункт процедуры синтеза в совокупности с предыдущими обеспечивает нужные качества процессов в замкнутой нелинейной системе в целом. Следовательно, прежде чем приступить к синтезу линейного корректирующего устройства в нелинейной системе, необходимо научиться строить запретную область по показателю колебательности при заданной нелинейности. Такое построение может производиться методом гармонической линеаризации, поскольку речь идёт о колебательных переходных процессах.

Дальше по моему мнению читать не обязательно, просто для понимания вставил

Рассмотрим методику этого построения. Ограничиваюсь рассмотрением однозначных нелинейностей (7.1) с ограниченными значениями коэффициента гармонической линеаризации (7.2) и используя его нормирование (7.3), получим следующее выражение для передаточной функции разомкнутой цепи гармонически линеаризованной системы:

$$W(s, a) = W_l(s)kq_0(a) = q_0(a)W_{пл}(s).$$

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(s, a) = \frac{W(s, a)}{1 + W(s, a)} = \frac{q_0(a)W_{пл}(s)}{1 + q_0(a)W_{пл}(s)}.$$

Выделим вещественные и мнимые части после замены $s = j\omega$, обозначив их следующим образом:

$$W_{пл}(s) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Тогда для показателя колебательности $M = |\Phi(j\omega, a)|$ имеем выражение

$$M = \frac{q_0 \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + q_0 U)^2 + (q_0 V)^2}}$$

Отсюда после преобразования получаем уравнение линий равных значений M на комплексной плоскости (U, V) в виде

$$(U - U_0)^2 + V^2 = R^2 \quad (7.7)$$

где

$$U_0 = -\frac{M^2}{q_0(M^2 - 1)}, \quad R = \frac{M}{q_0(M^2 - 1)} \quad (7.8)$$

При определённом значении q_0 линии $M = \text{const}$ получают вид окружностей. Но согласно (7.2) и (7.3) величина q_0 может принимать любое значение в интервале

$$0 \leq q_0(a) \leq q_{0m} \quad \text{или} \quad q_{0n} \leq q_0(a) \leq q_{0m}, \quad (7.9)$$

где числа q_{0n} и q_{0m} получают свои определённые значения для каждой конкретной нелинейности. В соответствии с этим, согласно (7.8), координата центра окружности U_0 и радиус R будут тоже меняться в определённых для каждой нелинейности пределах. Следовательно, каждая линия $M = \text{const}$ будет определяться как огибающая непрерывного множества постепенно меняющихся окружностей. При этом случае первого неравенства (7.9) линия $M = \text{const}$ будет незамкнутой (рис. 7.2, *a*), так как в начальной точке $q_0 = 0$ из

(7.8) имеем

$U_0 = \infty, R = \infty$. Показанные на рис. 7.2, *a* величины R_1 и U_1 , согласно (7.8), определяются выражениями

$$U_1 = -\frac{M^2}{q_{0m}(M^2 - 1)}, \quad R_1 = \frac{M}{q_{0m}(M^2 - 1)}. \quad (7.10)$$

В случае второго неравенства (7.9) линия $M = \text{const}$ будет замкнутой (рис. 7.3, *a*), причём

$$U_2 = -\frac{M^2}{q_{0n}(M^2 - 1)}, \quad R_2 = \frac{M}{q_{0n}(M^2 - 1)}, \quad (7.11)$$

А значения R_1 и U_1 прежние.

Поскольку синтез линейного корректирующего устройства проводится по логарифмическим частотным характеристикам, то изображённые на рис. 7.2, *a* и рис. 7.3, *a* линии $M = \text{const}$ (запретные зоны) должны быть перенесены в систему координат логарифмических характеристик. Это показано соответственно на рис. 7.2, *б* и рис. 7.3, *б*.

Взяв разные постоянные значения $M(M_1, M_2, M_3, \dots)$, получим серию кривых $M = \text{const}$ (рис. 7.4).

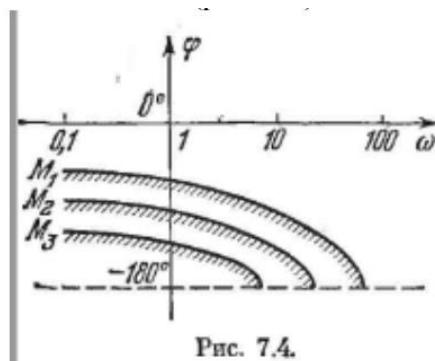
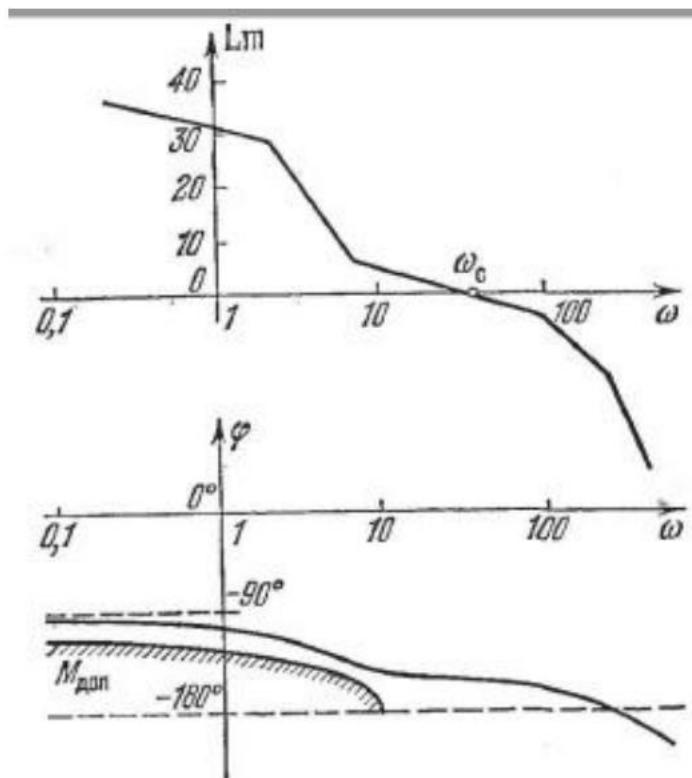


Рис. 7.4.

Логарифмические частотные характеристики скорректированной по изложенной выше процедуре системы должны быть такими, чтобы фазовая характеристика линейной части $\varphi(\omega)$ не заходила внутрь запретной области, определяемой допустимым значением показателя колебательности M (рис. 7.5).



Если расчёт корректирующего устройства ведётся по амплитудно-фазовым частотным характеристикам, то на поле координат (U, V) получается серия кривых $M = \text{const}$ (рис. 7.6, а), причём амплитудно-фазовая частотная характеристика проведённой линейной части скорректированной системы не должна заходить внутрь запретной области, определяемой здесь допустимым значением показателя колебательности M (рис. 7.6, б).

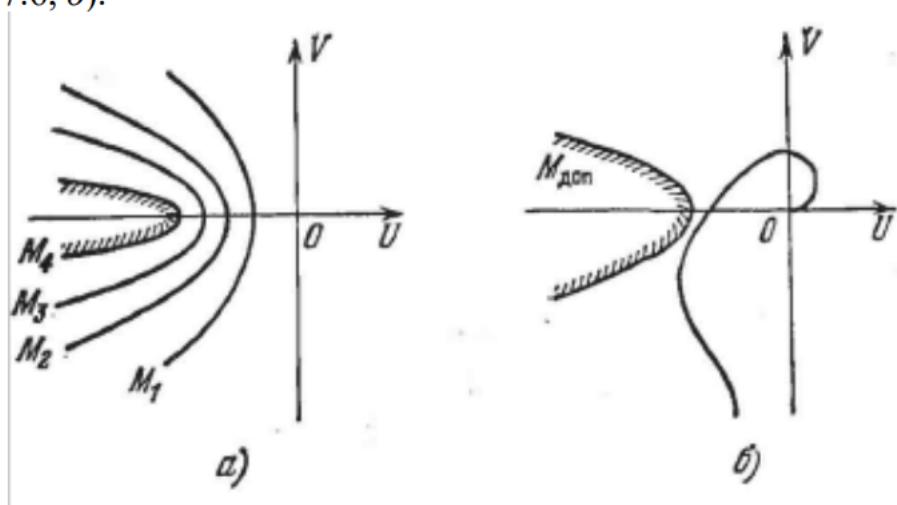


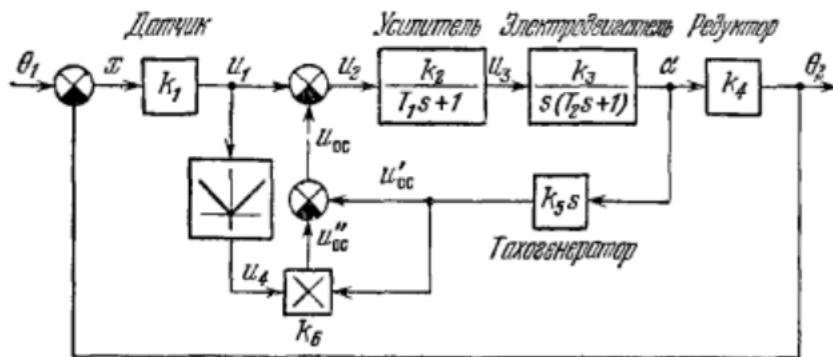
Рис. 7.6.

