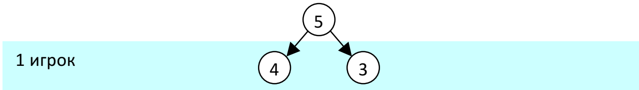
26 (C3) (высокий уровень, время – 30 мин)

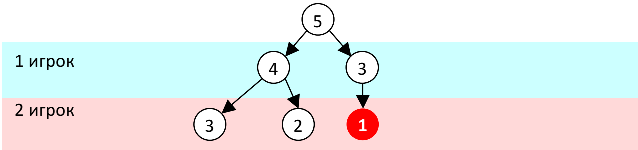
Тема: Дерево игры. Поиск выигрышной стратегии.

Что нужно знать:

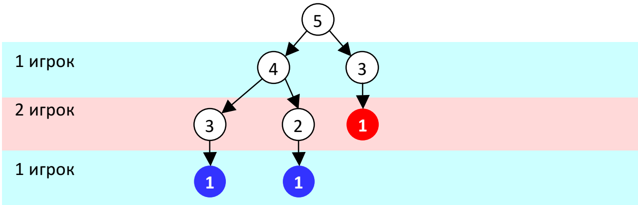
- в простых играх можно найти выигрышную стратегию, просто перебрав все возможные варианты ходов соперников
- для примера рассмотрим такую игру: сначала в кучке лежит 5 спичек; два игрока убирают спички по очереди, причем за 1 ход можно убрать 1 или 2 спички; выигрывает тот, кто оставит в кучке 1 спичку
- первый игрок может убрать одну спичку (в этом случае их останется 4), или сразу 2 (останется 3), эти два варианта можно показать на схеме:



- если первый игрок оставил 4 спички, второй может своим ходом оставить 3 или 2; а если после первого хода осталось 3 спички, второй игрок может выиграть, взяв две спички и оставив одну:



- если осталось 3 или 2 спички, то 1-ый игрок (в обеих ситуациях) выиграет своим ходом:



- простроенная схема называется «деревом игры», она показывает все возможные варианты, начиная с некоторого начального положения (для того, чтобы не загромождать схему, мы не рисовали другие варианты, если из какого-то положения есть выигрышный ход)
- в любой ситуации у игрока есть два возможных хода, поэтому от каждого узла этого дерева отходят две «ветки», такое дерево называется *двоичным* (если из каждого положения есть три варианта продолжения, дерево будет *троичным*)
- проанализируем эту схему; если первый игрок своим первым ходом взял две спички, то второй сразу выигрывает; если же он взял одну спичку, то своим вторым ходом он может выиграть, независимо от хода второго игрока
- кто же выиграет при правильной игре? для этого нужно ответить на вопросы: 1) «Может ли первый игрок выиграть, независимо от действий второго?», и 2) «Может ли второй игрок выиграть, независимо от действий первого?»
- ответ на первый вопрос – «да»; действительно, убрав всего одну спичку первым ходом, 1-ый игрок всегда может выиграть на следующем ходу
- ответ на второй вопрос – «нет», потому что если первый игрок сначала убрал одну спичку, второй всегда проиграет, если первый не ошибется

- таким образом, при правильной игре выиграет первый игрок; для этого ему достаточно первым ходом убрать всего одну спичку
- в некоторых играх, например, в рэндзю (крестики-нолики на бесконечном поле) нет выигрышной стратегии, то есть, при абсолютно правильной игре обоих противников игра бесконечна (или заканчивается ничьей); кто-то может выиграть только тогда, когда его соперник по невнимательности сделает ошибку
- полный перебор вариантов реально выполнить только для очень простых игр; например, в шахматах сделать это за приемлемое время не удается (дерево игры очень сильно разветвляется, порождая огромное количество вариантов)
- все позиции в простых играх делятся на выигрышные и проигрышные
- **выигрышная позиция** – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, может гарантированно выиграть при любой игре соперника, если не сделает ошибку; при этом говорят, что у него есть выигрышная стратегия – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть
- если игрок начинает играть в **проигрышной** позиции, он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его соперник; в этом случае говорят, что у него нет выигрышной стратегии; таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для соперника
- выигрышные и проигрышные позиции можно охарактеризовать так:
  - позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – **проигрышная**;
  - позиция, из которой хотя бы один из возможных ходов ведет в проигрышную позицию - **выигрышная**, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для соперника) позицию.

Пример задания:

Р-09. (**Демо-вариант 2018 года, проект**) Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. На столе в кучке лежат фишки. На лицевой стороне каждой фишки написано двузначное натуральное число, обе цифры которого находятся в диапазоне от 1 до 4. Никакие две фишки не повторяются. Игра состоит в том, что игроки
поочередно берут из кучки по одной фишке и выкладывают в цепочку на стол лицевой стороной вверх таким образом, что каждая новая фишка ставится правее предыдущей и ближайшие цифры соседних фишек совпадают. Верхняя часть всех выложенных фишек направлена в одну сторону, то есть переворачивать фишки нельзя. Например, из фишки, на которой написано 23, нельзя сделать фишку, на которой написано 32. Первый ход делает Петя, выкладывая на стол любую фишку из кучки. Игра заканчивается, когда в кучке нет ни одной фишки, которую можно добавить в цепочку. Тот, кто добавил в цепочку последнюю фишку, выигрывает, а его противник проигрывает. Будем называть партией любую допустимую правилами последовательность ходов игроков, приводящую к завершению игры. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит указать, какую фишку он должен выставить в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Пример. Пусть на столе в кучке лежат фишки: 11, 12, 13, 21, 22, 23

Пусть первый ход Пети 12. Ваня может поставить 21, 22 или 23. Предположим, он ставит 21. Получим цепочку 12-21. Петя может поставить 11 или 13. Предположим, он ставит 11. Получим цепочку 12-21-11. Ваня может поставить только фишку со значением 13. Получим цепочку 12-21-11-13. Перед Петей в кучке остались только фишки 22 и 23, то есть нет фишек, которые он мог бы добавить в цепочку. Таким образом, партия закончена, Ваня выиграл.

Выполните следующие три задания при исходном наборе фишек {12, 14, 21, 22, 24, 41, 42, 44}.

Задание 1.

а) Приведите пример самой короткой партии, возможной при данном наборе фишек. Если таких партий несколько, достаточно привести одну.

б) Пусть Петя первым ходом пошел 42. У кого из игроков есть выигрышная стратегия в этой ситуации? Укажите первый ход, который должен сделать выигрывающий игрок, играющий по этой стратегии. Приведите пример одной из партий, возможных при реализации выигрывающим игроком этой стратегии.

Задание 2

Пусть Петя первым ходом пошел 44. У кого из игроков есть выигрышная стратегия, позволяющая в этой ситуации выиграть своим четвертым ходом? Постройте в виде рисунка или таблицы дерево всех партий, возможных при реализации выигрывающим игроком этой стратегии. На рёбрах дерева указывайте ход, в узлах – цепочку фишек, получившуюся после этого хода.

Задание 3

Укажите хотя бы один способ убрать 2 фишки из исходного набора так, чтобы всегда выигрывал не тот игрок, который имеет выигрышную стратегию в задании 2. Приведите пример партии для набора из 6 оставшихся фишек.

Задание 1а.

1) партия заканчивается, когда цепочка закончилась на цифре X и не осталось ни одной фишки, которая бы начиналась с этой цифры;
2) меньше всего фишек заданного набора начинается с цифры 1 (только 12 и 14), поэтому самой короткой партией, вероятно, будет партия, которая заканчивается на цифре 1 (фишкой 21 или 41), при этом фишки 12 и 14 должны быть выставлены;
3) соединить эти фишки в цепочку можно с помощью фишек 21 или 41, таким образом, получается две возможных самых коротких партии:

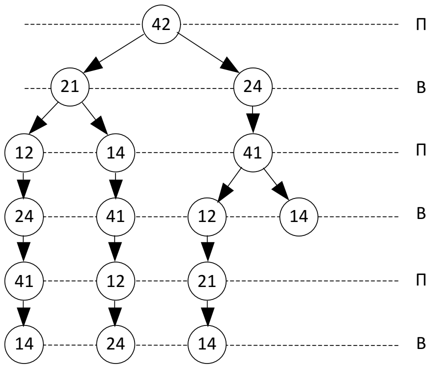
   12 – 21 – 14 – 41 и 14 – 41 – 12 – 21.

   В ответе достаточно привести одну из них.

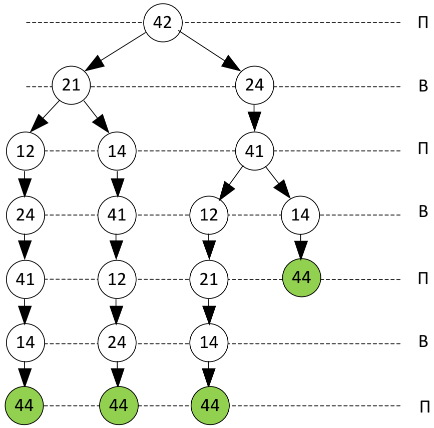
Задание 1б. (Идея решения – **А. Сидоров**).

4) заметим, что эта игра напоминает «одностороннее домино», в котором фишки можно выставлять только одной стороной и наращивать цепочку можно тоже только с одной стороны;
5) среди фишек есть две особые – 22 и 44 («дубли») они служат для того, чтобы передать ход сопернику; если выставить дубль, оказавшись в проигрышной позиции, то эта проигрышная позиция «переходит» к сопернику
6) пока построим дерево без учёта дублей, то есть для набора фишек

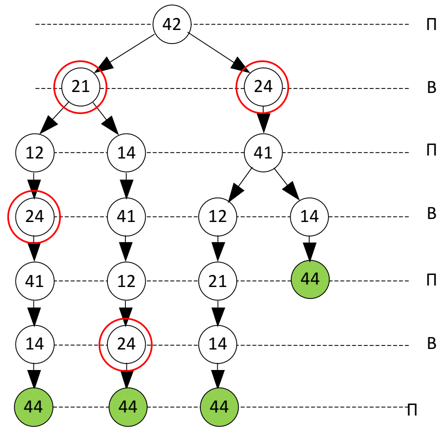
   12, 14, 21, 24, 41 и 42
7) по условию Петя выставляет первым ходом фишку 42, дальнейшие варианты развития игры показаны на схеме:



8) итак, мы видим, что если никто из игроков не выставляет дублей, то выигрывает Ваня во всех случаях, причем все партии заканчиваются на цифре 4
9) если Ваня в ходе игры не выставит дубль, то в конце каждой ветки Петя может выставить дубль 44 и выиграть:



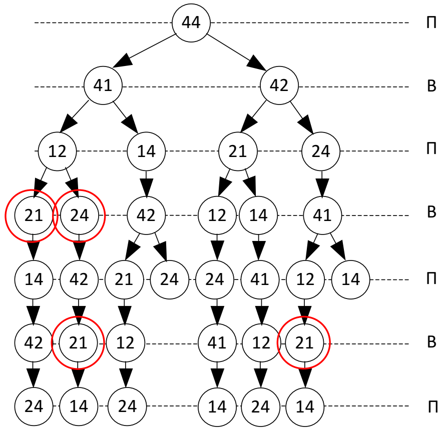
10) поэтому теперь посмотрим, где Ваня может изменить игру дублями; Ване нет смысла ставить дубль 44, потому что во всех вариантах партий он уже есть (с выигрышем для Пети), так что выставление дубля 44 просто перемещает его в середину цепочки, не изменяя её длину
11) у Вани в распоряжении есть еще дубль 22; на следующем рисунке выделены ходы, где Ваня может поставить этот дубль:



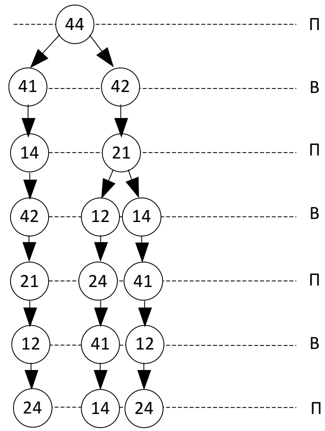
12) использование дубля 22 действительно изменяет игру, так как удлиняет цепочки на 1, при этом выигрывает Ваня:
    а) Ваня может своим первым ходом выставить дубль 22, при этом он всегда выигрывает
    б) Ваня может первым ходом выставить фишку 21, при этом получив ход в позиции, когда текущая цепочка заканчивается на 2, он выставляет дубль 22 и выигрывает

Задание 2.

