

22 (повышенный уровень, время – 7 мин)

Тема: динамическое программирование.

Что нужно знать:

- динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем сведения их к более простым задачам того же типа
- с помощью динамического программирования решаются задачи, которые требуют полного перебора вариантов:
 - «подсчитайте количество вариантов...»
 - «как оптимально распределить...»
 - «найдите оптимальный маршрут...»
- динамическое программирование позволяет ускорить выполнение программы за счет использования дополнительной памяти; полный перебор не требуется, поскольку запоминаются решения всех задач с меньшими значениями параметров

Пример задания:

Р-08 (демо-вариант 2018 г.). Исполнитель М17 преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 2
3. Умножить на 3

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая – увеличивает его на 2, а третья – умножает его на 3. Программа для исполнителя М17 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 12 и при этом траектория вычислений содержит числа 8 и 10?

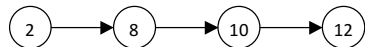
Решение:

- запишем рекуррентную формулу для вычисления K_N – количества возможных программ для получения числа N из некоторого начального числа:

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2}, \text{ если } N \text{ не делится на } 3$$

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N/3}, \text{ если } N \text{ делится на } 3$$

- все допустимые программы можно разбить на 3 части:
 - переход от 2 до 8
 - переход от 8 до 10
 - переход от 10 до 12



- обозначим через $K_{a \rightarrow b}$ количество возможных программ получения числа b из числа a
- очевидно, что $K_{a \rightarrow b} = K_{a \rightarrow c} \cdot K_{c \rightarrow b}$ для любого c , такого что $a < c < b$
- поэтому $K_{2 \rightarrow 12} = K_{2 \rightarrow 8} \cdot K_{8 \rightarrow 10} \cdot K_{10 \rightarrow 12}$
- вычисляем эти значения отдельно стандартным способом по рекуррентным формулам п. 1:

N	2	3	4	5	6	7	8
K_N	1	1	2	3	6	9	15

N	8	9	10
K_N	1	1	2

N	10	11	12
K_N	1	1	2

- и перемножаем: $15 \cdot 2 \cdot 2 = 60$
- Ответ: **60**.

Ещё пример задания:

Р-07. Исполнитель Июнь15 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 29 и при этом траектория вычислений содержит число 14 и не содержит числа 25?

Решение:

- у нас в задании две особые точки – числа 14 (через которое должна проходить траектория) и 25 (а сюда она попасть НЕ должна)
- сначала, так же, как и в задачах, рассмотренных ниже, составляем рекуррентную формулу, по которой будем вычислять количество K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа:
- число N могло быть получено одной из двух операций:
 - увеличением на 1 числа $N-1$;
 - умножением на 2 числа $N/2$ (только для N , которые делятся на 2);

$$K_N = K_{N-1} \text{ для нечётных чисел}$$

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2} \text{ для чётных чисел}$$

- для начального числа 2 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; $K_1 = 1$.
- составляем таблицу до первой особой точки – числа 14:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
K_N	1	1	2	2	3	3	5	5	7	7	10	10	13

- поскольку число 14 должно обязательно войти в траекторию, начинаем составлять вторую часть таблицы (до второй контрольной точки, 25) с этого числа заново, считая, что все ячейки для меньших чисел – нулевые

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
K_N	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	0				

- поскольку траектория не может проходить через 25, для $N = 25$ принимаем $K_N = 0$ (в таблице эта ячейка выделена красным цветом)
- далее заполняем оставшиеся ячейки второй части таблицы обычным способом (см. задачи ниже):

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
K_N	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	0	0	0	13	13

- Ответ: **13**.

Ещё пример задания:

Р-06. У исполнителя Удвоитель две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Удвоитель – это последовательность команд. Сколько существует программ, преобразующих число 4 в число 24, предпоследней командой которых является команда «1»?