2. Коррекция линейных систем. Нелинейные корректирующие устройства

Нелинейные корректирующие устройства.

Пример №1:

Проанализируем систему с нелинейной обратной связью, сигнал которой уменьшается с возрастанием ошибки:



Напряжение, пропорциональное модулю ошибки, подается на вход умножителя и затем вычитается из выходного напряжения тахогенератора, находящегося в цепи линейной обратной связи. Сигнал обратной связи уменьшается, когда ошибка возрастает, что приводит к убыстрению отработки больших отклонений и уменьшению скорости отработки в конце процесса. Динамика системы описывается уравнениями:

$$x = \theta_1 - \theta_2$$

$$u_1 = k_1 x$$

$$u_2 = u_1 - u_{oc}$$

$$(T_1 p + 1)u_3 = k_2 u_2$$

$$(T_2 p + 1)p\alpha = k_3 u_3$$

$$\theta_2 = k_4 \alpha$$

$$u_{oc} = u'_{oc} - u''_{oc}$$

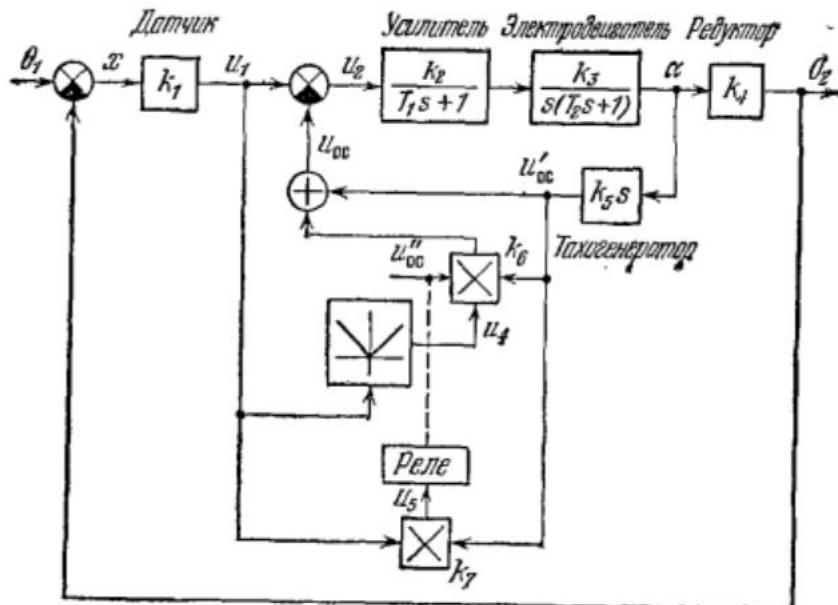
$$u'_{oc} = k_5 p \alpha$$

$$u''_{oc} = k_6 u_4 u'_{oc}$$

$$u_4 = |u_1|$$

Пример №2.

Рассмотрим более совершенную систему:

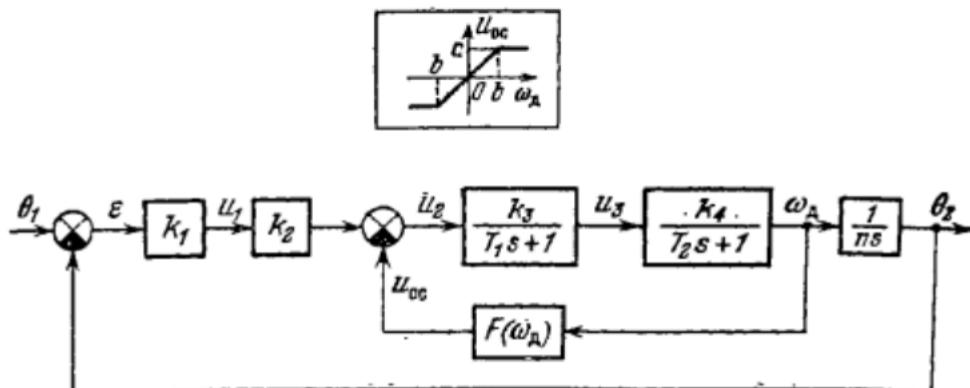


Система отличается от прежней тем, что сигнал нелинейной коррекции u''_{oc} проходит через контакты реле. В результате при $u_5 < 0$ (т.е. в четных четвертях колебаний) сигнал нелинейной коррекции не подается на вход усилителя. Это – существенное улучшение в сравнении с предыдущей системой, так как там уменьшение демпфирования давалось во всех четвертях колебаний, в то время как в четных четвертях это уменьшение пользы не приносит. Здесь оно исключается за счет отключения коррекции при $u_5 < 0$.

Пример №3.

Система с ограничением линейности обратной связи:

*Поправочка: на схеме u_2 должно стоять перед сумматором после усилителя k_2



Уравнения ее заданы в виде:

$$\varepsilon = \theta_1 - \theta_2$$

$$u_1 = k_1 \varepsilon$$

$$u_2 = k_2 u_1$$

$$(T_1 p + 1)u_3 = k_3(u_2 - u_{oc})$$

$$u_{oc} = F(\omega_D)$$

$$np\theta_2 = \omega_D$$

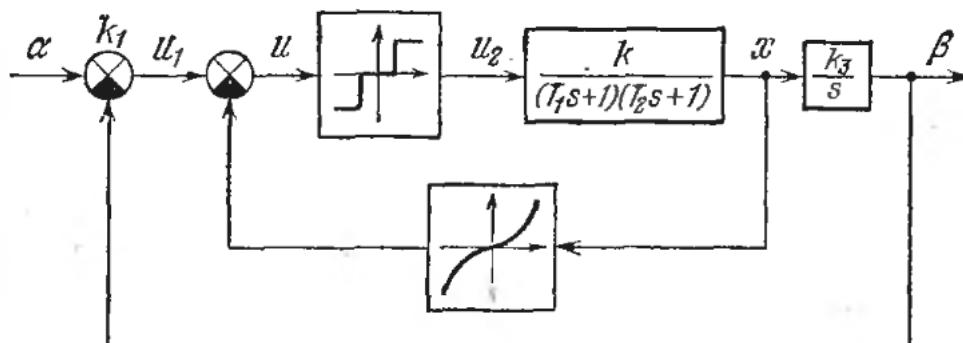
$$(T_2 p + 1)\omega_D = k_4 u_3$$

где $F(\omega_D)$ – нелинейность, изображенная на схеме. Применение такой нелинейной обратной связи позволяет уменьшить величину ошибки в динамике при большой скорости отработки (улучшает качество переходного процесса), сохраняя возможность обеспечения необходимого значения k_{oc} при малых скоростях, исходя из требования статической точности.

Пример 4.

Введение нелинейной коррекции в нелинейную автоматическую систему.

Система имеет релейное управление. В качестве корректирующего устройства введена нелинейная обратная связь по скорости с параболической характеристикой



За счет нелинейности обратной связи можно расширить область устойчивости.

3. Вибрационное сглаживание нелинейностей и вибрационная помехоустойчивость.

Задача 1. Вибрационное сглаживание и вибрационная линеаризация нелинейности при помощи вынужденных вибраций. Свойство плавности функции $\Phi(x^0)$ (рис. 6.8) как характеристики прохождения медленного сигнала в процессе управления $x^0(t)$ через нелинейное

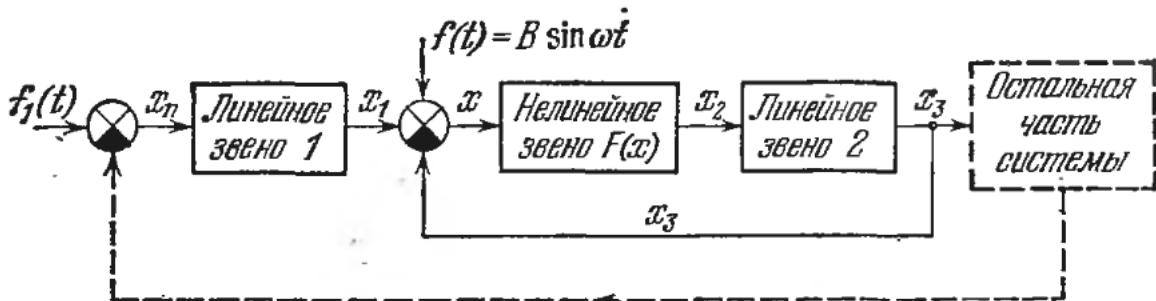


Рис. 6.13.

