Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)

ФАКУЛЬТЕТ № 8

Кафедра Вычислительной математики и программирования

Отчет о лабораторных работах по дисциплине «Численные методы» за шестой семестр

Студент: Днепров И. С.

Группа: 8О-307Б-17

Преподаватель: Ревизников Д. Л.

Оглавление

Лабораторная работа №1	2
Лабораторная работа №2	13
Лабораторная работа №3	21
Лабораторная работа №4	30

Лабораторная работа №1

Алгоритм: LUP-разложение.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение СЛАУ, находжение определителя и обратной матрицы.

Алгоритм: Метод прогонки.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение СЛАУ с

трехдиагональной матрицей.

Алгоритм: Метод простых итераций.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение СЛАУ.

Алгоритм: Метод Зейделя.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение СЛАУ.

Алгоритм: Метод Якоби (вращений).

Задачи, решаемые алгоритмом: Нахождение собственных значений и собственных векторов

симметричной матрицы.

Алгоритм: QR-алгоритм.

Задачи, решаемые алгоритмом: Нахождение собственных значений произвольной матрицы.

Демонстрация работы программы

MacBook-Vanya-Original:1 vanyadneprov\$ python3 task1.py

Лабораторная работа 1.1

алгоритм LUP - разложения матриц

Матрица

-126 29 27 34

L

U

9.000 9.000 3.000 -6.000

-14.000 -9.000 -8.000 -5.000

-15.500 -10.000 -7.000 6.000

5.842 30.053 -34.000 7.000

Ответ

8.0000000000000 -9.000000000000 2.000000000000018 -4.99999999999

Ответ, почлученный при помощи питру

8.0 -9.0 1.999999999999 -5.0

MacBook-Vanya-Original:1 vanyadneprov\$ python3 task2.py

Лабораторная работа 1.2

Метод прогонки

Матрица

8.000 -4.000 0.000 0.000 0.000

-2.000 12.000 -7.000 0.000 0.000

0.000 2.000 -9.000 1.000 0.000

0.000 0.000 -8.000 17.000 -4.000

0.000 0.000 0.000 -7.000 13.000

32 15 -10 1333 -76

Ответ

9.577747198741893 11.155494397483784 14.244348338903087 95.88814625516022 45.785924906624736

Ответ, почлученный при помощи питру

9.57774719874188 11.15549439748376 14.244348338903052 95.88814625516021 45.785924906624736

MacBook-Vanya-Original:1 vanyadneprov\$ python3 task3.py Лабораторная работа 1.3

28.000 9.000 -3.000 -7.000

-5.000 21.000 -5.000 -3.000

-8.000 1.000 -16.000 5.000

0.000 -2.000 5.000 8.000

-159 63 -45 24

Метод итераций

Ответ на 0-ой итерации

-5.591517857142858 2.746173469387755 6.776785714285714 1.9921875

Ответ на 1-ой итерации

- -5.337138985058309 3.5668048469387754 6.402453364158164
- -0.5489477040816322

Ответ на 2-ой итерации

- -6.276304194948069 3.1752251801549702 5.532448637937318
- -0.10983214086415849

Ответ на 3-ой итерации

- -6.1338752033439965 2.807201228207322 6.1147811272136705
- 0.3360258963279188

Ответ на 4-ой итерации

- -5.841724514211767 3.0434574908729584 6.15989577103743
- -0.11993789745671357

Ответ на 5-ой итерации

- -6.0268212638193335 3.0586210757980083 5.88609775733022
- -0.08907048418015417

Ответ на 6-ой итерации

-6.053313921409018 2.9537700483339986 5.989239922840744 0.08584417061811456

Ответ на 7-ой итерации

- -5.964832195434178 2.997007739000618 6.050593892043544
- -0.004832439691965451

Ответ на 8-ой итерации

- -5.994825537597096 3.019729103046235 5.980718944000888
- -0.032369247777060295

Ответ на 9-ой итерации

-6.01649963678046 2.992017108985132 5.988530447808607 0.016982935761003848

Ответ на 10-ой итерации

-5.994417217396905 2.9957668029725593 6.013058055127114 0.005172747365903785

Ответ на 11-ой итерации

- -5.995947065350371 3.0051772586070835 5.998560517436083
- -0.009219583711306711