Решение:

- итак, мы знаем предпоследнюю команду – 1, при этом последняя команда может быть любая – 1 или 2

- 2) выходит, что нужно получить количество всех программ вида «*11» и «*12», где звёздочка обозначает любые команды
- 3) если программа заканчивается на «11», то до выполнения цепочки «11» у нас было число $24 - 1 - 1 = 22$; поэтому нужно найти число программ для преобразования 4 в 22
- 4) для начального числа 1 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа 1, то $K_1 = 1$.
- 5) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_{N-1} , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 6) число N могло быть получено одной из двух операций:
- увеличением на 1 числа $N-1$;
 - умножением на 2 числа $N/2$ (только для N , которые делятся на 2, и таких, что $N/2 \geq 4$);
- $$K_N = K_{N-1} \text{ для нечётных чисел}$$
- $$K_N = K_{N-1} + K_{N/2} \text{ для чётных чисел, таких, что } N/2 \geq 4$$
- 7) составляем таблицу:
- | N | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| K_N | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 | 12 | 12 | 15 |
- 8) теперь рассматриваем случай, когда программа заканчивается на «12», это значит, что до выполнения цепочки «12» у нас было число $(24/2) - 1 = 11$; поэтому нужно найти число программ для преобразования 4 в 11, берём его из таблицы: 3
- 9) ответ к задаче – сумма двух значений, выделенных жёлтым маркером: $15 + 3 = 18$, поскольку мы рассмотрели все варианты программ, в которых предпоследняя команда – 1
- 10) Ответ: 18.

Ещё пример задания:

P-05. Исполнитель Июнь15 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2

Первая команда увеличивает число на экране на 1, вторая умножает его на 2. Программа для исполнителя Июнь15 – это последовательность команд. Сколько существует программ, для которых при исходном числе 1 результатом является число 21 и при этом траектория вычислений содержит число 10? Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы 121 при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 17.

Решение (вариант 1):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) для начального числа 1 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа 1, то $K_1 = 1$.
- 3) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_{N-1} , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 4) число N могло быть получено одной из двух операций:
 - увеличением на 1 числа $N-1$;
 - умножением на 2 числа $N/2$ (только для N , которые делятся на 2);
$$K_N = K_{N-1} \text{ для нечётных чисел}$$

$$K_N = K_{N-1} + K_{N/2} \text{ для чётных чисел}$$

- 5) поскольку траектория должна проходить через число 10, сначала выясняем, сколькими способами можно получить 10 из 1, а затем будем считать, сколько есть способов получить 21 из 10
- 6) заполняем таблицу от 1 до 10 по полученным формулам:
- | N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| K_N | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 10 | 10 | 14 |
- 7) второй этап – определяем таким же образом (и по таким же формулам!), сколько есть способов получить конечное число 21 из 10, только левую часть таблицы (от 1 до 10) мы уже не рассматриваем:
- | N | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| K_N | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 28 | 28 |
- 8) Ответ: 28.

Решение (вариант 2, А.Н. Носкин):

- 1) первый этап (п. 1-6) такой же, как и в первом варианте (см. выше);
 - 2) на втором этапе используем такую идею: если мы знаем количество команд, с помощью которых из начального числа 1 можно получить 10 и определим количество команд, с помощью которых из 10 можно получить конечное значение 21, останется только перемножить эти два числа – это и будет ответ
 - 3) составляем таблицу для получения 21 из 10, используя те же рекуррентные формулы:
- | N | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| K_N | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
- 4) результат – $14 \times 2 = 28$
- 5) Ответ: 28.

Ещё пример задания:

P-04. Исполнитель Калькулятор преобразует число, записанное на экране. У исполнителя три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. прибавь следующее

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число на 2, а третья прибавляет к числу на экране число, большее на 1 (к числу 3 прибавляется 4, к числу 9 прибавляется 10 и т. д.). Программа для исполнителя Калькулятор – это последовательность команд. Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 10?