13) построим дерево игры для случая, когда Петя в самом начале ходит фишкой 44, «забыв» пока про дубль 22:

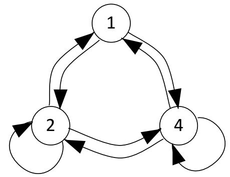


14) по дереву видим, что при игре без дубля 22 выигрывает Петя своим третьим или четвёртым ходом
15) Ваня может изменить ход игры дублем 22 только в выделенных узлах, поэтому
    - если Ваня походит фишкой 41, Петя должен ответить ходом 14
    - если Ваня походит фишкой 42, Петя должен ответить ходом 21
16) при записи неполного дерева игры, доказывающего выигрыш Пети, нужно учесть, что по условию задачи нужно представить дерево **с выигрышем именно в 4 хода**, хотя Петя имеет стратегию выигрыша за 3 хода:



Задание 3.

17) в задании 2 выигрывает Петя, поэтому нужно убрать две фишки таким образом, чтобы всегда выигрывал Ваня
18) заметим, что нам нужно доказать, что Ваня выигрывает ВСЕГДА, при любом первом ходе Пети; это значит, что построение одного дерева (при конкретном первом ходе) ничего не доказывает
19) заметим, что последней цифрой цепочки для данного набора фишек всегда будет 1, 2 или 4, поэтому можно построить такой граф возможных переходов (например, ребро перехода $1 \to 2$ соответствует фишке 12, а петля у узла 2 – фишке 22):



    по каждому ребру этого графа можно пройти только один раз (каждая фишка выставляется один раз)
20) по этому графу видно, что если убрать две петли, остается граф с одинаковой ситуацией для каждой из вершин: есть два контура, проходящие в разных направлениях через все узлы
21) итак, если убрать два дубля, то всегда будут выставлены 4 или все 6 фишек, поскольку 4 и 6 – чётные числа, то всегда выигрывает Ваня, потому что он делает все ходы с чётными номерами; например, при первом ходе Пети 12 возможны партии:
    12 – 21 – 14 – 41 или 12 – 24 – 41 – 14 – 42 – 21.

Ещё пример задания:

Р-08. Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого (выполняется условие Фано). Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Пример. Пусть заданы слова {МАК, МЫЛО, РАМА, РАК}. На первом ходу Петя может написать букву М или Р. Пусть он написал букву М. В ответ Ваня может написать А или Ы. В первом случае получается МА, и Петя, дописав букву К, получает слово МАК из заданного набора и выигрывает. Во втором случае получается МЫ, Петя вынужден дописать Л и Ваня выиграет вторым ходом, дописав О и получив слово МЫЛО.

Задание 1.

а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ВАРЕНЬЕ, КОРОВА}. Опишите эту стратегию. Определите, сколько различных партий может быть сыграно при этой стратегии и какое слово будет получено в каждом случае.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {НУБНУБ…НУБ, PUMAPUMA…PUMA}. В первом слове 55 раз повторяется слово НУБ, а во втором – 32 раза повторяется слово PUMA. Опишите эту стратегию. Определите, сколько различных партий может быть сыграно при этой стратегии и какое слово будет получено в каждом случае.

Задание 2

В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока. Опишите эту стратегию. Определите, сколько различных партий может быть сыграно при этой стратегии и какое слово будет получено в каждом случае.

Задание 3

Дан набор слов {МОРОКА, МОРС, МОРОЗ, ПЛАХА, ПЛАТЬЕ, ПЛОМБА}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? Приведите в виде рисунка или таблицы дерево всех партий, возможных при этой стратегии.

1) Сначала предположим, что в наборе одно слово. Если игроки дописывают каждый раз по одной букве то очевидно, что первый из них (Петя) допишет все нечётные буквы, а второй (Ваня) – все чётные. Таким образом, если в слове нечётное число букв, выиграет Петя, а если чётное – Ваня.
2) Если слов несколько, то стратегия Пети состоит в том, чтобы все время выбирать такое продолжение, при котором в итоге будет получено слово с нечётным количеством букв, а Ваня наоборот должен пытаться перескочить на слово с чётным количеством букв.
3) **Задание 1а.** В слове ВАРЕНЬЕ – 7 букв (нечётное количество, выиграет Петя), а в слове КОРОВА – 6 букв (чётное количество, выиграет Ваня). Петя ходит первый и может написать букву В. Поскольку слово КОРОВА начинается с другой буквы, Ваня будет вынужден «идти» по слову ВАРЕНЬЕ и проиграет. Этот вариант – единственный, то есть возможна только одна партия, при которой Петя следует своей стратегии, она заканчивается словом ВАРЕНЬЕ.

   Задание 1а.
   – Для набора слов {ВАРЕНЬЕ, КОРОВА} выигрышная стратегия есть у Пети.
   – Выигрышная стратегия Пети состоит в том, чтобы написать первую букву В. Далее остается только одно допустимое слово – ВАРЕНЬЕ, и Петя выиграет, так как в этом слове 7 букв и он допишет последнюю букву, имеющую нечётный номер.
   – При выбранной стратегии возможна только одна партия.
   – В результате этой партии получится слово ВАРЕНЬЕ.
4) **Задание 1б.** В первом слове набора 3*55 = 165 букв, нечётное количество. Поэтому если игра «пойдёт» по первому слову, то выиграет Петя. Во втором слове 4*32 = 128 букв, чётное количество. Поэтому если игра пойдёт по второму слову, выиграет Ваня. Слова начинаются с разных букв, поэтому Петя может выбрать, по какому слову пойдёт игра. Если он напишет букву Н, он выиграет.

   Задание 1б.
   – Для заданного набора слов выигрышная стратегия есть у Пети.

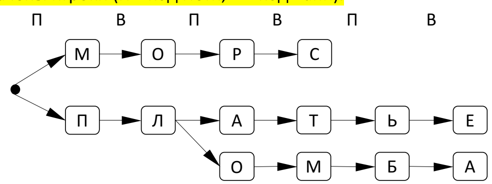
   – Выигрышная стратегия Пети состоит в том, чтобы написать первую букву Н. Далее остается только одно допустимое слово – НУБНУБ…НУБ, и Петя выиграет, так как в этом слове нечётное количество букв (165) и он допишет последнюю букву, имеющую нечётный номер.
   – При выбранной стратегии возможна только одна партия.
   – В результате этой партии получится слово НУБНУБ…НУБ.
5) **Задание 2.** В наборе слов {ВАРЕНЬЕ, КОРОВА} первое слово имеет нечётное количество букв, а второе – чётное. Чтобы Ваня мог выиграть, он должен получить возможность «перескочить» на второе слово. Для этого при любом ходе Пети у Вани должен остаться выбор. Это возможно только в том случае, когда оба слова начинаются с одной и той же буквы. Поскольку разрешается переставлять буквы только в одном слове, мы не можем сделать, чтобы оба слова начинались с буквы К – в первом слове её нет. Но можно сделать так, чтобы оба слова начинались с буквы В, переставив буквы К и В в слове КОРОВА. Получается набор {ВАРЕНЬЕ, ВОРОКА}, и Ваня выигрывает, своим первым ходом дописав букву О к букве В, которую (обязательно!) напишет Петя.

   Задание 2.
   – Для того, чтобы Ваня мог выиграть, во втором слове нужно поменять местами буквы К и В.
   – Так как оба слова начинаются с буквы В, Петя обязательно напишет букву В. Выигрышная стратегия Вани состоит в том, чтобы своим ходом дописать букву О. После этого игра «идёт» по слову ВОРОКА, в нём чётное количество букв и выигрывает Ваня, который допишет последнюю букву.
   – При выбранной стратегии возможна только одна партия.
   – В результате этой партии будет получено слово ВОРОКА.
6) **Задание 3.** Расположим слова в столбики по начальным буквам, на каждом шаге вниз стараясь сохранить наибольшую общую часть (маркером выделена часть слова, которая совпадает с предыдущим словом в том же столбике):

   МОРОКА + ПЛАХА
   \+ МОРОЗ ПЛАТЬЕ
   МОРС ПЛОМБА

   Знаком «плюс» отмечены слова, имеющие нечётное количество букв – это выигрышные варианты для Пети.
7) Если Петя первой напишет букву М, для выигрыша ему нужно перейти на слово МОРОЗ, но как только он составит слово МОР, Ваня тут же допишет С и выиграет, получив слово МОРС.
8) Если Петя напишет букву П, Ваня вынужден написать Л (это вторая буква всех оставшихся допустимых слов). Теперь Петя может написать А или О. В обоих случаях Ваня может перевести игру на слова с чётным количество букв (ПЛАТЬЕ, ПЛОМБА) и выиграть. Таким образом, при этом наборе слов выигрышную стратегию имеет Ваня.

   Задание 3.
   – Для набора слов {МОРОКА, МОРС, МОРОЗ, ПЛАХА, ПЛАТЬЕ, ПЛОМБА} выигрышная стратегия есть у Вани.
   – Дерево всех возможных партий приводится на рисунке. Для Пети мы рассматриваем все возможные ходы, для Вани – только выигрышный вариант на каждом шаге. Буквами над схемой обозначены игроки (П – ход Пети, В – ход Вани).



Вместо рисунка можно использовать таблицу (зелёным цветом отмечен выигрыш Вани):

Начальная	П	В	П	В	П	В

позиция						
–	М	МО	МОР	МОРС		
	П	ПЛ	ПЛА	ПЛАТ	ПЛАТЬ	ПЛАТЬЕ
			ПЛО	ПЛОМ	ПЛОМБ	ПЛОМБА

Ещё пример задания:

Р-07. Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв Ю и m букв Я. Такое слово будем обозначать как (n, m). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово одну букву, Ю или Я

2) удвоить количество букв Ю

3) удвоить количество букв Я

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 65 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 65 или больше.

