Ігор Воробець / Ihor Vorobets

Завдання: дано два однакові стакани і будівлю висотою в десять поверхів. Потрібно визначити мінімальну кількість спроб кидання стаканів з поверху, щоб знайти поверх, з якого починають розбиватися стакани, чи щоб установити, що стакани не розбиваються при падінні з жодного поверху. Визначити мінімальну кількість таких спроб, якщо дано 2 стакани й будівлю в 10 поверхів, 2 стакани й будівлю в 100 поверхів, 3 стакани й будівлю в 100 поверхів, 3 стакани й будівлю в 1000 поверхів, 5 стаканів і будівлю в 1000 поверхів.

Нехай *K* – кількість стаканів, *N* – кількість поверхів у будівлі. Спершу розглянемо випадок, коли $K=1$. Мінімальну кількість спроб кидання стаканів з *N*-поверхової будівлі, якщо дано 1 стакан, позначимо $f_1(N)$. У цьому випадку стратегія очевидна – ми починаємо кидати стакан з першого поверху, потім з другого і т. д., поки не визначимо, з якого поверху стакани починають розбиватися, або визначимо, що стакани не розбиваються при падінні з жодного поверху. Таким чином, $f_1(N)=N$.

Перейдемо до випадку $K=2$. Тоді мінімальна кількість спроб $f_2(N)$. Алгоритм використання мінімальної кількості спроб кидання стаканів наступний: починаємо кидати стакан з поверху m_1. Якщо стакан розбився – ще залишився інший стакан, тому йдемо з першого поверху й до поверху m_1-1, це буде ℓ спроб. Якщо стакан не розбився – переходимо на поверх m_2 і кидаємо стакан звідти. При цьому кількість поверхів між m_1 і m_2 потрібно підібрати таку, щоб для неї треба було виконати $\ell-1$ спроб. Потім треба переходимо до поверху m_3, щоб між m_2 і m_3 треба виконати $\ell-2$ спроб. Так переходимо через поверхи, поки не дістанемося верхнього поверху. Тоді мінімальна кількість спроб дорівнюватиме $f_2(N)=\ell+1$. Тепер нам потрібно знайти ℓ.

Розглянемо числову послідовність a'_n, де a'_n – мінімальна кількість спроб кидання стаканів, необхідних на *n* поверхах, якщо дано один стакан. Очевидно, що $a'_n=f_1(N)=N$. Для знаходження ℓ ми можемо розв'язати нерівність
$S'_\ell+\ell+1\ge N$, де S'_ℓ – сума перших ℓ членів послідовності a'_n.

Знайденим значенням ℓ буде найменше додатне ціле число, яке задовольняє дану нерівність. Оскільки a'_n є послідовністю натуральних чисел, то сума $S'_\ell=\dfrac{\ell(\ell+1)}{2}$. Тоді

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2}+\ell+1\ge N;$$

$$\frac{\ell^2}{2}+\frac{3}{2}\ell+1-N\ge 0.$$

Тепер розв'яжемо рівняння:

$$\frac{\ell^2}{2}+\frac{3}{2}\ell+1-N=0.$$

Дискримінант $D=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(1-N)=\dfrac{9}{4}-2+2N=\dfrac{9-8+8N}{4}=\dfrac{8N+1}{4}$. Розглядається, що *N* є натуральним числом, тому $D>0$ завжди – рівняння має два корені. Нас цікавлять лише додатні корені.

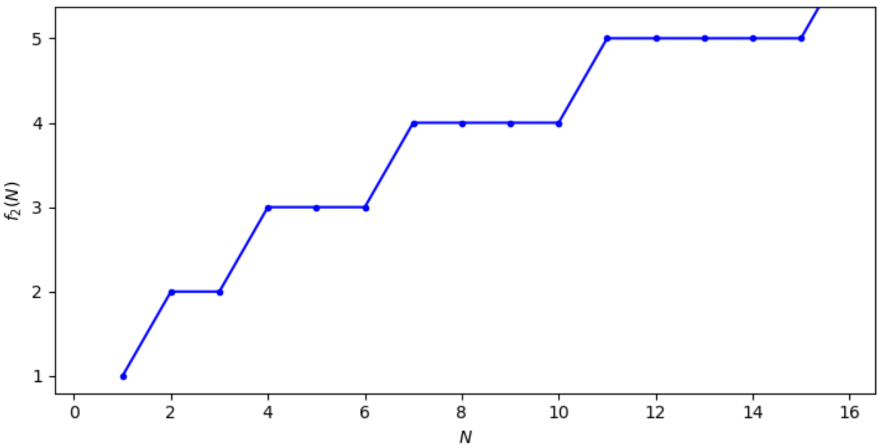
$$\ell_1 = \frac{-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{8N+1}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-3-\sqrt{8N+1}}{2}$$ – завжди від'ємний, не цікавить;

$$\ell_2 = \frac{-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{8N+1}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-3+\sqrt{8N+1}}{2} = \frac{\sqrt{8N+1}-3}{2}$$ – може бути додатним.

