UM4RBR14

Compte rendu de Simulation

Paul CAMUS
21107953 M1 ROB

19 décembre 2025

Introduction

Solution analytique de $\Omega(t)$ en fonction de $U_m(t)$

1. Équations du système

D'après le sujet du projet, le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :

— **Équation électrique** (loi des mailles) :

$$U_m(t) = E(t) + R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{1}$$

— **Équation mécanique** (principe fondamental de la dynamique) :

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} + f \cdot \Omega(t) = \Gamma(t) \tag{2}$$

— **Equations de couplage** :

$$\Gamma(t) = k_c \cdot i(t) \quad \text{et} \quad E(t) = k_e \cdot \Omega(t) \tag{3}$$

2. Hypothèse simplificatrice

On suppose l'inductance de l'induit négligeable : $L \approx 0$. L'équation électrique devient alors purement algébrique :

$$U_m(t) = E(t) + R \cdot i(t) \implies i(t) = \frac{U_m(t) - E(t)}{R} \tag{4}$$

3. Démonstration

En substituant l'expression du courant $i(t)$ dans l'équation mécanique, nous obtenons :

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} + f \cdot \Omega(t) = k_c \left(\frac{U_m(t) - k_e \cdot \Omega(t)}{R} \right) \tag{5}$$

Développons pour regrouper les termes en $\Omega(t)$:

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} + f \cdot \Omega(t) = \frac{k_c}{R}U_m(t) - \frac{k_c k_e}{R}\Omega(t) \tag{6}$$

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} + \left(f + \frac{k_c k_e}{R}\right)\Omega(t) = \frac{k_c}{R}U_m(t) \tag{7}$$

En divisant par le coefficient devant $\Omega(t)$, soit $\left(f + \frac{k_c k_e}{R}\right)$, on obtient la forme canonique du premier ordre :

$$\tau\frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = K \cdot U_m(t) \tag{8}$$

Avec les constantes identifiées :

— **Gain statique** : $K = \frac{k_c}{Rf+k_c k_e}$

— **Constante de temps** : $\tau = \frac{RJ}{Rf+k_c k_e}$

4. Solution temporelle (Réponse indicielle)

Pour une entrée en échelon de tension $U_m(t) = U_0$ pour $t \geq 0$ (avec conditions initiales nulles $\Omega(0) = 0$), la solution de l'équation différentielle est :

$$\Omega(t) = K \cdot U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{9}$$

Soit en remplaçant K et τ par leurs expressions :

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{k_c U_0}{Rf + k_c k_e}\left(1 - \exp\left(\frac{-(Rf + k_c k_e)t}{RJ}\right)\right)} \tag{10}$$