Задание 1

Для каждой из начальных позиций (6, 29), (8, 28) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 2

Для каждой из начальных позиций (6, 28), (7, 28), (8, 27) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 3

Для начальной позиции (5, 28) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

1) По сути, это та же самая задача с двумя камнями, в которой буквы Ю – это первая куча камней, а буквы Я – вторая.
2) **Задание 1**. Рассмотрим все возможные ходы из позиции (6, 29). Если среди них найдётся хотя бы одна проигрышная, то эта позиция будет выигрышной. Итак:

   (6, 29) → (7,29) → (7,58)
   → (6,30) → (6,60)
   → (12,29) → (12,58)
   → (6,58) → (6,116)

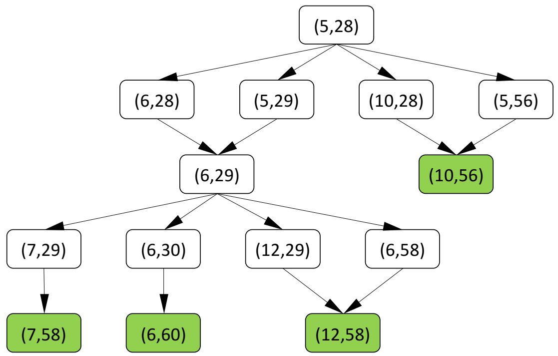
   Все ходы ведут в выигрышные позиции, из которых второй первым же ходом выигрывает (эти позиции выделены жёлтым маркером). Поэтому позиция (6, 29) – проигрышная. Аналогично рассматриваем все ходы из позиции (8, 28):

   (8, 28) → (9,28) → (9,56)
   → (8,29) → (8,58)
   → (16,28) → (16,56)
   → (8,56) → (8,112)

   Эта позиция тоже проигрышная.

Задание 1. В каждой из начальных позиций (6, 29), (8, 28) выигрышную стратегию имеет Ваня. При любом ходе Пети ему нужно удвоить количество букв Я. Во всех случаях он выигрывает своим первым ходом, так как в результате его хода получается слово длиной не менее 65 символов.

3) **Задание 2**. В каждой из начальных позиций (6, 28), (7, 28), (8, 27) выигрышную стратегию имеет Петя. Своим первым ходом ему нужно перевести игру в позицию (6, 29) в первом случае или (8, 28) во втором и третьем случаях. Выше было доказано, что это позиции проигрышные для Вани.
4) **Задание 3**. Теперь рассмотрим позицию (5, 28). Из этой позиции есть ходы в позиции (6, 28), (5, 29), (10, 28) и (5, 56). Сразу видим, что позиции (10, 28) и (5, 56) – выигрышные, потому что в каждой из них удвоение второго значения даёт сумму больше 65. Позиция (6, 28), как мы доказали ранее, тоже выигрышная. Осталось разобраться с позицией (5, 29). Из неё есть ход в проигрышную позицию (6, 29) – см. результат выполнения задания 1, поэтому это выигрышная позиция. Таким образом, все ходы из позиции (5, 28) ведут в выигрышные позиции, то есть эта позиция проигрышная, и при правильной игре выиграет Ваня.
5) Остается нарисовать неполное дерево игры. Для выигрывающего игрока на каждом ходу выбираем только один вариант, который ведёт к выигрышу, а для проигрывающего (Пети) рассматриваем все возможные ходы, чтобы доказать, что ему не уйти от проигрыша:



То же решение в виде таблицы

Начало	Петя	Ваня	Петя	Ваня
(5,28)	(6,28)	(6,29)	(7,29)	(7,58)
			(6,30)	(6,60)
	(5,29)		(12,29)	(12,58)
			(6,58)	
	(10,28)	(10,56)		
	(5,56)			

6) **Задание 3.** Из позиции (5, 28) все возможные ходы ведут в выигрышные позиции (6,28), (5,29), (10,28) и (5,56), поэтому эта позиция проигрышная, и при правильной игре выиграет Ваня. Последовательность ходов, которая приводит к победе при любых ходах Пети, показана на рисунке.

Решение (через таблицу, А.Н. Носкин)

1) По сути, это та же самая задача с двумя камнями, в которой буквы Ю – это первая куча камней, а буквы Я – вторая. Поэтому данную задачу удобно решать с помощью таблицы, в которой строки примем за количество букв Ю, а столбцы – за букву Я.

2) Анализируя количество букв в условии задачи видим, что наименьшее количество букв – Ю (5 штук). Добавить букву заменим на команду +1, а удвоить на команду *2.
3) Составим таблицу, в которой строки начинаются с числа 5, а столбцы заканчиваются числом 30. Данное число получается из условия достижения победы: (65-5)/2=30.

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Закрасим ячейки, из которых игрок, делающий ход одерживает победу, например:
30*2 + 5 = 65
29*2 + 7 = 65
28*2 + 9 = 65

4) **Задание 1**. Рассмотрим все возможные ходы из позиции (6, 29), красная точка.

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Визуально из схемы видно, то эта позиция будет проигрышная для первого игрока, так как своим первым ходом он попадает в закрашенную область, каждая ячейка которой является выигрышной позицией для игрока, делающего ход из нее.
Аналогично рассматриваем все ходы из позиции (8, 28):

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Эта позиция тоже проигрышная, по рассуждениям приведенных выше для позиции (6,29).
Задание 1. В каждой из начальных позиций (6, 29), (8, 28) выигрышную стратегию имеет Ваня. При любом ходе Пети ему нужно удвоить количество букв Б. Во всех случаях он выигрывает своим первым ходом, так как в результате его хода получается слово длиной не менее 65 символов.

5) **Задание 2**. В каждой из начальных позиций (6, 28), (7, 28), (8, 27) выигрышную стратегию имеет Петя. Своим первым ходом ему нужно перевести игру в позицию (6, 29) в первом случае или (8, 28) во втором и третьем случаях. Выше было доказано, что это позиции проигрышные для Вани. Таким ходом Петя «загоняет» Ваню в ячейку из которой он не сможет выиграть, но своим ходом создаст условие (попадет в закрашенную область) из которой Петя достигает победу.

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

6) **Задание 3**. Рассмотрим позицию (5, 28).

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Если из этой позиции Петя (красный круг) добавит любую букву (ход +1), то Ваня (зеленый круг) переведет игру в позицию (6,29), из которой у Пети нет выигрышной стратегии – см. результат выполнения задания 1, поэтому это выигрышная позиция для Вани.
Если из этой позиции Петя (красный круг) удвоит любую букву (ход *2), то попадает в закрашенную область и победу одержит Ваня первым ходом.

(Ю,Я)	27	28	29	30
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

7) Остается нарисовать неполное дерево игры. Для выигрывающего игрока на каждом ходу выбираем только один вариант, который ведёт к выигрышу, а для проигрывающего (Пети) рассматриваем все возможные ходы, чтобы доказать, что ему не уйти от проигрыша (см. выше).

Ещё пример задания:

Р-06. Два игрока, Петя и Ваня по очереди стирают буквы из слова или фразы. Первым ходит Петя. За один ход разрешается стереть или ровно одну букву, или все одинаковые буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву.
Задание 1. Укажите все слова из списка ниже, начиная с которых выигрывает Петя.
ДА, АГА, СТО, МАМА, СССР, ОГОГО, ТАРТАР, ТОРТ, РОКОКО, РЕННЕР, АВАТАР, КАРАКУРТ, КАСКАД, АНАТАНА, НЯННЯН, НАГАН.
Задание 2. Укажите все слова из представленных, начиная с которых Ваня не может гарантированно выиграть своим первым ходом, но может выиграть либо своим первым или вторым ходом, в зависимости от хода Пети. Для всех выбранных слов укажите его выигрышную стратегию.

Задание 3. Дана фраза: ИНФОРМАТИКА ЭТО НАУКА. Кто выиграет в этой игре, и какой будет выигрышная стратегия этого игрока?

1) Разберём задачу в общем виде. Когда в слове (фразе) не осталось ни одной буквы, по условию эта позиция – проигрышная. Тогда позиция, в которой осталась одна буква или только одинаковые буквы – выигрышная.
2) Сначала для простоты предположим, что все буквы в заданной фразе разные. Если их чётное число, то их можно разбить на две группы равного размера. Например, для слова КУРА можно использовать такую разбивку: КУ-РА. Теперь, когда Петя вычеркивает какую-то букву (например, У), Ване нужно вычеркнуть одну букву в другой половине (например, А) для того, чтобы восстановить симметрию. Таким образом, на каком-то шаге Ваня получит пустую строку и выиграет. Поэтому

   Любая симметричная позиция – проигрышная (выигрышная для соперника).
3) Если начальная позиция несимметричная, Петя может своим первым ходом сделать её симметричной и Ваня оказывается в проигрышной позиции. Выигрышная стратегия Пети состоит в том, чтобы на каждом шаге восстанавливать симметрию.

   Любая позиция, из которой можно одним ходом получить симметричную позицию – выигрышная.

   В общем случае при правильной игре выиграет тот, кто первым построит симметричную позицию.
4) Если в слове есть парные буквы, ситуация несколько осложняется. Одинаковые буквы нужно при разбиении располагать в одной и той же половине. Например, слово КАА представляет собой несимметричную (выигрышную) позицию, так как, убрав одну букву А, получаем симметричную позицию К-А. Слово МАМА – это симметричная (проигрышная) позиция ММ-АА, поэтому при правильной игре выиграет Ваня.
5) Рассмотрим ещё один вариант, когда одна буква встречается 3 раза, а вторая – один, например, АААБ. Если Петя стёр все буквы А или одну букву Б, Ваня стирает все оставшиеся буквы и сразу выигрывает. Если Петя стёр одну букву А, Ваня должен стереть ещё одну букву А и получает симметричную (проигрышную для Пети) позицию А-Б. Поэтому **позиция АААБ – проигрышная. Будем также называть её симметричной.**
6) Рассмотрим ещё один вариант, когда одна буква встречается 4 раза, а вторая – два, например, ААААББ. Если Петя стёр все буквы одной группы (все А или все Б), Ваня стирает все буквы второй группы и сразу выигрывает. Если Петя стёр одну букву А, Ваня должен стереть ещё одну букву А и получает симметричную (проигрышную для Пети) позицию АА-ББ.
   Если Петя стер одну букву Б, Ваня стирает одну букву А, получая позицию АААБ, в которой он выиграет в любом случае (см. предыдущий пункт). Поэтому **позиция ААААББ – проигрышная. Будем также называть её симметричной.**
7) Рассмотрим слова, приведённые в задании.
   ДА → Д-А – симметричная (проигрышная для Пети) позиция, выиграет Ваня своим первым ходом.
   АГА – убрав одну букву А, Петя получает (проигрышную для Вани) симметричную позицию А-Г; выиграет **Петя** своим вторым ходом;
   СТО – убрав любую букву, Петя получает симметричную (проигрышную для Вани) позицию и выиграет своим вторым ходом;
   МАМА → ММ-АА – симметричная проигрышная позиция, выиграет Ваня своим первым или ходом;
   СССР → симметричная (проигрышная для Пети) позиция (см. п. 5), поэтому Петя проиграет, а Ваня выиграет своим первым или вторым ходом;