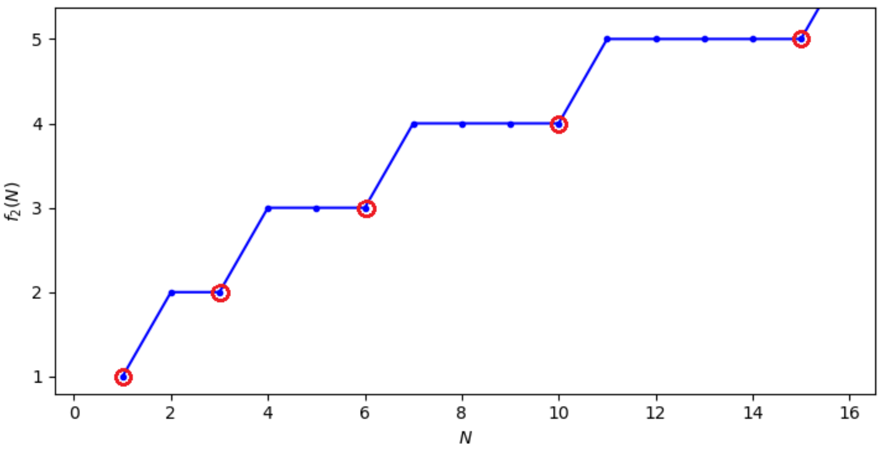
Оскільки коефіцієнт біля ℓ^2 $\left(\frac{1}{2}\right)$ є додатним, то розв'язок нерівності охоплює проміжок $\left[\frac{\sqrt{8N+1}-3}{2}, +\infty\right)$, а значення $\ell = \left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} \right\rceil - 1$. Тоді мінімальна кількість спроб дорівнює $f_2(N) = \left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} \right\rceil - 1 + 1 = \left\lceil \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} \right\rceil$.

Отже, якщо дано 10 поверхів і 2 стакани, то мінімальна кількість спроб $f_2(10) = \left\lceil \frac{\sqrt{8 \cdot 10+1}-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{9-1}{2} \right\rceil = 4$. Якщо дано 100 поверхів і 2 стакани, то $f_2(100) = \left\lceil \frac{\sqrt{8 \cdot 100+1}-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\sqrt{801}-1}{2} \right\rceil = \lceil 13.65 \rceil = 14$.

Тепер розглянемо випадок $K=3$. Алгоритм такий самий. Обчислення ℓ відрізняється лише тим, що тут ми використовуватимемо послідовність a''_n, де a''_n – мінімальна кількість спроб кидання стаканів, необхідних на n поверхах, якщо дано два стакани. Проте спершу розглянемо значення $f_2(N)$ для різних N (див. графік).



На цьому графіку розглянемо максимальні значення N, для яких $f_2(N)$ має певне значення. Вони позначені на графіку нижче. Ці значення позначають максимальну кількість поверхів N, для якої мінімальна кількість спроб з двома стаканами дорівнює $f_2(N)$.



Ці значення і є елементами послідовності a''_n: 1, 3, 6, 11, 15,… . Загалом послідовність a''_n можна описати як рекурентну послідовність

$$a''_n = \begin{cases} 1, \ n = 1 \\ a''_{n-1} + n, \ n > 1 \end{cases}$$

Сума n перших членів послідовності a''_n дорівнює $S''_n = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+$ $+4) + \ldots$. У цій сумі додаються числа від 1 до n:

- $1+1+\ldots+1$ – n разів;
- $2+2+\ldots+2$ – $n-1$ разів;
- $3+3+\ldots+3$ – $n-2$ разів і т. д.;
- n – 1 раз.