звено при любом очертании нелинейности $F(x)$, имеющей скачки и петли, называется *вибрационным сглаживанием нелинейности* для процесса управления при наличии вынужденных вибраций. Поскольку за счет этого возникает возможность обычной линеаризации полученной сглаженной характеристики (рис. 6.8) в виде $\Phi = k_x x^0$, то говорят также о *вибрационной линеаризации нелинейности*.

В технике вибрационное сглаживание применяют следующим образом. Непосредственно у входа нелинейного звена (например, релейного элемента), как показано на рис. 6.13, прикладывается внешнее вибрационное воздействие $f(t) = B \sin \omega t$ с частотой выше полосы пропускания линейного звена 2. Тогда вынужденные вибрации локализуются во внутренней части системы.

Сигнал на входе нелинейности имеет вид

$$x = x^0 + x^* = x_1 - x_3 + f(t),$$

причем

$$x^0 = x_1 - x_3, \quad x^* = f(t) = B \sin \omega t.$$

Отсюда следует, что амплитуда a_c и фаза ϕ симметричных вынужденных вибраций переменной x равны соответственно $a_c = B$, $\phi = 0$.

Таким образом можно ликвидировать гистерезисную петлю или зону нечувствительности реле (рис. 6.9) и получить для сигнала управления, согласно (6.21), линейную характеристику с коэффициентом

$$k_n = \frac{2c}{\pi \sqrt{B^2 - b^2}}, \quad B > b,$$

или же ликвидировать зону нечувствительности (рис. 6.11), получив

$$k_n = k - \frac{2k}{\pi} \arcsin \frac{b}{B}, \quad B > b.$$

Аналогично можно преобразовать сухое трение в трение, пропорциональное скорости, и т. п.

Величину k_n можно регулировать амплитудой B внешнего воздействия, не выводя ее, конечно, за допустимые пределы. Кроме того, амплитуда B должна быть во всяком случае больше максимально возможного значения сигнала x^0 , до которого хотят обеспечить линейность характеристики. Например, для петлевой релейной характеристики (рис. 6.9), согласно (4.31), должно быть $B \geq b + |x^0|$.

Задача 2. Вибрационная помехоустойчивость нелинейной системы управления. Пусть в уравнении нелинейной системы (6.8) $f_1(t) = B \sin \omega t$ представляет внешнюю вибрационную помеху (например, со стороны изгибных вибраций корпуса летательного аппарата, воспринимаемых гироскопом вместе с полезным сигналом по углу тангенса). Характеристическое уравнение системы для полезного сигнала в процессе управления, согласно (6.19), имеет вид

$$Q(\lambda) + k_n R(\lambda) = 0,$$

где коэффициент k_n зависит (см. (6.26)) от амплитуды B и частоты ω внешней вибрационной помехи. Следовательно, от этих параметров помехи будет зависеть качество процесса управления и даже устойчивость системы.

Таким образом, если устойчивость чисто линейной системы, как мы знаем, не зависит от внешнего воздействия, то в нелинейной системе устойчивость может

от него зависит. Предельное значение амплитуды вибрационной помехи B , до которой система остается еще устойчивой, называется границей вибрационной помехоустойчивости системы.

4. Устойчивость неавтономных систем. Теоремы Ляпунова.

Устойчивость неавтономных систем

Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2a)$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (4.2b)$$

Начало координат, т.е. точка $x = 0$, является положением равновесия: $X(0, t) = 0$ при всех $t \geq t_0$. Правая часть приведенных уравнений зависит явно от времени. Система, которая описывается такими уравнениями, и сами эти уравнения называются *неавтономными системами*.

Решение уравнения (4.2) при начальном условии $x(t_0) = x^0$ будем обозначать $x(x^0, t)$. Следовательно, справедливо равенство $x(x^0, t_0) = x^0$.

Рассмотрим функцию $V(x, t)$. Производная этой функции по времени, вычисленная на траекториях системы (4.2), имеет вид

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} X(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

Про эту производную говорят, что она является (полной) *производной по времени функции* $V(x, t)$ в силу уравнения (4.2) или *производной по времени функции* $V(x, t)$, вычисленной в силу уравнения (4.2).

Теоремы об устойчивости

Рассмотрим устойчивость положения равновесия, или невозмущенного движения $x = 0$ системы (4.2).

Теорема 4.1 (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (4.2) устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(x, t)$ такая, что ее производная в силу уравнения этой системы (4.2) является отрицательно полуопределенной функцией.*

Функции, которые удовлетворяют теоремам устойчивости или неустойчивости, т.е. по которым можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, называются *функциями Ляпунова*.

Рассмотрим два новых понятия, которые потребуются при формулировке следующих двух теорем.

Функция $V(x, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно малый верхний предел*, если как бы мало ни было положительное число ε' , найдётся такое положительное число δ' , что $|V(x, t)| < \varepsilon'$ при всех $t \geq t_0$, если $|x| < \delta'$.

Функция $V(x, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если как бы велико ни было положительное число E , найдётся такое положительное число Δ , что $|V(x, t)| > E$ при всех $t \geq t_0$, если $|x| > \Delta$. Иначе говоря, функция $V(x, t)$ называется *функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел*, если при любых $t \geq t_0$

$$|V(x, \infty)| \rightarrow \infty \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Например, функции

$$V(x, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \sin^2 t, \quad V(x, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) e^{-t}$$

являются функциями, допускающими бесконечно малый верхний предел, а функции

$$V(x, t) = 10 \sin^2[(x_1^2 + x_2^2)t], \quad V(x, t) = 10(x_1^2 + x_2^2)e^t$$

таковыми не являются.

В пространстве R^3 функция

$$V(x, t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\sin^2 t + 1)$$

является функцией, допускающей бесконечно большой нижний предел, а функции

$$V(x, t) = (x_1^2 + x_2^2)(\sin^2 t + 1)$$

$$V(x, t) = \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + \frac{x_3^2}{1+x_3^2} \right] (\sin^2 t + 1)$$

таковыми не являются.

Теорема 4.2. (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). Положение равновесия неавтономной системы (4.2) асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определённая функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, что её производная по времени в силу уравнения этой системы (4.2) является отрицательно определённой функцией.

Теорема 4.3 (Теорема Ляпунова об устойчивости в целом).

Положение равновесия $x = 0$ неавтономной системы (4.2) устойчиво в целом если существует такая положительно определенная функция $V(x, t)$, допускающая БМ верхний предел и ББ нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения системы является отрицательно определенной функцией.

Теорема 4.4

Теоремы Ляпунова о неустойчивости

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем:

Положение равновесия $x=0$ неавтономной системы, описываемой уравнениями

$$x' = \Phi(x, t)$$

неустойчиво, если существует функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $V'(x, t)$ в силу уравнения этой системы является положительно определенной функцией и при всех $t \geq t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x^0$, в которой функция $V(x, t)$ принимает положительное значение.

Teorema 4.5

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости: Положение равновесия $x=0$ неавтономной системы, описываемой уравнениями

$$x' = \Phi(x, t)$$

неустойчиво, если существует функция $V(x, t)$, допускающая бесконечно малый верхний предел, такая, что ее производная $V'(x, t)$ в силу уравнения этой системы имеет вид

$$V'(x, t) = \alpha V(x, t) + \omega(x, t),$$

где $\omega(x, t)$ - положительно полуопределенная функция, и при всех $t \geq t_0$ в любой малой окрестности начала координат найдется точка $x = x^0$, в которой функция $V(x, t)$ принимает положительное значение.

5. Теоремы Ляпунова. Исследование устойчивости нелинейных систем прямым методом Ляпунова.