   ОГОГО – убрав одну букву О, Петя получает симметричную позицию ОО-ГГ и выиграет своим вторым ходом или третьим ходом;
   ТАРТАР – убрав любую пару одинаковых букв, Петя получает симметричную позицию (например, ТТ-АА) и выиграет своим вторым или третьим ходом;
   ТОРТ – убрав две буквы Т, Петя получает симметричную позицию О-Р и выиграет своим вторым ходом;
   РОКОКО – убрав две буквы К, Петя получаем проигрышную (для Вани) позицию ООО-Р (см. п. 5) и выигрывает;
   РЕННЕР – убрав любую пару одинаковых букв, Петя получает симметричную позицию (например, ЕЕ-НН) и выигрывает своим вторым или третьим ходом;
   АВАТАР – все возможные ходы ведут в выигрышные позиции ААВТР, ВТР, ААВР, ААТР или АААВТ (каждую из них можно свести одним ходом к симметричной позиции); это проигрышная позиция, выиграет Ваня;
   КАРАКУРТ – убрав любую пару букв, Петя получает симметричную (проигрышную для Вани) позицию (например, УКК-РРТ) и выигрывает своим третьим или четвертым ходом;
   КАСКАД – симметричная (проигрышная) позиция СКК-ААД, выиграет Ваня своим вторым или третьим ходом;
   АНАТАНА – убрав одну букву Т, Петя получает симметричную (проигрышную для Вани) позицию ААААНН (см. п. 6) и выигрывает;
   НЯННЯН – симметричная (проигрышная для Пети) позиция НННЯЯ (см. п. 6), выиграет Ваня;
   НАГАН – убрав букву Г, Петя получает симметричную (проигрышную для Вани) позицию НН-АА и выигрывает своим вторым или третьим ходом.
8) Таким образом, ответы на первые два вопроса следующие:
   1. Петя выигрывает, если игра начинается со слов АГА, СТО, ОГОГО, ТАРТАР, ТОРТ, РОКОКО, РЕННЕР, КАРАКУРТ, АНАТАНА, НАГАН.
   2. Если игра начинается со слов МАМА или СССР, выигрывает Ваня своим первым или вторым ходом в зависимости от ходов Пети; во всех случаях Ваня должен восстанавливать симметрию позиции.
9) Теперь рассмотрим фразу ИНФОРМАТИКА ЭТО НАУКА. Расставим буквы с учётом повторений: (АААА ИИ) (КК НН ОО ТТ) (МРУФЭ). В первой скобке позиция симметричная (см. п. 6), во второй – тоже симметричная, а в третьей – несимметричная. Поэтому вся позиция несимметричная, то есть выигрышная. Убрав любую одиночную букву из последней скобки Петя может свести игру к симметричной (проигрышной для Вани) позиции.
10) Таким образом,
   3. Если игра начинается с фразы ИНФОРМАТИКА ЭТО НАУКА, выигрывает Петя. Сначала ему нужно стереть одну из букв, которая встречается только один раз, а затем своими ходами поддерживать симметрию позиции.

Ещё пример задания:

Р-05. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 24. Если при этом в куче оказалось не более 38 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче был 21 камень и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было S камней, $1 < S \leq 23$.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

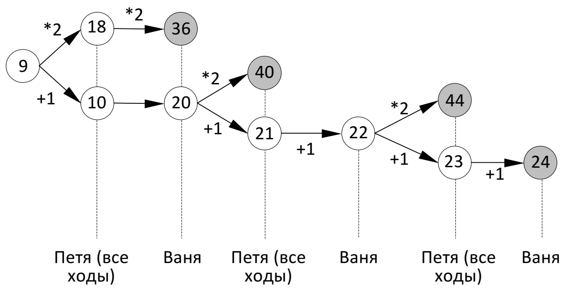
б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 22, 21, 20? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 11, 10? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 9? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

Решение:

1) **Задание 1а.** Сложность состоит в том, что Петя проиграет, если в результате его хода количество камней станет больше, чем 38. Он может сделать ход «+1» или «*2». Ходом «+1» он сможет получить 24 камня в куче (и таким образом выиграет!) из позиции S = 23.
Теперь проверим ход «*2». Для выигрыша Пети количество камней в результате этого хода должно стать от 24 до 38, поэтому Петя выиграет этим ходом при S от 12 до 19.
2) **Задание 1б.** При S = 22 возможные ходы дают кучи в 23 и 44 камня. В первом случае (S = 23) противник оказывается в выигрышной позиции (см. предыдущий пункт), во втором случае тот, кто ходит, проигрывает, потому что 44 > 38. Поэтому позиция S = 22 – проигрышная, Петя проиграет, у Вани есть выигрышная стратегия: в случае S = 23 сделать ход «+1» .
При S = 21 Петя может перевести игру в позицию S = 22, она, как мы только что показали, проигрышная для Вани. Поэтому у Пети есть выигрышная стратегия.
При S = 20 ходом «+1» Петя переведет игру в выигрышную (для Вани) позицию, а при ходе «*3» он сразу проиграет, получив 40 > 38 камней. Поэтому выигрышная стратегия есть у Вани.
3) **Задание 2.** При S = 11 или S = 10 Петя может ходом «*2» перевести игру в позиции S = 22 и S = 20, обе они, как мы показали в предыдущем пункте, проигрышные. Поэтому выигрышную стратегию имеет Петя.
4) **Задание 3.** При S = 9 возможно 2 хода: ход «+1» приводит к позиции S = 10, она выигрышная (см. предыдущий пункт); ход «*2» приводит к позиции S = 18, она тоже выигрышная (см. первый пункт). Таким образом, все возможные ходы ведут в выигрышные для соперника позиции, и позиция S = 9 – проигрышная (для Пети). Выигрышную стратегию имеет Ваня. При построении дерева для проигрывающего (Пети) указываем все возможные ходы, а для выигрывающего (Вани) – только один выигрышный ход. Дерево можно нарисовать так:



или записать в виде таблицы

	Петя	Ваня	Петя	Ваня	Петя	Ваня
9	9*2=18	18*2=36				
	9+1=10	10*2=20	20*2=40			

			20+1=21	21+1=22	22+1=23	23+1=24
					22*2=44	

Ещё пример задания:

Р-04. *Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может* ***добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза****. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 7), (20, 7), (10, 8), (10, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.*
Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.
Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (6, 34), (7, 33), (9, 32) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

Задание 1

Для каждой из начальных позиций (6, 33), (8, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 2

Для каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 3

Для начальной позиции (7, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

Решение:

5) **Задание 1.** Из всех заданных начальных позиций минимальное количество камней в первой куче – 6. Если во второй куче было S камней, то после первого хода Пети количество камней в двух кучах может стать равным
$7+S$ (после добавления 1 камня в любую кучу)
$12+S$ (после удвоения первой кучи)
$6+2S$ (после удвоения второй кучи)
Выписываем условия выигрыша на первом ходу для всех трёх вариантов
$7 + S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 66$
$12 + S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 61$
$6 + 2S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 34$
Отсюда следует, что при $S \geq 34$ Петя выиграет первым же ходом, удвоив число камней во второй куче.

6) Составим таблицу выигрышных и проигрышных позиций. По вертикали будем откладывать количество камней в первой куче, а по горизонтали – во второй (там больше!). Зеленым фоном отметим выигрышные позиции:

	31	32	33	34	35	36
6						

7) аналогично для 7 камней в первой куче цепочка выигрышных позиций начинается с (7,33):

$7 + 2S \geq 73 \quad \Rightarrow \quad S \geq 33$

	31	32	33	34	35	36
6						
7						

для 8 камней – тоже с 33, а для 9 – с 32:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						
8						
9						

8) Теперь рассмотрим «угловые» клетки: (6,33) и (8,32)

9) Все возможные ходы из (6,33) ведут в выигрышные позиции (выделены зеленым фоном):

(7,33) (6,34) (14,33) и (6,66)

Поэтому позиция (6,33) – проигрышная.

10) Все возможные ходы из (8,32) ведут в выигрышные позиции (выделены зеленым фоном):

(9,32) (8,33) (18,32) и (8,64)

Поэтому позиция (8,32) – проигрышная.

Получается такая таблица:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						
8						
9						

11) Таким образом, ответ на задание 1: в позициях (6,33) и (8,32) Петя (ходящий первым) проигрывает, а Ваня (второй) имеет выигрышную стратегию: при любом первом ходе Пети удвоить количество камней во второй куче. Обоснование приведено в пп. 5 и 6 выше.

12) **Задание 2.** В каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) есть ход в проигрышную позицию:

(6,32) → (6,33) (7,32) → (8,32) (8,31) → (8,32)

это значит, что Петя (первый ходящий) во всех случаях может перевести игру в проигрышную (для Вани позицию), а затем, после любого хода Вани ему достаточно удвоить количество камней во второй куче, и он выиграет.

Получается такая таблица:

	31	32	33	34	35	36
6						
7						
8						
9						

13) **Задание 3.** В позиции (7,31) существует 4 возможных хода:

(8,31) (7,32) (14,31) (7,62)

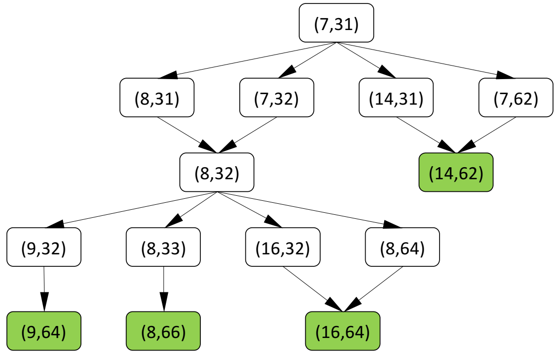
все эти позиции – выигрышные, поэтому Петя (первый ходящий) проиграет, а Ваня имеет выигрышную стратегию. Она заключается в том, чтобы своим первым ходом перевести игру в проигрышную (для Пети) позицию (8,32):

(8,31) → (8,32) (7,32) → (8,32)

или вообще сразу выиграть:

(14,31) → (14,62) (7,62) → (14,62)

14) Остается построить дерево возможных партий. Важно, что для проигрывающего (Пети) нужно обязательно рассмотреть все возможные ходы (чтобы доказать, что его ничто не может спасти), а для выигрывающего достаточно указать на каждом шаге один выигрывающий ход:



То же решение в виде таблицы

Начало	Петя	Ваня	Петя	Ваня
(7,31)	(8,31)	(8,32)	(9,32)	(9,64)
			(8,33)	(8,66)
	(7,32)		(16,32)	(16,64)
			(8,64)	
	(14,31)	(14,62)		
	(7,62)			

Ещё пример задания:

Р-03. *Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может* ***добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза****. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 7), (20, 7), (10, 8), (10, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.*

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее ***55****. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 55 или больше камней.*

В начальный момент в первой куче было ***5*** *камней, во второй куче – S камней;* ***1 ≤ S ≤ 49****.*

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть за один ход, и соответствующие выигрывающие ходы. Если при некотором значении S Петя может выиграть несколькими способами, достаточно указать один выигрывающий ход.

б) Сколько существует значений S, при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом?

Задание 2

Укажите такое значение S, при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3

Укажите значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

Решение:

15) **Задание 1а.** В этом задании начальная позиция – (5, S), и у Пети есть один ход. После этого хода количество камней в двух кучах может стать равным

$6+S$ (после добавления 1 камня в любую кучу)

$10+S$ (после удвоения первой кучи)

$5+2S$ (после удвоения второй кучи)

Выписываем условия выигрыша на первом ходу для всех трёх вариантов

$6 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 49$

$10 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 45$

$5 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25$

Отсюда следует, что при $S \geq 25$ Петя выиграет первым же ходом, удвоив число камней во второй куче.

