

**Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Кафедра высшей математики**

**Линейная алгебра. Аналитическая геометрия.
Дифференциальное исчисление функций одной и несколь-
ких переменных.**

**Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей.**

Брест 2006

УДК 519. 2 (076)

Практикум составлен в соответствии с рабочей программой курса «Высшая математика» для технических специальностей. В нем содержатся материалы по линейной алгебре, аналитической геометрии, введению в математический анализ, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных.

Предлагаемое пособие предназначено для проведения практических занятий в аудитории и выдачи блоков домашних заданий студентам для индивидуального выполнения.

Составители: *Лизунова И.В., доцент*
Денисович О.К., ассистент
Остапчук Е.М., ассистент

Рецензент: Савчук В.Ф., зав. кафедрой информатики прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент.

© Учреждение образования «Брестский государственный технический университет» 2006

Глава 1. Элементы линейной алгебры.

1.1 Определители.

Свойства определителей. Вычисление определителей второго и третьего порядков. Вычисление определителей n – го порядка.

1.1 Определителем n – го порядка называется число Δ_n , записываемое в виде квадратной таблицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое согласно ниже указанным правилам. Числа a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) называются элементами определителя. Индекс i указывает номер строки, а j – номер столбца определителя, на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Любую строку или столбец определителя будем называть рядом. Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$. Побочную диагональ определителя образует совокупность элементов $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ – го порядка, полученный из определителя n – го порядка, вычеркиванием i – й строки и j – го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, в определителе $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ минором M_{21} является определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания второй строки и первого столбца: $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$; соответственно алгебраическим дополнением A_{21} будет число $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот;

2. если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;
3. определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю;
4. если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого – либо ряда умножить на число, то определитель умножится на это число;
5. если все элементы какого – либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;
6. определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;
7. если каждый элемент какого – либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых;
8. определитель не изменится, если ко всем элементам какого – либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число;
9. сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj};$$

10. сумма всех произведений элементов какого – либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю.

Определителем второго порядка называется число вычисленное по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель третьего порядка можно находить по правилу “треугольников” (правило (Саррюса):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Вычисление проводится по схеме:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Первое из трех слагаемых, входящих в сумму со знаком “+”, есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведение элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму со знаком “-”, определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

Вычисление определителя 3-го порядка можно свести к вычислению трех определителей 2-го порядка, предварительно разложив определитель 3-го порядка по одному из рядов (свойство 9).

Пример: Вычислить определитель разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ = 3(5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2(2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) = -3.$$

Рассмотрим вычисление определителей n-го порядка ($n > 3$).

Метод приведения определителя к треугольному виду (с помощью элементарных преобразований) заключается в том, что все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю. В этом случае определитель равен произведению элементов его диагонали.

Пример. Вычислить определитель методом приведения к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

При нахождении значения определителя были выполнены следующие операции: первую строку, умноженную на – 1, сложили со второй, третьей, четвертой строками; вторую строку умножили на – 2, на – 3 и сложили соответственно с третьей и четвертой строками; третью строку умножили на – 3 и сложили с четвертой строкой.

Метод эффективного понижения порядка (или метод рекуррентных соотношений) состоит в том, что определитель n – го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка разложением по строке или столбцу.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение

Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму (см. свойство 8). Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный определитель по элементам первой строки (свойство 9) и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -14 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56 + 18) = 38.$$

Пример. Вычислить, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a^2+1)+2a \\ b & b^2+1 & (b^2+1)+2b \\ c & c^2+1 & (c^2+1)+2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2+1 & a^2+1 \\ b & b^2+1 & b^2+1 \\ c & c^2+1 & c^2+1 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a & a^2+1 & 2a \\ b & b^2+1 & 2b \\ c & c^2+1 & 2c \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Так как третий столбец данного определителя можно представить в виде суммы двух столбцов, определитель можно представить в виде суммы двух определителей (свойство 7). Второй и третий столбцы одинаковы в первом определителе, а во втором определителе третий столбец пропорционален первому, следовательно, оба эти определителя равны нулю (свойства 3 и 6).

Задания для аудиторных занятий.

1. Вычислить определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2x & 2xy \\ 1 & y \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

Ответы: а) $(2; -3)$; б) $\frac{\pi n}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Вычислить определители и сформулировать соответствующее свойство:

$$1. \text{ а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$2. \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix};$$

$$3. \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$4. \text{ а) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & -20 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 4 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & -10 \end{vmatrix};$$

$$5. \text{ а) } 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix};$$

$$6. \text{ а) } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$7. \text{ а) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -9 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

4. Решить уравнения:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6.$$

Ответы: а) $-\frac{5}{3}$; 2, б) 1.

5. Решить неравенство:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 4,$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

Ответы: а) $\left(-\infty; -\frac{36}{5}\right]$, б) $(-\sqrt{23}; \sqrt{23})$.

6. Вычислить определители четвертого порядка:

$$\text{1. а) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Ответы: а) 48, б) 1.

$$\text{2. а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ответы: а) 160, б) 900.

7. Вычислить определители приведением к треугольному виду:

$$a) \begin{vmatrix} -n & 1-n & 2-n & \dots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \\ 2-n & 3-n & 4-n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$б) \left\{ \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} \right\}_n$$

Ответы: а) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, б) 0.

Задания для индивидуального выполнения.

1. Для данного определителя найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2} , a_{2j} . Вычислить определитель: а) по правилу “треугольников”; б) разложив его по элементам какого – либо ряда:

| | | |
|------------|--|---|
| I | а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 3$ | б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ $i = 1, j = 2$ |
| II | а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 1, j = 1$ | б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 1$ |
| III | а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$ $i = 3, j = 1$ | б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 1$ |

| | | |
|-----------|--|---|
| IV | а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 2, j = 3$ | б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 1, j = 2$ |
|-----------|--|---|

2. Решить уравнение:

| | | |
|------------|---|--|
| I | а) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0$ | б) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ |
| II | а) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6$ | б) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4$ |
| III | а) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34$ | б) $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0$ |
| IV | а) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ y^2 & 2x \end{vmatrix} = 5$ | б) $\begin{vmatrix} 6x^3 & x+4 \\ 10x & 0 \end{vmatrix} = 1$ |

3. Вычислить определитель четвертого порядка:

| | | |
|------------|---|---|
| I | а) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ | б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ |
| II | а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ | б) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ |
| III | а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ | б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ |
| IV | а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ | б) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ |

Ответы: 3. I а) 18, б) 4; II а) 18; б) 20; III а) 27, б) 17; IV а) -6, б) 150.

1.2 Матрицы.

Операции над матрицами. Обратная матрица.

Элементарные преобразования матрицы. Понятие ранга матрицы.

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из mn чисел a_{ij} , называемых элементами матрицы, расположенных в m строках и n столбцах, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; A_{m \times n}; [a_{ij}], (a_{ij}) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Если $m=n$, то матрица называется квадратной. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. Единичной (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали. Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Над матрицами можно осуществлять следующие операции: сложение, умножение на число, умножение матриц.

Суммой матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинакового размера называется матрица $C = [c_{ij}]$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) на число $\alpha \in R$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), причем $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall ij$.

Матрицы $A_{m \times p}$ и $B_{p \times n}$ называются согласованными, если число столбцов матрицы $A_{m \times p}$ равно числу строк матрицы $B_{p \times n}$.

Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}$) на согласованную матрицу $B = [b_{ij}]$ ($i = \overline{1, p}; j = \overline{1, n}$) называется матрица $C = [c_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), причем

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Если определитель матрицы $A_{n \times n}$ отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то матрица называется невырожденной.

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = E$, где E – единичная матрица n – го порядка.

Теорема. Если A невырожденная квадратная матрица порядка n , то для нее существует обратная матрица, которую можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие операции:

- 1) умножение строки (столбца) матрицы на число;
- 2) прибавление к строке (столбу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;
- 3) перестановка двух строк (столбцов) матрицы.

Рангом (r_A) матрицы A называют наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Теорема. Ранг матрицы, полученной из данной с помощью элементарных преобразований, равен рангу данной матрицы.

При вычислении ранга матрицы используют метод приведения матрицы к трапецевидной форме, метод окаймляющих миноров и другие.

Примеры. Найти ранги матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Решение

а) С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к трапецевидной форме. Прибавим ко второй строке первую:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Вторую строку умножим на -1 и прибавим к третьей:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получим трапецевидную матрицу, ранг которой равен 2.

б) Для вычисления ранга матрицы воспользуемся методом окаймляющих миноров. Среди миноров 2-го порядка есть отличные от нуля, например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0. \text{ Все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю:}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 2 - 6 - 12 = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 2 - 10 - 12 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 6 + 30 + 8 = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля определитель, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Задания для аудиторных занятий.

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найти $2A + 4B - 3C$.

$$\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad -6 \quad 7], \quad \text{в) } [1 \quad -4 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{д) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ответы: а) } \begin{bmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{bmatrix}, \quad \text{в) } [-18], \quad \text{г) } \begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ 3 & 11 & -7 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{д) } \begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Проверить, имеет ли место равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: равенство выполняется.

4. Для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 4.$$

$$\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 18 & -15 \\ 0 & 48 \end{bmatrix}.$$

5. Для данных матриц найти обратные матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Проверить, что $AA^{-1} = E$.

$$\text{Ответы: а) } \begin{bmatrix} 5/63 & -1/63 \\ 1/21 & 4/21 \end{bmatrix}, \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

6. Найти матрицу X из уравнений:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \text{ б) } X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ответ: а) } \begin{bmatrix} 1 & 13/5 \\ -1 & -7/10 \end{bmatrix}, \text{ б) } \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \text{ в) } \begin{bmatrix} 5/4 & 57/8 \\ 3/2 & -7/4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

7. Найти ранг матрицы и указать какой – либо базисный минор:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -3 \end{bmatrix}; \text{ в) } \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \text{ г) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ответы: а) $r = 3$, б) $r = 3$, в) $r = 3$, г) $r = 3$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$:

| | |
|------------|---|
| I | $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, f(x) = 3x^2 - x + 5$ |
| II | $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ |
| III | $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ |
| IV | $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 - 4x + 3$ |

2. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB , б) BA , в) A^{-1} , г) AA^{-1} , д) $A^{-1}A$.

| | |
|------------|--|
| I | $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ |
| II | $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ |
| III | $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ |
| IV | $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ |

3. Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

| | | | |
|------------|---|--|---|
| I | a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ | б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ | в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ |
| II | a) $\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ | б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ | в) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ |
| III | a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ | б) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ | в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ |
| IV | a) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ | б) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ | в) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ |

Ответы:

1. I $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$, II $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, III $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, IV $\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.

2.

| | |
|-----|--|
| I | a) $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & -28 & 14 \\ 3 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -7 \\ 18 & -18 & 22 \\ 4 & 9 & -12 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1/7 & 1/8 & 5/28 \\ -1/7 & 0 & 4/7 \\ -1/7 & 1/8 & 1/3 \end{bmatrix}$, г) E, д) E; |
| II | a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -1 & 9 & 27 \\ -2 & 7 & 33 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 26 & 31 & 3 \\ 11 & 17 & 10 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -5/3 & 8/3 & -2 \\ 4/3 & -7/3 & 2 \\ -1/3 & 4/3 & -1 \end{bmatrix}$, г) E, д) E; |
| III | a) $\begin{bmatrix} 11 & -7 & -2 \\ 15 & -13 & 8 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -14 & 12 & -28 \\ 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -1/50 & 1/25 & 9/50 \\ 4/25 & 9/50 & 3/50 \\ -1/10 & 1/5 & -1/10 \end{bmatrix}$, г) E, д) E; |
| IV | a) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 27 \\ 6 & 15 & 27 \\ 4 & -6 & 23 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 15 & 21 & 1 \\ -4 & 28 & 20 \\ -12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -3/23 & 3/23 & -1/23 \\ 7/46 & 9/92 & 3/92 \\ -11/46 & -1/92 & 31/92 \end{bmatrix}$, г) E, д) E. |

3.

| | | | |
|----|-------------------|-----|-------------------|
| I | a) 2, б) 2, в) 3; | III | a) 2, б) 2, в) 3; |
| II | a) 2, б) 2, в) 3; | IV | a) 2, б) 2, в) 3. |

1.5. Векторное и смешанное произведения векторов.

Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Приложения векторного и смешанного произведений векторов. Полярная система координат.

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. длина вектора \vec{c} равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;
2. вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} , т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3. векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют правую тройку, т.е. кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} по второму вектору \vec{b} происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{c} .

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (антиперестановочность);
2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (распределительность);
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$).

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$,

$$\vec{b} = (x_b; y_b; z_b), \text{ то } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \right).$$

С помощью векторного произведения можно вычислить момент \vec{M} силы \vec{F} , приложенной в точке B относительно точки A : $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$.

Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Геометрически модуль смешанного произведения – это число равное объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} как на ребрах и имеющих общее начало.

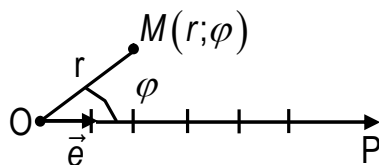
Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} - компланарны.

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$,

$$\vec{b} = (x_b; y_b; z_b), \vec{c} = (x_c; y_c; z_c), \text{ то } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Полярная система координат задается точкой O , называемой полюсом, лучом OP , называемым полярной осью, и единичным вектором \vec{e} того же направления что и луч OP .

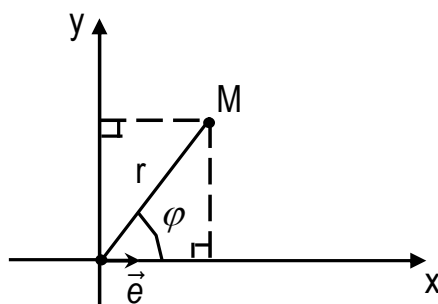
Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью, рассматриваемым в положительном направлении (против хода часовой стрелки).



Числа r и φ называются полярными координатами точки M : r - называется полярным радиусом, φ - полярным углом. Полярный радиус r изменяется в промежутке $[0; +\infty)$, а полярный угол φ в промежутке $[0; 2\pi)$ (или $(-\pi; \pi]$).

Если совместить полярную систему координат с декартовой системой координат: совместить полюс O с началом координат системы xOy , а полярную ось – с положительной полуосью Ox , то связь между декартовыми и полярными координатами точки устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.5)$$



Из системы (1.5) получим равенства:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (1.6).$$

При определении полярного угла φ следует учитывать знаки x и y и то, что $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Пример 1. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

Решение

Имеем $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$, $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в третьей четверти, следовательно, с учетом того, что $0 \leq \varphi < 2\pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Итак, $M\left(2; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Формулы (1.5) и (1.6) дают возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к уравнениям в полярных координатах и наоборот.