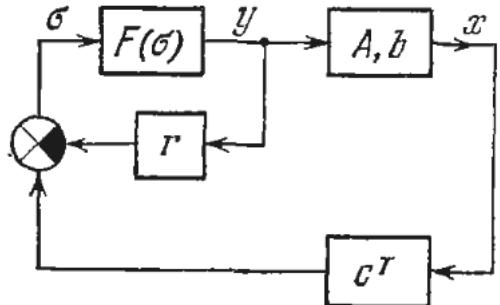


Рис. 5.8.

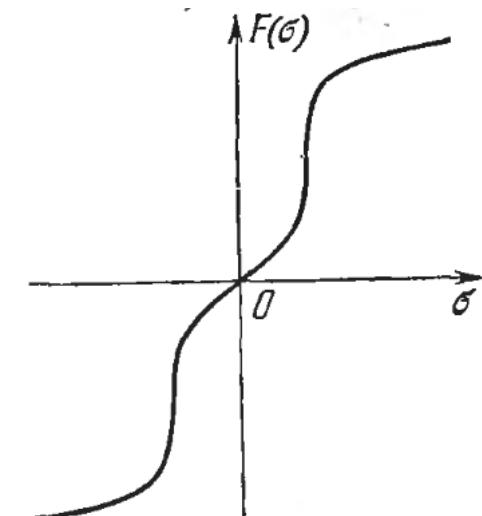


Рис. 5.7.

Перейдем теперь к изложению *методики применения теорем Ляпунова* для исследования устойчивости нелинейных систем автоматического управления. Сделаем это для одного (достаточно широкого) класса систем с одной однозначной нелинейностью. Пусть система описывается следующими уравнениями в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by, \quad (5.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = F(\sigma), \quad \sigma = c^T x - ry, \quad (5.15)$$

где A — невырожденная матрица $n \times n$ коэффициентов, ($\det A \neq 0$), x — вектор координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, y , σ — скалярные координаты, b — матрица-столбец коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_n , r — коэффициент обратной связи, c^T — транспонированная матрица-столбец (c_1, c_2, \dots, c_n) , т. е. матрица-строка, в соответствии с которой

$$c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Нелинейная функция $F(\sigma)$ может иметь произвольную нечетно-симметричную форму (рис. 5.7), удовлетворяющую условиям

$$F(0) = 0, \quad \sigma F(\sigma) > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0. \quad (5.16)$$

Применимально к реальным системам написанные уравнения можно расшифровать, например, следующим образом: уравнение (5.14) представляет собой уравнения динамики управляемого объекта (рис. 5.8), а выражения (5.15) относятся к регулятору — уравнение нелинейного исполнительного устройства (привода) и уравнение измерительно-усилительного устройства и обратной связи привода.

Общий порядок системы $n+1$. В реальных системах измеряются не все координаты x_1, x_2, \dots, x_n состояния объекта. Поэтому некоторые отдельные коэффициенты c_i во втором уравнении (5.15) будут нулями. В реальных системах нулями будет являться и часть элементов матрицы A и столбца b .

Приведем заданную систему (5.14), (5.15) к каноническому виду путем замены переменных:

$$\mathbf{z} = A\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \quad \sigma = c^T \mathbf{x} - r\mathbf{y}.$$

Проделав это, получим систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + bF(\sigma), \quad \frac{d\sigma}{dt} = c^T \mathbf{z} - rF(\sigma), \quad (5.17)$$

причем будем полагать, что матрица A приведена к диагональной форме. Должно соблюдаться условие невырожденной общей матрицы системы

$$\begin{vmatrix} A & b \\ c^T & -r \end{vmatrix} \neq 0, \text{ т. е. } r + c^T A^{-1} b \neq 0. \quad (5.18)$$

Функцию Ляпунова в этом случае рекомендуется [15] брать в виде

$$V(\mathbf{z}, \sigma) = \mathbf{z}^T B \mathbf{z} + \int_0^\sigma F(\sigma) d\sigma, \quad (5.19)$$

где B — некоторая положительно определенная квадратичная форма n координат \mathbf{z} . Интеграл в этом выражении тоже является, как легко проверить, положительно определенной функцией $(n+1)$ -й координаты σ .

Составим производную функции Ляпунова (5.19) в силу уравнений системы (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{d\mathbf{z}^T}{dt} B \mathbf{z} + \mathbf{z}^T B \frac{d\mathbf{z}}{dt} + F(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} = \\ &= \mathbf{z}^T (A^T B + BA) \mathbf{z} + F(\sigma) (b^T B \mathbf{z} + \mathbf{z}^T B b) + F(\sigma) c^T \mathbf{z} - r F^2(\sigma). \end{aligned}$$

Матрица квадратичной формы B является симметричной, т. е. $B^T = B$. Поэтому можно сделать следующее преобразование:

$$b^T B z + z^T B b = (bB)^T z + (Bb)^T z = 2(Bb)^T z.$$

Далее обозначим $G = -(A^T B + BA)$ и покажем, что матрица G симметричная. В самом деле,

$$\begin{aligned} G^T &= -(A^T B + BA)^T = -(B^T A + A^T B^T) = \\ &= -(BA + A^T B) = G. \end{aligned}$$

Итак, получаем

$$\frac{dV}{dt} = -z^T G z - r F^2(\sigma) + 2F(\sigma) \left(Bb + \frac{1}{2} c \right)^T z.$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму. Согласно теоремам Ляпунова об устойчивости производная dV/dt должна быть либо знакопредeterminedой, либо знакопостоянной отрицательной функцией. Обратимся к критерию Сильвестра для установления положительной определенности функции $-dV/dt$. Поскольку G является матрицей положительно определенной квадратичной формы, то первые n неравенств критерия Сильвестра выполняются. Остается потребовать, чтобы

$$\begin{vmatrix} G & -\left(Bb + \frac{1}{2} c \right) \\ -\left(Bb + \frac{1}{2} c \right)^T & r \end{vmatrix} > 0.$$

Отсюда

$$r > \left(Bb + \frac{1}{2} c \right)^T G^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2} c \right). \quad (5.20)$$

Следовательно, при выполнении условия (5.20) совместно с условием (5.18) система будет устойчива асимптотически. Это является достаточным условием асимптотической устойчивости решения $z = 0$, $\sigma = 0$.

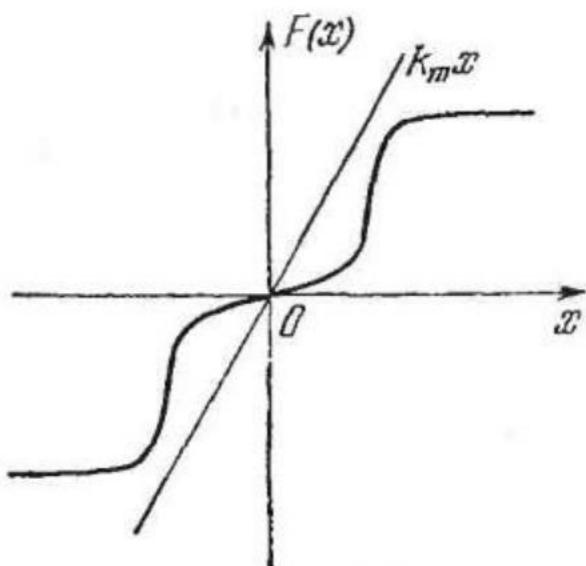
Видно, что в условия устойчивости (5.20) и (5.18) не вошли никакие параметры нелинейной характеристики $F(\sigma)$. Следовательно, эти условия справедливы при любой форме нелинейности, удовлетворяющей общим требованиям (5.16). Такие условия устойчивости, которые не зависят от конкретной формы нелинейности, называются *условиями абсолютной устойчивости* системы.

6. Исследование устойчивости нелинейных систем. Частотный критерий устойчивости Попова.

Критерий абсолютной устойчивости

Для целей исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем служит частотный критерий устойчивости Попова. Он дает достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной системы по виду частотной характеристики линейной части системы.

Пусть в системе имеется одна однозначная нелинейность $F(x)$ (рис. 5.20).



Рассмотрим два случая расположения характеристики: первый – нелинейная характеристика расположена в секторе $[0, k_m]$, как на рис. 5.20, второй – в секторе $[k_0, k_m]$, что будет показано ниже.

Начнём с первого случая:

$$0 < F(x) < k_m x \quad (5.46)$$

Линейная часть системы описывается уравнением

$$Q(p)x = -R(p)y$$

причём степень многочлена $Q(p)$ больше степени многочлена $R(p)$. Передаточная функция линейной части $W(s) = R(s)/Q(s)$ имеет полюсы с отрицательными вещественными частями, причём допускается наличие не более двух нулевых полюсов.