Для дальнейшего анализа составим таблицу, где по вертикали будем отмечать количество камней в первой куче, а по горизонтали – во второй:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5							A		

Например, ячейка, отмеченная буквой А, соответствует позиции (5,25). Это выигрышная позиция, все выигрышные позиции отмечены зелёным цветом. Если во второй куче 6 камней (вторая строка), выигрышная позиция определяется условием

$6 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad 2S \geq 49 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25$ (так же, как и для (5,S)!)

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									
6									

Если во второй куче 7 камней (третья строка), получаем

$7 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad 2S \geq 48 \quad \Rightarrow \quad S \geq 24$

и так далее:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									
6									
7									
8									

9									
10									
11									
12									
13									

Теперь попробуем найти **проигрышные позиции –** такие позиции, из которых все ходы ведут в выигрышные позиции (отмеченные зелёным фоном). Ход «+1» смещает позицию в таблице на одну клетку вправо или вниз, а ход «*2» – на соответствующее число клеток вправо или вниз. Очевидно, что все позиции в углах зелёной лесенки – проигрышные. На рисунке показаны все ходы из позиции (6,24), все они ведут в зелёные ячейки:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5									48
6							25		
7						7			
8									
9									
10									
11									
12						12			
13									

Далее: выигрышными (за 2 хода) будут все позиции, из которых есть ход хотя бы в одну проигрышную позицию:

	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5				2		2			
6			2		2				
7		2			2				
8	2			2					
9				2					
10			2						
11			2						
12		2							
13		2							

16) **Задание 1б**. Как мы уже знаем, после первого хода Петя может получить количество камней $6+S$, $10+S$ и $5+2S$, но выиграть он не должен, то есть

$6 + S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 49$

$10 + S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 45$

$5 + 2S < 55 \quad \Rightarrow \quad S < 25$

Самое сильное условие – $S < 25$. Теперь ходит Ваня, у него на каждый ход Пети есть 4 варианта ответа. Рассмотрим первый возможный ход Пети и все возможные ответы Вани:

$(6, S) \rightarrow (7,S)$ или $(6,S+1)$ или $(12,S)$ или $(6,2S)$

На каждый ход Пети у Вани должен быть выигрышный ход. Для хода Пети $(6, S)$ получаем условия

$7 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 48$

$12 + S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 43$

$6 + 2S \geq 55 \quad \Rightarrow \quad S \geq 25$

Таким образом, при ходе Пети $(6, S)$ Ваня может гарантированно выиграть только при $S \geq 25$, но в этом случае Петя и сам может выиграть своим первым ходом! Поэтому значений S, удовлетворяющих условию 1б, нет! Остальные варианты первого хода Пети можно уже не проверять.

Заметим, что позиция (6,24) – проигрышная, потому что выиграть одним ходом из неё нельзя (лучший ход – удвоение второй кучи – дает в сумме 54 камня!), но любой ход из неё ведёт к выигрышной позиции.

Если смотреть на построенную таблицу, в первой строке (для позиций, в которых в первой куче 5 камней) нет чёрной клетки между выигрышем в один ход (позиция (5,25)) и выигрышем в 2 хода (позиция (5,24)). Заметим, что это произошло потому, что в позиции (5,24) возможен «выжидающий» ход в проигрышную позицию (6,24).

17) **Задание 2**. Поскольку Петя не может выиграть за 1 ход, имеем $S < 25$. Как мы выяснили в предыдущем пункте, позиция (6,24) – проигрышная. Поэтому ответ на это задание – такое значение S, что у Пети есть ход, который переводит игру в позицию (6,24).
Действительно, начав с позиции (5,24), Петя может перевести игру в проигрышную позицию (6,24), в которой Ваня не может выиграть одним ходом, но всегда создаст Пете выигрышную позицию на втором ходу.
При S = 24 Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть за два. Для этого ему нужно добавить 1 камень в первую кучу, получив позицию (6,24), которая является проигрышной. Для любого хода Вани в этой позиции есть выигрышный второй ход Пети – удвоение второй кучи:

(6, 24) → Ваня: (7,24) → Петя: (7,48)
(6, 24) → Ваня: (6,25) → Петя: (6,50)
(6, 24) → Ваня: (12,24) → Петя: (12,48)
(6, 24) → Ваня: (6,48) → Петя: (6,96)

Возможен и другой ответ на этот вопрос. Дело в том, что при S = 22 Петя своим первым ходом тоже может получить проигрышную (для Вани) позицию, только другую: (10,22).
При S = 22 Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть за два. Для этого ему нужно удвоить число камней в первой куче, получив позицию (10,22), которая является проигрышной. Для любого хода Вани в этой позиции есть выигрышный второй ход Пети – удвоение второй кучи:

(10, 22) → Ваня: (11,22) → Петя: (11,44)
(10, 22) → Ваня: (10,23) → Петя: (10,46)
(10, 22) → Ваня: (20,22) → Петя: (20,44)
(10, 22) → Ваня: (10,44) → Петя: (10,88)

18) **Задание 3**. Нам нужно найти такое значение S, что из начальной позиции (5,S) ЛЮБОЙ ход Пети ведёт в выигрышную (для Вани) позицию. Попробуем первое нерассмотренное значение, S = 23. Возможные ходы Пети:

(6,23), (5,24), (10,23) и (5,46)

В первых двух случаях Ваня своим ходом сведет игру в проигрышную (для Пети) позицию (6,24) и выиграет своим вторым ходом, а в последних двух случаях выиграет на первом же ходу, удвоив число камней во второй куче.

Ещё легче определить нужный ход по таблице. Все клетки в углах новой лесенки – это проигрышные позиции, потому что все ходы из них ведут на зелёные клетки:

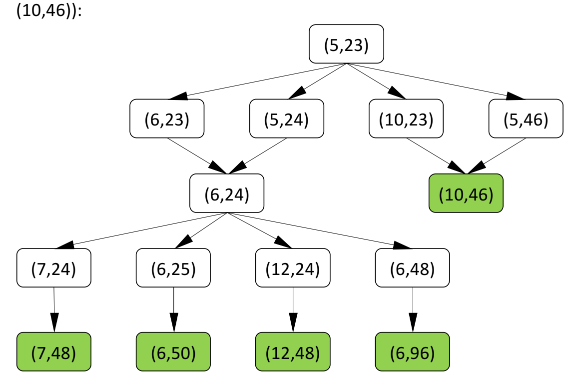
	...	20	21	22	23	24	25	26	27
5			2	2	2	2			
6		2	2		2				
7	2	2		2	2				
8	2			2					
9			2	2					

10			2						
11		2	2						
12		2							
13	2	2							

На этом можно остановиться, потому что по условию задачи нас интересуют только позиции с выигрышем в 1 или 2 хода (позиции в остальных клетках требуют для выигрыша больше двух ходов). Смотрим на верхнюю строку: при S=21 и S=23 позиция проигрышная за 2 хода, это и есть два возможных ответа на вопрос 3.
Для S = 23 у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, но у него нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Все возможные ходы Пети и выигрышные ответы Вани приведены в таблице:

<table>
<tr><th>Начало</th><th>Петя</th><th>Ваня</th><th>Петя</th><th>Ваня</th></tr>
<tr><td rowspan="6">(5,23)</td><td rowspan="2">(6,23)</td><td rowspan="4">(6,24)</td><td>(7,24)</td><td>(7,48)</td></tr>
<tr><td>(6,25)</td><td>(6,50)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(5,24)</td><td>(12,24)</td><td>(12,48)</td></tr>
<tr><td>(6,48)</td><td>(6,96)</td></tr>
<tr><td>(10,23)</td><td rowspan="2">(10,46)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(5,46)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Вместо таблицы можно построить аналогичное дерево (конечно, это не совсем дерево, но для упрощения схемы можно объединить две ветки к узлу (6,24), а также две ветки к узлу (10,46)):



Возможен и другой ответ на этот вопрос. При S=21 у Вани тоже есть выигрышная стратегия, он выигрывает на первом или на втором ходу.

<table>
<tr><th>Начало</th><th>Петя</th><th>Ваня</th><th>Петя</th><th>Ваня</th></tr>
<tr><td rowspan="9">(5,21)</td><td rowspan="2">(10,21)</td><td rowspan="4">(10,22)</td><td>(11,22)</td><td>(11,44)</td></tr>
<tr><td>(10,23)</td><td>(10,46)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(5,22)</td><td>(20,22)</td><td>(20,44)</td></tr>
<tr><td>(10,44)</td><td>(10,88)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(6,21)</td><td rowspan="4">(12,21)</td><td>(13,21)</td><td>(13,42)</td></tr>
<tr><td>(12,22)</td><td>(12,44)</td></tr>
<tr><td>(24,21)</td><td>(24,42)</td></tr>
<tr><td>(12,42)</td><td>(12,84)</td></tr>
<tr><td>(5,42)</td><td>(5,84)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ещё пример задания:

P-02. *Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу* *один или три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней; 1 ≤ S ≤ 34.*

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающие ходы.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2

Укажите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3

Укажите значение S, при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рисунке на рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

Решение (способ 1, таблица):

1) **Задание 1а.** Последним ходом может быть «+1», «+3» или «*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если S = 34. Ходом «+2» можно выиграть при S=32, S=33 и S=34. Ходом «*2» можно выиграть из любой позиции при S > 17. Можно составить таблицу, в которой «$В_1$» обозначает выигрыш за один ход:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…	34
																		$В_1$	$В_1$	…	$В_1$

Поэтому ответ должен быть такой:

Задание 1а. *Петя может выиграть за один ход при любом S > 17. Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 36 камней.*

2) **Задание 1б.** Ваня может выиграть в один ход тогда, когда все ходы Пети из текущей позиции ведут в выигрышные позиции. Это будет при S = 17:

Задание 1б. Ваня может гарантированно выиграть своим первым ходом при S = 17. В этом случае Петя своим первым ходом может получить в куче 18, 19 или 34 камня, то есть, выиграть за один ход не может. В любой из этих позиций Ваня выигрывает своим первым ходом, удваивая количество камней.

Позицию S = 17 отмечаем в таблице как проигрышную (за 1 ход):

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…	34
																	$П_1$	$В_1$	$В_1$	…	$В_1$

3) Для того, чтобы Петя смог выиграть своим вторым ходом, ему нужно своим первым ходом перевести игру в проигрышную (для Вани) позицию, то есть, получить 17 камней. Он может сделать это при S = 14 (ходом «+3») или при S = 16 (ходом «+1»).

Задание 2. При S = 14 или S = 16 Петя своим первым ходом может получить 17 камней, переведя игру в проигрышную (для Вани) позицию. Поэтому своим вторым ходом Петя всегда выиграет.