Пример 2. Найти уравнение линии $r = 2 \cos \varphi$ в декартовой системе координат.

Решение

Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ или $x^2 + y^2 = 2x$. Полученное уравнение можно привести к виду $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $C(1; 0)$ радиуса $R = 1$.

Пример 3. Составить таблицу значений функции $r = \cos 3\varphi$ и построить ее график.

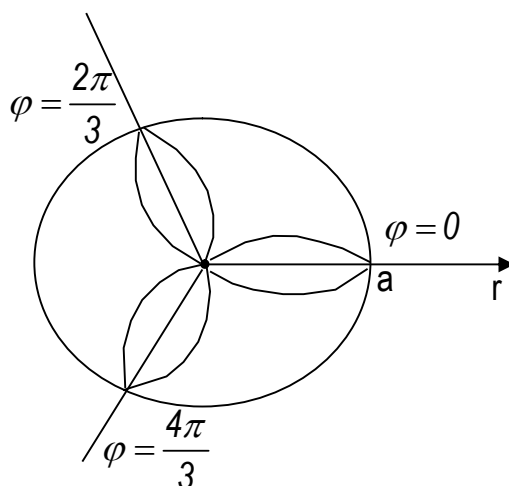
Решение

Пусть $a = 1$; период функции $T = \frac{2\pi}{3}$. При $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ значения функции неотрицательны. Составим таблицу значений функции для $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ с шагом $h = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$.

| | | | | | |
|-----------|------------------|-------------------|---|------------------|-----------------|
| φ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{12}$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| r | 0 | 0,87 | 1 | 0,87 | 0 |

График для $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ представляет собой кривую, похожую на “лепесток розы”, симметричный относительно луча $\varphi = 0$. В силу периодичности функции

$\cos 3\varphi$ для $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$ получаем такие же лепестки, симметричные относительно лучей $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ соответственно. Все “лепестки розы” располагаются внутри окружности радиуса a :



Задания для аудиторных занятий

1. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: а) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$; в) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

Ответы: а) 12; б) 24; в) 60.

2. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} \times \vec{b}$, б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

Ответы: а) $(5; 1; 7)$; б) $(10; 2; 14)$; в) $(20; 4; 28)$.

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если известно, что $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(5; 2; 6)$.

Ответ: $2\sqrt{13}$.

4. Сила $\vec{F} = (2; 2; 9)$ приложена к точке $A(4; 2; -3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента \vec{M} этой силы относительно точки $B(2; 4; 0)$.

Ответ: $|\vec{M}| = 28$, $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{2}{7}$.

5. Являются ли коллинеарными векторы $\vec{a} = (-1; 2; 4)$ и $\vec{b} = (2; -4; -8)$.

Ответ: да.

6. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $S(4;3;5)$.
Вычислить ее объем V и высоту H , опущенную на грань ACS .

Ответ: $V = 2$, $H = 2\sqrt{3}$.

7. Компланарны ли следующие векторы:

а) $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (-1;9;-11)$;

б) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$.

Ответы: а) компланарны, б) некомпланарны.

8. Лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(6;1;3)$ в одной плоскости?

Ответ: лежат.

9. Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$,

$M_2\left(1; \frac{3\pi}{4}\right)$, $M_3\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_4\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$, $M_5\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_6(4;0)$, $M_7\left(3; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Найти декартовы координаты этих точек.

Ответы: $M_1(\sqrt{3};1)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4(-\sqrt{3};1)$,

$M_5\left(0; \frac{3}{2}\right)$, $M_6(4;0)$, $M_7\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

10. Точки заданы декартовыми координатами $A(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $B(0;-3)$, $C(\sqrt{3};1)$.

Построить эти точки и найти их полярные координаты.

Ответы: $A\left(2; \frac{7\pi}{4}\right)$, $B\left(3; \frac{3\pi}{2}\right)$, $C\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$.

11. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать эти уравнения в декартовых координатах.

1. $r = 5$, 2. $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 3. $r = a\varphi$ (спираль Архимеда),

4. $r = 6 \cos \varphi$, 5. $r = 10 \sin \varphi$, 6. $r \cos \varphi = 2$,

7. $r = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ (парабола), 8. $r = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида),

9. $r = a \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза),

10. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

12. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

1. Прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5;

2. Окружности радиуса $R = 4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс;
 3. Окружностей радиусом $R = 3$, касающихся полярной оси в полюсе.
- Ответы: 1) $r \sin \varphi = \pm 5$, 2) $r = 8 \cos \varphi$, 3) $r = \pm 6 \sin \varphi$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны три силы \vec{P} , \vec{Q} , \vec{R} приложенные к точке A. Вычислить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

| | |
|------------|---|
| I | $\vec{P} = (2; 0; 4)$, $\vec{Q} = (1; 2; -1)$, $\vec{R} = (3; 5; 1)$, $A(1; 2; 3)$, $B(4; 3; 5)$ |
| II | $\vec{P} = (-3; -4; 0)$, $\vec{Q} = (-3; 5; 2)$, $\vec{R} = (5; 6; 4)$, $A(3; 4; -2)$, $B(5; 7; 9)$ |
| III | $\vec{P} = (5; -1; 4)$, $\vec{Q} = (0; 2; 7)$, $\vec{R} = (-5; 2; 6)$, $A(-2; 3; -7)$, $B(5; 6; 8)$ |
| IV | $\vec{P} = (-3; 4; 1)$, $\vec{Q} = (2; -2; 1)$, $\vec{R} = (-3; 0; 2)$, $A(-2; 0; 3)$, $B(4; 0; 5)$ |

Ответы:

| | |
|------------|---|
| I | $ \vec{M} = 5\sqrt{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{13}}$. |
| II | $ \vec{M} = \sqrt{4026}$, $\cos \alpha = -\frac{59}{\sqrt{4026}}$, $\cos \beta = -\frac{16}{\sqrt{4026}}$, $\cos \gamma = \frac{17}{\sqrt{4026}}$. |
| III | $ \vec{M} = \sqrt{14638}$, $\cos \alpha = -\frac{6}{\sqrt{14638}}$, $\cos \beta = -\frac{119}{\sqrt{14638}}$, $\cos \gamma = \frac{21}{\sqrt{14638}}$. |
| IV | $ \vec{M} = 4\sqrt{74}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{74}}$, $\cos \beta = -\frac{8}{\sqrt{74}}$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{74}}$. |

2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить площадь грани ABC и объем пирамиды.

| | |
|------------|--|
| I | $A(-4; -2; -3)$, $B(2; 5; 7)$, $C(6; 3; -1)$, $D(6; -4; 1)$ |
| II | $A(4; 2; 3)$, $B(-5; -4; 2)$, $C(5; 7; -4)$, $D(6; 4; -7)$ |
| III | $A(3; 5; 3)$, $B(-3; 2; 8)$, $C(-3; -2; 6)$, $D(7; 8; -2)$ |
| IV | $A(-8; 7; 3)$, $B(-3; 4; 1)$, $C(3; 0; 5)$, $D(-1; 2; -2)$ |

Ответы:

| | |
|----------|-------------------------------------|
| I | $S_{ABC} = 2\sqrt{665}$, $V = 116$ |
|----------|-------------------------------------|

| | |
|------------|--|
| II | $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{7826}, V = \frac{16}{3}$ |
| III | $S_{ABC} = \sqrt{349}, V = \frac{26}{3}$ |
| IV | $S_{ABC} = \sqrt{273}, V = 5$ |

3. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Являются ли векторы $2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{b}+2\vec{c}$ компланарны?

| | |
|------------|--|
| I | $\vec{a} = (-1; 2; 4), \vec{b} = (-3; 0; 6), \vec{c} = (-2; 3; 5)$ |
| II | $\vec{a} = (2; -3; 5), \vec{b} = (-1; 3; 0), \vec{c} = (5; 3; 4)$ |
| III | $\vec{a} = (2; 2; 4), \vec{b} = (-3; 0; 5), \vec{c} = (-2; 1; 3)$ |
| IV | $\vec{a} = (1; 2; 6), \vec{b} = (-5; 4; 2), \vec{c} = (0; 3; 7)$ |

Ответы:

| | |
|------------|---------------|
| I | некомпланарны |
| II | некомпланарны |
| III | компланарны |
| IV | компланарны |

4. Построить кривые, заданные уравнениями в полярной системе координат.

| | |
|------------|---|
| I | а) $r = 2 \sin 2\varphi$, б) $r = 2(1 - \cos \varphi)$, в) $r = \frac{1}{2 - \sin \varphi}$ |
| II | а) $r = 2 \cos 2\varphi$, б) $r = 3(1 + \sin \varphi)$, в) $r = \frac{2}{2 - \cos \varphi}$ |
| III | а) $r = 2 \sin 2\varphi$, б) $r = 3(1 + \cos \varphi)$, в) $r = \frac{2}{1 - \cos \varphi}$ |
| IV | а) $r = 2 \cos 2\varphi$, б) $r = 3(1 - \sin \varphi)$, в) $r = \frac{2}{1 + \cos \varphi}$ |

Собственные значения и собственные векторы. Преобразование матрицы линейного преобразования при переходе к другому базису.

Так как вектор $\vec{b} \neq 0$, то число λ определяется для вектора \vec{b} однозначно. Нулевой вектор не считается собственным вектором преобразования f , хотя он удовлетворяет условию (1.7), причем для любого λ .

Собственные векторы матрицы A находят следующим образом:

1. определяют собственные значения матрицы A . Если собственных значений нет, то не существует и собственных векторов. Собственными значениями для действительного линейного пространства являются только действительные корни характеристического уравнения.
2. Записывают матричное равенство $[A - \lambda E]X = 0$ в координатной форме:

[illegible]

38

При нахождении матрицы линейного преобразования, переводящего векторы \vec{a}_i в векторы \vec{b}_i , $i = \overline{1, n}$, рассматривают матричное уравнение $A = CB^{-1}$, где A – искомая матрица. Столбцы матрицы C и B состоит из координат векторов \vec{a}_i и \vec{b}_i соответственно.

Если даны два базиса \vec{e}_i , $i = \overline{1, n}$, \vec{e}'_i , $i = \overline{1, n}$ и матрица A линейного преобразования в базисе \vec{e}_i , $i = \overline{1, n}$, то по матричному равенству $A' = T^{-1}AT$ находится матрица линейного преобразования в базисе \vec{e}'_i , $i = \overline{1, n}$. Матрица T – это матрица перехода от базиса \vec{e}_i , $i = \overline{1, n}$ к базису \vec{e}'_i , $i = \overline{1, n}$, в которой столбцы состоят из соответствующих координатных строк векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Рассмотрим в n – мерном линейном пространстве два базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$. Мы можем либо $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ выразить через $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \dots + \alpha_{1n}\vec{e}_n,$$

$$\dots\dots\dots, \\ \vec{e}'_n = \alpha_{n1}\vec{e}_1 + \dots + \alpha_{nn}\vec{e}_n,$$

либо, наоборот, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ выразить через $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$

$$\vec{e}_1 = \beta_{11}\vec{e}'_1 + \dots + \beta_{1n}\vec{e}'_n,$$

$$\dots\dots\dots, \\ \vec{e}_n = \beta_{n1}\vec{e}'_1 + \dots + \beta_{nn}\vec{e}'_n.$$

Матрица T , составленная из коэффициентов α_{ij} , есть матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$, а матрица S , составленная из коэффициентов β_{ij} , является матрицей обратного перехода от базиса $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ к базису $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Пример 1. Рассмотрим трехмерное действительное линейное пространство с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Векторы $\vec{e}'_1 = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ также составляют базис в этом пространстве. Найти координаты вектора $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Решение

Матрица $T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, откуда $T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{bmatrix}$. Поэтому вектор $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ будет представлен координатами

$$(1; 4; -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} = (-13; 6; -27) \text{ т.е. } \vec{a} = -13\vec{e}'_1 + 6\vec{e}'_2 - 27\vec{e}'_3.$$

Пример: Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования действительного пространства, заданного в некотором базисе

матрицей $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ - собственные значения матрицы A . Для определения собственных векторов записывают систему уравнений:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-7-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + (4-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Подставляя в систему (1.8) $\lambda_1 = 1$, получим систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна системе $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Решая последнюю систему находим $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = t, t \in R$.

Таким образом, собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = 1$, являются векторы $\vec{x}^{(1)} = (t; t; t)$, $t \in R$, $t \neq 0$. Подставляя в

систему (1.8), $\lambda = 0$, имеем систему:
$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = t$, $t \in R$, $t \neq 0$, получим, что $x_1 = \frac{1}{3}t$, $x_2 = \frac{2}{3}t$, $x_3 = t$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 0$, имеем вид $\vec{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t, t\right)$, $t \in R$, $t \neq 0$.

Задания для аудиторных занятий.

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A .

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Ответ:

а) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 11$; $\vec{x}^{(1)} = \left(-\frac{8}{5}t; t\right)$, $t \neq 0$, $t \in R$; $\vec{x}^{(2)} = (t; t)$, $t \neq 0$, $t \in R$.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $\vec{x} = (-t; -t; t)$, $t \neq 0$, $t \in R$.

2. Выяснить, является ли линейным преобразование f , переводящее любой вектор $\vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ в вектор \vec{Y} , заданный координатами в том же базисе, что и вектор \vec{x} . Если преобразование линейное, то найти его матрицу:

а) $\vec{Y} = (5\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3; \alpha_2 - \alpha_3; \alpha_2)$. Ответ: да, $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

б) $\vec{Y} = (\alpha_1 + 4\alpha_3; \alpha_2 + 4; \alpha_1 + 5\alpha_2)$. Ответ: нет.

3. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1 = (2; 3; 5)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 0)$ в векторы $\vec{b}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{b}_2 = (1; 1; -1)$, $\vec{b}_3 = (2; 1; 2)$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор \vec{x} в вектор $\vec{y} = \vec{x} \times \vec{a}$ в ортонормированном базис \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , если $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Линейное преобразование в базисе $\vec{a}_1 = (8; -6; 7)$, $\vec{a}_2 = (-16; 7; -13)$,

$\vec{a}_3 = (9; -3; 7)$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$. Найти матрицу данного

преобразования в базисе $\vec{b}_1 = (1; -2; 1)$, $\vec{b}_2 = (3; -1; 5)$, $\vec{b}_3 = (2; 1; 2)$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A .

| | | |
|----|--|--|
| I | а) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ | б) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$ |
| II | а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ | б) $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ |

| | | |
|------------|---|--|
| III | а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ | б) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ |
| IV | а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ | б) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ |

2. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, если:

1) $\vec{a}_1 = (2; 0; 3), \vec{a}_2 = (4; 1; 5), \vec{a}_3 = (3; 1; 2), \vec{b}_1 = (1; 2; -1), \vec{b}_2 = (4; 5; -2), \vec{b}_3 = (1; -1; 1);$

2) $\vec{a}_1 = (3; 4; 5), \vec{a}_2 = (2; 1; 2), \vec{a}_3 = (-4; -2; -3), \vec{b}_1 = (4; 5; 3), \vec{b}_2 = (2; 3; 2), \vec{b}_3 = (-1; -2; -1);$

3) $\vec{a}_1 = (1; 1; 1), \vec{a}_2 = (1; 2; 3), \vec{a}_3 = (1; 3; 6), \vec{b}_1 = (0; 1; 1), \vec{b}_2 = (1; 0; 1), \vec{b}_3 = (1; 1; 0);$

4) Даны два базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 и \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 линейного пространства и матрица A линейного преобразования в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Найти матрицу этого преобразования в базисе \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 , если $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Ответы:

| | | |
|----------|----|--|
| I | 1. | а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \vec{x} = (t; t), t \neq 0, t \in R$. б) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \vec{x}^{(1)} = (0; 0; t), \vec{x}^{(2)} = (3t; -6t; 20t), t \neq 0, t \in R$. |
| | 2. | а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \vec{x} = (t; t), t \neq 0, t \in R$. б) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = -7, \vec{x}^{(1)} = (0; 2t; t), \vec{x}^{(2)} = (7t; 5t; 6t), \vec{x}^{(3)} = (0; 5t; 6t), t \neq 0, t \in R$. |
| | 3. | а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \vec{x}_1^{(1)} = (t; -4t), \vec{x}^{(2)} = (t; -t), t \neq 0, t \in R$ б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \vec{x} = (3t; t; t), t \neq 0, t \in R$. |
| | 4. | а) $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2, \vec{x}^{(1)} = (t; t), \vec{x}^{(2)} = (4t; -5t), t \neq 0, t \in R$ б) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \vec{x}^{(1)} = (t; 2t; 2t), \vec{x}^{(2)} = (t; 2t; t), t \neq 0, t \in R$. |

Глава 2. Основы аналитической геометрии.

2.1. Прямая на плоскости.

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых. Угол между двумя прямыми.

Приведем различные виды уравнений прямой на плоскости:

1. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.1)$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярен к прямой (2.1) и называется нормальным вектором прямой: $B \neq 0$, то разрешив уравнение (2.1) относительно y , получим уравнение вида

$$y = kx + b, \quad (2.2)$$

$$\text{где } k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Уравнение (2.2) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k . Угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона прямой к оси Ox , отсчитываемый в положительном направлении. Число b равно величине отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy .

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

4. Параметрические уравнения: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$ где $\vec{a} = (m; n)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой.

5. Канонические уравнения прямой: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой (2.1) вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, на который надо повернуть первую прямую до совпадения со второй.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то косинус угла φ между ними находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$.

Условия параллельности в первом случае имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, во втором - $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности, соответственно, - $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ и $1 + k_1 k_2 = 0$.

Задания для аудиторных занятий.

- По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые на осях координат:
а) $2x - y + 3 = 0$; б) $5x + 2y - 8 = 0$; в) $3x + 8y + 16 = 0$; г) $3x - y = 0$.
- Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60° . Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат.
Ответ: $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.
- Сила $\vec{F} = (2; 5)$ приложена к точке $M_0(-1; 2)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила.
Ответ: $5x - 2y + 9 = 0$.
- Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$.
Ответ: а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x + 4$; г) $y = 3x - 10$.
- Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(4; 5)$.
Ответ: $2x - 5y + 17 = 0$.
- Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча.
Ответ: $M(6; 0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.
- Точка $A(-2; 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой.
Ответ: $3x + 2y = 0$.
- Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.
Ответ: 5.

9. Дано уравнение стороны ромба $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9; -1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

Ответ: $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y + 16 = 0$.

10. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$, внутри которого лежит точка $A(1; 1)$.

Ответ: $3x - y + 17 = 0$.

11. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4; 2)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

Ответ: $2x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ Найти:
- уравнение стороны AB ;
 - уравнение высоты CH ;
 - уравнение медианы AM ;
 - точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
 - уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
 - расстояние от точки C до прямой AB .

| | |
|-----|----------------------------------|
| I | $A(2; 5), B(-3; 1), C(0; 4)$; |
| II | $A(-5; 1), B(8; -2), C(1; 4)$; |
| III | $A(-1; -3), B(0; 7), C(-2; 4)$; |
| IV | $A(7; 0), B(1; 4), C(-8; -4)$. |

2. I. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; -1)$. Найти уравнения двух других сторон.
- II. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины $A(2; 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника.
- III. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.
- IV. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали.

Ответы:

| | I | II | III | IV |
|----|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| 1а | $4x - 5y + 17 = 0$ | $3x + 13y + 2 = 0$ | $10x - y + 7 = 0$ | $2x + 3y - 14 = 0$ |

| | | | | |
|----|--|--|--|---------------------------------|
| 1б | $5x + 4y - 16 = 0$ | $13x - 3y - 1 = 0$ | $x + 10y - 38 = 0$ | $3x - 2y + 16 = 0$ |
| 1в | $5x - 7y + 25 = 0$ | $y - 1 = 0$ | $x + 1 = 0$ | $y = 0$ |
| 1г | $\left(\frac{12}{55}; \frac{41}{11}\right)$ | $\left(\frac{4}{13}; 1\right)$ | $\left(-1; \frac{39}{10}\right)$ | $\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$ |
| 1д | $4x - 5y + 20 = 0$ | $3x + 13y - 55 = 0$ | $10x - y + 24 = 0$ | $2x + 3y + 28 = 0$ |
| 1е | $\frac{3}{\sqrt{41}}$ | $\frac{57}{\sqrt{178}}$ | $\frac{17}{\sqrt{101}}$ | $\frac{42}{\sqrt{13}}$ |
| 2 | $\begin{matrix} x - y - 7 = 0 \\ x - 2y - 10 = 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} x - 5y + 6 = 0 \\ 5x + y + 4 = 0 \end{matrix}$ | $3x - y - 23 = 0$ |

2.2. Кривые второго порядка

Канонические уравнения кривых второго порядка. Характеристики кривых второго порядка. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (2.3)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ - постоянные действительные числа ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$).

Рассмотрим частные случаи уравнения (2.3):

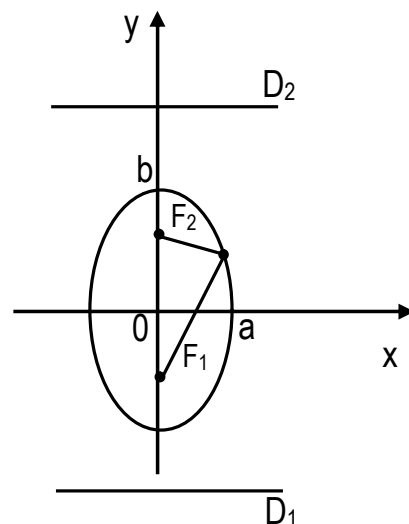
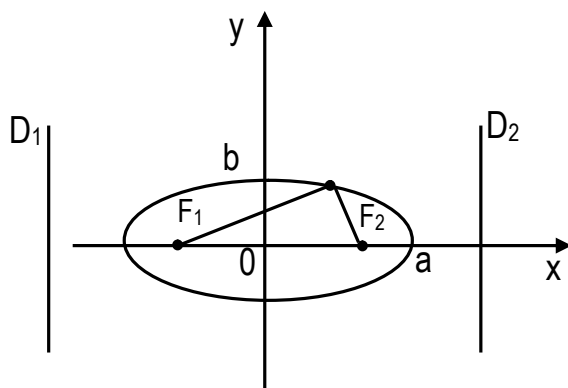
1) окружность с центром в точке $C(x_0; y_0)$ радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

2) каноническим уравнением эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b называется уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.4).$$

Если $a > b$ ($a < b$), то уравнение (2.4) определяет эллипс, фокусы которого, точки F_1 и F_2 , расположены на оси абсцисс (на оси ординат).



Геометрическое свойство эллипса: любая точка M на эллипсе удовлетворяет условию: $F_1M + F_2M = 2a$ в случае $a > b$ и $F_1M + F_2M = 2b$ в случае $a < b$.

Если $c = OF_1 = OF_2$, то $b^2 = a^2 - c^2$ при $a > b$ и $a^2 = b^2 - c^2$ при $a < b$.

Число ε , равное отношению расстояния между фокусами F_1F_2 к длине большой оси, называется эксцентриситетом эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ если } a > b \text{ и } \varepsilon = \frac{c}{b}, \text{ если } a < b.$$

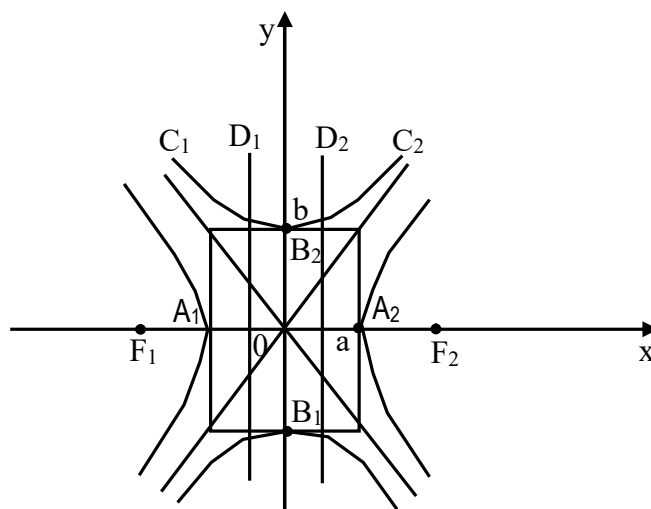
Для эллипса $0 < \varepsilon < 1$.

Директрисами эллипса называются две прямые D_1 и D_2 , перпендикулярные большой оси, уравнение которых имеют вид

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c} \text{ при } a > b \text{ и } y = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{b^2}{c} \text{ при } a < b.$$

3) Гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b , центром в начале координат и вершинами A_1 и A_2 на оси Ox определяется каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

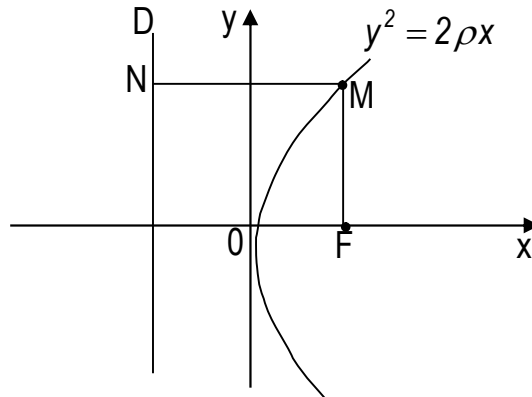


Прямые C_1 и C_2 $\left(y = \pm \frac{b}{a}x\right)$ являются асимптотами гиперболы, прямые D_1 и D_2 $\left(x = \pm \frac{a}{\varepsilon}\right)$ - директрисами. Справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ - фокусы гиперболы, число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет, причем для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Геометрическое свойство гиперболы: для любой точки M на гиперболе выполняется условие: $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Гипербола, уравнение которой имеет вид $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется сопряженной. Ее вершины находятся в точках B_1 и B_2 на оси Oy , $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

- 4) Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox , имеет следующее каноническое уравнение: $y^2 = 2px$.



Точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ называется фокусом, а прямая $D\left(x = -\frac{p}{2}\right)$ - директрисой параболы.

Число $p > 0$ - параметр параболы.

Геометрическое свойство: для любой точки M параболы верно равенство $FM = MN$.

Уравнение вида: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ определяют соот-

ветственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Ox таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0; y_0)$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ и построить ее.

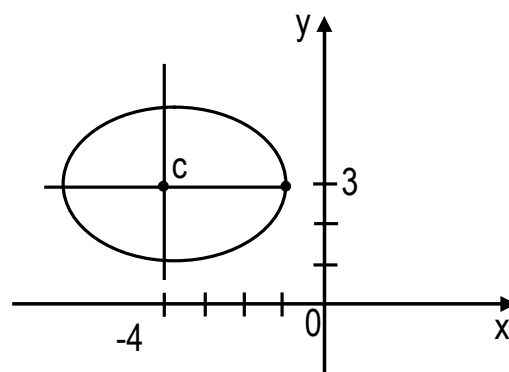
Решение

Применим метод выделения полных квадратов

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 64 + 81 - 109$$

$$4(x+4)^2 + 9(y-3)^2 = 36, \quad \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-4; 3)$ и полуосями $a = 3$, $b = 2$. Построим эту линию.



Задания для аудиторных занятий

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и касательной в точке $M_0\left(\frac{5}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Сделать рисунок.

Ответ: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$, $\varepsilon = 0,8$, $x = \pm \frac{25}{4}$, $\sqrt{3}x + 5y - 10\sqrt{3} = 0$.

2. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис, уравнение касательной в точке $M_0(-15; -4\sqrt{21})$. Сделать рисунок.
3. Построить параболу, ее директрису и фокус, касательную в точке $M_0(6;6)$, зная каноническое уравнение параболы: $x^2 = 6y$.
4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
 - а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;
 - б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$;
 - в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5;
 - г) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.
5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, это:
 - а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;
 - б) действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;
 - в) действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9; -4)$;
 - г) точки $P(-5;2)$ и $Q(2\sqrt{5};1)$ лежат на гиперболе.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:
 - а) парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$;

- б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0;0)$ и $M(1;-4)$;
- в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0;0)$ и $N(6;-2)$.
7. Путем выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):
- а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;
- б) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;
- в) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$;
- г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Составить канонические уравнения гиперболы, зная, что:

| | | | |
|----|--|-----|---|
| I | $b = 2\sqrt{2}, \varepsilon = \frac{7}{9}$; | III | $\varepsilon = \frac{5}{6}, A(0; -\sqrt{11})$; |
| II | $2a = 30, \varepsilon = \frac{17}{15}$; | IV | $a = 13, F(-5; 0)$. |

2. Составить канонические уравнения гиперболы, зная, что:

| | | | |
|----|---|-----|--|
| I | $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ - асимптота, $2a = 12$; | III | $A\left(\sqrt{\frac{32}{3}}; 1\right), B(\sqrt{8}; 0)$; |
| II | $y = \frac{\sqrt{17}}{8}x$ - асимптота, $2c = 18$; | IV | $b = 4, F(-7; 0)$. |

3. Составить канонические уравнения параболы, зная, что:

| | | | |
|----|----------------------------------|-----|---|
| I | $x = -\frac{3}{8}$ - директриса; | III | ось симметрии Oy и $A(-2; 3\sqrt{2})$; |
| II | $y = 4$ - директриса; | IV | ось симметрии Ox и $A(-7; 5)$. |

4. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющую центр в точке C :

| | |
|-----|--|
| I | правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $C(2; -7)$; |
| II | правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $C(-2; 5)$; |
| III | фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, C – нижняя вершина; |

| | |
|-----------|--|
| IV | фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $C(0; -6)$. |
|-----------|--|

5. Упростить уравнения линий, определить их тип и построить

| | |
|------------|--|
| I | $x^2 + 2y^2 - 2x + 6y = 90$; |
| II | $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$; |
| III | $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$; |
| IV | $y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$. |

2.3. Плоскость в пространстве.

Виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей.

Существуют различные виды уравнений плоскости.

1. Общим уравнением плоскости называется уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярного плоскости, который называется нормальным. В качестве нормального может выступать любой вектор перпендикулярный плоскости.

2. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, то ее уравнение записывается в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

3. Уравнение плоскости “в отрезках”. Если плоскость пересекает оси Ox, Oy, Oz соответственно в точках $M_1(a; 0; 0), M_2(0; b; 0), M_3(0; 0; c)$, то ее уравнение можно записать в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

4. Уравнение плоскости по трем точкам. Если плоскость проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется

по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ - нормальные векторы данных плоскостей.

Условие перпендикулярности данных плоскостей $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ или $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Условия параллельности рассматриваемых плоскостей имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Задания для аудиторных занятий

- Записать уравнение и построить плоскость:
 - параллельно плоскости Oxz и проходящей через точку $M_0(7; -3; 5)$;
 - проходящей через ось Oz и точку $A(-3; 1; -2)$;
 - параллельно оси Ox и проходящую через две точки $M_1(4; 0; -2)$ и $M_2(5; 1; 7)$;
 - проходящую через точку $B(2; 1; -1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
 - проходящую через точку $C(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (3; 1; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Ответ: а) $y + 3 = 0$; б) $x + 3y = 0$; в) $9y - z - 2 = 0$; г) $x - 2y + 3z + 3 = 0$;
 д) $x + 4y + 7z = 16 = 0$
- Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами $A(5; 4; 3)$, $B(2; 3; -2)$, $C(3; 4; 2)$, $D(-1; 2; 1)$. Проверить правильность полученного уравнения.
- Составить уравнение плоскости:
 - проходящей через точки $M_1(1; 1; 1)$ и $M_2(2; 3; 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$;
 - проходящей через точку $M_0(7; -5; 1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

Ответ: а) $31x + y - 11z - 21 = 0$; б) $x + y + z - 3 = 0$.
- Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.
 Ответ: $\cos \varphi = \frac{11}{15}$, $\varphi \approx 42^\circ 51'$.
- Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$.
 Ответ: 4.
- Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Ответ: $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$;

б) проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$;

в) проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (l; m; n)$;

г) проходящей через точку $M_3(x_3; y_3; z_3)$ и отсекающей на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

| | |
|-----|---|
| I | а) $M_0(2; 3; -5)$, $4x - 4y + 3z + 8 = 0$; |
| | б) $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$; |
| | в) $M_1(2; 3; -1)$, $M_2(1; 1; 4)$, $\vec{a} = (1; -4; 3)$; |
| | г) $M_3(2; -3; -4)$; |
| II | а) $M_0(-2; 3; 0)$; $x - 2y - 3z + 11 = 0$; |
| | б) $3x - y + z - 4 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$; |
| | в) $M_1(-1; 2; 3)$, $M_2(1; -2; 4)$, $\vec{a} = (2; -1; 1)$; |
| | г) $M_3(-1; 2; 5)$; |
| III | а) $M_0(-1; 2; 3)$, $3x - 2y + 6z + 4 = 0$; |
| | б) $2x + 3y - z + 4 = 0$ и $x + 3y - 4 = 0$; |
| | в) $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(1; 2; -2)$, $\vec{a} = (2; -3; 5)$; |
| | г) $M_3(3; -4; 2)$; |
| IV | а) $M_0(-1; 2; 1)$, $3x - 2y - z + 9 = 0$; |
| | б) $3x + y - 8z - 9 = 0$ и $2x + 3y - z + 1 = 0$; |
| | в) $M_1(-1; 3; 5)$, $M_2(2; -2; 0)$, $\vec{a} = (3; -1; 2)$; |
| | г) $M_3(-2; 3; 4)$. |

Ответы:

| | |
|----|---|
| I | а) $4x - 4y + 3z + 19 = 0$; б) $9x - 5y - 16z = 0$; в) $7x + 4y + 3z - 23 = 0$; г) $x + y + z = -5$; |
| II | а) $x - 2y - 3z + 8 = 0$; б) $x - 2y - 5z = 0$; в) $x - 2y + 7 = 0$; г) $x + y + z = 6$; |

| | |
|-----|--|
| III | а) $3x - 2y + 6z - 11 = 0$; б) $3x - y + 3z = 0$; в) $27x + 2y - 12z - 55 = 0$; г) $x + y + z = 1$; |
| IV | а) $3x - 2y - z + 8 = 0$; б) $23x - 13y + 7z = 0$; в) $5x + 7y - 4z + 4 = 0$; г) $x + y + z = 5$. |

2. Найти угол между двумя плоскостями.

| | |
|-----|---|
| I | $2x - 3y + z - 8 = 0$ и $3x + 2y - 12 = 0$; |
| II | $x + 4y - 12 = 0$ и $8x - 2y + 3z + 9 = 0$; |
| III | $2x + 4y - 13z = 0$ и $-4x - 8y + 26z + 19 = 0$; |
| IV | $x + 8y - z + 9 = 0$ и $x + 2y + z + 13 = 0$. |

Ответ: I $\frac{\pi}{2}$; II $\frac{\pi}{2}$; III 0; IV $\frac{3}{4}\pi$.

3. Найти расстояние от точки до плоскости.

| | |
|-----|--|
| I | $M_0(-1; 3; 0)$, $4x - 3y + 8 = 0$; |
| II | $M_0(2; 1; 3)$, $2x - 3y + z + 9 = 0$; |
| III | $M_0(-2; 0; -3)$, $x - 5y + z - 1 = 0$; |
| IV | $M_0(0; 2; -3)$, $3x + y - 2z + 11 = 0$. |

Ответ: I 1; II $\frac{13}{\sqrt{14}}$; III $\frac{2}{\sqrt{3}}$; IV $\frac{19}{\sqrt{14}}$.

2.4. Прямая в пространстве.

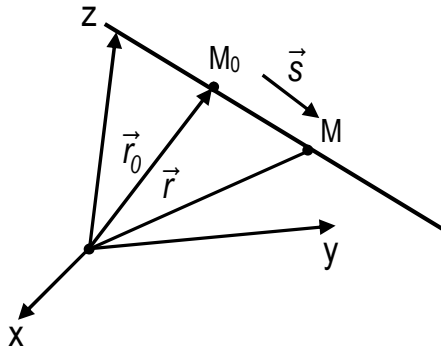
Виды уравнений прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. Векторно – параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (-\infty < t < \infty), \quad (2.5)$$

где \vec{r}_0 - радиус вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через которую проходит прямая, \vec{r} - радиус – вектор произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой, t - параметр, $\vec{s} = (\ell; m; n)$ - направляющий вектор прямой. Направляющим может быть любой вектор, принадлежащий прямой или параллельный ей.



2. Параметрические уравнения прямой.

Уравнение (2.5) в координатной форме равносильно трем скалярным уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (2.6)$$

Система (2.6) – параметрические уравнения прямой в пространстве.

3. Канонические уравнения прямой.

Если из соотношений (2.6) исключить параметр t , то получим канонические уравне-

ния прямой в пространстве: $\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

4. Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если прямая проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то ее уравнения

имеют вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

5. Общие уравнения прямой в пространстве.

Если прямая образована пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, причем $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, то система

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ называется общими уравнениями прямой в пространстве.

Направляющий вектор такой прямой равен вектору $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

где $\vec{s}_1(\ell_1; m_1; n_1)$ и $\vec{s}_2(\ell_2; m_2; n_2)$ - их направляющие векторы.

Первая прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, вторая – через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В этом случае величина угла между прямыми (между их направляющими векторами) \vec{s}_1 и \vec{s}_2 определяется из формулы $\cos \varphi = \frac{\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

Условие перпендикулярности прямых имеет вид $\vec{s}_1 \vec{s}_2 = 0$ или $\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, а условия параллельности $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$, условия совпадения прямых $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$ имеет вид

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Если условие (2.7) не выполняется, то прямые скрещиваются.

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$

в направлении вектора $\vec{s} = (\ell; m; n)$, вычисляется по формуле $d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\vec{s}|}$.

Рассмотрим взаимное расположение прямой $\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Величина угла определяется из формулы:

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{s}}) = \sin \varphi = \frac{|A\ell + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если плоскость и прямая параллельны, то векторы \vec{n} и \vec{s} перпендикулярны, т.е. $A\ell + Bm + Cn = 0$.

Если $A\ell + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая принадлежит плоскости.

Задания для аудиторных занятий

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 0; -3)$

а) параллельно вектору $\vec{s} = (2; -3; 5)$;

б) параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0; \end{cases}$

в) параллельно прямой $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1, \\ z = 5t. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{3}$; б) $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{-13}$; в) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{5}$.

2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и, в случае их пересечения, найти координаты точки пересечения:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ: а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекаются в точке $M(2;3;1)$.

3. Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.

Ответ: $Q(4; 1; -3)$.

4. Вычислить угол между прямой $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0, \end{cases}$ и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$.

Ответ: $\sin \varphi = \frac{5}{7}$, $\varphi \approx 45^\circ 36'$.

5. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ перпендикулярно плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Ответ: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

6. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

Ответ: $d = 3$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Составить:

а) канонические уравнения прямой AB ;

б) параметрические уравнения прямой проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC ;

в) общие уравнения прямой BC .

Вычислить:

г) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC ;

д) косинус угла между прямыми AB и BC .

| | |
|-----|---|
| I | $A(0;4;5), B(3;-2;1), C(4;5;6), D(3;3;2).$ |
| II | $A(2;-1;7), B(6;3;1), C(3;2;8), D(2;-3;7).$ |
| III | $A(2;1;7), B(3;3;6), C(2;-3;9), D(1;2;5).$ |
| IV | $A(2;1;6), B(1;4;9), C(2;-5;8), D(5;4;2).$ |

Ответы:

| | |
|-----|--|
| I | а) $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{-4}$; б) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3 + 19t, \\ z = 2 - 27t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x + 19y - 27z + 59 = 0, \\ 18x + y - 5z - 47 = 0; \end{cases}$ г) 0,47; д) -0,87; |
| II | а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-3}$; б) $\begin{cases} x = 2 + 11t, \\ y = -3 - 5t, \\ z = 7 + 4t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 11x - 5y + 4z - 55 = 0, \\ 18x - 5y + 7z - 100 = 0; \end{cases}$ г) 0,39; д) -0,91; |
| III | а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{-1}$; б) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + t, \\ z = 5 + 2t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y + 2z - 15 = 0, \\ 9x - 7y - 11z + 60 = 0; \end{cases}$ г) -0,52; д) -0,96; |
| IV | а) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{3}$; б) $\begin{cases} x = 5 + 12t, \\ y = 4 + t, \\ z = 2 + 3t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 12x + y + 3z - 43 = 0, \\ 21x + y + 12z - 133 = 0; \end{cases}$ г) 0,37; д) -0,78. |

2.5. Поверхности второго порядка

Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (2.8)$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_0$ - постоянные числа, $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$. Уравнение (2.8) называется общим уравнением поверхности второго порядка.

С помощью преобразований системы координат уравнение (2.8) можно привести к каноническому виду, т.е. к одному из уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{эллипсоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{однополостные гиперboloиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (\text{двуполостные гиперboloиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{конусы}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{эллиптические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{гиперболические параболоиды}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{эллиптические цилиндры}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{гиперболические цилиндры}),$$

$$x^2 = 2py \quad (\text{параболические цилиндры}).$$

Параметры a, b, c, p - постоянные положительные числа.

Получение канонического уравнения из общего при $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ осуществляется методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Задания для аудиторных занятий

1. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$; б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$; в) $y^2 - 6z = 0$.

2. Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$; б) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; г) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$.

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x^2 = z$, $z = 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$;

б) $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$;

в) $z = y$, $z = 0$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Построить поверхности и определить их вид:

| | |
|-----|---|
| I | а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$; |
| II | а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$; |
| III | а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$; |
| IV | а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$. |

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

| | |
|-----|---|
| I | a) $3x^2 = -4y$, Oz ; б) $4x^2 + 3y^2 = 12$, Oz ; |
| II | a) $5y^2 - 8z^2 = 40$, Oz ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox ; |
| III | a) $3x^2 = -2z$, Oz ; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox ; |
| IV | a) $5x^2 - 7y^2 = 35$, Ox ; б) $x = 2$, $y = -4$, Oz . |

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

| | |
|-----|--|
| I | a) $y = 5x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = 0$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; |
| II | a) $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$; б) $x + y + z = 8$, $x + 2y = 4$, $x + 4y = 4$; $y = 0$, $z = 0$; |
| III | a) $2y^2 + z^2 = 4$, $3x^2 - 8y^2 = 48$, $z \geq 0$; б) $x = 1$, $y = 3$, $x + 2y + 4z = 24$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$; |
| IV | a) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 0$; $y = x$, $y = 4x$, $x = 2$ ($z > 0$); б) $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $y + z = 6$. |

Глава 3. Введение в математический анализ.

3.1. Предел функции в точке.

Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности.

Раскрытие неопределенных выражений.

Число a называется пределом последовательности $x_n = f(n)$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Например, дана последовательность $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{11}, \dots, \frac{2n}{2n+3}, \dots$.

Члены заданной последовательности с увеличением их номера возрастают, но при этом остаются меньше единицы. Поэтому последовательность имеет предел, не превосходящий единицы. Проверим, не является ли этим пределом единица.

Зададим $\varepsilon = \frac{1}{10000}$ и будем искать такой номер $n = N$, начиная с которого выполняется неравенство $\left| \frac{2n}{2n+3} - 1 \right| < \frac{1}{10000}$. Преобразование этого неравенства дает $\frac{3}{2n+3} < \frac{1}{10000}$, отсюда $2n+3 > 30000$, т.е. $N > 14999$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+3} = 1$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Аналогично $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta(\varepsilon)$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > E$ при $|x - x_0| < \delta(E)$, где E – произвольное положительное число.

В этом случае функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \left(\text{при } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right);$$

4. Если для всех значений x в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может $x = a$, функции $f(x)$ и $g(x)$ равны и одна из них имеет предел при $x \rightarrow a$, то вторая имеет тот же предел.

Это свойство применяется при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Например, $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$ при любых x , кроме $x = a$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a.$$

Полезно знать, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ax = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ при } a > 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \text{ при } 0 < a < 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \text{ при } a > 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ при } 0 < a < 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty \text{ при } a > 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \text{ при } a > 1.$$

Задания для аудиторных занятий

1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$), $x_n = \frac{3n-2}{2n-1}$, $a = \frac{3}{2}$.