Теорема Попова. Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчивым, если нелинейная характеристика находится в

секторе $[0, k_m]$ и существует такое действительное число h , что при всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega h)W(j\omega)] + \frac{1}{k_m} > 0 \quad (5.47)$$

где $W(j\omega)$ – амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

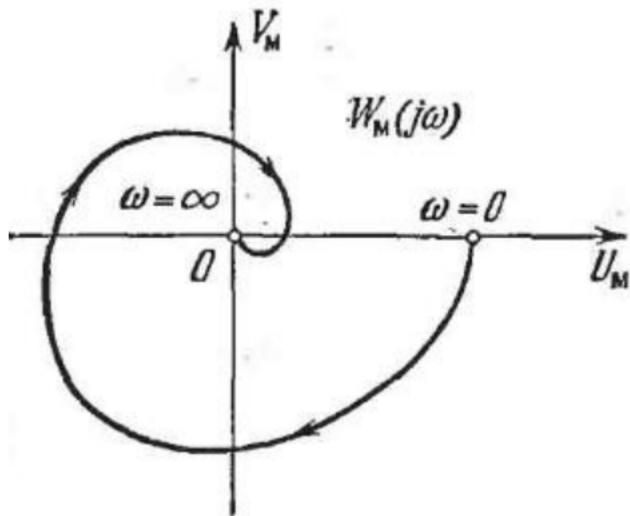
Для удобства графического представления этого критерия вводится *модифицированная частотная характеристика* линейной части

$$W_M(j\omega) = U_M(\omega) + jV_M(\omega)$$

где

$$U_M(\omega) = U(\omega), \quad V_M(\omega) = \omega V(\omega). \quad (5.48)$$

Следовательно, график $W_M(j\omega)$ имеет вид, аналогичный амплитудно-фазовой характеристике линейной части $W(j\omega)$ и отличается от неё только масштабом по мнимой оси (рис. 5.21).



Поскольку выражение (5.47) можно записать в виде

$$U(\omega) - \omega h V(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0,$$

то с подстановкой (5.48) оно преобразуется к виду

$$U_M(\omega) - h V_M(\omega) + \frac{1}{k_m} > 0 \quad (5.49)$$

Выражение

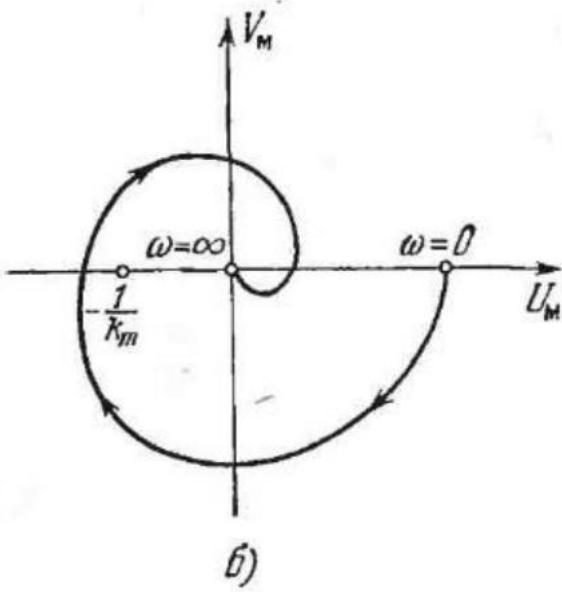
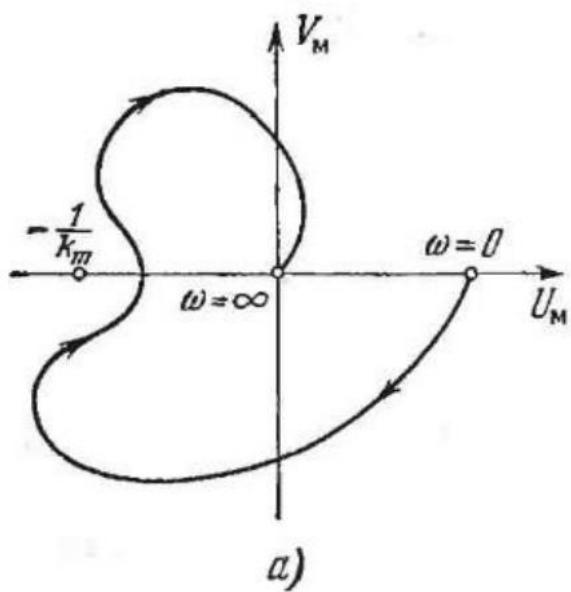
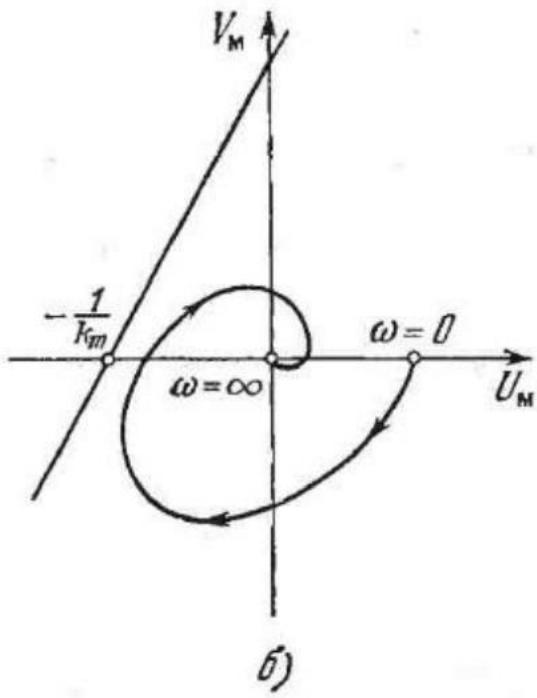
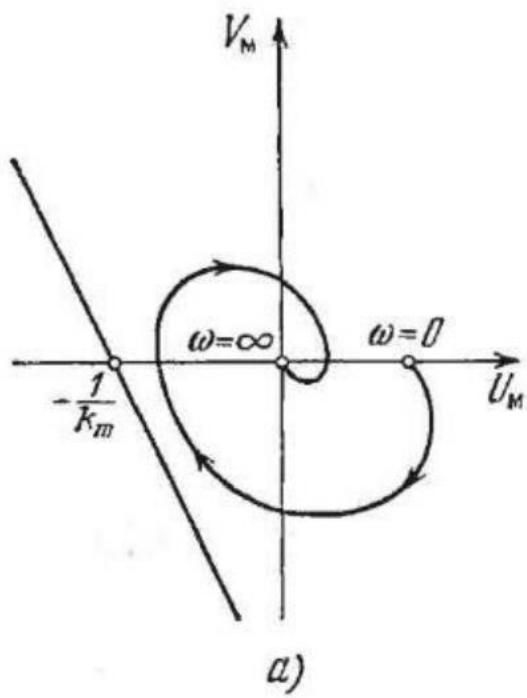
$$U_M - h V_M + \frac{1}{k_m} = 0 \quad (5.50)$$

представляет собой уравнение прямой на плоскости прямоугольных координат U_M, V_M . Это прямая проходит через точку $-1/k_m$ на оси U_M и имеет крутизну наклона $1/h$.

Отсюда вытекает следующая формулировка.

Критерий абсолютной устойчивости. Состояние равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика $F(x)$ находится внутри сектора $[0, k_m]$ и можно провести через точку $-1/k_m$ прямую так, что она не пересечет модифицированную частотную характеристику (последняя лежит справа).

На рис. 5.22 показаны случаи, когда критерий абсолютной устойчивости выполняется, а на рис. 5.23 – когда не выполняется.