В таблице обозначим эти позиции как выигрышные (за 2 хода):

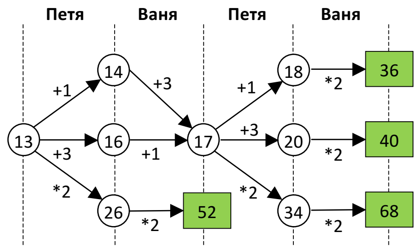
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	…	34
														$В_2$		$В_2$	$П_1$	$В_1$	$В_1$	…	$В_1$

4) для выполнения задания № 3 нужно найти такие позиции, из которых **все возможные ходы** ведут в выигрышные позиции, помеченные как $В_1$ или $В_2$; это позиции S = 13 и S = 15: при S = 13 можно получить 14, 16 или 26 камней, все эти позиции выигрышные; при S = 15 можно получить 16, 18 или 30 камней, это так же выигрышные позиции

5) В задании требуется найти только одну подходящую позицию, выбираем S = 13.

Задание 3. При S = 13 после первого хода Пети в куче будет 14, 16, или 26 камней. Если в куче получилось 14 или 16 камней, Ваня выиграет своим вторым ходом (см. задание 2). Если получилось 26 камней, Ваня выигрывает первым ходом, удвоив количество камней.

Строим дерево игры, рассматривая на каждом шаге **все возможные ходы Пети** и **только выигрышный ход Вани**:



У нас получилось не совсем дерево, потому что на первом ходу Ваня из двух позиций (S=14 и S=16) приводит игру к проигрышной для Пети позиции S=17. Для сокращения записи можно привести стрелки в один узел. Зелёные прямоугольники обозначают выигрыш Вани.

Ещё пример задания:

Здесь и в задачах для тренировки условие записано в сокращенном виде для экономии места. Полную форму записи условия см. в первой разобранной задаче.

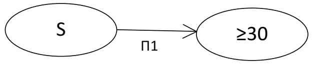
Р-01. *Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30.*

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 29.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *При каких S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?*

Решение (способ 2, математический, Г. Сергеев, г. Москва**):**

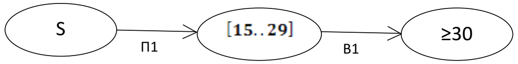
1) **Вопрос 1а.** Петя выигрывает первым ходом:



Петя должен правильно выбрать один из трёх возможных вариантов действий (+1 **ИЛИ** +3 **ИЛИ** *2), которое переведет кучу камней к состоянию ≥30. Таким образом, получаем совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} S+1\geq 30\\ S+3\geq 30\\ S*2\geq 30\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S\geq 29\\ S\geq 27\\ S\geq 15\end{array}\right. \Rightarrow S\in[15..29]$$

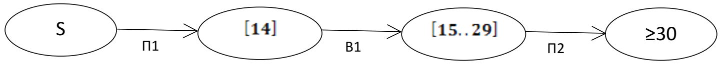
2) **Вопрос 1б.** Ваня выигрывает первым ходом



Любое действие Пети (**И** +1 **И** +3 **И** *2) должно привести кучу камней к состоянию $S\in[15..29]$**.** Только это может обеспечить выигрыш Вани на следующем ходу. Таким образом, получаем **систему**:

$$\begin{cases} S+1\in[15..29]\\ S+3\in[15..29]\\ S*2\in[15..29]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S\in[14..28]\\ S\in[12..26]\\ S\in[8..14]\end{cases} \Rightarrow S\in[14]$$

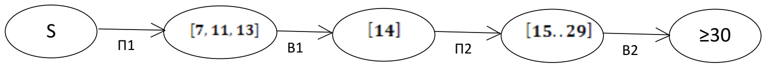
3) Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?



Петя должен выиграть, а это значит, он должен правильно выбрать один из трёх возможных вариантов действий (+1 **ИЛИ** +3 **ИЛИ** *2), которое переведет кучу камней к состоянию $S\in[14]$. Только это может обеспечить ему выигрыш при любом действии его противника Вани. Таким образом, получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} S+1\in[14]\\ S+3\in[14]\\ S*2\in[14]\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S\in[13]\\ S\in[11]\\ S\in[7]\end{array}\right. \Rightarrow S\in[7,11,13]$$

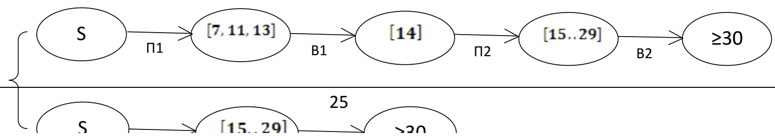
4) **Вопрос 3.** При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?
Сначала найдем, при каком S Ваня выигрывает своим вторым ходом.



$$\begin{cases} S+1\in[7,11,13]\\ S+3\in[7,11,13]\\ S*2\in[7,11,13]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S\in[6,10,12]\\ S\in[4,8,10]\\ S\in\emptyset\end{cases} \Rightarrow S\in\emptyset$$

Таким образом, получаем, что нет такого количества камней S, которые гарантировали бы выигрыш Вани именно после его второго хода при любых действиях Пети.

5) Найдем, при каких значениях S любое действие Пети приведет кучу камней к такому состоянию, при котором Ваня сможет выиграть после 1 или после второго хода:

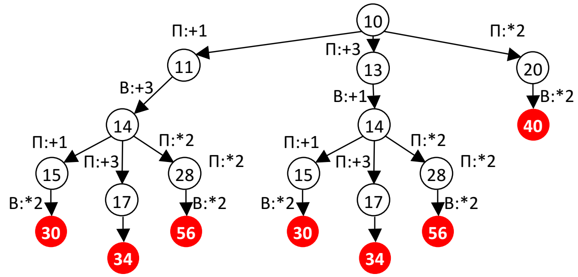


6) Составим систему на основе следующих условий:
   a. любой ход Пети ведет в позицию выигрыша в два хода ($[7,11,13]$) или в один ход ($[15..29]$)
   b. текущая позиция не совпадает с проигрышной позицией в один ход ($S\notin[14]$), иначе, кроме нужных значений S, мы здесь получим ещё ответ на вопрос 1б

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} S+1\in[7,11,13]\\ S+1\in[15..29]\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} S+3\in[7,11,13]\\ S+3\in[15..29]\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} S*2\in[7,11,13]\\ S*2\in[15..29]\end{array}\right.\\ S\notin[14]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} S\in[6,10,12]\\ S\in[14..28]\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} S\in[4,8,10]\\ S\in[12..26]\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} S\in\emptyset\\ S\in[8..14]\end{array}\right.\\ S\notin[14]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S\in[6,10,12,14..28]\\ S\in[4,8,10,12..26]\\ S\in[8..14]\\ S\notin[14]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\in[10,12,14]\\ S\notin[14]\end{cases} \Rightarrow S\in[10,12]$$

7) итак, **ответ на вопрос 3**: S = 10 или 12.
8) Построим дерево игры для S = 10. Обратите внимание, что после ходов Пети +1 и +3 Ваня своим следующим ходом сводит игру к одной и той же проигрышной (для Пети) позиции S = 14.



Ещё пример задания:

Р-00. *Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 22. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 22 или больше камней.*

В начальный момент в куче было S камней, $1\leq S\leq 21$. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа S, при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S, и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения S.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два таких значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём
– Петя не может выиграть за один ход, и
– Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите значение S, при котором:
– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в куче.

Решение (способ 1, таблица):

6) **Вопрос 1а.** Последним ходом может быть «+1» или «*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если S = 21. Ходом «*2» можно выиграть из любой позиции при S > 10 (сюда входит и 21!). Можно составить таблицу, в которой «B_1» обозначает выигрыш за один ход:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
											B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

Поэтому ответ должен быть такой:

«*1а. Петя может выиграть за один ход при любом S > 10. Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 22 камней.*»

7) **Вопрос 1б.** Для ответа на этот вопрос нужно найти позицию, из которой все возможные ходы ведут к выигрышу за 1 ход, то есть к позиции, отмеченной в таблице как «B_1». Например, это позиция при S = 10: ход «+1» ведёт в выигрышную позицию S = 11, а ход «*2» ведёт в выигрышную позицию S = 20. Поэтому позицию S = 10 отметим в таблице как «$\times_1$» (проигрыш за 1 ход):

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
										$\times_1$	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

Ответ на вопрос 1б должен быть такой:

«*1б. При S = 10 Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 11 (меньше 22), а при ходе «*2» число камней в куче становится равно 20 (также меньше 22). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 11 или 20), Ваня может выиграть своим первых ходом, удвоив количество камней в куче.*»

8) **Вопрос 2.** Пете, для того, чтобы гарантированно выиграть на втором ходу, нужно из начальной позиции перевести игру в проигрышную позицию, отмеченную знаком «$\times_1$». Пока мы нашли одну такую позицию: S = 10. Петя может перевести игру в эту позицию из позиций

S = 9 (ходом «+1») и S = 5 (ходом «*2»)

В таблице отмечаем эти положения как «B_2» – гарантированный выигрыш за 2 хода:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
					B_2				B_2	$\times_1$	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

Поэтому ответ должен быть такой:

«*2. Из позиций S = 9 и S = 5 Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. При S = 9 ходом «+1» Пете нужно перевести игру в позицию S = 10, которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 1б). При S = 5 Петя переводит игру в ту же позицию ходом «*2».*»

9) **Вопрос 3**. Нужно найти такую позицию, из которой оба возможных хода Пети ведут в позиции, отмеченные в таблице как «B_1» (выигрыш в 1 ход) и «B_2» (выигрыш в 2 хода). Например, это позиция S = 8, из которой можно «попасть» только в S = 9 («B_2») и S = 16 («B_1»). Отмечаем эту позицию как «$\times_2$» – проигрыш в два хода:

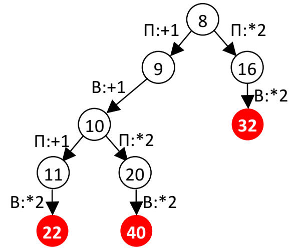
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
					B_2			$\times_2$	B_2	$\times_1$	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1

Поэтому ответ должен быть такой:

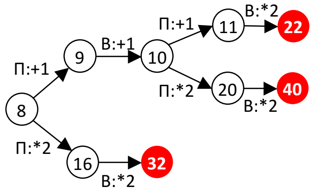
«*3. В позиции S = 8 у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 9 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «*2», Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче.*»

10) Остается нарисовать дерево возможных вариантов игры из позиции S = 8. Для этого используем построенную таблицу:

Здесь красным цветом выделены позиции, в которых игра заканчивается.