Найти пределы числовых последовательностей:

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 5}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^3 + 4n^2}{2n^4 - 5n^3 + 1}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 7n^2 + 3}{10n^2 + 6n}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n+1}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^4 + 5} + n}{1 - \sqrt[3]{8n^6 - n^3} + 7}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 1})$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$.

Вычислить:

5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{5x + \sqrt[4]{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$.

Ответ: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{1}{2}$.

6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{3x^2 - 5x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{1-x}$.

Ответ: а) -1 ; б) $\frac{7}{2}$; в) ∞ .

7. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 7x + 12}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; е) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right)$.

Ответ: а) 2; б) $-\frac{1}{3}$; в) 48; г) $\frac{1}{2}$; д) 6; е) $3x^2$; ж) ∞ .

8. а) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$; в) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$.

Ответ: а) $\frac{1}{6}$; б) 32; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{3}{2}$; д) $\frac{1}{3}$; е) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. а) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти пределы последовательностей.

| | |
|-----|--|
| I | а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 7n + 1}{2n^2 - 3n + 2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^2 + 5}{25n^3 + 4n - 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n)$; |
| II | а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 3n + 4}{9n^2 + 5n - 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 4n^2 + 1}{2n + 5}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n + 1})$; |
| III | а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 2n - 1}{6n^2 - 4n + 3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + n^4 - 3n^2 + 2}{3n^3 - 2n + 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n})$; |
| IV | а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 8n + 3}{5n^2 + 2n - 1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^4 - 5n^2 + n}{3n^3 + 2n - 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - a^2})$. |

2. Найти пределы функций.

| | |
|-----|---|
| I | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{3x+1} - \frac{x^3}{3x^2-2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$; |
| II | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4x^2-1} - \frac{x^2}{4x+5} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{2x-6} - \frac{3}{x^2-9} \right)$; |
| III | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{5x+3} - \frac{x^3}{5x^2-4} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2+7x-2}{5x^2+13x+6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2x-8} - \frac{4}{x^2-16} \right)$; |
| IV | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+3} - \frac{x^2}{2x-1} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{4x^2+9x-9}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$. |

Ответ:

| | |
|-----|--|
| I | а) $-\frac{1}{9}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; |
| II | а) $\frac{5}{16}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{12}$; |
| III | а) $-\frac{3}{25}$; б) $\frac{9}{7}$; в) $\frac{9}{4}$; г) $\frac{1}{16}$; |
| IV | а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{7}{15}$; в) -3 ; г) $\frac{1}{4}$. |

3. Найти пределы функций.

| | |
|-----|--|
| I | а) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$; |
| II | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-x}$; |
| III | а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{2x-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}$; |

| | |
|-----------|---|
| IV | а) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-x}{x^2-\sqrt[3]{x}}$. |
|-----------|---|

Ответ:

| | |
|------------|--|
| I | а) $-\frac{1}{56}$; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; |
| II | а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; в) 0; |
| III | а) $\frac{1}{48}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{3}{2}\sqrt[6]{2}$; |
| IV | а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; в) 0. |

3.2. Замечательные пределы.

При нахождении пределов широко используются замечательные пределы. Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ раскрывает неопределенность $\frac{0}{0}$.

Второй - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828$ раскрывает неопределенность 1^∞ .

Задания для аудиторных занятий

Найти пределы:

1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$.

Ответ: а) 3; б) $\frac{2}{5}$; в) 18; г) $\frac{1}{2}$; д) 1.

2. а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$.

Ответ: а) $-\sin a$; б) $-\frac{2}{\pi}$; в) $-\pi$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x}$.

Ответ: а) 1; б) $\frac{1}{3}$.

4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x-2} \right)^x$; г) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+1}{5x-2} \right)^x$.

Ответ: а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) $\begin{cases} \infty, x \rightarrow +\infty, \\ 0, x \rightarrow -\infty; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0, x \rightarrow +\infty, \\ \infty, x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2} \right)^{2x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1} \right)^{x^2}$.

Ответ: а) e^4 ; б) e .

6. а) $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{1}{x^2-4}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt[2]{x})^{\frac{1}{2x}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+a) - \ln x)$.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; в) \sqrt{e} ; г) 1; д) а.

7. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a}$.

Ответ: а) 1; б) $\ln a$; в) $a^a \ln a$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти пределы:

| | |
|-----|--|
| I | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$; |
| II | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$; |
| III | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$; б) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$; |
| IV | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$. |

Ответ:

| | |
|-----|--|
| I | a) $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $\frac{1}{20}$; |
| II | a) 8; б) $-\frac{1}{2}$; в) -2; |
| III | a) 32; б) $\cos x$; в) $-\frac{1}{18\pi}$; |
| IV | a) 50; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1. |

2. Найти пределы:

| | |
|-----|---|
| I | a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{2-x}{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$. |
| II | a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{2}{1-x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. |
| III | a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (7x-6)^{\frac{1}{3x-3}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}$. |
| IV | a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-1}{4x^2+1} \right)^{x^2+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{3+x}{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$. |

Ответ:

| | |
|-----|---|
| I | a) e^{-6} ; б) $\frac{1}{e^8}$; в) $\frac{1}{e}$; г) -1; |
| II | a) e^2 ; б) e^6 ; в) k; г) -2; |
| III | a) $e^{\frac{4}{3}}$; б) $e^{\frac{7}{3}}$; в) $\frac{1}{a}$; г) -3; |
| IV | a) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\frac{1}{e^{15}}$; в) 1; г) e. |

3.3. Сравнение функций.

Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются сравнимыми, если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ сравнимые бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, где $0 < |c| < +\infty$, то

а) если $c \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности, при $c = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными и пишут $\alpha \sim \beta$.

б) если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} \neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой порядка r относительно $\beta(x)$. Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить равносильными им величинами.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Приведем примеры эквивалентных (равносильных) бесконечно малых при $x \rightarrow 0$:
 $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $e^x - 1 \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$,
 $a^x - 1 \sim x \ln a$.

Задания для аудиторных занятий

1. Определить при $x \rightarrow 0$ порядки малости относительно x функций

а) $\frac{2x}{1+x}$; б) $\operatorname{tg} x - \sin x$; в) $\sqrt{1+x^3} - 1$; г) $\sin 2x - 2 \sin x$;

д) $3^{\sqrt{x}} - 1$; е) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$; ж) $2 \sin^4 x - x^5$; з) $\sqrt{\sin^2 x + x^4}$.

2. Доказать, что при $x \rightarrow 0$:

а) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$; б) $1 - \cos^3 x \sim 1,5 \sin^2 x$; в) $\operatorname{arctg} mx \sim mx$.

3. Доказать, что при $x \rightarrow 0$ величины $\frac{x}{2}$ и $\sqrt{1+x} - 1$ равносильны между собой.

Пользуясь этим результатом приближенно найти: а) $\sqrt{0,97}$, б) $\sqrt{10}$ и сравнить полученные значения с табличными данными.

4. Пользуясь теоремой об отношении двух бесконечно малых, найти:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x^3}{\arcsin 3x \cdot \sin \frac{x}{2}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{e^{x^2} - 1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1 - 2x)}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} 6x}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Определить при $x \rightarrow 0$ порядок малости относительно x функций:

| | |
|-----|---|
| I | а) $1 - \cos x$; б) $3 \sin^3 x + x^4$; в) $\sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$; г) $\sqrt[5]{x^2} - \sqrt{x^5}$; |
| II | а) $\frac{1 - \cos x}{x}$; б) $\frac{x \cdot (x+1)}{1 + \sqrt{x}}$; в) $2 \sin^2 x - x^3$; г) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$; |
| III | а) $1 - \cos 2x$; б) $3 \sin^4 x + x^5$; в) $\sqrt{1 + x \sin x} - 1$; г) $\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^5}$; |
| IV | а) $\frac{1 - \cos 2x}{x}$; б) $4 \sin^3 x - x^5$; в) $\sqrt{\sin 2x}$; г) $\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$. |

2. Пользуясь теоремой об отношении двух бесконечно малых, найти:

| | |
|-----|---|
| I | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1 + x^2)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^x - 1) \cdot (4^x - 1)}{3^x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}$; |
| II | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1 + 2x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 - 4x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\operatorname{tg}^2 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{3^{4x} - 1}$; |
| III | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{\ln^2(1 - 5x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sin(4x^2)}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\ln(1 - x)}$; |
| IV | а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}{\sin 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}}{2^{-5x} - 1}$. |

Ответ:

| | |
|-----|--|
| I | а) $-\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; г) $6\sqrt{2}$; |
| II | а) $\frac{9}{4}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{16}$; г) $\frac{1}{2\ln 3}$; |
| III | а) 3; б) $\frac{3}{25}$; в) $\frac{1}{24}$; г) -1 ; |
| IV | а) 1; б) $\frac{\ln 3}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; г) $-\frac{1}{10\ln 2}$. |

3.4. Непрерывность функции в точке.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется непрерывной в точке x_0 , если выполнены следующие три условия:

а) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 , т.е. $x_0 \in D$;

б) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то x_0 называется устранимой точкой разрыва.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются точками разрыва 2-го рода. К точкам разрыва 2-го рода относятся точки, для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен бесконечности.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве D , если она непрерывна в каждой точке $x \in D$.

Элементарные функции: степенная x^n , показательная a^x , логарифмическая, тригонометрические и им обратные, а также их сумма, произведение, частное непрерывны при всяком x , при котором они имеют определенные значения.

Задания для аудиторных занятий.

1. Исследовать на непрерывность функции:

а) $y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; б) $y = \frac{1+x^2}{1+x}$; в) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$; г) $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; д) $y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

2. Функция $f(x)$ не определена при $x=0$. Определить $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывной при $x=0$, если:

а) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$; б) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; в) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$.

3. Исследовать по непрерывности и построить график функции:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Пусть $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1. \end{cases}$ При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной? Построить ее график.

Задания для индивидуального выполнения

1. Исследовать на непрерывность функции:

| | |
|-----|--|
| I | а) $y = \frac{x}{4-x^2}$; б) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$; |
| II | а) $y = \frac{x^2}{x-2}$; б) $y = 3^{\frac{x}{9-x^2}}$; |
| III | а) $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$; б) $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$; |
| IV | а) $y = \frac{x}{x^2-9}$; б) $y = 2^{\frac{1}{5-x}}$. |

2. При каком выборе параметра a функция $y = f(x)$ будет непрерывной?

| | |
|---|--|
| I | $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ |
|---|--|

| | |
|------------|--|
| II | $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ ax^2 - 2, & x > 1 \end{cases}$ |
| III | $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x + 2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ |
| IV | $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ a - 3x, & x \geq 0 \end{cases}$ |

Ответ:

| | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------------------|--------------------|
| I. $a = 3$ | II. $a = 2$ | III. $a = \frac{4}{\pi}$ | IV. $a = 2$ |
|-------------------|--------------------|---------------------------------|--------------------|

3. Найти точки разрыва функции и установить их характер. Сделать чертеж.

| | |
|------------|--|
| I | $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x \leq 2,5 \\ 2x - 7, & x > 2,5 \end{cases}$ |
| II | $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ |
| III | $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 0 \\ -2x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 8, & x > 2 \end{cases}$ |
| IV | $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 4, & x > 1 \end{cases}$ |

Ответ:

| | |
|------------|---------------------------------------|
| I | $x = 2,5$ - точка разрыва I рода |
| II | $x = 1, x = 4$ - точки разрыва I рода |
| III | $x = 0$ - точка разрыва I рода |
| IV | $x = 1$ - точка разрыва I рода |

Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

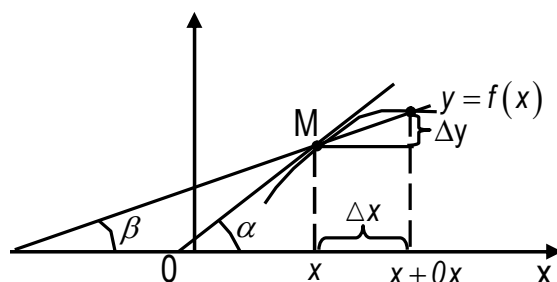
4.1. Производная.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Табличное дифференцирование. Производная сложной функции.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.1)$$



Если предел (4.1) существует, то $f(x)$ является дифференцируемой в точке x .

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, а $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x)$ равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x, y)$ к графику функции $y = f(x)$.

Механический смысл производной: $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке x относительно аргумента x .

Если C – постоянное число, а $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1. $(C)' = 0$;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(Cu)' = Cu'$;

4. $(uv)' = u'v + uv'$;

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \cdot (v \neq 0)$;

6. если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция от x , тогда $y'_x = y'_u u'_x$

или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Таблица производных основных элементарных функций:

| | |
|--|---|
| 1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' (\alpha \in R)$ | 10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$ |
| 2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ | 11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u';$ |
| 3. $(e^u)' = e^u \cdot u';$ | 12. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u';$ |
| 4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u';$ | 13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u';$ |
| 5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$ | 14. $(shu)' = chu \cdot u';$ |
| 6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$ | 15. $(chu)' = shu \cdot u';$ |
| 7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$ | 16. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} u';$ |
| 8. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} u';$ | 17. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} u'.$ |
| 9. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u';$ | |

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид:
 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:
 $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = x_0$. Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти производную функции $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, воспользовавшись определением производной.
2. Найти производные следующих функций:

а) $y = 5x^4 + \frac{7}{x^5} - 3\sqrt[3]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}};$ б) $y = \sqrt{x} \sin x;$ в) $y = \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$

г) $y = \cos^4 x;$ д) $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}\right)^2}.$

3. Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций.

а) $y = e^x \operatorname{tg} 4x$; б) $y = x \operatorname{ctg}^2 7x$; в) $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$; г) $y = 2^{-\cos^4 5x}$;

д) $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x}$; е) $y = (2^{\operatorname{tg} 3x} + \operatorname{tg} 3x)^2$; ж) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x = 1$

Ответ: $y - 5x + 4 = 0$; $5y + x - 6 = 0$.

5. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t равно

$s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$. (s – в метрах) Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2с.