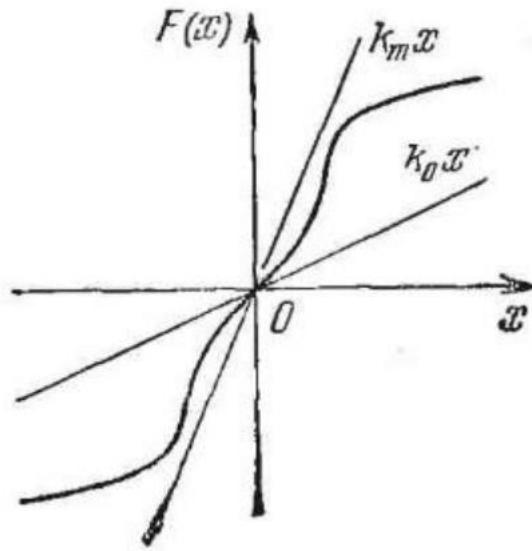


Перейдём к случаю, когда нелинейная характеристика $F(x)$ расположенная в секторе $[k_0, k_m]$, т.е.

$$k_0x < F(x) < k_m x \quad (5.56)$$

что показано на рис. 5.25. Здесь неравенство (5.47) в теореме Попова принимает вид

$$\operatorname{Re} \left[(1 + j\omega h) \frac{W(j\omega)}{1 + k_0 W(j\omega)} \right] + \frac{1}{k_m - k_0} > 0 \quad (5.57)$$



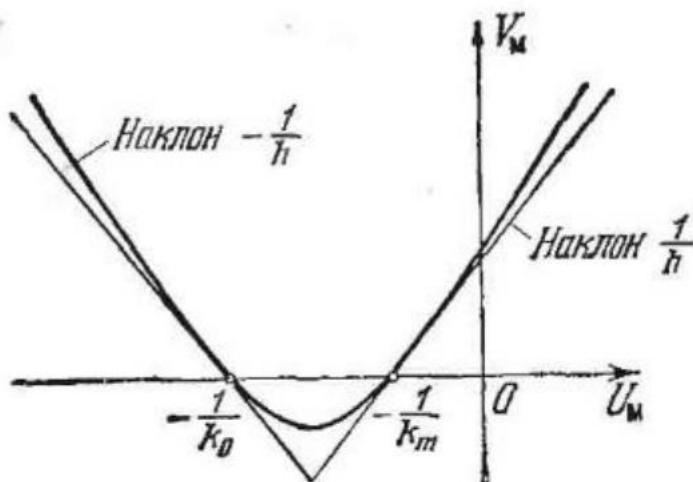
После преобразований приходим к выражению

$$U^2(\omega) + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m}\right) U(\omega) - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m}\right) h\omega V(\omega) + V^2(\omega) + \frac{1}{k_0 k_m} > 0$$

Введя в рассмотрение модифицированное частотную характеристику (5.48), получаем, что уравнение

$$U_m^2 + \left(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_m}\right) U_m - \left(\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_m}\right) hV_m + V_m^2 + \frac{1}{k_0 k_m} = 0$$

на плоскости координат модифицированной характеристики (U_m, V_m) дает параболу, проходящую через точки $-1/k_0$ и $-1/k_m$ и имеющую в этих точках крутизну наклона касательных соответственно $-1/h$ и $1/h$. Построение пора было ясно из рис. 5.26.



Формулировка критерия следующая. Состояние равновесия нелинейной системы будет абсолютно устойчиво, если нелинейная характеристика находится внутри сектора $[k_0, k_m]$ и можно провести через точки $-1/k_0$ и $-1/k_m$ такую параболу с вертикальной осью, чтобы модифицированная частотная характеристика линейной части лежала вне этой параболы.

Линейное часть неустойчива. Пусть линейная часть нелинейной системы (рис. 5.4, а) неустойчива.

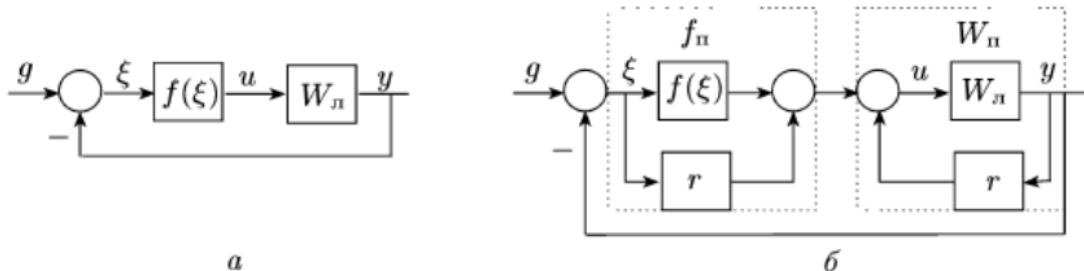


Рис. 5.4. Преобразование структурной схемы с неустойчивой линейной частью: а — исходная схема; б — преобразованная схема

Преобразуем её следующим образом. Охватим линейную часть отрицательной обратной связью звеном с передаточной функцией r , а к нелинейному звену подключим параллельно звено также с передаточной функцией r , выход которого подключен к сумматору по отрицательному входу (рис. 5.4, б). Преобразованная схема эквивалентна исходной системе. Действительно, учитывая $g = 0$, на входе линейного звена преобразованной схемы имеем

$$u = f(\xi) + ry - ry = f(\xi)$$

т.е. тот же сигнал, что и на входе линейного звена исходной системы.

В преобразованной схеме передаточная функция линейной части имеет вид

$$W_{\Pi} = W_n / (1 + rW_n),$$

а нелинейность выражается равенством

$$f_{\Pi}(\xi) = f(\xi) - r\xi$$

Так как при $\xi \neq 0$ имеем $f_{\Pi}(\xi)/\xi = f(\xi)/\xi - r$, то неравенство $r \leq f(\xi)/\xi \leq k$ равносильно неравенству $0 \leq f(\xi)/\xi \leq k - r$. Поэтому положение равновесия исходной системы абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$,

если положение равновесия преобразованной системы абсолютно устойчиво в угле $[0, k - r]$.

Пусть преобразованная линейное часть устойчива, т.е. все полюса передаточной функции W_{Π} имеют отрицательные вещественные части. Тогда по теореме Попова положение равновесия преобразованной системы абсолютно устойчиво в угле $[0, k - r]$, если выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)W_{\Pi}(j\omega)] + \frac{1}{k - r} > 0$$

или

$$U_{\Pi}(\omega) - q\omega V_{\Pi}(\omega) > -\frac{1}{k - r} \quad (5.8)$$

где $U_{\Pi}(\omega) = \operatorname{Re}[W_{\Pi}(j\omega)]$ и $V_{\Pi}(\omega) = \operatorname{Im}[W_{\Pi}(j\omega)]$.

Из изложенного выше получаем следующий критерий абсолютной устойчивости в случае неустойчивой линейной части

Критерий Попова. Положение равновесия нелинейной системы с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если все полюса преобразованной передаточной функции $W_{\Pi} = W_n / (1 + rW_n)$ имеют отрицательные вещественные части и существует такое вещественное число q , что при всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство (5.8).

Как и в случае с устойчивой линейной частью, можно сформулировать частотный вариант критерия устойчивости. Для этого введем следующие частотные функции:

$$U_{\text{пп}}(\omega) = U_{\text{п}}(\omega), \quad V_{\text{пп}}(\omega) = \omega V_{\text{п}}(\omega), \quad W_{\text{пп}}(j\omega) = U_{\text{пп}}(\omega) + jV_{\text{пп}}(\omega).$$

Функцию $W_{\text{пп}}(j\omega)$ будем называть *модифицированной преобразованной частотной передаточной функцией*, а её годограф при изменении $0 \leq \omega < \infty$ – *модифицированной преобразованной частотной характеристикой*. Используя вещественную и мнимую части функции $W_{\text{пп}}(j\omega)$, условие (5.8) можно записать в виде

$$U_{\text{пп}}(\omega) - qV_{\text{пп}}(\omega) > -\frac{1}{k-r}$$

В случае неустойчивой линейной части прямая Попова – это прямая, которая пересекает вещественную ось в точке $-1/(k-r)$ и имеет наклон $1/q$.

Частотная формулировка критерия Попова. *Положение равновесия нелинейной системы с неустойчивой линейной частью абсолютно устойчиво в угле $[r, k]$, если можно провести такую прямую Попова, что модифицированная преобразованная частотная характеристика полностью располагается правее этой прямой.*

7. Одночастотные вынужденные колебания. Частотные характеристики.

Одночастотные вынужденные колебания в нелинейных системах. Частотные характеристики.

Исследование вынужденных колебаний нелинейных систем представляет собой в общем сложную задачу в связи с отсутствием суперпозиции отдельных решений, а также существенным изменением поведения системы в зависимости от размера амплитуды колебаний, с наличием не единственного установившегося режима и возможностью перескоков с одного режима на другой, с особенностями высших гармоник, субгармоник, комбинационных частот и с многими другими факторами.

Мы рассмотрим случай одночастотных вынужденных колебаний, т.е. колебаний нелинейной системы с частотой внешнего периодического воздействия, и найдем условия их существования.