Ответ на 12-ой итерации

-6.004123245040524 2.9993051671092683 5.995415991428345 0.002193991254219263

Ответ на 13-ой итерации

-5.99971930681853 2.998240271700084 6.002703817731534 0.002691297134601367

Ответ на 14-ой итерации

- -5.998471854005856 3.0010950688556584 6.000590700745083
- -0.002129818157188268

Ответ на 15-ой итерации

- -6.0008211515916425 3.0002002275821225 5.9986388006322855
- -9.542075176227627e-05

Ответ с точностю 0.01 полученный методом простых итераций

- -6.0008211515916425 3.0002002275821225 5.9986388006322855
- -9.542075176227627e-05

Метод Зейделя

Ответ на 0-ой итерации

-5.913869844812925 4.518973214285714 1.875 3.0

Ответ на 1-ой итерации

-5.988613414115647 4.7421875 1.875 3.0

Ответ на 2-ой итерации

-6.060360863095238 4.7421875 1.875 3.0

Ответ на 3-ой итерации

-6.060360863095238 4.7421875 1.875 3.0

Ответ с точностью 0.01 полученный методом Зейделя

-6.060360863095238 4.7421875 1.875 3.0

Ответ, почлученный через numpy.linalg

-6.0 3.000000000000000 6.0 -4.102404214899978e-16

MacBook-Vanya-Original:1 vanyadneprov\$ python3 task4.py

Лабораторная работа 1.4

Метод вращений

Матрица

-7.000 -6.000 8.000

-6.000 3.000 -7.000

8.000 -7.000 4.000

Собственные значения на 0-ой итерации

-11.208243919473801 3.0 8.2082439194738

Собственные значения на 1-ой итерации

-11.208243919473801 -3.7539574023076074 14.962201321781407

Собственные значения на 2-ой итерации

-11.55307332294064 -3.4091279988407677 14.962201321781407

Собственные значения на 3-ой итерации

-11.607802106076015 -3.4091279988407677 15.016930104916781

Собственные значения на 4-ой итерации

-11.607802106076015 -3.4126094330731696 15.020411539149183

Собственные значения на 5-ой итерации

-11.607818229408347 -3.4125933097408367 15.020411539149183

Ответ

Собственные значения

-11.607818229408347 -3.4125933097408367 15.020411539149183

Собственные векторы

Проверка

=

Собственные значения

15.020411540086565 -11.607818230345726 -3.4125933097408376

Собственные векторы

0.412 -0.906 0.099

-0.603 -0.190 0.774

0.683 0.379 0.625

Лабораторная работа №2

Алгоритм: Метод простых итераций.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение нелинейных

уравнений и систем нелинейных уравнений.

Алгоритм: Метод Ньютона.

Задачи, решаемые алгоритмом: Решение нелинейных

уравнений и систем нелинейных уравнений.

Демонстрация работы программы

MacBook-Vanya-Original: 2 vanyadneprov\$ python3 task1.py

Метод простых итераций с точностью 0.001:

Ответ 0.7960978276053851 на 1-ой итерации с точностью 0.07890217239461494.

Ответ 0.7793048076796235 на 2-ой итерации с точностью 0.016793019925761543.

Ответ 0.7754950121255978 на 3-ой итерации с точностью 0.003809795554025719.

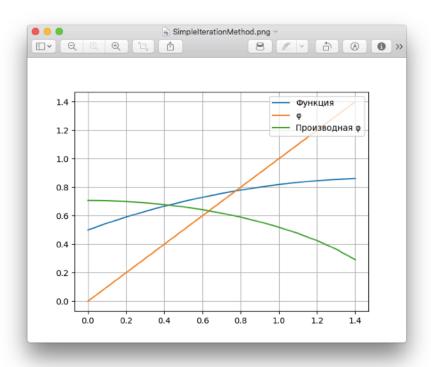
Ответ 0.7746191440568186 на 4-ой итерации с точностью 0.0008758680687791509.

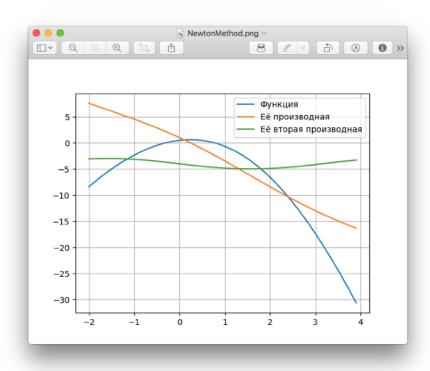
Ответ 0.7744171786282515 на 5-ой итерации с точностью 0.00020196542856709687.