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) для начального числа 2 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа 2, то $K_2 = 1$.
- 3) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_{N-1} , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 4) число N могло быть получено одной из трёх операций сложения:
 - увеличением на 1 числа $N-1$;
 - увеличением на 2 числа $N-2$;
 - из некоторого числа X увеличением на $X+1$ (следующее число), так что $N = X + X + 1$, откуда $X = (N - 1) / 2$; так могут быть получены только нечетные числа;
 поэтому

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} \text{ для чётных чисел}$$

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{(N-1)/2} \text{ для нечётных чисел}$$

- 5) остается по этой формуле заполнить таблицу для всех значений от 2 до 10:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_N	1	1	2	4	6	11	17	30	47

- 6) ответ – **47**.

Ещё пример задания:

P-03. Исполнитель Май4 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. прибавь 4

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая увеличивает это число на 2, а третья – на 4. Программа для исполнителя Май4 – это последовательность команд. Сколько есть программ, которые число 21 преобразуют в число 30?

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 7) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 8) все числа, меньшие начального числа 21, с помощью этого исполнителя получить нельзя, для них количество программ будет равно 0
- 9) для начального числа 21 количество программ равно 1: существует только одна пустая программа, не содержащая ни одной команды; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из начального числа 21, то $K_{21} = 1$.
- 10) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_{N-1} , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 11) любое число $N > 21$ могло быть получено одной из трёх операций сложения соответственно из чисел $N-1$, $N-2$ и $N-4$, поэтому

$$K_N = K_{N-1} + K_{N-2} + K_{N-4}$$

- 12) остается по этой формуле заполнить таблицу для всех значений от 21 до 30:

N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K_N	1	1	2	3	6	10	18	31	55	96

- 13) ответ – **96**.

Ещё пример задания:

P-02. У исполнителя Утроитель две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – утраивает его.

Программа для Утроителя – это последовательность команд.

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 20?

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) начнем с простых случаев, с которых будем начинать вычисления: для чисел 1 и 2, меньших, чем 3, существует только одна программа, состоящая только из команд сложения; если через K_N обозначить количество разных программ для получения числа N из 1, то $K_1 = K_2 = 1$.
- 3) теперь рассмотрим общий случай, чтобы построить рекуррентную формулу, связывающую K_N с предыдущими элементами последовательности K_1, K_2, \dots, K_{N-1} , то есть с решениями таких же задач для меньших N
- 4) если число N не делится на 3, то оно могло быть получено только последней операцией сложения, поэтому $K_N = K_{N-1}$

- 5) если N делится на 3, то последней командой может быть как сложение, так и умножение
- 6) поэтому для получения K_N нужно сложить K_{N-1} (количество программ с последней командой сложения) и $K_{N/3}$ (количество программ с последней командой умножения). В итоге получаем:

$$\text{если } N \text{ не делится на } 3: K_N = K_{N-1}$$

$$\text{если } N \text{ делится на } 3: K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$$

- 7) остается заполнить таблицу для всех значений от 1 до N :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K_N	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	7	7	9	9	9	12	12	12

- 8) Заметим, что количество вариантов меняется только в тех столбцах, где N делится на 3, поэтому из всей таблицы можно оставить только эти столбцы:

N	1	3	6	9	12	15	18	21
K_N	1	2	3	5	7	9	12	15

- 9) заданное число 20 попадает в последний интервал (от 18 до 21), поэтому ...

- 10) ответ – **12**.