Рассмотрим нелинейную систему с внешним воздействием (рис. 6.1), заданным в виде

$$f(t) = B \sin \omega t \quad (6.1)$$

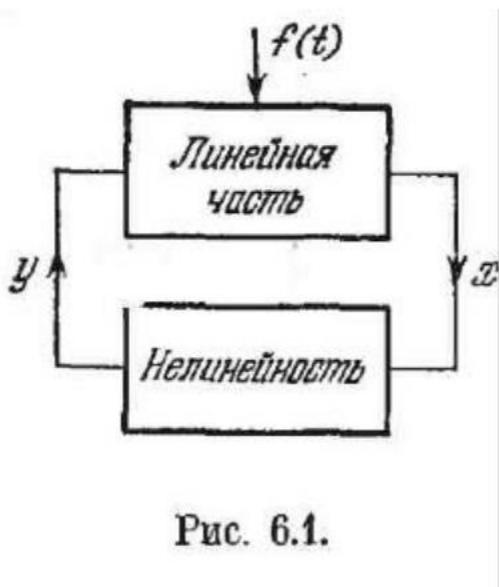


Рис. 6.1.

Уравнение динамики системы имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t) \quad (6.2)$$

Решение для вынужденных колебаний будем искать приближенно в форме

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.3)$$

где ω задано, а неизвестными являются амплитуда a и фаза φ .

Произведем гармоническую линеаризацию нелинейности:

$$F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x \quad (6.4)$$

где коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ вычисляются по прежним формулам, если в них положить $\psi = \omega t + \varphi$.

Подставим (6.1), (6.3) и (6.4) в уравнение системы (6.2):

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} a \sin(\omega t + \varphi) = S(p)B \sin \omega t \quad (6.5)$$

Используем символьический метод определения периодического решения, подставив сюда $p = j\omega$, а вместо $\sin \omega t$ выражение $e^{j\omega t}$. Тогда получим:

$$\{Q(j\omega) + R(j\omega)[q(a) + jq'(a)]\}ae^{j(\omega t+\varphi)} = S(j\omega)Be^{j\omega t}$$

или

$$Z(a) = Be^{-j\varphi} \quad (6.6)$$

$$\text{где } Z(a) = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega)[q(a) + jq'(a)]}{S(j\omega)} \cdot a \quad (6.7)$$

Уравнение (6.6) с двумя неизвестными a и φ можно решить графически, как показано на рис. 6.2. Правая часть (6.6) изображается в виде окружности радиуса B , а левая часть $Z(a)$ строится как кривая по точкам с переменным параметром a . Точки пересечения окружности с кривой $Z(a)$ дают решение, причем величина амплитуды вынужденных колебаний определяется в точке пересечения по отметкам на кривой Z , а фаза – по величине угла (рис. 6.2).

На рис. 6.2 окружности пересекают кривую только при радиусе, большем некоторого порогового значения $B > B_{\text{пор}}$. Следовательно, в этом случае одночастотные вынужденные колебания (6.3) возможны только при достаточно большой амплитуде B , а при меньшей амплитуде B внешнего воздействия будет иметь место сложное движение, включающее в себя и собственную частоту системы.

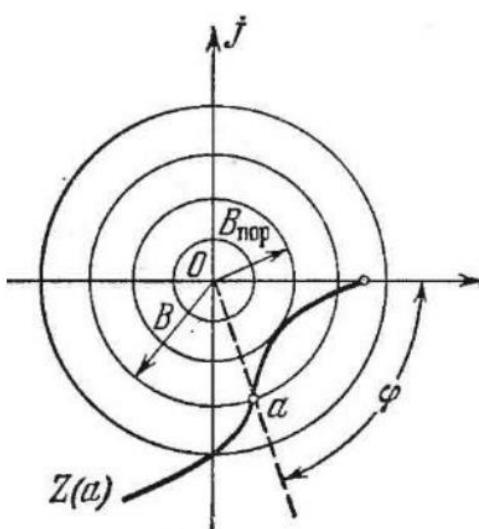


Рис. 6.2.

Построив серию кривых $Z(a)$ по формуле (6.7) для разных значений частоты внешнего воздействия ω (рис. 6.3), можем построить график зависимости порогового значения B от частоты ω , например, в виде, изображенном на рис. 6.4, где ω_a – частота автоколебаний данной системы.

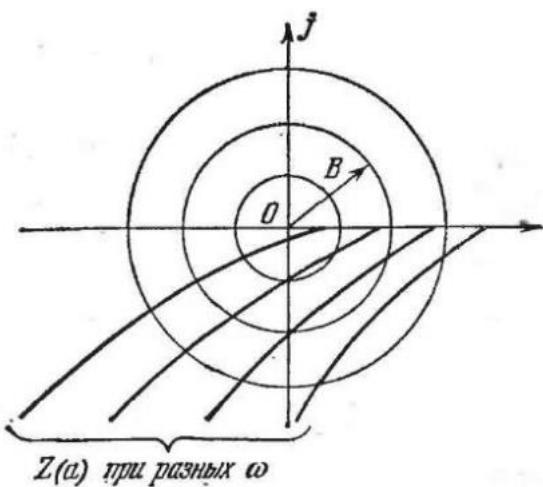
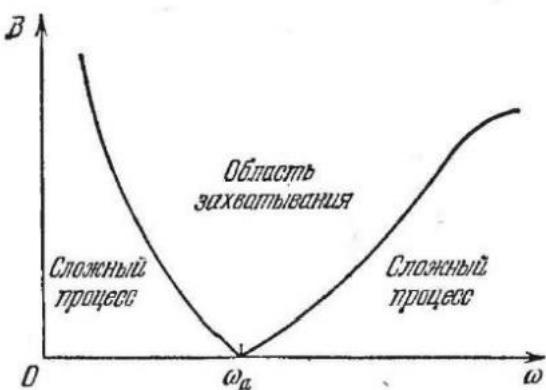


Рис. 6.3.



Тогда мы получим область значений B и ω , в которой существуют одночастотные вынужденные колебания. Эта область называется *областью захвата*. Явление захватаивания состоит в том, что при $B > B_{\text{пор}}$ собственные колебания (автоколебания) срываются и система переходит целиком на одночастотные вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия. Строго говоря, эти одночастотные вынужденные колебания будут несинусоидальными. В соответствии со свойством фильтра линейной части они для переменной x будут только близки к синусоидальным (6.3).

На основании рис. 6.3 можно построить зависимости $a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, т.е. *частотные характеристики* замкнутой нелинейной системы по первой гармонике (6.3). В линейных системах частотные характеристики $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ не зависели от размера входной амплитуды и вычислялись для единичной амплитуды на входе. В нелинейной же системе характер частотных характеристик $A(\omega) = a(\omega)/B$ и $\varphi(\omega)$ может существенно зависеть от размера B . Поэтому для разных значений B получается серия частотных характеристик (рис. 6.5) замкнутой системы по первой гармонике.

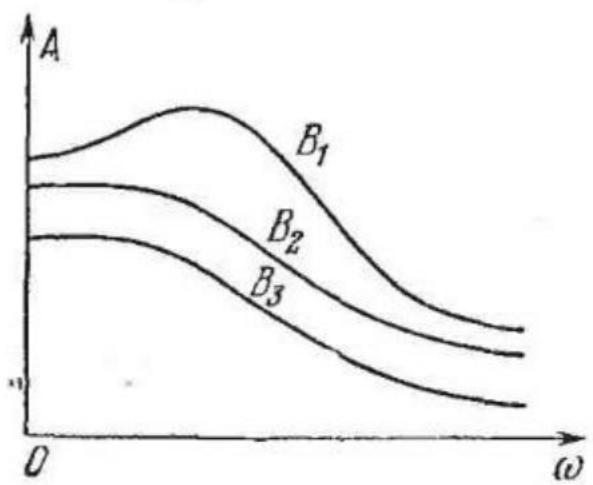


Рис. 6.5.

8. Исследование устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения.

Исследование устойчивости по уравнениям первого приближения

$$\dot{x} = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = Ax + R(x)$$

где Φ_1 – линейная часть, Φ_2 – малое нелинейное слагаемое.

(1)

Теорема 1 (асимптотическая устойчивость):

Если нелинейная система описывается уравнением (1) для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы корни $\det(A - \lambda E) = 0$ имели отрицательные вещественные части.

Теорема 2 (теорема о неустойчивости):

Если нелинейная система описывается уравнением (1) и хотя бы один корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет положительную вещественную часть, то нелинейная система неустойчива.