Метод Ньютона с точностью 0.001:

Ответ 0.7749695728448037 на 1-ой итерации с точностью 0.024969572844803722.

Ответ 0.774356963465415 на 2-ой итерации с точностью 0.0006126093793886733.





MacBook-Vanya-Original: 2 vanyadneprov\$ python3 task2.py

Метод Ньютона с точностью 0.001:

На 1-ой итерации x1 = 0.809908384263519, x2 = 1.751395732417488 с точностю 0.30990838426351897.

На 2-ой итерации x1 = 0.8320743037840408, x2 = 1.739508839978091 с точностю 0.022165919520521826.

На 3-ой итерации x1 = 0.832187918786719, x2 = 1.73940618182417 с точностю 0.00011361500267825786.

Метод простых итераций с точностью 0.0001:

На 1-ой итерации x1 = 0.5838531634528576, x2 = 1.479425538604203 с точностю 0.8406317824339918.

На 2-ой итерации x1 = 1.0912437045717596, x2 = 1.551242887914248 с точностю 121.12795341342951.

На 3-ой итерации x1 = 1.0195521929040323, x2 = 1.8872014237487185 с точностю 1757.115005956214.

На 4-ой итерации x1 = 0.6888478739511618, x2 = 1.851873569533319 с точностю 0.6763550307064653.

На 5-ой итерации x1 = 0.7226092219926843, x2 = 1.635648187326699 с точностю 0.8265577334427391.

На 6-ой итерации x1 = 0.935193588511135, x2 = 1.6613440532312254 с точностю 100.91477237915784.

На 7-ой итерации x1 = 0.9095759546700333, x2 = 1.804714019459514 с точностю 34.853550171661766.

На 8-ой итерации x1 = 0.7682097100623418, x2 = 1.7892434126968062 с точностю 0.5525870206707695.

На 9-ой итерации x1 = 0.7832861243522968, x2 = 1.6948488554615153 с точностю 0.6193236930024761.

На 10-ой итерации x1 = 0.8762654012812382, x2 = 1.7056117680677083 с точностю 12.006367846836753.

На 11-ой итерации x1 = 0.8655925707722723, x2 = 1.7683540057543994 с точностю 6.851882353538435.

На 12-ой итерации x1 = 0.8037248965736783, x2 = 1.7614794951576138 с точностю 0.3465502062813044.

На 13-ой итерации x1 = 0.8104702749222147, x2 = 1.719946268732854 с точностю 0.3654130892240509.

На 14-ой итерации x1 = 0.8514024342433869, x2 = 1.7246113480889822 с точностю 3.6459030171868214.

На 15-ой итерации x1 = 0.8467907814483164, x2 = 1.7522052489835096 с точностю 2.3096391270043117.

На 16-ой итерации x1 = 0.8195844455162299, x2 = 1.749158509873775 с точностю 0.18262223056153476.

На 17-ой итерации x1 = 0.8225820218199404, x2 = 1.7308622665242925 с точностю 0.18595218287655862.

На 18-ой итерации x1 = 0.8406166962322448, x2 = 1.7329049005992925 с точностю 1.392773285488262.

На 19-ой итерации x1 = 0.838600507510461, x2 = 1.7450546001554406 с точностю 0.9145410936834493.

На 20-ой итерации x1 = 0.8266223081394425, x2 = 1.7437082818428145 с точностю 0.08755131400520419.

На 21-ой итерации x1 = 0.8279483937406897, x2 = 1.735647643630155 с точностю 0.08760095646102085.

На 22-ой итерации x1 = 0.835894334627348, x2 = 1.7365452397390617 с точностю 0.5781574550067883.

На 23-ой итерации x1 = 0.8350089736660439, x2 = 1.741896472632976 с точностю 0.3851091435167622.

На 24-ой итерации x1 = 0.8297334665547897, x2 = 1.741302534622036 с точностю 0.04008130179312347.

На 25-ой итерации x1 = 0.8303187619071727, x2 = 1.737751467939321 с точностю 0.039777115543548354.

На 26-ой итерации x1 = 0.8338193970595439, x2 = 1.7381464583004138 с точностю 0.24825910396580664.

На 27-ой итерации x1 = 0.8334299118812609, x2 = 1.7405036009477464 с точностю 0.16636712636969284.