Тоді суму S''_n можна записати як

$$S''_n = \sum_{i=1}^{n} i(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} (ni - i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} (i(n+1) - i^2) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Тут $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ – сума послідовності натуральних чисел, а $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ – сума послідовності квадратів натуральних чисел. Тоді

$$S''_n = (n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)\left(\frac{n^2+n}{2}\right) - \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{n^3+2n^2+n}{2} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Таким чином, мінімальної кількості спроб кидання стаканів обчислюється так: $f_3(N) = \ell + 1$, де ℓ – найменше додатне ціле число, що задовольняє нерівність

$$S''_\ell + \ell + 1 \geq N;$$

$$\frac{\ell^3 + 3\ell^2 + 2\ell}{6} + \ell + 1 \geq N;$$

$$\frac{\ell^3}{6} + \frac{\ell^2}{2} + \frac{4\ell}{3} + 1 - N \geq 0.$$

Розв’яжемо рівняння

$$\frac{\ell^3}{6} + \frac{\ell^2}{2} + \frac{4\ell}{3} + 1 - N = 0 \quad \Big| \cdot 6;$$

$$\ell^3 + 3\ell^2 + 8\ell + 6 - 6N = 0.$$

Щоб розв'язати дане кубічне рівняння, нам потрібно привести його до канонічного вигляду. Для цього введемо змінну $t = \ell + \dfrac{3}{3 \cdot 1} = \ell + 1$, тоді $\ell = t - 1$. Підставляємо нову змінну:

$(t-1)^3 + 3(t-1)^2 + 8(t-1) + 6 - 6N = 0$;

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + 3(t^2 - 2t + 1) + 8t - 8 + 6 - 6N = 0$;

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + 3t^2 - 6t + 3 + 8t - 8 + 6 - 6N = 0$;

$t^3 + 5t - 6N = 0$.

Дискримінант рівняння $D = \dfrac{(-6N)^2}{4} + \dfrac{5^3}{27} = \dfrac{36N}{4} + \dfrac{125}{27} = 9N^2 + \dfrac{125}{27}$. Для всіх натуральних значень N дискримінант $D > 0$, а, отже, рівняння має один дійсний і два комплексні корені

Застосуємо метод Кардано для розв'язання кубічного рівняння. Введемо змінні u і v, де $t = u + v$. Тоді

$$u = \sqrt[3]{\frac{6N}{2} - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} = \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}};$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{6N}{2} + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} = \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}}.$$

Звідси

$$t = \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}},$$

а також

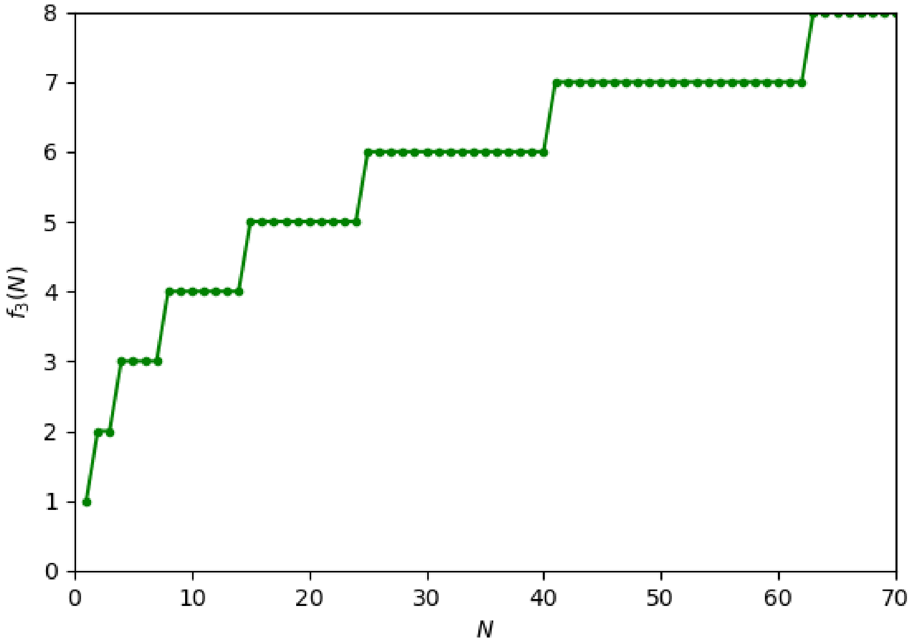
$$\ell = \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} - 1.$$

Коефіцієнт біля ℓ^3 $\left(\dfrac{1}{6}\right)$ додатний, отже, до розв'язку нерівності належить проміжок $\left[\sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} - 1, +\infty\right)$. Тоді значення ℓ обчислюється наступним чином: $\ell = \left\lceil \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} - 1 \right\rceil = \left\lceil \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} \right\rceil - 1$, а мінімальна кількість спроб дорівнює $f_3(N) = \left\lceil \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} \right\rceil - 1 + 1 =$