Обратите внимание, что на каждом шаге мы рассматриваем все возможные ходы Пети и только один лучший ход Вани. Например, в позиции S = 11 Ваня может сделать ход «+1» и получить 12 камней в куче, но тогда он проиграет (Петя следующим ходом удвоит число камней и получит 24 камня). Этот ход мы не рассматриваем, потому что мы хотим доказать, что **у Вани** есть выигрышная стратегия – ему достаточно хода «*2», после которого он выиграет. В то же время нужно рассмотреть **все возможные ответы Пети**, чтобы доказать, что у него нет шансов на выигрыш при правильной игре Вани. В этом суть теории игр – добиться лучшего результата в худшем случае, то есть при безошибочной игре соперника. Построенное дерево можно записать и в другой форме, например, «положив его на бок»:

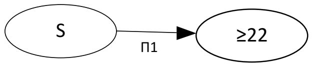


Ещё один вариант – представить дерево в виде таблицы:

Начальная позиция	1-й ход Пети (все варианты)	1-й ход Вани (ход по стратегии)	2-й ход Пети (все варианты)	2-й ход Вани (ход по стратегии)
8	9	10	11	**22 (выигрыш)**
			20	**40 (выигрыш)**
	16	**32 (выигрыш)**		

Решение (способ 2, математический, О.В. Лучникова, г. Новокузнецк):

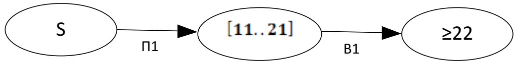
1) **Вопрос 1а.** Петя выигрывает первым ходом:



Петя должен правильно выбрать одно из двух возможных действий (+1 **ИЛИ** *2), которое переведет кучу камней к состоянию ≥22. Таким образом, получаем совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} S+1 \geq 22 \\ S*2 \geq 22 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S \geq 21 \\ S \geq 11 \end{array}\right. \Rightarrow S \in [11..21]$$

2) **Вопрос 1б**. Ваня выигрывает первым ходом:

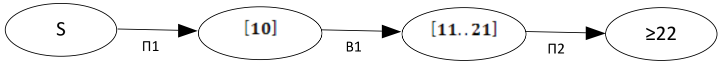


Любое действие Пети (И +1 **И** *2) должно привести кучу камней к состоянию $S \in [11..21]$.

Только это может обеспечить выигрыш Вани на следующем ходу. Таким образом, получаем систему:

$$\left\{\begin{array}{l} S+1 \in [11..21] \\ S*2 \in [11..21] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \in [10..20] \\ S \in [6..10] \end{array}\right. \Rightarrow S \in [10]$$

3) **Вопрос 2.** Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

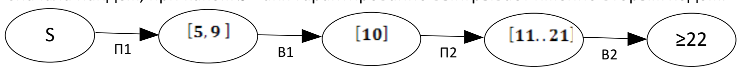


4) Петя должен выиграть, а это значит, он должен правильно выбрать один из двух возможных вариантов действий (+1 **ИЛИ** *2), которое переведет кучу камней к состоянию $S \in [10]$.

Только это может обеспечить ему выигрыш при любом действии его противника Вани. Таким образом, получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} S+1 \in [10] \\ S*2 \in [10] \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S \in [9] \\ S \in [5] \end{array}\right. \Rightarrow S \in [5,9]$$

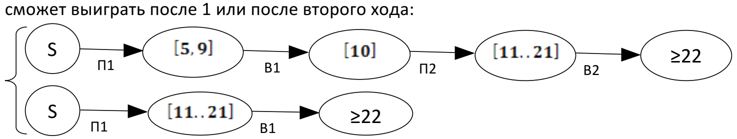
5) **Вопрос 3**. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?
6) Сначала найдем, при каком S Ваня гарантированно выигрывает именно вторым ходом.



$$\left\{\begin{array}{l} x+1 \in [5,9] \\ x*2 \in [5,9] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in [4,8] \\ x \in \emptyset \end{array}\right. \Rightarrow x \in \emptyset$$

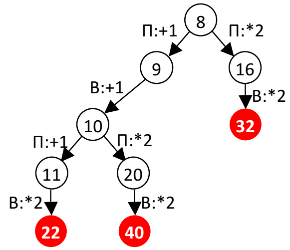
Таким образом, получаем, что нет такого количества камней S, которые гарантировали бы выигрыш Вани именно после его второго хода при любых действиях Пети.

7) Найдем, при каких значениях S Петя не сможет победить ни после первого, ни после второго хода. Т.е. любое действие Пети приведет кучу камней к такому состоянию, при котором Ваня сможет выиграть после 1 или после второго хода:



$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} S+1 \in [5,9] \\ S*2 \in [5,9] \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} S+1 \in [11..21] \\ S*2 \in [11..21] \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} S \in [4,8] \\ S \in \emptyset \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} S \in [10..20] \\ S \in [6..10] \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \in [4,8] \\ S \in [6..20] \end{array}\right. \Rightarrow S \in [8]$$

8) Совокупность решений первой и второй частей – и есть все множество решений третьего вопроса. Т.е. S = 8.
9) Построим дерево игры для S = 8



Важное замечание по поводу решения этой задачи методом О.В. Лучниковой (**Г. Сергеев**, ГБОУ Гимназия 1551 г. Москвы): в случае, когда возможных ходов не два, а больше, при ответе на вопрос 3 прямое применение этого метода может привести к неверному результату. Действительно, система

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} S+1 \in [5,9] \\ S*2 \in [5,9] \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} S+1 \in [11..21] \\ S*2 \in [11..21] \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} S \in [4,8] \\ S \in \emptyset \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} S \in [10..20] \\ S \in [6..10] \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \in [4,8] \\ S \in [6..20] \end{array}\right. \Rightarrow S \in [8]$$

означает, что один из возможных ходов ведёт в позицию типа $В_2$ (выигрыш в два хода), а другой – в позицию типа $В_1$ (выигрыш в один хода). Если есть еще и другие возможные ходы, они могут вести в проигрышные позиции, тогда, выбрав один из этих ходов, Петя может выиграть. Таким образом, к этой системе нужно добавить условие «все возможные ходы ведут в позиции типа $В_1$ или $В_2$». Еще раз отметим, что в задачах с двумя возможными ходами оно выполнится автоматически. Кроме того, нужно учесть, что из ответа на этот вопрос нужно исключить ответ на вопрос 1б, то есть позиции, из которых есть гарантированный выигрыш в 1 ход. Детали решения в случае трёх возможных ходов см. в следующей разобранной задаче (**решение Г. Сергеева**).

Решение (способ 3, «холмы и ямы», А. Козлов, г. Северобайкальск):

1) будем обозначать на рисунке выигрышные позиции «холмом» (возвышенностью), а проигрышные – «ямой» (впадиной); таким образом, задача игрока – «посадить соперника в яму», то есть создать для него проигрышную позицию
2) **Вопрос 1а.** Последним ходом может быть «+1» или «*2». Выиграть последним ходом «+1» можно, если S = 21. Ходом «*2» можно выиграть из любой позиции при S > 10 (сюда входит и 21!). Таким образом, можно выделить первый «холм», стартовав с которого игрок выигрывает в один ход (число 1 над «холмом»):

																1					
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Поэтому ответ должен быть такой:

«1а. *Петя может выиграть за один ход при любом S > 10. Он должен увеличить вдвое число камней, при этом в куче всегда получится не менее 22 камней.*»

3) **Вопрос 1б.** Для ответа на этот вопрос нужно найти позицию, из которой все возможные ходы ведут к выигрышу за 1 ход, то есть к позиции, отмеченной в таблице как «B_1». Например, это позиция при S = 10: ход «+1» ведёт в выигрышную позицию S = 11, а ход «*2» ведёт в выигрышную позицию S = 20. Поэтому позицию S = 10 отметим в таблице как «яму» и укажем внизу 1 (проигрыш за 1 ход):

																1					
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
										1											

Ответ на вопрос 1б должен быть таким:

«*1б. При S = 10 Петя не может выиграть в один ход, потому что при его ходе «+1» число камней в куче становится равно 11 (меньше 22), а при ходе «*2» число камней в куче становится равно 20 (также меньше 22). Других возможных ходов у Пети нет. Из любой позиции после одного хода Пети (это может быть 11 или 20), Ваня может выиграть своим первых ходом, удвоив количество камней в куче.*»

4) **Вопрос 2**. Пете, для того, чтобы гарантированно выиграть на втором ходу, нужно из начальной позиции перевести игру в проигрышную позицию, отмеченную знаком «$\times_1$». Пока мы нашли одну такую позицию: S = 10. Петя может перевести игру в эту позицию из позиций

S = 9 (ходом «+1») и S = 5 (ходом «*2»)

В таблице отмечаем эти положения как «холмы» с индексом 2 – гарантированный выигрыш за 2 хода:

					2				2							1					
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
										1											

Поэтому ответ должен быть таким:

«*2. Из позиций S = 9 и S = 5 Петя не может выиграть в один ход, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. При S = 9 ходом «+1» Пете нужно перевести игру в позицию S = 10, которая является проигрышной (см. ответ на вопрос 1б). При S = 5 Петя переводит игру в ту же позицию ходом «*2».*»

5) **Вопрос 3**. Нужно найти такую позицию, из которой оба возможных хода Пети ведут в позиции, отмеченные в таблице как «холмы» с метками 1 (выигрыш в 1 ход) или 2 (выигрыш в 2 хода). Например, это позиция S = 8, из которой можно «попасть» только в S = 9 («холм-2») и S = 16 («холм-1»). Отмечаем эту позицию как «яму» с меткой 2 – проигрыш в два хода:

					2				2							1					
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
								2		1											

Поэтому ответ должен быть таким:

«*3. В позиции S = 8 у Вани есть выигрышная стратегия, которая позволяет ему выиграть первым или вторым ходом. Если Петя выбирает ход «+1», в куче становится 9 камней и Ваня выигрывает на 2-м ходу (см. ответ на вопрос 2). Если Петя выбирает ход «*2», Ваня выигрывает первым ходом, удвоив число камней в куче.*»

Задачи для тренировки[1]*:*

1) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.
   В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 24$.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
   3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?
2) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.
   В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 32$.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?
   3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?
3) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 19 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.
   В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 34$.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?
4) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 55. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 55 или больше камней.
   В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 54$.

[1] Источники заданий:
1. Демонстрационный вариант ЕГЭ 2013 гг.
2. Авторские разработки.
3. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2015. Информатика. Тематические тестовые задания. — М.: Экзамен, 2015.
4. Ушаков Д.М. ЕГЭ-2015. Информатика. 20 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. — М.: Астрель, 2014.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

5) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 49.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

6) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 60 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 59.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

7) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 14 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 70. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 70 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 69.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

8) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 81. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 81 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 80.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом?

9) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 69. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 69 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 68.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

*2. Назовите **три** значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.*

*3. Назовите **два** значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

10) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 40 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 75 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 74.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

*2. Назовите **четыре** значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.*

*3. Назовите **три** значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

11) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 24.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. При каком S Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

12) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 30 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 29.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите четыре значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

13) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 54. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 54 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 53.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
14) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 19 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 39.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
15) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу семь камней или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 22 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 49.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
16) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу десять камней. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 25 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 40.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

17) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу восемь камней. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 камней или 23 камня. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 35. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 35 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 34.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
18) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить число камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 камней или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 101. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 101 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 100.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите значение S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
19) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или добавить в кучу 10 камней. Например, имея кучу из 7 камней, за один ход можно получить кучу из 8 камней или 17 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 30.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
20) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить число камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 камней или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 201. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 201 или больше камней.
В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 200.
   1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?
   2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.
   3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.
21) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два

камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 75 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 74.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите одно значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

22) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или пять камней или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 20 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 41 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 40.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

23) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в шесть раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 60 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 361. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 361 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 360.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

24) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в пять раз. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 50 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 300. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 300 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 299.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

25) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 13 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 48. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 48 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 47.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите три значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите два значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

26) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11, 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 51. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 51 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 50.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

27) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1. добавить в кучу один камень или
2. увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 32.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

28) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1. добавить в кучу один камень или
2. увеличить количество камней в куче в три раза и **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 31 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 32. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 32 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 31.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

29) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч**

(по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 38. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 38 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 29.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

30) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза.** Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 47. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 47 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 4 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 42.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

31) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза.** Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 44. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 44 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 38.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

32) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в три раза.** Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 68 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 59.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

33) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч**

(по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 52. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 52 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 45.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

34) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза.** Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 80. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 80 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче – S камней; 1 ≤ S ≤ 72.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите одно любое значение S, при котором Петя может выиграть своим вторым ходом.