На 28-ой итерации x1 = 0.8311061643131998, x2 = 1.7402417903421097 с точностю 0.017962826636957994.

На 29-ой итерации x1 = 0.8313642195982442, x2 = 1.7386774429731784 с точностю 0.017760593628670746.

На 30-ой итерации x1 = 0.8329063687740844, x2 = 1.738851362882526 с точностю 0.10814934211761325.

На 31-ой итерации x1 = 0.8327348965271923, x2 = 1.7398896895406804 с точностю 0.0726643580261809.

На 32-ой итерации x1 = 0.8317112882106436, x2 = 1.739774324445786 с точностю 0.007973476812620957.

На 33-ой итерации x1 = 0.8318250090592131, x2 = 1.739085196959675 с точностю 0.007870699673596592.

На 34-ой итерации x1 = 0.8325043612897829, x2 = 1.7391617959040373 с точностю 0.04740894842947302.

На 35-ой итерации x1 = 0.832428844964192, x2 = 1.739619187985021 с точностю 0.031889960292738224.

На 36-ой итерации x1 = 0.831977937958859, x2 = 1.7395683614558934 с точностю 0.0035242856429890616.

На 37-ой итерации x1 = 0.83202804211618, x2 = 1.739264789141623 с точностю 0.003476314745794566.

На 38-ой итерации x1 = 0.8323273089415804, x2 = 1.7392985290976823 с точностю 0.02083945660396383.

На 39-ой итерации x1 = 0.8322940467469688, x2 = 1.7395000156303404 с точностю 0.014024836830877888.

На 40-ой итерации x1 = 0.8320954172610451, x2 = 1.7394776245574368 с точностю 0.001554806215996176.

На 41-ой итерации x1 = 0.8321174904956113, x2 = 1.7393438963476502 с точностю 0.00153314777054649.

На 42-ой итерации x1 = 0.8322493222031402, x2 = 1.739358758694539 с точностю 0.00917138757514117.

На 43-ой итерации x1 = 0.8322346704823664, x2 = 1.739447516098612 с точностю 0.006173653579747743.

На 44-ой итерации x1 = 0.8321471717015021, x2 = 1.7394376522726342 с точностю 0.0006853625170805356.

На 45-ой итерации x1 = 0.8321568955883262, x2 = 1.7393787430716265 с точностю 0.0006757191917255967.

На 46-ой итерации x1 = 0.8322149693781653, x2 = 1.7393852900299047 с точностю 0.004038439939181062.

На 47-ой итерации x1 = 0.8322085152357386, x2 = 1.7394243888524137 с точностю 0.0027187107402952713.

На 48-ой итерации x1 = 0.8321699708647285, x2 = 1.7394200436526794 с точностю 0.00030199881408028034.

На 49-ой итерации x1 = 0.8321742544335038, x2 = 1.7393940933221461 с точностю 0.00029773088449841853.

На 50-ой итерации x1 = 0.8321998367586028, x2 = 1.7393969773260607 с точностю 0.0017786620560420435.

На 51-ой итерации x1 = 0.8321969936475881, x2 = 1.7394142008888511 с точностю 0.0011974610161016256.

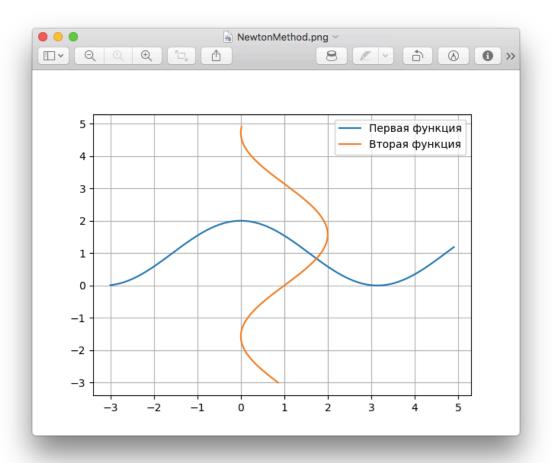
На 52-ой итерации x1 = 0.8321800143303856, x2 = 1.739412286759098 с точностю 0.0001330515612339707.