Ответ: $2\frac{M}{c}$; $2\frac{M}{c}$; $6\frac{M}{c}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти производные:

| | |
|----|--|
| I | <p>а) $y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 9x^3 - \sqrt{x^7} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$; е) $y = th^3 5x \cdot \operatorname{arctg}(2x - 5)$;</p> <p>б) $y = \sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{5}{2x^2 - 4x + 7}$; ж) $y = \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{4x^2 + 7x - 5}$;</p> <p>в) $y = \cos^4 3x \cdot \operatorname{arcsin} 3x^2$; з) $y = \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2 - x + 4)}$;</p> <p>г) $y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3$; и) $y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$;</p> <p>д) $y = \sqrt{(x+5)^3} \arccos^4 x$; к) $y = \frac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$;</p> |
| II | <p>а) $y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6 + \frac{1}{3\sqrt{x}}$; е) $y = \operatorname{cth}^2 4x \cdot \operatorname{arcsin} x^3$;</p> <p>б) $y = \frac{7}{(x+2)^5} - \sqrt{8-5x+2x^2}$; ж) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 7}}{e^{-x^3}}$;</p> <p>в) $y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; з) $y = \frac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$;</p> <p>г) $y = \lg(x+3) \cdot \operatorname{arctg}^2 5x$; и) $y = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$;</p> |

| | | |
|-----|--|--|
| | д) $y = e^{-\cos x} \cdot \arcsin 2x$; | к) $y = \frac{2\ln(2x^2 + 3)}{(x-7)^4}$; |
| III | а) $y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}}$; | е) $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 5x^4$; |
| | б) $y = \sqrt{(x-4)^7} - \frac{10}{3x^2 - 5x + 1}$; | ж) $y = \frac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$; |
| | в) $y = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{arctg}^5 3x$; | з) $y = \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$; |
| | г) $y = \ln(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^4 3x$; | и) $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\operatorname{th}(x+5)}$; |
| | д) $y = \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x$; | к) $y = \frac{4\log(3x-5)}{(x-2)^2}$; |
| IV | а) $y = 4x^3 + \frac{3}{x^2} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$; | е) $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; |
| | б) $y = \frac{4}{(x-7)^3} - \sqrt[3]{(3x^2 - x + 1)^4}$; | ж) $y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$; |
| | в) $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3$; | з) $y = \frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$; |
| | г) $y = 2^{-x} \cdot \operatorname{arctg}^3 4x$; | и) $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cthx}}}$; |
| | д) $y = \sqrt[5]{(x+4)^2} \cdot \arcsin 7x^2$; | к) $y = \frac{3\ln(x^2 + 5)}{(x-7)^3}$. |

4.2. Производная.

Логарифмическая производная.

Производная неявной и параметрически заданной функции.

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

В некоторых случаях предварительное логарифмирование упрощает нахождение производной.

Пример. Найти производную функцию $y = (\sin 2x)^{x^3}$. Логарифмируя данную функцию, получаем $\ln y = x^3 \ln \sin 2x$.

Дифференцируя обе части последнего равенства: $\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln \sin 2x + x^3 \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}$.

Окончательно имеем: $y' = (\sin 2x)^{x^3} \left(3x^2 \ln \sin 2x + \frac{2x^3 \cos 2x}{\sin 2x} \right)$.

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной $y' = y'_x$ достаточно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x .

Пример. Найти производную функции y' , если $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение

Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x :

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0. \text{ Откуда } y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$; б) $y = (x^3 + 1)^{\lg 2x}$;

в) $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$; г) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3 - 1}$.

2. Найти производные y' функций, заданных неявно уравнениями:

а) $e^{xy^2} - x^3 - y^3 = 3$; б) $xy - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 3$;

в) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$; г) $x^2 + y^2 - \sin(x^2 y^2) = 5$.

3. Найти производные функций, заданных уравнениями:

а) $\begin{cases} x = t^3 + t^2 - 1, \\ y = t^3 + t + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти производные:

| | |
|-----|--|
| I | a) $y = \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$; б) $y = (sh3x)^{arcctg 2x}$; |
| II | a) $y = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$; б) $y = (cth\sqrt{x})^{\sin(x+9)}$; |
| III | a) $y = \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2}$; б) $y = (arctg x)^{th(3x+1)}$ |
| IV | a) $y = \frac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x+1)^2}}{(x+3)^4}$; б) $y = (sh5x)^{arctg(x+2)}$. |

2. Найти производные неявно заданных функций:

| | |
|-----|--|
| I | a) $3x^2y + \frac{x}{y^2} = 5$; б) $\sin(3x + 8y^2) + \ln y = 7$; |
| II | a) $2x^3y^2 + \frac{y^2}{x^3} = 6$; б) $\cos(3x^2 - 7y) + e^{xy} = 1$; |
| III | a) $xy^3 + \frac{x}{y} = 1$; б) $tg(x - 5y^2) + \frac{y}{x^2} = 5$ |
| IV | a) $3xy - \frac{y}{x} = 3$; б) $\ln(x - 5y) + \sqrt{xy^2} = 4$. |

3. Найти производные функций, заданных параметрически.

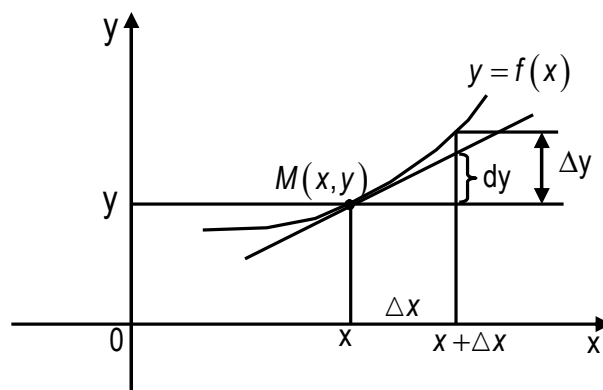
| | |
|-----|--|
| I | a) $\begin{cases} x = 3t^2 - 3t + 5, \\ y = \frac{1}{3}t^2 - 2t + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases}$ |
| II | a) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 1, \\ y = 2t^2 + 4t + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}; \end{cases}$ |
| III | a) $\begin{cases} x = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 8t, \\ y = 3t^2 + 4x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ |
| IV | a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + 9, \\ y = 6t^3 + 5t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$ |

4.3. Дифференциал функции.

Дифференциал функции. Приложения дифференциала.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x .

$$dy = f'(x) dx$$



Геометрически дифференциал равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, при изменении аргумента на Δx .

Из правил дифференцирования и определения дифференциала вытекают правила нахождения дифференциала

1. $dC = 0$ ($C = \text{const}$);
2. $dx = \Delta x$, x - независимая переменная;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$;
4. $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$;
5. $d(Cu) = Cdu$;
6. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$ ($v \neq 0$);
7. $df(u) = f'_u(u) u' dx = f'(u) du$.

Так как дифференциал отличается от приращения на бесконечно малую более высокого порядка чем Δx , то $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$.

Эта формула часто применяется для приближенного вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной x .

Задания для аудиторных занятий

1. Дана функция $y = x^3 - 2x^2 + 2$ и точка $x_0 = 1$. Для любого приращения независимой переменной Δx выделить главную часть приращения функции. Оценить абсолютную величину разности между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке, если: а) $\Delta x = 0,1$; б) $\Delta x = 0,01$. Сравнить эту разность с абсолютной величиной дифференциала функции.

Ответ: а) $\varepsilon = |\Delta y - dy| = 0,011, \frac{\varepsilon}{|dy|} \cdot 100\% = 11\%$;

б) $\varepsilon = 0,000101, \frac{\varepsilon}{|dy|} \cdot 100\% = 1,01\%$.

2. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = x^2 \operatorname{tg}^3 x$; б) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + (\arcsin x)^4$; в) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

3. Найти приближенное значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1,03$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 5,00.

4. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,03.

5. Вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0,98$ с точностью до двух знаков после запятой.

Ответ: 2,02.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти дифференциал:

| | |
|-----|--|
| I | а) $y = (x^3 + 6x) \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; б) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{1}{3} x$; |
| II | а) $y = \sqrt{4 - 5x^2} \operatorname{arctg}(3 + 4x^3)$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{x^3}{2}$; |
| III | а) $y = e^{3-x^2} \cdot \sin \frac{x}{2}$; б) $y = \sqrt{5 - 3x^3} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$; |
| IV | а) $y = 2^{1-4x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}$; б) $y = \ln(1 - 4x^2) \cdot \sqrt{3x^2 - 5x}$. |

2. С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

| | |
|-----|---|
| I | а) $\sqrt{15}$; б) $\operatorname{ctg} 46^\circ$; |
| II | а) $e^{0,2}$; б) $\operatorname{tg} 44^\circ$; |
| III | а) $\ln 0,9$; б) $\cos 59^\circ$; |
| IV | а) $\operatorname{arctg} 1,05$; б) $\sin 31^\circ$. |

Ответы:

| | |
|-----|----------------------|
| I | а) 3,87; б) 0,865; |
| II | а) 1,2; б) 0,865; |
| III | а) -0,045; б) 0,515; |
| IV | а) 0,81; б) 0,515. |

4.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков.

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, $y'' = (y')'$.

Механический смысл второй производной: если $s = s(t)$ - закон движения материальной точки, то $s'(t)$ - скорость, а $s''(t)$ - ускорение этой точки в момент времени t .

Производной n - го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ - го порядка данной функции, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2y = d(dy) = f'(x)dx^2$.

Дифференциалом n - го порядка функции $y = f(x)$ называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$ - го порядка, $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти вторую производную функцию $y = (1 + 4x^2) \operatorname{arctg} 2x$.
2. Показать, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0$.
3. Дано уравнение движения точки по оси Ox : $x = 100 + 5t - 0,001t^3$ (x измеряется в метрах, t - в секундах). Найти скорость v и ускорение a этой точки в моменты времени $t = 0; 1; 10$ с.

Ответ: $v = 5; 4,997; 4,7 \frac{M}{сек}$, $a = 0; -0,006; -0,06 \frac{M}{сек^2}$.

4. Найти вторые производные функций, заданных уравнениями

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^3 + t + 1, \\ y = t^3 + t^2 - 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

5. Вычислить значения второй производной функции y , заданной уравнением $x^4 - xy + y^4 - 1 = 0$ в точке $M(0,1)$.

Ответ: $-\frac{1}{16}$.

6. Найти производную n - го порядка функции $y = \ln(1 + x)$.
7. Найти дифференциал второго порядка функции $y = e^{-x^2}$.

8. Найти дифференциал третьего порядка функции $y = \sin^2 2x$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти y' и y'' .

| | |
|------------|---|
| I | а) $x^2 y^2 + x = 5y$; б) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t; \end{cases}$ |
| II | а) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$; б) $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5; \end{cases}$ |
| III | а) $x^4 + x^2 y^2 + y = 4$; б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t; \end{cases}$ |
| IV | а) $x^3 + y^3 = 5x$; б) $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$ |

Ответы:

| | |
|------------|--|
| I | а) $y' = \frac{1+2xy^2}{5-2x^2y}$; б) $\begin{cases} y'_x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}, \\ x = \arcsin t; \end{cases} \begin{cases} y''_{xx} = \frac{t^2+t-1}{t^2}, \\ x = \arcsin t; \end{cases}$ |
| II | а) $y' = \frac{4-y^2}{2xy-3y^2}$; $y'' = \frac{(y^2-4)(3y^2+4)}{y^3(2x-3)^2}$; б) $\begin{cases} y'_x = \frac{5t^3}{4}, \\ x = 6t^2 - 4; \end{cases} \begin{cases} y''_{xx} = \frac{5t}{16}, \\ x = 6t^2 - 4. \end{cases}$ |
| III | а) $y' = -\frac{4x^3+2xy^2}{2x^2y+1}$; б) $\begin{cases} y'_x = -\frac{1}{4t^4}, \\ x = t^4; \end{cases} \begin{cases} y''_{xx} = -\frac{1}{4t^8}, \\ x = t^4. \end{cases}$ |
| IV | а) $y' = \frac{5-3x^2}{3y^2}$; $y'' = \frac{-18xy^3-2(5-3x^2)^2}{9y^5}$; б) $\begin{cases} y'_x = -\frac{3}{5}, \\ x = 5 \cos^2 t; \end{cases} \begin{cases} y''_{xx} = 0, \\ x = 5 \cos^2 t. \end{cases}$ |

2. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

| | | | |
|-----------|--|------------|-----------------------------|
| I | $y = \sin(x^3 + \pi), x_0 = \sqrt[3]{\pi}$; | III | $y = (7x-4)^6, x_0 = 1$; |
| II | $y = x \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{4}$; | IV | $y = x \arctg x, x_0 = 2$. |

Ответы:

| | | | | | | | |
|----------|---------------|-----------|---------|------------|-------------|-----------|-------------------|
| I | $6-27\pi^2$; | II | -12 ; | III | 1111320 ; | IV | $-\frac{16}{5}$. |
|----------|---------------|-----------|---------|------------|-------------|-----------|-------------------|

3. Записать формулу для производной n – го порядка указанной функции.

| | | | | | | | |
|---|-------------|----|-----------------|-----|------------------|----|-----------------------|
| I | $y = 2^x$; | II | $y = \cos 3x$; | III | $y = \sqrt{x}$; | IV | $y = \frac{1}{1+x}$. |
|---|-------------|----|-----------------|-----|------------------|----|-----------------------|

Ответы:

| | | | |
|-----|---|----|---|
| I | $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$; | II | $y^{(n)} = 3^n \cos\left(3x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; |
| III | $y^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) \frac{\sqrt{x}}{x^n}$; | IV | $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. |

4. Найти $d^3 y$ для данной функции.

| | | | | | | | |
|---|--------------------|----|-------------------|-----|--------------------------------|----|------------------|
| I | $y = (4x - 3)^5$; | II | $y = x \sin 2x$; | III | $y = \operatorname{arctg} x$; | IV | $y = \sin^2 x$. |
|---|--------------------|----|-------------------|-----|--------------------------------|----|------------------|

Ответы:

| | | | |
|-----|--|----|--|
| I | $d^3 y = 3840(4x - 3)^2 (dx)^3$; | II | $d^3 y = -4(3 \sin 2x + 2x \cos 2x)(dx)^3$; |
| III | $d^3 y = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3} (dx)^3$; | IV | $d^3 y = -4 \sin 2x (dx)^3$. |

4.5. Правило Лопиталья.

Раскрытие неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Раскрытие неопределенностей типа $(\infty - \infty)$, $(0 - \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) .

Теорема. (Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , содержащем точку x_0 , причем $\varphi'(x) \neq 0$ нигде при $x \in (a, b)$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \rightarrow x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь в точке x_0 дает неопределенность одного из названных видов и $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т.д.

Произведение функций $f_1(x) \cdot f_2(x)$, в котором $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty$, дает неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Однако оно легко преобразуется в частное $\frac{f_1(x)}{1/f_2(x)}$ или

$\frac{f_2(x)}{1/f_1(x)}$ это приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty$, то разность $f_1(x) - f_2(x)$ дает неопределенность $\infty - \infty$. Но она равна $f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) \left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right)$.

Тогда, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, приходим к неопределенности $0 \cdot \infty$.

Рассмотрим функцию вида $f(x)^{\varphi(x)}$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, то имеем неопределенность вида 0^0 .
2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, получаем неопределенность вида 1^∞ .
3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, получаем неопределенность вида ∞^0 .

Эти неопределенности раскрывают методом логарифмирования. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = A$. В силу непрерывности логарифмической функции $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} y$.