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

35) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу один камень или

б) увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 2 камня**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 28 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 31. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 31 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 30.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите два значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. Назовите значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

36) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу два камня или

б) увеличить количество камней в куче в два раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 39.

1. При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

2. Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

37) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу три камня или

б) увеличить количество камней в куче в три раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 29 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 49.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

38) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу три камня или

б) увеличить количество камней в куче в два раза и **убрать из кучи 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 19 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 38. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 37.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

39) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу один камень или

б) увеличить количество камней в куче в три раза и затем **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 31 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 34. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 33.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

40) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу два камня или

б) увеличить количество камней в куче в два раза и затем **добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 21 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 44. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 44 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 43.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

41) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу два камня или

б) увеличить количество камней в куче в три раза и затем **добавить в кучу 2 камня**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 32 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 60 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 59.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

42) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу три камня** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза и затем добавить в кучу 1 камень**.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 13 или 21 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 85. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 85 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 84.

1. *При каких S: 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?*
2. *Назовите все значения S, при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?*
3. *Назовите все значения S, при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.*

43) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 38 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (7, 15), (9, 14) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (7, 14), (8,14), (9, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (8,13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

44) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 45 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (5, 13), (8, 12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (5, 12), (7,12), (8, 11) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (6,12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

45) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 58 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (9, 23), (10, 23) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (10, 22), (12,21) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (9,22) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

46) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 70 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (9, 29), (11, 28) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (10, 28), (12,27) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (10,27) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

47) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 75 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (10, 32), (11, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (10, 31), (11,30), (12,30) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (10,29) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

48) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 55 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (8, 23), (9, 22) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (8, 21), (8,22), (9,21) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (9,19) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

49) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 67 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (9, 19), (11, 18) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (9, 18), (10,18), (11,16) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (10,17) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

50) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня** или

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 48 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (5, 14), (7, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (5, 13), (6,13), (7,11) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (6,12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

51) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень** или

б) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 28. Если при этом в куче оказалось не более 46 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 27$.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 24, 25, 26? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 10, 11? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 8? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

52) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **добавить в кучу два камня**;

в) **добавить в кучу три камня**;

г) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 33.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2. Укажите четыре значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3. Укажите такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

53) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **добавить в кучу два камня**;

в) **добавить в кучу три камня**;

г) **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 37. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 37.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2. Укажите четыре значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3. Укажите такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

54) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **добавить в кучу два камня**;

г) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 65 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 64.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2. Укажите три значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3. Укажите такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

55) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **добавить в кучу два камня**;

г) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 74 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 73.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) Укажите такое значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

Задание 2. Укажите три значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3. Укажите такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

56) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Если при этом в куче оказалось не более 89 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 32.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 29, 30, 31? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 9, 10? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 8? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

57) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 98 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 35.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 32, 33, 34? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 10, 11? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 9? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

58) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу два камня**;

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Если при этом в куче оказалось не более 112 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 44.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 37, 39, 41? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 13, 11? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 9? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

59) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу два камня**;

б) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 85 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 35.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 28, 30, 32? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 8, 10? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 6? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

60) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**

в) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 60 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 35.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 31, 32, 33, 34? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 11? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 10? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

61) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) **добавить в кучу один камень**;

б) **увеличить количество камней в куче в два раза;**

в) **увеличить количество камней в куче в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 42. Если при этом в куче оказалось не более 72 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 41.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 37, 38, 39, 40? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 13? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при S = 12? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

62) Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв У и m букв А. Такое слово будем обозначать как (n, m). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово одну букву, У или А

2) удвоить количество букв У

3) удвоить количество букв А

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 25 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 25 или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (4, 10), (6, 9), (8, 8) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (4, 9), (6, 8), (7, 8) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (7, 7) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

63) Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв Г и m букв А. Такое слово будем обозначать как (n, m). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово две буквы Г или две буквы А

2) удвоить количество букв Г

3) удвоить количество букв А

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 38 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 38 или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (4, 16), (5, 16), (6, 15) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (4, 15), (5, 14), (6, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (4, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

64) Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв Х и m букв А. Такое слово будем обозначать как (n, m). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово одну букву Х

2) добавить в слово две буквы А

2) удвоить количество букв Х

3) удвоить количество букв А

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 42 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 42 или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (5, 18), (7, 17), (9, 16) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (4, 18), (6, 17), (7, 15) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (5, 17) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

65) Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв X и m букв Y. Такое слово будем обозначать как (n, m). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово одну букву X

2) добавить в слово две буквы Y

2) удвоить количество букв X

3) утроить количество букв Y

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 52 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 52 или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (6, 15), (9, 14), (12, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (5, 15), (8, 14), (11, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (4, 15) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

66) Два игрока, Петя и Ваня играют в игру с цепочками символов. Игра начинается со слова, которое состоит из n букв X, m букв Y, и k букв Z. Такое слово будем обозначать как (n, m, k). Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

1) добавить в слово одну букву из набора {X, Y, Z}

2) удвоить количество букв X

3) удвоить количество букв Y

4) удвоить количество букв Z

Игра завершается в тот момент, когда длина слова становится не менее 40 символов. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший слово длиной 40 или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (4, 5, 15), (4, 7, 14), (6, 7, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (4, 4, 15), (4, 7, 7), (5, 7, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (5, 7, 12) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

67) Два игрока, Петя и Ваня по очереди стирают буквы из слова или фразы. Первым ходит Петя. За один ход разрешается стереть или ровно одну букву, или все одинаковые буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву.

Задание 1. Укажите все слова из списка ниже, начиная с которых выигрывает Петя.

КУ РАК АРА КУКУ ЛОООМ ОКОРОК КАРАТ МЕМО КЕТЕКЕ НАНАЦА ПРОРОК

МОЛОКО РАПИРА АНКАРА АРАРАТ

Задание 2. Укажите все слова из представленных, начиная с которых Ваня не может гарантированно выиграть своим первым ходом, но может выиграть либо своим первым или вторым ходом, в зависимости от хода Пети. Для всех выбранных слов укажите его выигрышную стратегию.

Задание 3. Дана фраза: ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА. Кто выиграет в этой игре, и какой будет выигрышная стратегия этого игрока?

68) Два игрока, Петя и Ваня по очереди стирают буквы из слова или фразы. Первым ходит Петя. За один ход разрешается стереть или ровно одну букву, или все одинаковые буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву.

Задание 1. Укажите все слова из списка ниже, начиная с которых выигрывает Петя.
АЗ МАК ЛОЛА ЛАЛА КРЯКРЯ КОМОН ТРРР ТОРОС ЛОЛОЛО ФЫЫЫФ СЕЛЕН ЛЕТЕЛ
ТРААРА ГАГАРА ШАШШАШ

Задание 2. Укажите все слова из представленных, начиная с которых Ваня не может гарантированно выиграть своим первым ходом, но может выиграть либо своим первым или вторым ходом, в зависимости от хода Пети. Для всех выбранных слов укажите его выигрышную стратегию.

Задание 3. Дана фраза: МАТЕМАТИКА И АВТОМАТИКА. Кто выиграет в этой игре, и какой будет выигрышная стратегия этого игрока?

69) Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов { БАБАХКАРАРА, КРЯКРЯЯРАТ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ВЕКВЕК…ВЕК, НЕКНЕК…НЕК}. В первом слове 58 раз повторяется слово ВЕК, а во втором – 14 раз повторяется слово НЕК.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {ГОЛОВА, ГОРН, ГОРОХ, ПРОФИ, ПРОХОД, ПРОДУКЦИЯ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

70) Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {КОБРАГИБУС, КОБИМУЛЮС}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ПИРАТ… ПИРАТ, ЗОЛОТО… ЗОЛОТО}. В первом слове 155 раз повторяется слово ПИРАТ, а во втором – 14 раз повторяется слово ЗОЛОТО.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {ВОРОНА, ВОЛК, ВОЛНА, КРОНА, КРОКУС, КРОКОДИЛ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

71) Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {НОСТРАДАМУС, КАЛАМОНОМБ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ПОРТ… ПОРТ, МАРТ … МАРТ}. В первом слове 271 раз повторяется слово ПОРТ, а во втором – 113 раз повторяется слово МАРТ.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {КОРОНА, КОРАЛЛ, КОРКА, ВЕТКА, ВЕТОШЬ, ВЕНЗЕЛЬ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

72) Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ГОРА, ГОРНЫЙ, ГОРКА}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {БАРК… БАРК, БАРАН … БАРАН}. В первом слове 215 раз повторяется слово БАРК, а во втором – 109 раз повторяется слово БАРАН.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две соседние буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {НОРКА, НОРМАЛЬ, НОРА, КАНТ, КАНИСТРА, КАНДЕЛЯБР, КАНДАЛЫ }. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

73) Два игрока, Паша и Валя играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Паша. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ЛОКОН, ЛОКОМОТИВ, ЛОКАУТ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {МЭРС… МЭРС, МЭРИЯ… МЭРИЯ}. В первом слове 155 раз повторяется слово МЭРС, а во втором – 97 раз повторяется слово МЭРИЯ.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две соседние буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов { МОЛОКО, НАКЛОН, НАКАТ, МОЛЛЮСК, МОШКА, ЛОНДОН, МОСКВА }. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

74) Два игрока, Паша и Валя играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Паша. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {МАРИЯ, МАРИНАД, МАРШАЛ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ВЕБ… ВЕБ, ВЕРА… ВЕРА}. В первом слове 133 раза повторяется слово ВЕБ, а во втором – 77 раз повторяется слово ВЕРА.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две соседние буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {СОМАЛИ, СОВЕНОК, СОВЕТ, СОМЕЛЬЕ, СОВХОЗ, СОВПАДЕНИЕ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

75) Два игрока, Паша и Валя играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Паша. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {КАТЕР, КАЗАНТИП, КАЗАЧЕСТВО}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {МАСТЕР… МАСТЕР, МАСКА… МАСКА }. В первом слове 377 раз повторяется слово МАСТЕР, а во втором – 99 раз повторяется слово МАСКА.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две соседние буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {ГАСТРИТ, ГАСТРОЛИ, ГАСИТЕЛЬ, НЕРКА, НЕРЕСТ, НЕСУШКА, НЕСТОР}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

76) Два игрока, Паша и Валя играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Паша. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {КУЛОН, КУЛУАР, КУЛИНАРИЯ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {КАСКА… КАСКА, КАМА… КАМА}. В первом слове 245 раз повторяется слово КАСКА, а во втором – 399 раз повторяется слово КАМА.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две соседние буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {МОРАЛЬ, МОРАТОРИЙ, МЕТЕЛЬ, ТАРАНЬ, ТАРАКАН, ТАРИФИКАЦИЯ }. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?