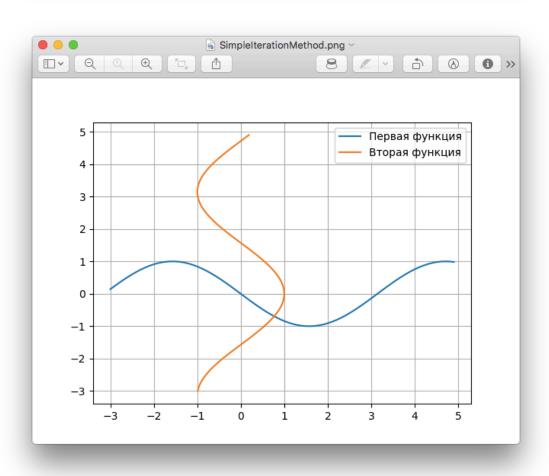
На 53-ой итерации x1 = 0.8321819013136009, x2 = 1.7394008552779308 с точностю 0.00013116761335098324.

На 54-ой итерации x1 = 0.8321931706842157, x2 = 1.7394021257172307 с точностю 0.0007834618169083972.

На 55-ой итерации x1 = 0.8321919182600122, x2 = 1.7394097129325095 с точностю 0.0005274653765304923.

На 56-ой итерации x1 = 0.8321844386386801, x2 = 1.7394088697301595 с точностю 5.861432998769449e-05.





Лабораторная работа №3

Алгоритм: Построение интерполяционных многочленов

Лагранжа и Ньютона.

Задачи, решаемые алгоритмом: Полиномиальная

интерполяция.

Алгоритм: Построение кубического сплайна.

Задачи, решаемые алгоритмом: Сплайн-интерполяция.

Алгоритм: Метод наименьших квадратов (построение

приближающих многочленов 1 и 2 степени).

Задачи, решаемые алгоритмом: Аппроксимация.

Алгоритм: Построение интерполяционного многочлена

Ньютона и вычисление его 1 и 2 производной.

Задачи, решаемые алгоритмом: Численное

дифференцирование.

Алгоритм: Метод прямоугольников.

Задачи, решаемые алгоритмом: Численное

интегрирование.

Алгоритм: Метод трапеций.

Задачи, решаемые алгоритмом: Численное

интегрирование.

Алгоритм: Метод Симпсона.

Задачи, решаемые алгоритмом: Численное

интегрирование.

Демонстрация работы программы

MacBook-Vanya-Original: 3 vanyadneprov\$ python3 task1.py

Полином Лагранжа, построенный по точкам [-3, -1, 1, 3]

LagrangePolynom(x) =
$$0.026 * (x + 1.0) * (x - 1.0) * (x - 3.0)$$

- $0.049 * (x + 3.0) * (x - 1.0) * (x - 3.0) - $0.049 * (x + 3.0) * (x + 1.0) * (x - 3.0) + 0.026 * (x + 3.0) * (x + 1.0) * (x - 1.0)$$

LagrangePolynom(-0.5) = -0.410

Оценка точности в заданной точке

|Arctg(x) - LagrangePolynom(x)| = 0.05364933

Полином Ньютона, построенный по точкам [-3, -1, 1, 3]

NewtonPolynom(x) =
$$-1.249 + 0.232 * (x + 3.0) + 0.138 * (x + 3.0)$$

* $(x + 1.0) -0.046 * (x + 3.0) * (x + 1.0) * (x - 1.0)$

NewtonPolynom(-0.5) = -0.410

Оценка точности в заданной точке

|Arctg(x) - NewtonPolynom(x)| = 0.05364933

Полином Лагранжа, построенный по точкам [-3, 0, 1, 3]

LagrangePolynom(x) =
$$0.017 * x * (x - 1.0) * (x - 3.0) -0.098 * (x + 3.0) * x * (x - 3.0) + $0.035 * (x + 3.0) * x * (x - 1.0)$$$

LagrangePolynom(-0.5) = -0.410

Оценка точности в заданной точке

|Arctg(x) - LagrangePolynom(x)| = 0.05364933

Полином Ньютона, построенный по точкам [-3, 0, 1, 3]

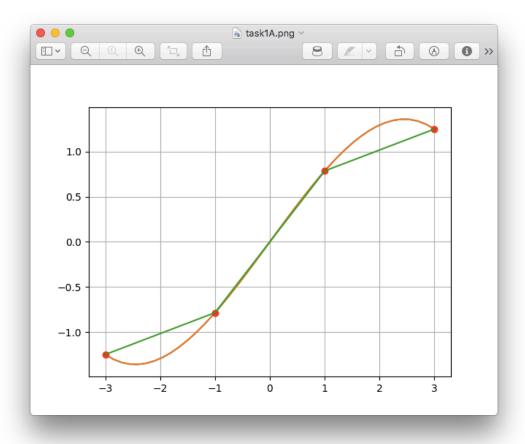
NewtonPolynom(x) =
$$-1.249 + 0.416 * (x + 3.0) + 0.092 * (x + 3.0)$$

