Лабораторная работа № 2
Итерационные методы поиска экстремумов

Градиентный спуск — метод нахождения локального экстремума (минимума или максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например, метод золотого сечения. Также можно искать не наилучшую точку в направлении градиента, а какую-либо лучше текущей.
Наиболее простой в реализации из всех методов локальной оптимизации. Имеет довольно слабые условия сходимости, но при этом скорость сходимости достаточно мала (линейна).

Описание метода:

Пусть целевая функция имеет вид:

$$F(\vec{x}) :\ \mathbb{X} \to \mathbb{R}.$$

И задача оптимизации задана следующим образом:

$$F(\vec{x}) \to \min_{\vec{x} \in \mathbb{X}}$$

В случае, когда требуется найти максимум, вместо $F(\vec{x})$ используется $-F(\vec{x})$

Основная идея метода заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla F$:

$$\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{[j]})$$

где $\lambda^{[j]}$ выбирается

- постоянной, в этом случае метод может расходиться;
- дробным шагом, то есть длина шага в процессе спуска делится на некое число;
- наискорейшим спуском:
    1. Для поиска минимума $F(\vec{x})$ получаем $\lambda^{[j]} = \mathrm{argmin}_\lambda F(\vec{x}^{[j+1]}) = \mathrm{argmin}_\lambda\, F(\vec{x}^{[j]} - \lambda \nabla F(\vec{x}^{[j]}))$
    2. Для поиска максимума $F(\vec{x})$ получаем $\lambda^{[j]} = \mathrm{argmax}_\lambda F(\vec{x}^{[j+1]}) = \mathrm{argmax}_\lambda\, F(\vec{x}^{[j]} + \lambda \nabla F(\vec{x}^{[j]}))$

Шаги алгоритма:

1. Задают начальное приближение и точность расчёта $\vec{x}^0$, ε
2. Рассчитывают $\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \lambda^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{[j]})$, где $\lambda^{[j]} = \mathrm{argmin}_\lambda\, F(\vec{x}^{[j]} - \lambda \nabla F(\vec{x}^{[j]}))$
3. Проверяют условие остановки:
    - Если $|\vec{x}^{[j+1]} - \vec{x}^{[j]}| > \varepsilon$, $|F(\vec{x}^{[j+1]}) - F(\vec{x}^{[j]})| > \varepsilon$ или $\|\nabla F(\vec{x}^{[j+1]})\| > \varepsilon$ (выбирают одно из условий), то $j = j + 1$ и переход к шагу 2.
    - Иначе $\vec{x} = \vec{x}^{[j+1]}$ и останов.

Задание и Ход работы:
1. Ознакомиться с понятием градиента (градиент.pdf) и методом градиентного спуска. (Вспомнить дифференцирование функций)
2. Написать программу поиска максимумов и минимумов функции F(x,y,z) методом градиентного поиска (с постоянным шагом).
Входные данные в программу: Пользователь вводит диапазон поиска и стартовую точку поиска и выбирает направление поиска (min, max). (Стартовую точку поиска можно генерировать случайно в указанном диапазоне)
Выходные данные: Найденный экстремум — точка и соответствующее значение функции.

Вид функции и Варианты:

F(x,y,z) = f1*f2 + f3*f4

Вариант	f1	f2	f3	f4
1	xy	yz	$2x^2 + 3$	y
2	x^2	z^2	y + z	y^2
3	xy+1	yz^2	z + 4x	y^3
4	y^2	z^3	xy + 2y	z+1
5	xy	z^2	$2x^2 + 3$	y^2
6	x^2	yz^2	y + z	y^3
7	xy+1	z^3	z + 4x	z+1
8	y^2	yz	xy + 2y	y^3
9	xy	yz^2	$2x^2 + 3$	z+1
10	x^2	yz	y + z	z+1
11	xy+1	yz	z + 4x	y
12	y^2	z^2	xy + 2y	y^2
13	xy	z^3	$2x^2 + 3$	y^3
14	x^2	z^3	y + z	z+1
15	xy+1	z^2	z + 4x	$2y^2$
16	y^2	$1+yz^2$	xy + 2y	$2y^3$
17	xy	2yz	$2x^2 + 3$	z+1
18	x^2	$2z^3$	y + z	2+y
19	xy+1	$2z^2$	z + 4x	zy^2
20	y^2	$2yz^2$	xy + 2y	$3y^3$
21	xy	$3z^2$	$2x^2 + 3$	z+4
22	x^2	$2+z^3$	y + z	yz+1
23	xy+1	$2+z^2$	z + 4x	$z+y^2$
24	y^2	yz^2	xy + 2y	$3zy^2$
25	xy	$2z^3$	$2x^2 + 3$	zy+y