Решение (2 способ, подстановка – вычисления по формулам «с конца»):

- 1) п. 1-6 выполняются так же, как и при первом способе; главная задача – получить рекуррентную формулу:
если N не делится на 3: $K_N = K_{N-1}$
если N делится на 3: $K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$
с начальными условиями $K_1 = K_2 = 1$
- 2) начинаем с заданного конечного числа 20; применяем первую формулу ($K_N = K_{N-1}$), пока не дойдем до числа, делящегося на 3 (это 18):
 $K_{20} = K_{19} = K_{18}$
- 3) далее применяем вторую формулу ($K_N = K_{N-1} + K_{N/3}$):
 $K_{20} = K_{18} = K_{17} + K_6$
- 4) применяем первую формулу для 17:
 $K_{17} = K_{16} = K_{15} \Rightarrow K_{20} = K_{15} + K_6$
- 5) применяем вторую формулу для обоих слагаемых:
 $K_{20} = (K_{14} + K_5) + (K_5 + K_2) = K_{14} + 2K_5 + 1$
где учтено, что $K_2 = 1$
- 6) с помощью первой формулы переходим в правой части к числам, делящимся на 3:
 $K_{20} = K_{12} + 2K_3 + 1$
а затем применяем вторую формулу для каждого слагаемого
 $K_{20} = (K_{11} + K_4) + 2(K_2 + K_1) + 1 = K_{11} + K_4 + 2(1+1) + 1 = K_{11} + K_4 + 5$
- 7) снова используем первую формулу
 $K_{20} = K_9 + K_3 + 5$
а затем – вторую:
 $K_{20} = (K_8 + K_3) + (K_2 + K_1) + 5 = K_8 + 2(K_2 + K_1) + 5 = K_8 + 9$
- 8) и еще раз
 $K_{20} = K_6 + 9 = K_5 + K_2 + 9 = K_5 + 10 = K_3 + 10 = 2 + 10 = 12$
- 9) ответ – **12**.

Решение (3 способ, О.В. Шецова, лицей № 6, г. Дубна):

- 1) будем составлять таблицу из трех столбцов: в первом записывается получаемое число от 1 до 20, во втором – какой последней командой может быть получено это число, а в третьем вычисляем количество различных программ для получения этого числа из 1

- 2) очевидно, что число 1 может быть получено с помощью одной единственной (пустой) программы:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1

- 3) число 2 не делится на 3, поэтому его можно получить только командой сложения (+1), значит, количество программ для 2 совпадает с количеством программ для 1:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	= 1

- 4) число 3 делится на 3, поэтому его можно получить с помощью двух команд: +1 (из 2) и *3 (из 1):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2

- 5) числа 4 и 5 не делятся на 3, поэтому их можно получить только с помощью команды +1, а число 6 может быть получено двумя командами:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	2 + 1 = 3

- 6) следующая группа – 7, 8 (не делятся на 3) и 9 (делится на 3):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	2 + 1 = 3
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	3 + 2 = 5

- 7) далее – 10, 11 и 12:

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	2 + 1 = 3
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	3 + 2 = 5
10	+1	5
11	+1	5
12	+1 *3	5 + 2 = 7

- 8) и так далее, вот полностью заполненная таблица (до конечного числа 20):

Число	Как можно получить?	Количество программ
1		1
2	+1	1
3	+1 *3	1 + 1 = 2
4	+1	2
5	+1	2
6	+1 *3	2 + 1 = 3
7	+1	3
8	+1	3
9	+1 *3	3 + 2 = 5
10	+1	5
11	+1	5
12	+1 *3	5 + 2 = 7
13	+1	7
14	+1	7
15	+1 *3	7 + 2 = 9
16	+1	9
17	+1	9
18	+1 *3	9 + 3 = 12
19	+1	12
20	+1	12

- 9) ответ – количество программ, с помощью которых можно получить число 20 из 1, – считываем из последней ячейки третьего столбца

- 10) ответ – 12.

Решение (4 способ, М.В. Кузнецова и её ученики, г. Новокузнецк):

- 1) пусть N – искомое конечное число, $K(N)$ количества программ получения числа N
- 2) тогда для построения рекуррентной формулы определения $K(N)$, нужно знать 2 факта:
 - а) какой может быть последняя команда и сколько есть видов этого последнего действия?

- б) для каждого «последнего» действия нужно знать число программ получения предыдущего числа, сумма этих количеств и есть искомое значение $K(N)$ – число программ получения числа N .