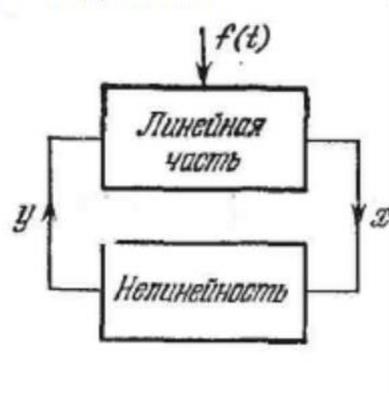
Теорема 3 (критический случай):

Если нелинейная система описывается уравнением (1) и уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ не содержит положительных корней, а содержит чисто мнимые, то ничего нельзя сказать об устойчивости, так как мы отбросили важные части при линеаризации.

9. Процессы управления, сопровождающиеся вынужденными вибрациями.

Прохождение через систему медленно меняющегося сигнала

Рассмотрим случай, когда в системе при наличии переменного внешнего воздействия протекает некоторый процесс управления, а кроме того к системе приложено внешнее периодическое воздействие.



Уравнение динамики системы (рис. 6.1) в этом случае получит вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S(p)f(t) + S_1(p)f_1(t) \quad (6.8)$$

где $f_1(t) = B \sin \omega t$, а $f(t)$ – медленное по сравнению с $f_1(t)$ воздействие, т.е. спектр возможных частот изменения $f(t)$ много меньше ω .

Решение будем искать в виде:

$$x = x^0(t) + x^*(t), \quad x^*(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.9)$$

где $x^0(t)$ – тоже медленная по сравнению с $x^*(t)$ функция времени, определяющая процесс управления при наложенных на него вынужденных колебаниях x^* .

Полагая, что основной процесс управления $x^0(t)$ протекает настолько медленно, что за один период колебаний x^* можно приблизительно считать величину x^0 неизвестной, используем прежние формулы гармонической линеаризации:

$$F(x) = F^0(x^0, a) + \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] x^* \quad (6.10)$$

Подставив (6.10) и (6.9) в уравнение (6.8), разобьем его на два. Для медленных составляющих (процесс управления) имеем

$$Q(p)x^0 + R(p)F^0(x^0, a) = S(p)f(t) \quad (6.11)$$

а для вибрационных составляющих

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a, x^0) + \frac{q'(a, x^0)}{\omega} p \right] \right\} x^* = S_1(p)B \sin \omega t \quad (6.12)$$

Нетрудно видеть, что неизвестные x^0 и a могут быть определены только на основе совместного решения обоих уравнений. Если, решив уравнение (6.12), найти зависимость $a(x^0)$ и подставить ее в выражение $F^0(x^0, a)$, полученное по формуле (4.16), то найдем новую нелинейную функцию

$$\Phi(x^0) = F^0(x^0, a(x^0)). \quad (6.13)$$

Тогда уравнение для процесса управления (6.11) примет вид

$$Q(p)x^0 + R(p)\Phi(x^0) = S(p)f(t). \quad (6.14)$$

Оказывается, что нелинейная функция $\Phi(x^0)$ обладает тем свойством, что она имеет вид плавной кривой (рис. 6.8) для любых нелинейностей $F(x)$, в том числе релейных и гистерезисных. Поэтому эту функцию можно линеаризовать обычным порядком, определив крутизну в начале координат (рис. 6.8):

$$\Phi = k_h x^0, \quad k_h = \left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0}. \quad (6.15)$$

Но согласно (6.13) имеем

$$\left(\frac{d\Phi}{dx^0} \right)_{x^0=0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} + \frac{\partial F^0}{\partial a} \frac{da}{dx^0} \right)_{x^0=0}, \quad (6.16)$$

а согласно (4.16)

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial a} \right)_{x^0=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=a \sin \psi} \sin \psi d\psi = 0, \quad (6.17)$$

так как произведение четной функции на нечетную интегрируется за период. В соответствии с этим вместо (6.15) получаем важный ре-

зультат:

$$k_h = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} \right)_{x^0=0}. \quad (6.18)$$

Это значит, что для определения k_h не нужно находить зависимости $a(x^0)$ и строить новую нелинейную функцию $\Phi(x^0)$, а достаточно взять частную производную по x^0 от имеющегося для каждой нелинейности выражения $F^0(x^0, a)$.

С заменой (6.15) уравнение для процесса управления (6.14) принимает вид линейного уравнения

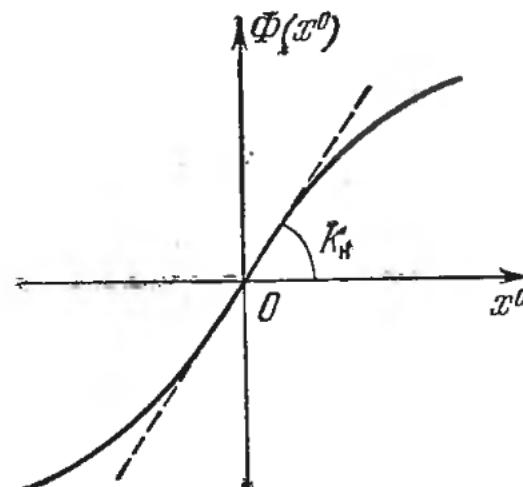


Рис. 6.8.

$$[Q(p) + k_n R(p)]x^0 = S(p)f(t), \quad (6.19)$$

где k_n — коэффициент усиления нелинейности в процессе управления, определяемый по формуле (6.18). Например,

Итак, процесс управления при наложенных на него вынужденных вибрациях исследуется по линейному уравнению (6.19) без определения зависимости $a(x^0)$. Однако если все же необходимо определить величину амплитуды $a(x^0)$, то аналогично уравнению (6.5) решение уравнения (6.12) запишется в виде

$$Z(a, x^0) = Be^{-j\varphi},$$

где

$$Z(a, x^0) = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega)[q(a, x^0) + jq'(a, x^0)]}{S_1(j\omega)}.$$

10. Устойчивость автономных систем. Теоремы Ляпунова

Устойчивость автономных систем

Автономной называется система, описываемая уравнениями $x' = \Phi(x)$

$$x(0) = 0$$

Теорема 1 (о неасимптотической устойчивости):

Теорема Ляпунова об устойчивости: Положение равновесия $x=0$ автономной системы, описываемой уравнениями $x' = \Phi(x)$, устойчиво по Ляпунову, если существует положительно определенная функция $V(x)$ такая,

что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией.

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости):

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости: Положение равновесия $x=0$ автономной системы, описываемой уравнениями $x' = \Phi(x)$, асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно определенной функцией.

Теорема 3 (обобщенная теорема):

Обобщенная теорема об асимптотической устойчивости: Положение равновесия $x=0$ автономной системы, описываемой уравнениями $x' = \Phi(x)$, асимптотически устойчиво, если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве $M \in D$, не содержащим целых траекторий.

Целой траекторией (или **полутраекторией**) системы называется фазовая траектория в пространстве R^n , соответствующая решению уравнения этой системы $x(x^0, t)$ ($x^0 = x(t_0)$) на всем интервале времени $t_0 \leq t \leq \infty$. Так как при $x^0 = 0$ решение $x(0, t) = 0$ при всех $t \geq t_0$, то начало координат $x=0$ соответствует целой траектории.

Если множество M задается уравнением $\varphi(x) = 0$; $M = \{x: \varphi(x) = 0\}$, $\varphi(x)$ – гладкая (т.е. с непрерывными частными производными по всем своим аргументам) функция, то условие отсутствия в M целых траекторий можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x'_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} X(x) = \text{grad} \varphi(x) X(x) \neq 0$$

Это неравенство должно выполняться на множестве M , т.е. при условии $\varphi(x) = 0$.

Теорема Барабашина - Красовского об асимптотической устойчивости в целом: Положение равновесия $x=0$ автономной системы, описываемой уравнениями $x' = \Phi(x)$, асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если существует такая положительно определенная функция $V(x)$, допускающая бесконечно большой нижний предел, что ее производная по времени в силу уравнения этой системы является отрицательно полуопределенной функцией, и она обращается в нуль вне начала координат на множестве M , не содержащем целых траекторий.

Теорема 4 (первая теорема о неустойчивости):

Теорема 4.11 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы неустойчиво, если существует функция $V(x)$ такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнения этой системы является положительно определённой функцией и в любой малой окрестности начала координат найдётся точка $x = x^0$, в которой функция $V(x)$ принимает положительное значение.

Теорема 5 (вторая теорема о неустойчивости):

Теорема 4.12 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (4.12) неустойчиво, если существует функция $V(x)$ такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу уравнение этой системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = \alpha V(x) + \omega(x)$$

где $\alpha > 0$, $\omega(x)$ – положительно полуопределенная функция, и в любой малой окрестности начала координат найдётся точка $x = x^0$, в которой функция $V(x)$ принимает положительное значение.