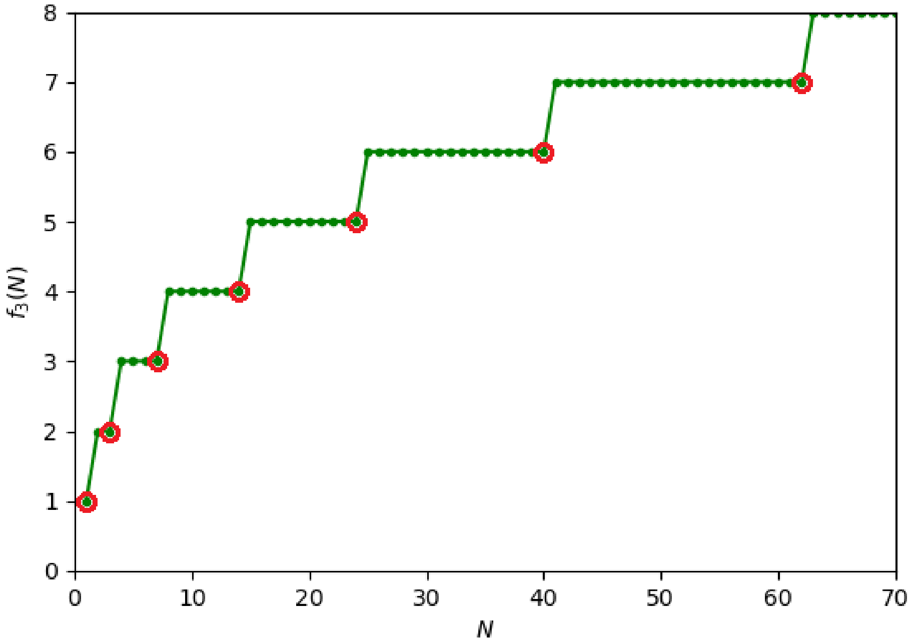
$$= \left\lceil \sqrt[3]{3N - \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3N + \sqrt{9N^2 + \frac{125}{27}}} \right\rceil.$$

Якщо дано 100 поверхів і 3 стакани, то мінімальна кількість спроб дорівнює $f_3(100) = \left\lceil \sqrt[3]{3 \cdot 100 - \sqrt{9 \cdot 100^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 \cdot 100 + \sqrt{9 \cdot 100^2 + \frac{125}{27}}} \right\rceil = \lceil 8.24 \rceil = 9$. Якщо дано 1000 поверхів і 3 стакани, тоді $f_3(1000) = \left\lceil \sqrt[3]{3 \cdot 1000 - \sqrt{9 \cdot 1000^2 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 \cdot 1000 + \sqrt{9 \cdot 1000^2 + \frac{125}{27}}} \right\rceil = \lceil 18.08 \rceil = 19$.

Розглянемо $K=4$. Так само, мінімальна кількість спроб з 4 стаканами $f_4(N)=\ell+1$, де ℓ – найменше додатне ціле число, яке задовольняє нерівність $S'''_\ell+\ell+1\geq N$. Тут S'''_ℓ – сума ℓ перших членів послідовності a'''_n, де a'''_n – мінімальна кількість спроб кидання стаканів, необхідних на *n* поверхах, якщо дано три стакани. Для того, щоб визначити послідовність a'''_n, розглянемо значення $f_3(N)$ для різних *N*, графік яких подано нижче.



Для значень членів послідовності a'''_n візьмемо максимальні значення *N*, для яких $f_2(N)$ має значення a'''_N. Вони позначені на графіку нижче.



Отримана послідовність a'''_n має значення 1, 3, 7, 14, 24, 40, 62, 92, 129, 174, 230, 298, 376, 468, 574, 696, 832, 986, ….

Першою різницею a'''_n *є послідовність* $\Delta a'''_n$*: 2, 4, 7, 10, 16, 22, 30, 37, 45, 56, 68, 78, 92, 106, 122, 136, 154, …. Друга різниця* $\Delta^2 a'''_n$*: 2, 3, 3, 6, 6, 8, 7, 8, 11, 12, 10, 14, 14, 16, 14, 18, …. Я не бачу ніякої закономірності в цій послідовності.*

Як альтернативний варіант розроблено програмний код, який виконує обчислення $f_K(N)$ *для значень* $K > 3$. *Відповідно до того, що виводить цей код, для* $K = 5$ *значення* $f_5(1000) = 11$.