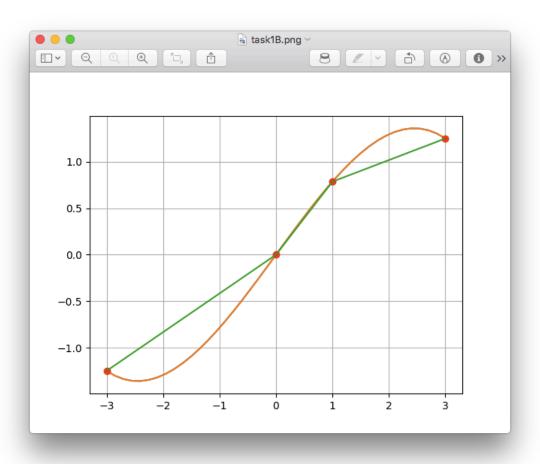
* x $-0.046 * (x + 3.0) * x * (x - 1.0)$

NewtonPolynom(-0.5) = -0.410

Оценка точности в заданной точке

|Arctg(x) - NewtonPolynom(x)| = 0.05364933

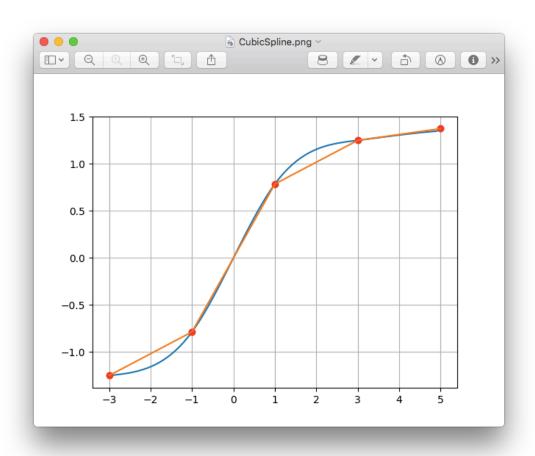




MacBook-Vanya-Original:3 vanyadneprov\$ python3 task2.py

i. $| [x_i-1, x_i] | a_i | b_i | c_i | d_i |$

$$Spline(-0.5) = -0.427$$



MacBook-Vanya-Original: 3 vanyadneprov\$ python3 task3.py

Приближающего многочлена 1-ой степени:

0.0000 | 1.7000 | 3.4000 | 5.1000 | 6.8000 | 8.5000 |

0.4713 | 1.0114 | 1.5515 | 2.0916 | 2.6317 | 3.1718 |

Сумма квадратов ошибок: 0.487174

Приближающего многочлена 2-ой степени:

0.0000 | 1.7000 | 3.4000 | 5.1000 | 6.8000 | 8.5000 |

0.1294 | 1.0797 | 1.8249 | 2.3651 | 2.7001 | 2.8300 |

Сумма квадратов ошибок: 0.094558

Приближающего многочлена 3-ой степени:

0.0000 | 1.7000 | 3.4000 | 5.1000 | 6.8000 | 8.5000 |

0.0241 | 1.2272 | 1.9092 | 2.2808 | 2.5526 | 2.9353 |

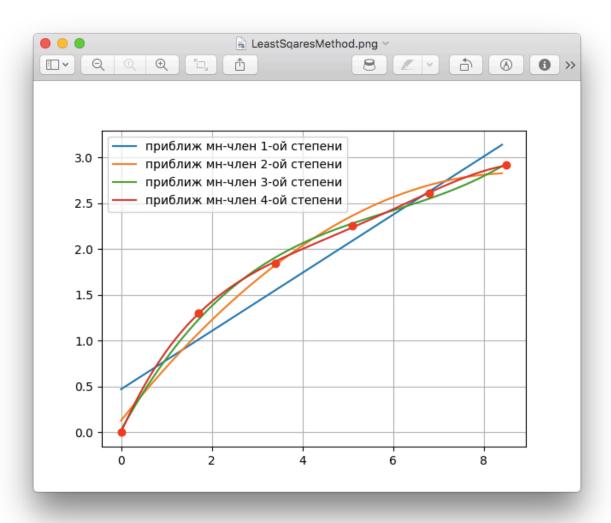
Сумма квадратов ошибок: 0.014648

Приближающего многочлена 4-ой степени:

0.0000 | 1.7000 | 3.4000 | 5.1000 | 6.8000 | 8.5000 |

0.0021 | 1.2931 | 1.8653 | 2.2369 | 2.6184 | 2.9134 |

Сумма квадратов ошибок: 0.001157



MacBook-Vanya-Original:3 vanyadneprov\$ python3 task4.py Численное диффиринцирование функции

F'(1.0) = 1.51807.

MacBook-Vanya-Original:3 vanyadneprov\$ python3 task5.py Численное дифференцирование

Метод прямоугольников

Ответ с шагом 0.5: F(x) = 0.14373851198488408

Ответ с шагом 0.25: F(x) = 0.14499262372828325

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга равна 0.0016721489911989036

Метод трапеций

Ответ с шагом 0.5: F(x) = 0.1987479080146284

Ответ с шагом 0.25: F(x) = 0.17124320999975623

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга равна 0.03667293068649624

Метод Симпсона

Ответ с шагом 0.5: F(x) = 0.1453893675489163

Ответ с шагом 0.25: F(x) = 0.1454083106614655

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга равна 2.5257483398951248e-05

Лабораторная работа №4

Алгоритм: Метод Эйлера.

Задачи, решаемые алгоритмом: Задача Коши для ОДУ

2-го порядка.

Алгоритм: Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Задачи, решаемые алгоритмом: Задача Коши для ОДУ

2-го порядка.

Алгоритм: Метод Адамса 4-го порядка.

Задачи, решаемые алгоритмом: Задача Коши для ОДУ

2-го порядка.

Алгоритм: Метод стрельбы.

Задачи, решаемые алгоритмом: Краевая задача для

ОДУ 2-го порядка.

Алгоритм: Конечно-разностный метод.

Задачи, решаемые алгоритмом: Краевая задача для

ОДУ 2-го порядка.

Демонстрация работы программы

MacBook-Vanya-Original:4 vanyadneprov\$ python3 task1.py

В задании y(0) и y'(0) указаны не верно.

Я никак не мог понять, что за фигня творится с точностью.

И когда я уже отчаялся что-то починить, я пошёл строить график и всё понял.

Я пересчитал их значения:

y(0) = 1.8414709848078965

y'(0) = -0.0

Явный метод Эйлера

Абсолютная погрешность: 0.0516899253052536

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга: 0.0374385598140358

Явный итерационнный метод Эйлера-Коши

Абсолютная погрешность: 0.06678896600015742

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга: 0.005299060918064344

Метод Рунге-Кутты

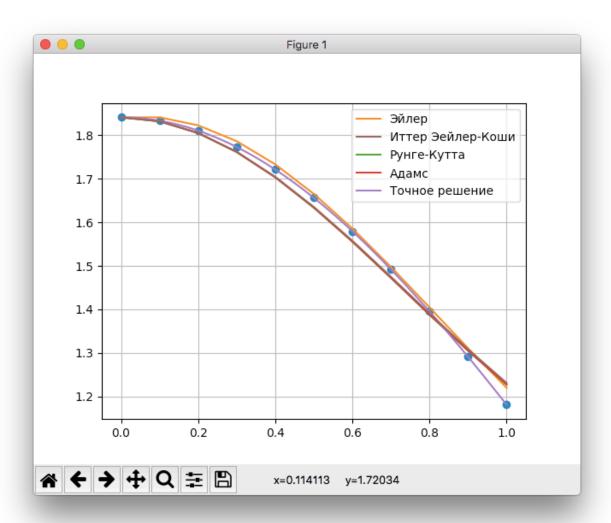
Абсолютная погрешность: 0.06593068847818892

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга: 2.3650732774339048e-07

Метод Адамса

Абсолютная погрешность: 0.06611016977822881

Погрешность согласно методу Рунге-Ромберга: 5.564820467043325e-05



MacBook-Vanya-Original:4 vanyadneprov\$ python3 task2.py

Метод стрельбы

Точность результата согласно методу Рунге-Ромберга = 0.0023826733588001503

Конечно-разностный метод

Точность результата согласно методу Рунге-Ромберга = 0.0630052875933154