Тогда $\ln A = \lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) \ln f(x))$ и неопределенности 1.-3. сводятся к неопределенности $0 \cdot \infty$.

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow x_0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим $\lim_{x \rightarrow x_0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = A$.

Найдем $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(e^x + x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2$, $A = e^2$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$, Ответ: $\frac{7}{2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, Ответ: $\frac{1}{2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 8x - 5}{5x^3 - 9x + 13}$, Ответ: 0; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1}$, Ответ: -1;

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$, Ответ: $\frac{4}{9}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tg x)^{2x-\pi}$, Ответ: 1;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2arctg x) \ln x$, Ответ: 0; з) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{tg \frac{\pi x}{2a}}$, Ответ: $e^{\frac{2}{\pi}}$.

Задания для индивидуального выполнения

Найти пределы.

| | |
|-----|--|
| I | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) ctg x$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2+2^x)^{\frac{1}{x}}$; |
| II | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{e^x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{ctg x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$; |
| III | а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{ctg x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) tg \frac{x}{2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{ctg x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$; |
| IV | а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\ln x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$. |

Ответы:

| | |
|-----|---|
| I | а) 0, б) a-b, в) 0, г) -1, д) 1, е) 2; |
| II | а) 0, б) lna, в) 3, г) $\frac{1}{5}$, д) e^{-2} , е) e^2 ; |
| III | а) 0, б) 1, в) 1, г) -1, д) e, е) e^3 ; |
| IV | а) ∞ , б) 1, в) 0, г) 0, д) 1, е) 1. |

4.6. Исследование функций с помощью производных. Промежутки монотонности функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Признаки возрастания (убывания) функции:

1. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на $[a, b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).
2. Если непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) в некотором интервале, если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются интервалами монотонности функции. Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются критическими. Критические точки разбивают область определения функции на промежутки монотонности.

Точка x_1 (x_2) называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если для любых $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$, ($f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$).

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции, а значения функции в этих точках – экстремальными значениями.

Если функция в какой – либо точке достигает экстремума, то эта точка всегда является критической. Однако не всякая критическая точка будет точкой экстремума. Для выяснения является ли критическая точка точкой экстремума пользуются достаточными признаками:

Теорема (первый достаточный признак локального экстремума). Функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может самой точки x_0). Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка максимума. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка минимума.

Теорема (второй достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$ и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ может достигать наименьшего или наибольшего значения, либо в критических точках в интервале (a, b) , либо на концах отрезка $[a, b]$.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

Ответ: убывает в $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, возрастает в $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$.

2. Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

Ответ: убывает в $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$, $(8, +\infty)$.

3. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$.

Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 1$ и $x = 5$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$.

4. Исследовать на экстремум функцию $y = x - \ln(1 + x)$.

Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 0$.

5. Исследовать на экстремум функцию $y = x \ln^2 x$.

Ответ: $y_{\max} = \frac{4}{e^2}$ при $x = e^{-2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1, 5]$.

Ответ: $y_{\min} = 6$ при $x = 1$, $y_{\max} = 266$ при $x = 5$.

7. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50$ м³. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Ответ: $R = 2$ м, $H = 4$ м.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

| | |
|-----|---|
| I | а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$; б) $y = x^2(x - 12)^2$; |
| II | а) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$; б) $y = (x - 3)\sqrt{x}$; |
| III | а) $y = x^2(x - 3)$; б) $y = x \ln x$; |

| | |
|-----------|---|
| IV | а) $y = 2e^{x^2-4x}$; б) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$. |
|-----------|---|

2. Определить наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках.

| | |
|------------|---------------------------------|
| I | $y = x + 3\sqrt[3]{x}, [-1;1];$ |
| II | $y = (x-1)e^{-x}, [0;3];$ |
| III | $y = xe^x; [-2;0];$ |
| IV | $y = \frac{\ln x}{x}, [1;4].$ |

3. **I.** Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.

Ответ: $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}; H = \sqrt{\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}}.$

II. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

Ответ: $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

III. Проволокой, длина которой ℓ м необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

IV. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R .

Ответ: $\frac{4R}{3}.$

4.7. Исследование функций с помощью производных.

Выпуклость, вогнутость графика функции.

Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется выпуклой (вогнутой) в интервале (a,b) , если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклой ее часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Теорема (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т.е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то кривая $y = f(x)$ в этом интервале выпукла (вогнута).

Точка перегиба – точка на кривой, отделяющая вогнутую часть от выпуклой.

Теорема (достаточный признак точки перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ имеет знак, то $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.

Прямая L называется асимптотой данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Асимптоты бывают вертикальные и наклонные. Если существует хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$, т.е. функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы $k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx)$, то прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота кривой $y = f(x)$. При $x \rightarrow \pm \infty$ можем придти к двум значениям k . Если имеем одно значение для k , то при $x \rightarrow \pm \infty$ можем получить два значения для b .

Задания для аудиторных занятий

1. Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции

а) $y = \ln(1 + x^2)$; б) $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Ответ: а) $M_1(1; \ln 2)$, $M_2(-1; \ln 2)$; б) $M(-2; 0)$.

2. Найти асимптоты кривых

а) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; в) $y = e^{-x^2 + 2}$.

Ответ: а) $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$;

б) $y = -x$ – левая, $y = x$ – правая асимптота;

в) $y = 0$.

3. Провести полное исследование функции и построить их графики

а) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; б) $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Ответ: а) $y_{\min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба; асимптота $x = 0$;

б) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$ при $x = -2$; точка перегиба $M(-3; 0)$; асимптота $y = x + 1$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций.

| | |
|----|--|
| I | а) $y = (x+1)^4$, б) $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$; |
| II | а) $y = \frac{1}{x+3}$, б) $y = e^{-x^2}$; |

| | |
|-----|---|
| III | а) $y = \frac{x^2}{x^2 + 12}$, б) $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$; |
| IV | а) $y = \arctg x - x$, б) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$. |

Ответы:

| | |
|-----|--|
| I | а) $(-\infty; +\infty)$ - вогнут, точек перегиба нет; б) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ - вогнут, $(1; 3)$ - выпукл, $(1; \ln 2)$, $(3; \ln 2)$ - точки перегиба; |
| II | а) $(-\infty; -3)$ - выпукл, $(-3; +\infty)$ - вогнут, точек перегиба нет; б) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ - вогнут, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ - выпукл, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ - точки перегиба; |
| III | а) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$ - вогнут, $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$ - выпукл, $\left(-\sqrt{6}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(\sqrt{6}; \frac{1}{3}\right)$ - точки перегиба; б) $(-\infty; -3)$ - вогнут, $(-3; 0) \cup (0; +\infty)$ - выпукл, $(-3; 0)$ - точка перегиба; |
| IV | а) $(-\infty; 0)$ - выпукл, $(0; +\infty)$ - вогнут, $(0; 0)$ - точка перегиба; б) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ - выпукл, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ - вогнут, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$ - точки перегиба. |

2. Найти асимптоты графиков функций

| | |
|-----|---|
| I | а) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, б) $y = x + \ln x$; |
| II | а) $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$, б) $y = xe^x$; |
| III | а) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y = e^{\frac{1}{x}}$; |
| IV | а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, б) $y = e^{-x^2} + 2$. |

Ответы: I. а) $x = \pm 2$, $y = 1$; б) $x = 0$.

II. а) $y = x$, б) $y = 0$ - левая асимптота.

III. а) $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$; б) $x = 0$, $y = 1$;

IV. а) $x = \pm 1$, $y = -x$ - левая асимптота, $y = x$ - правая; б) $y = 2$.

3. Провести полное исследование функций и построить их графики:

| | |
|-----|--|
| I | a) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$; б) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; |
| II | a) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$; |
| III | a) $y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$; б) $y = e^{2x-x^2}$; |
| IV | a) $y = \frac{x^2}{2-x}$; б) $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$. |

Ответы: I. а) $y_{\min} = 4,5$ при $x = -3$, $y_{\max} = -4,5$ при $x = 3$; точка перегиба $M(0;0)$, асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = -x$.

б) $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = -1$; $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = 1$; точки перегиба $M_1(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})$, $M_2(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}})$; асимптота $y = 0$.

II. а) $y_{\min} = -1$ при $x = 0$; точка перегиба $M(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9})$ асимптоты $x = 1$, $y = 0$.

б) $y_{\min} = 0$ при $x = -1$, точки перегиба $M_1(-2; \ln 2)$, $M_2(0; \ln 2)$.

III. а) $y_{\min} = 28$ при $x = 11$, $y_{\max} = 0$ при $x = -3$; асимптоты $x = 4$, $y = x + 10$;

б) $y_{\max} = e$ при $x = 1$; точки перегиба $M_1(\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e})$, $M_2(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \sqrt{e})$.

IV. а) $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = -8$ при $x = 4$; асимптоты $x = 2$, $y = -x - 2$.

б) $y_{\max} = 0$ при $x = 2$; точки перегиба $M_1(1; \ln 2)$, $M_2(3; \ln 2)$.

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

5.1. Дифференцирование функций нескольких переменных.

Область определения функции нескольких переменных.

Частные производные. Производная по направлению. Градиент.

Переменная величина z называется однозначной функцией двух переменных x и y , если каждой совокупности их значений (x, y) из данной области D соответствует единственное определенное значение z .

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде: $z = f(x, y)$. Область D называется областью определения (существования) функции.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = c$ на плоскости xOy , в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = c$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = c$.

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется производная $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$, вычисленная при постоянном y .

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по y называется производная $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y)$, вычисленная при постоянном x .

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то производная этой функции в точке P_0 в направлении \bar{e} вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$, где α - угол, образованный вектором \bar{e} с осью Ox .

Для функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ справедлива формула $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где α, β, γ - углы между направлением \bar{e} и соответствующими координатами осями.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются частные производные данной функции $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$.

Для функции $z = f(x, y)$: $\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j}$.

Производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направлении дифференцирования $\frac{\partial z}{\partial e} = np_e \text{grad} z$.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке, есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Градиент функции $u = f(x, y, z)$ в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Задания для аудиторных занятий

1. Найти и изобразить области существования следующих функций:

а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; б) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$; в) $z = \ln(x^2 + y)$;

г) $z = \arccos \frac{x}{x+y}$; д) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$; е) $z = y\sqrt{\cos x}$;

ж) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$; з) $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$.

2. Построить линии уровня данных функций:

а) $z = \frac{y}{x^2}$; б) $z = x^2 - y^2$; в) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.

3. Найти поверхности уровня функций:

а) $u = x^2 + z^2 - y^2$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Найти частные производные функций:

а) $z = x^3 + y^3 - 3axy$; б) $z = \frac{x^2}{y^3} - \frac{x}{y}$; в) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; г) $z = e^{\sin \frac{y}{x}}$;

д) $z = 2^{xy(x^2 + y^2)}$; е) $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; ж) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$; з) $u = z^{xy}$.

5. Показать, что $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

6. Найти производные следующих функций в заданных точках по заданному направлению.

а) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(1;1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

б) $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{22}{13}$.

7. Найти стационарные точки следующих функций

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$; б) $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

Ответ: а) $(2; 0)$; б) $(3; 3; -3)$.

8. Найти градиент функции в точке M_0 , если

а) $z = x^2 + y^2 - 3xy$, $M_0(2; 1)$; б) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $M_0(2; -2; 1)$.

Ответ: а) $\vec{i} - 2\vec{j}$; б) $4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

9. Найти величину наибольшего подъема поверхности $z = x^2 + 4y^2$ в точке $M_0(2; 1; 8)$.

Ответ: 9.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти и изобразить область существования следующих функций:

| | |
|-----|---|
| I | а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; б) $z = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y}$; в) $z = \arcsin(x+y)$; г) $u = \frac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)}$; |
| II | а) $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; б) $z = \frac{2}{x^2 + y^2}$; в) $z = \arcsin \frac{x}{y^2}$; г) $u = \sqrt{x+y+z}$; |
| III | а) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$; б) $z = \ln(-x+y)$; в) $z = x + \arccos y$; г) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}$; |
| IV | а) $z = y + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$; б) $z = \ln(x+y^2)$; в) $z = \arccos(2x+y)$; г) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. |

2. Построить линии уровня функций:

| I | II | III | IV |
|---------------|----------|--------------------------|-------------------|
| $z = x^2 - y$ | $z = xy$ | $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ | $z = x^2 + y^2$. |

3. Найти частные производные функций:

| | |
|----|--|
| I | а) $z = xy + \frac{y}{x}$; б) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; в) $z = \arccos(y\sqrt{x})$; г) $u = xy^2z^3 + 3x^2 - 4yz$; |
| II | а) $z = \frac{2x-y}{x+2y}$; б) $z = xe^{-xy}$; в) $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; г) $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$; |

| | |
|-----|--|
| III | a) $z = \frac{x-y}{x+y}$; б) $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; г) $u = (xy)^z$; |
| IV | a) $z = \frac{x}{3y-2x}$; б) $z = yx \ln(x^2 + xy + y^2)$; в) $z = \operatorname{arccctg} \frac{x^2}{y}$; г) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. |

4. Найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке M_1 в направлении вектора $\overline{M_1 M_2}$:

| | | | |
|-----|---|----|--|
| I | $z = x^2 - xy - 2y^2, M_1(1;2), M_2(5;5);$ | II | $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2, M_1(2;-1), M_2(6;2);$ |
| III | $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1, M_1(1;2), M_2(4;6);$ | IV | $z = 2x^2 - 3xy^2 + 2, M_1(-2;1), M_2(1;5).$ |

Ответы:

| I | II | III | IV |
|-----------------|----------------|-----|----|
| $-\frac{27}{5}$ | $\frac{13}{5}$ | 1 | 3 |

5. Найти производную функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 в направлении $\operatorname{grad} u(M_0)$.

| | | | |
|-----|-------------------------------------|----|---|
| I | $u = xyz, M_0(1;2;-2);$ | II | $u = x^2 + 2xy - 4yz, M_0(1;1;-1);$ |
| III | $u = x^2 + y^2 - z^2, M_0(2;-1;3);$ | IV | $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x, M_0(1;-3;1).$ |

Ответы:

| I | II | III | IV |
|-------------|--------------|--------------|--------------|
| $2\sqrt{6}$ | $2\sqrt{17}$ | $2\sqrt{14}$ | $\sqrt{246}$ |

5.2. Дифференциал функции двух переменных.

Дифференциал и его приложения.

Производная и дифференциал сложной функции.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz , линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy .

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

При достаточно малых Δx и Δy для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz \text{ или } f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и функции $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ вычисляется по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Если $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то частные производные выражаются так: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

Задания для аудиторных занятий

1. Для функции $f(x, y) = x^2 y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке $(1; 2)$; сравнить их, если: а) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; б) $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

2. Найти полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right)$; б) $z = e^x (\cos y + x \sin y)$; в) $z = yx^y$; г) $u = xyz$; е) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$

3. Найти $df(3; 4; 5)$, если $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $-\frac{3}{25}dx - \frac{4}{25}dy + \frac{1}{5}dz$.