Например, общее количество программ получения числа 6 с помощью Утроителя равно $K(6) = K(5) + K(2)$, т.к. есть два способа завершения программ получения этого значения: $6=5+1$ и $6=2 \cdot 3$.

- 3) число программ получения числа N зависит от числа программ получения предыдущего значения, и что программы получения чисел, кратных 3-м могут завершаться 2-мя способами: $(N-1)+1$ или $(N/3) \cdot 3$, а все остальные числа получают только первым способом: $(N-1)+1$.
- 4) составим рекуррентную формулу для определения числа программ получения числа N :
 при $N=1$ имеем $K(1)=1$
 если N не кратно 3: $K(N) = K(N-1)$
 если N делится на 3: $K(N) = K(N-1) + K(N/3)$
- 5) с помощью этой формулы заполняем таблицу следующим образом:
 – в первом столбце записываем все натуральные числа от 1 до заданного N ;
 – во втором столбце – числа, на единицу меньшие (из которых может быть получено N последней операцией сложения с 1);
 – в третьем столбце для чисел, кратных 3-м, записываем частное от деления числа, записанного в первом столбце, на 3 (из этого числа может быть получено N последней операцией умножения на 3);
 – в последнем столбце вычисляем $K(N)$, складывая соответствующие значения для тех строк, номера которых записаны во втором и третьем столбцах:

N	N-1	N/3	K(N)
1			1
2	1		1
3	2	1	1+1=2
4	3		2
5	4		2
6	5	2	2+1=3
7	6		3
8	7		3
9	8	3	3+2=5
10	9		5
11	10		5
12	11	4	5+2=7
13	12		7
14	13		7
15	14	5	7+2=9
16	15		9
17	16		9
18	17	6	9+3=12
19	18		12
20	19		12

- б) ответ – **12**.

Решение (5 способ, А. Сидоров):

- 1) основная идея – число программ, преобразующих начальное число 1 в конечное 20 с помощью заданных в условии команд, равно числу программ, преобразующих конечное число 20 в начальное 1 с помощью обратных команд: «**вычти 1**» и «**раздели на 3**»
- 2) будем строить «обратное дерево» – дерево всех способов преобразования **конечного числа в начальное**; это лучше (в сравнении с построением «прямого» дерева, от начального числа к конечному), потому что операция умножения необратима – каждое число можно умножить на 3, но не каждое можно разделить на 3; из-за этого сразу отбрасываются тупиковые ветви, не дающие новых решений
- 3) рисуем сокращенное дерево, в котором черные стрелки показывают действие первой команды («прибавь 1»), а красные – действие второй команды («умножь на 3»); красные стрелки подходят только к тем числам, которые делятся на 3:

20 ← 19 ← 18 ← 17 ← 16 ← 15 ← 14 ← 13 ← 12 ← 11 ← 10 ← 9 ← 8 ← 7 ← 6 ← 5 ← 4 ← 3 ← 2 ← 1

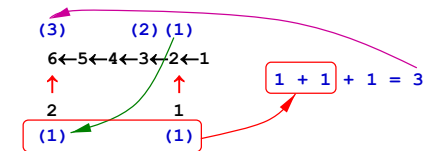
↑
↑
↑
↑
↑
↑

6 5 4 3 2 1

- 4) чтобы получить количество программ для каждого числа из верхней строки, нужно сложить соответствующие количества программ для всех чисел из нижнего ряда, которые не больше данного (программы с умножением), и добавить 1 (программа, состоящая из одних сложений)
- 5) очевидно, что для получения 1 существует одна (пустая) программа; тогда для числа 2 тоже получается одна программа, а для числа 3 – две программы:

(2) (1)
 3 ← 2 ← 1
 ↑
 1
 (1)

- 6) далее, для чисел 4 и 5 получаем 2 программы (после числа 3 нет «разветвлений» – подходящих красных стрелок), а для числа 6 – 3 программы, так как «подшло» еще одно разветвление (6 можно получить умножением 2 на 3), а для числа 2 мы уже подсчитали количество программ – оно равно 1:



- 7) находить число программ для следующих чисел нам уже не понадобится, потому что при умножении на 3 они дают числа, большие, чем заданное конечное число 20
- 8) запишем полученные результаты в самой нижней строке для всех множителей от 1 до 6:

(3)
(2) (1)

20 ← 19 ← 18 ← 17 ← 16 ← 15 ← 14 ← 13 ← 12 ← 11 ← 10 ← 9 ← 8 ← 7 ← 6 ← 5 ← 4 ← 3 ← 2 ← 1

↑
↑
↑
↑
↑
↑

6 5 4 3 2 1

(3)
(2)
(2)
(2)
(1)
(1)

- 9) теперь остается сложить все числа в скобках в нижнем ряду (количество программ с командами умножения) и добавить 1 (одна программа, состоящая только из команд сложения):

$$3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12$$

- 10) ответ – **12**.

Возможные проблемы:

- неверно определенные начальные условия
- неверно выведенная рекуррентная формула
- ошибки при заполнении таблицы (невнимательность)
- второй способ (подстановка), как правило, приводит к БОЛЬШЕМУ количеству вычислений; конечно, можно отдельно выписывать все полученные ранее значения K_N , но тогда мы фактически придем к табличному методу

Еще пример задания:

P-01. У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь вторую с конца цифру на 1

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – увеличивает на 1 число десятков.

Если перед выполнением команды 2 вторая с конца цифра равна 9, она не изменяется.

Программа для Калькулятора – это последовательность команд.

Сколько есть программ, которые число 15 преобразуют в число 28?

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) при заданных командах очередное число N может быть получено двумя способами:
- 3) увеличением на 1 (для всех чисел, больших начального числа)
- 4) увеличением числа десятков на 1 (то есть, фактически командой «+10») – для всех чисел, больших или равных 25; например, число 24 не может быть получено этой командой ($14 + 10 = 24$), потому что число 14 меньше, чем начальное значение 15
- 5) таким образом, рекуррентные формулы принимают вид
 $K_N = K_{N-1}$ для всех чисел, меньших, чем 25
 $K_N = K_{N-1} + K_{N-10}$ для чисел, больших или равных 25
- 6) других способов получения числа с помощью исполнителя с заданными командами нет, то есть мы таким образом рассматриваем все возможные программы
- 7) начальное значение: $K_{15} = 1$ (число 15 можно получить единственной пустой программой)
- 8) далее заполняем таблицу:

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
K_N	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5

- 9) Ответ: **5**

Еще пример задания:

P-00. У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь две младшие цифры на 1

Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – увеличивает на 1 число десятков и число единиц. Если перед выполнением команды 2 какая-либо из двух младших цифр равна 9, она не изменяется. Программа для Калькулятора – это последовательность команд.

Сколько есть программ, которые число 23 преобразуют в число 48?

Решение (1 способ, составление таблицы):

- 1) заметим, что при выполнении любой из команд число увеличивается (не может уменьшаться)
- 2) при заданных командах очередное число N может быть получено двумя способами:
- 3) увеличением на 1 (для всех чисел, больших начального числа)

- 4) увеличением обеих цифр на 1 в результате выполнения команды 2 (то есть, фактически командой «+11») – для всех чисел, больших или равных $23 + 11 = 34$, которые **НЕ** оканчиваются на 0;
- 5) увеличением *только младшей* цифры на 1 в результате выполнения команды 2 (то есть, фактически командой «+1») – для всех чисел от 91 до 99, но в нашем диапазоне (23..48) таких нет
- 6) увеличением *только старшей* цифры на 1 в результате выполнения команды 2 (то есть, фактически командой «+10») – для всех чисел, больших 34 и имеющих 9 на конце; в нашем случае под этот вариант подходит только число 39
- 7) таким образом, рекуррентные формулы принимают вид
 $K_N = K_{N-1}$ для всех чисел, меньших, чем 34, а также для всех чисел, оканчивающихся на 0
 $K_N = K_{N-1} + K_{N-11}$ для чисел, больших или равных 34, кроме 39
 $K_N = K_{N-1} + K_{N-11} + K_{N-10}$ для числа 39
- 8) других способов получения числа с помощью исполнителя с заданными командами нет, то есть мы таким образом рассматриваем все возможные программы
- 9) начальное значение: $K_{23} = 1$ (число 23 можно получить единственной пустой программой)
- 10) далее заполняем таблицу:

N	23	...	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
K_N	1	...	1	2	3	4	5	6	8	8	9	10	11	12	14	17	21	26

здесь многоточия означают, что для всех чисел от 23 до 33 включительно количество программ равно 1;

- 11) например, для числа 47 количество программ вычисляется как

$$K_{47} = K_{46} + K_{36} = 17 + 4 = 21$$

а для числа 39 – как

$$K_{39} = K_{38} + K_{28} + K_{29} = 6 + 1 + 1 = 8$$

- 12) Ответ: **26**

Задачи для тренировки¹:

- 1) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 16?

- 2) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 55?

- 3) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18?

- 4) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 17?

- 5) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 25?

- 6) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 12?

- 7) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15?

- 8) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15?

- 9) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 18?

- 10) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1

¹ Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2012-2016 гг.
2. Тренировочные работы МИОО.

2. прибавь 2
3. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 13?

- 11) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 4

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 32?

- 12) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 2
2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 24?

- 13) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 49?

- 14) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 3
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 5 преобразуют в число 27?

- 15) (С.Э. Назаренко) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 3 преобразуют в число 15?

- 16) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 38?

- 17) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 19?

- 18) (Т.В. Белова) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. возведи в квадрат

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 27?

- 19) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь число десятков на 1

Например: при помощи команды 2 число 23 преобразуется в 33. Если перед выполнением команды 2 вторая с конца цифра равна 9, она не изменяется.

Сколько есть программ, которые число 11 преобразуют в число 27?

- 20) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь число десятков на 1

Например: при помощи команды 2 число 23 преобразуется в 33. Если перед выполнением команды 2 вторая с конца цифра равна 9, она не изменяется.

Сколько есть программ, которые число 12 преобразуют в число 36?

- 21) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь каждый разряд числа на 1

Например, число 23 с помощью команды 2 превратится в 34, а 29 в 39 (так как младший разряд нельзя увеличить). Если перед выполнением команды 2 какая-либо цифра равна 9, она не изменяется. Сколько есть программ, которые число 25 преобразуют в число 51?

- 22) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь каждый разряд числа на 1

Например, число 23 с помощью команды 2 превратится в 34, а 29 в 39 (так как младший разряд нельзя увеличить). Если перед выполнением команды 2 какая-либо цифра равна 9, она не изменяется. Сколько есть программ, которые число 24 преобразуют в число 46?

- 23) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь каждый разряд числа на 1

Например, число 23 с помощью команды 2 превратится в 34 а 29 в 39 (так как младший разряд нельзя увеличить). Программа для Калькулятора – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 26 преобразуют в число 49?

- 24) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. увеличь число десятков на 1

Например: при помощи команды 2 число 23 преобразуется в 33. Если перед выполнением команды 2 вторая с конца цифра равна 9, она не изменяется.

Сколько есть программ, которые число 10 преобразуют в число 33?

- 25) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 2
2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 40?

- 26) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 3
2. умножь на 2

Сколько есть программ, которые число 3 преобразуют в число 42?

- 27) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 15?

- 28) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3

Сколько есть программ, которые число 7 преобразуют в число 20?

- 29) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 2
3. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 14?

- 30) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 2
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 49?

- 31) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 2
2. умножь на 3

Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 55?