4. Вычислить приближенно:

а) $1,02^{3,97}$; б) $\sqrt{5e^{0,01} + 2,03^2}$; в) $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$.

Ответ: а) 1,08; б) 3,028; в) 0,273.

5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

6. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{yz}{x}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

7. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

8. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, где $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

9. Найти dz , если $z = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти полные дифференциалы следующих функций:

| | |
|-----|---|
| I | a) $z = \sin(x^2 + y^2)$; б) $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$; в) $z = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}$; г) $u = xyz$; |
| II | a) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = e^{x+y} (x \cos y + y \sin x)$; в) $z = \operatorname{ctg} \frac{2x}{y^2}$; г) $u = xy + yz + zx$; |
| III | a) $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$; б) $z = (1 + xy)^y$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$; г) $u = x^{yz}$; |
| IV | a) $z = \sqrt{\ln xy}$; б) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$; в) $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$; г) $u = y^{xz^2}$. |

2. Вычислить приближенно:

| I | II | III | IV |
|---------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|
| $(1,02)^2 (0,97)^3$ | $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ | $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$ | $(2,01)^{3,02}$ |

Ответ:

| I | II | III | IV |
|------|-------|------|------|
| 0,95 | 4,968 | 2,95 | 8,23 |

3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

| | |
|-----|--|
| I | $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, где $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$; |
| II | $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$; |
| III | $z = e^{2x-3y}$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - 1$; |
| IV | $z = 3^{4x^2+2y}$, где $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$. |

4. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

| | |
|-----|---|
| I | $z = x^2 \ln y$, где $x = \frac{v}{u}$, $y = u^2 + v^2$; |
| II | $z = x^2 y - y^2 x$, где $x = u \sin v$, $y = v \cos u$; |
| III | $z = x^2 y + yx$, где $x = \frac{2v}{u+v}$, $y = u^2 - 3v$; |
| IV | $z = y^2 \operatorname{tg} x$, где $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{u}{v}$. |

5.3. Повторное дифференцирование.

Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны, если они непрерывны: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ и т.д.

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $d^2 z = d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков: $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Дифференциалы высших порядков можно вычислять по формулам:

$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Символически это равенство можно записать в виде:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z.$$

Аналогично $d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z$ и т.д.

Производная неявной функции $f(x, y) = 0$, где f – дифференцируемая функция переменных x и y может быть вычислена по формуле $y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$, при условии, что

$$f'_y(x, y) \neq 0.$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом y как функцию от x .

Аналогично частные производные неявной функции двух переменных $z = f(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая

функция переменных x , y и z , могут быть вычислены по формулам: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}, \text{ при условии, что } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Если уравнение поверхности задано в явной форме $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности имеет вид: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ и уравнение нормали $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

В случае, когда уравнение поверхности задано в неявной форме $F(x, y, z) = 0$ и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, соответствующие уравнения будут иметь вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 - \text{уравнение касательной плоскости и}$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} - \text{уравнение нормали.}$$

Задания для аудиторных занятий.

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если а) $z = \ln(x^2 + y)$; б) $z = \sin^2(ax + by)$.

2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если а) $z = x \sin xy + y \cos xy$; б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

3. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. а) $z = x^y$; б) $z = e^x (\cos y + x \sin y)$.

4. $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \cos(ax + e^y)$.

6. Найти $d^2 z$, если а) $z = e^{xy}$; б) $u = xy + yz + zx$.

7. Найти $d^3 z$, если а) $z = e^x \cos y$; б) $u = xyz$.

8. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно

а) $x^3 y - y^3 x + xy = a^3$; б) $ye^x + e^y = 0$.

9. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$; б) $x^3 + 2y^3 + z^3 - xy - x^2z + 2y + 3 = 0$.

10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $d^2 z$, если $z^3 - 3xyz = a^3$.

11. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке M_0 .

а) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M_0(1;1;1)$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $M_0(2;2;3)$.

Ответ: а) $5x - 6y + z + 10 = 0$;

б) $2x + 2y - 3z + 1 = 0$,

$$\frac{x+1}{-5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{-1};$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если

| | |
|-----|---|
| I | а) $z = xy + \sin(x + y)$; б) $z = e^{xy^2}$; |
| II | а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = e^{x^{2y}}$; |
| III | а) $z = \arcsin(xy)$; б) $z = y^{\ln x}$; |
| IV | а) $z = \ln(x - 2y^2)$; б) $z = e^{x^2y}$. |

2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

| | | | |
|----|---|-----|--|
| I | $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; | III | $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$; |
| II | $z = \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}$; | IV | $z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}$. |

3. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

| | | | | | | | |
|---|----------------|----|-----------------------|-----|------------------|----|----------------------|
| I | $z = \cos(xy)$ | II | $z = \sin(ax - by^2)$ | III | $z = \cos(xy^2)$ | IV | $z = \sin(x + 3y^2)$ |
|---|----------------|----|-----------------------|-----|------------------|----|----------------------|

4. Найти $d^2 z$, если

| | | | | | | | |
|---|----------------------------------|----|------------------------------------|-----|------------------|----|--------------------------------|
| I | $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ | II | $z = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$ | III | $z = e^y \sin x$ | IV | $z = 3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$ |
|---|----------------------------------|----|------------------------------------|-----|------------------|----|--------------------------------|

5. Найти d^3u , если

| | | | |
|----|--------------------------------|-----|------------------------|
| I | $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; | III | $u = \ln(x + y + z)$; |
| II | $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$; | IV | $u = e^{ax+by+cz}$. |

6. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, d^2z , если

| | | | |
|----|----------------------------|-----|-----------------------------|
| I | $ax + by + cz = e^z$; | III | $z^2 = xy + a$; |
| II | $xe^y + ye^x + 2e^z = a$; | IV | $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$. |

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке M_0 :

| | | | |
|----|--|-----|--|
| I | $4x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $M_0(-1;2;0)$; | III | $z = 1 + x^2 + y^2$, $M_0(1;1;3)$; |
| II | $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(1;0;0)$; | IV | $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$, $M_0(1;2;0)$. |

Ответы:

| | | | |
|----|---|-----|--|
| I | $2x + y = 0$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}$; | III | $2x + 2y - z - 1 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$; |
| II | $2x - z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$; | IV | $x + 4y - 9 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{0}$. |

5.4. Экстремум функции двух переменных.

Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух переменных. Метод наименьших квадратов.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ (необходимые условия экстремума).

В общем случае в точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ или $df(x_0, y_0) = 0$, или $df(x_0, y_0)$ не существует.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y)$ тогда:

а) если $d^2f(x_0, y_0) < 0$, то $f(x_0, y_0)$ есть максимум функции $f(x, y)$;

б) если $d^2f(x_0, y_0) > 0$, то $f(x_0, y_0)$ есть минимум функции $f(x, y)$;

в) если $d^2f(x_0, y_0) < 0$, меняет знак, то $f(x_0, y_0)$ не является экстремумом функции $f(x, y)$.

Эти достаточные условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ и $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$, тогда:

1. если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);
2. если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;
3. если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование.

Для двух функционально связанных величин x и y известны n пар соответствующих значений $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$. Будем предлагать, что зависимость между ними выражается линейной функцией $y = ax + b$. Тогда по методу наименьших квадратов наилучшими будут те значения параметров a и b , которые обращают в минимум сумму

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

$$\text{В точке минимума} \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Задания для аудиторных занятий

1. Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; б) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Ответ: а) $z_{\min}(2; 1) = -28$, $z_{\max}(-2; -1) = 28$;

б) $z_{\max}(-4; -2) = 8e^{-2}$.

2. Найти экстремум функции трех переменных $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответ: $u_{\min}\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right) = -\frac{4}{3}$.

3. Табличные данные

| | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | 19,1 | 25,0 | 30,1 | 36,0 | 40,0 | 45,1 | 50,0 |
| y | 76,30 | 77,80 | 79,75 | 80,80 | 82,35 | 83,90 | 85,10 |

отвечают формуле $y = ax + b$. Найти a и b .

Ответ: $y = 0,279x + 71,14$.

Задания для индивидуального выполнения

1. Найти экстремум функции двух переменных

| | | | |
|----|-------------------------|-----|-------------------------------|
| I | $z = x^3 + y^3 - 15xy;$ | III | $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y;$ |
| II | $z = xy^2(1 - x - y);$ | IV | $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ |

Ответ:

| | | | |
|----|---|-----|--|
| I | $z_{\min}(5;5) = -125;$ | III | $z_{\min}\left(0; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3};$ |
| II | $z_{\max}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64};$ | IV | $z_{\min}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 0.$ |

2. По методу наименьших квадратов построить эмпирическую формулу $y = ax + b$, если

| | | | | | | | | |
|-----|----------|------|------|------|------|------|------|------|
| | x | 0,30 | 0,90 | 1,52 | 2,13 | 2,74 | 3,35 | 3,96 |
| I | y | 3,29 | 3,41 | 3,72 | 4,25 | 4,36 | 4,58 | 5,23 |
| II | y | 1,51 | 1,62 | 2,25 | 2,46 | 2,57 | 2,97 | 3,42 |
| III | y | 3,82 | 3,55 | 3,17 | 3,00 | 2,52 | 2,55 | 2,19 |
| IV | y | 4,19 | 4,26 | 4,44 | 5,01 | 5,19 | 5,36 | 5,74 |

Ответ:

| | | | |
|----|---------------------|-----|----------------------|
| I | $y = 0,51x + 3,02;$ | III | $y = -0,44x + 3,91;$ |
| II | $y = 0,51x + 1,31;$ | IV | $y = 0,44x + 3,94.$ |

5.5. Условный экстремум.

Метод множителей Лагранжа. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области.

Условным экстремумом функции $f(x, y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что $\varphi(x, y) = 0$, составляют функцию Лагранжа $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, где λ - неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции.

Необходимые условия экстремума сводится к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала $d^2F(x, y)$ функции Лагранжа.

Если функция $F(x, y)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в стационарной точке или в граничной точке области.

Задания для аудиторных занятий

1. Определить условные экстремумы функций:

а) $z = x + 2y$, при $x^2 + y^2 = 5$; б) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, при $x + y + 3 = 0$.

Ответ: а) $z_{\max}(1; 2) = 5$, $z_{\min}(-1; -2) = -5$; б) $z_{\min}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}$.

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функций: а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$; б) $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ответ: а) $z_{\max}(2; -1) = 13$, $z_{\min}(1; 1) = z(0; -1) = -1$;

б) $z_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

3. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S , имеющий наибольший объем.

4. Руслу двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

Задания для индивидуального выполнения

1. Определить условный экстремум функции

| | | | |
|----|------------------------------------|-----|--|
| I | $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$; | III | $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$; |
| II | $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$; | IV | $z = z^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. |

Ответы:

| | |
|----|--|
| I | $z_{\max}\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$; |
| II | $z_{\min}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$; $z_{\max}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$; |

| | |
|-----|--|
| III | $z_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 - 2\sqrt{2}; z_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 2\sqrt{2};$ |
| IV | $z_{\min}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}.$ |

2. Определить наибольшее и наименьшее значения функции.

| | |
|-----|--|
| I | $z = 1 + x + 2y$ в области $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1;$ |
| II | $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в области $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12;$ |
| III | $z = 1 + x + 2y$ в области $x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 1;$ |
| IV | $z = xy + x + y$ в области $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3.$ |

Ответы:

| | |
|-----|--|
| I | $z_{\text{наим}}(0;0) = 1, z_{\text{наиб}}(0;1) = 3;$ |
| II | $z_{\text{наим}}\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}; z_{\text{наиб}}(0;4) = 16;$ |
| III | $z_{\text{наим}}(0;-1) = -1, z_{\text{наиб}}(1;0) = 2;$ |
| IV | $z_{\text{наим}}(1;2) = 5, z_{\text{наиб}}(2;3) = 11.$ |

Литература

1. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В трех частях. Часть 1 / под общей редакцией Рябушко А.П. – Мн., Высш. шк., 2000. – 303 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
3. Сборник задач по математике для ВПУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под редакцией Ефимова А.В., Димидовича Б.П. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высш. шк., 1997. – 415 с.
5. Сборник задач по высшей математике. Часть 1. / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис – пресс, 2004.-576 с.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Глава 1. Элементы линейной алгебры..... | 3 |
| 1.1. Определители..... | 3 |
| 1.2. Матрицы..... | 11 |
| 1.3. Системы линейных уравнений..... | 18 |
| 1.4. Векторы в пространстве R^3 | 25 |
| 1.5. Векторное и смешанное произведение векторов..... | 31 |
| 1.6. Линейные преобразования в R^3 | 38 |
| Глава 2. Основы аналитической геометрии..... | 44 |
| 2.1. Прямая на плоскости..... | 44 |
| 2.2. Кривые второго порядка..... | 47 |
| 2.3. Плоскость в пространстве..... | 52 |
| 2.4. Прямая в пространстве..... | 55 |
| 2.5. Поверхности второго порядка..... | 59 |
| Глава 3. Введение в математический анализ..... | 62 |
| 3.1. Предел функции в точке..... | 62 |
| 3.2. Замечательные пределы..... | 66 |
| 3.3. Сравнение функций..... | 68 |
| 3.4. Непрерывность функции в точке..... | 71 |
| Глава 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной..... | 74 |
| 4.1. Производная..... | 74 |
| 4.2. Производная..... | 77 |
| 4.3. Дифференциал функции..... | 80 |
| 4.4. Производные и дифференциалы высших порядков..... | 82 |
| 4.5. Правило Лопиталю..... | 84 |
| 4.6. Исследование функций с помощью производных..... | 87 |
| 4.7. Исследование функций с помощью производных..... | 89 |
| Глава 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных..... | 93 |
| 5.1. Дифференцирование функций нескольких переменных..... | 93 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.2. | Дифференциал функции двух переменных..... | 96 |
| 5.3. | Повторное дифференцирование..... | 99 |
| 5.4. | Экстремум функции двух переменных..... | 102 |
| 5.5. | Условный экстремум..... | 104 |
| | Литература..... | 107 |

Учебное издание

Составители:

Лизунова Ирина Владимировна
Денисович Ольга Константиновна
Остапчук Евгений Матвеевич

**Линейная алгебра. Аналитическая геометрия.
Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких
переменных.**

Практикум по дисциплине «Высшая математика»
для студентов технических специальностей.

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск И.В. Лизунова
Верстка: Кармаш Е.Л.

Подписано в печать 21.12.2006. Формат 60 × 84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 6,5. Уч. изд. л. 7,0. Тираж ...150 экз. Заказ № 1203.

Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический
университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.