- 32) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 1,5

Первая из них увеличивает на 1 число на экране, вторая увеличивает это число в 1,5 раза, если число чётное. К нечётным числам вторая команда неприменима. Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 20?

- 33) У исполнителя Калькулятор две команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. умножь на 1,5

Первая из них увеличивает на 1 число на экране, вторая увеличивает это число в 1,5 раза, если число чётное. К нечётным числам вторая команда неприменима. Сколько есть программ, которые число 2 преобразуют в число 22?

- 34) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. сделай чётное
3. сделай нечётное

Первая из них увеличивает на 1 число на экране, вторая умножает это число на 2, третья переводит число x в число $2x + 1$. Например, вторая команда переводит число 10 в число 20, а третья переводит число 10 в число 21. Программа для исполнителя – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 2 преобразуют в число 16?

- 35) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. сделай чётное
3. сделай нечётное
4. умножь на 10

Первая из них увеличивает на 1 число на экране, вторая умножает это число на 2, третья переводит число x в число $2x + 1$, четвертая умножает на 10. Например, вторая команда переводит число 10 в число 20, а третья переводит число 10 в число 21. Программа для исполнителя – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 1 преобразуют в число 15?

- 36) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 2
3. прибавь 5

Программа для исполнителя – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 21 преобразуют в число 30?

- 37) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 1
2. прибавь 3
3. прибавь 6

Программа для исполнителя – это последовательность команд. Сколько существует программ, которые число 21 преобразуют в число 30?

- 38) У исполнителя Калькулятор три команды, которым присвоены номера:

1. прибавь 2
2. прибавь 3
3. прибавь 5

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3
3. Умножить на 2

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд. Сколько существует таких программ, которые исходное число 2 преобразуют в число 14 и при этом траектория вычислений программы содержит число 6 и число 10?

- 92) Исполнитель R17 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3
3. Умножить на 2

Программа для исполнителя R17 – это последовательность команд. Сколько существует таких программ, которые исходное число 3 преобразуют в число 20 и при этом траектория вычислений программы содержит число 9 и число 12?

- 93) (А.Е. Гребенкин, Екатеринбург) Исполнитель U18 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Вычесть 1
2. Вычесть 3
3. Разделить нацело на 3

При выполнении команды 3 выполняется деление нацело (остаток отбрасывается). Программа для исполнителя U18 – это последовательность команд. Сколько существует таких программ, которые исходное число 22 преобразуют в число 2?

- 94) (А.Е. Гребенкин, Екатеринбург) Исполнитель U18 преобразует число, записанное на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Вычесть 1
2. Вычесть 3
3. Взять остаток от деления на 4

Команда 3 выполняется только для чисел, больших, чем 4. Программа для исполнителя U18 – это последовательность команд. Сколько существует таких программ, которые исходное число 22 преобразуют в число 2?

- 95) Исполнитель Май18 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 18 и при этом траектория вычислений содержит число 9 и не содержит число 14?

- 96) Исполнитель Май18 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 20 и при этом траектория вычислений содержит число 10 и не содержит число 15?

- 97) Исполнитель Май18 преобразует число на экране. У исполнителя есть две команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Прибавить 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 20 и при этом траектория вычислений содержит число 15 и не содержит число 10?

- 98) Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 3 результатом является число 46 и при этом траектория вычислений содержит число 12 и не содержит число 25?

- 99) Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 2
3. Умножить на 3

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 5 результатом является число 52 и при этом траектория вычислений содержит число 15 и не содержит число 29?

- 100) Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 3
3. Умножить на 4

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 60 и при этом траектория вычислений содержит число 16 и не содержит число 21?

- 101) Исполнитель Калькулятор преобразует число на экране. У исполнителя есть три команды, которым присвоены номера:

1. Прибавить 1
2. Умножить на 3
3. Умножить на 4

Сколько существует программ, для которых при исходном числе 2 результатом является число 70 и при этом траектория вычислений содержит число 8 и не содержит число 35?