ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

ПРИМЕР. Вычислить частные производные первого порядка функции $z = x^2 y \sin^2 y \cos x + x y^2 \sin y \cos^2 x$.

Решение этой задачи в том виде, как она сформулирована, приведет, очевидно, к громоздким вычислениям: в каждом слагаемом придется находить производную произведения. Однако можно, заметив определенную симметрию в заданном выражении и обозначив $u = x \sin y$, $v = y \cos x$, значительно упростить вид функции z: $z = u^2 v + u v^2$. Вычислить частные производные функции $z = z(u, v)$ значительно проще, чем функции $z = z(x, y)$. Но для этого необходимо выяснить, как связаны между собой производные функций $z = z(x, y)$ и $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Функция $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ называется *сложной функцией двух переменных*: она формально зависит от переменных u и v, а фактически – от x и y.

Будем считать, что функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), а функция $z(u, v)$ – в соответствующей точке (u, v). Вычислим производную z'_x.

Зададим приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ получат частные приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$. Так как $z(u, v)$ дифференцируема в точке (u, v), то по определению ее полное приращение имеет вид:

$$\Delta z = z'_u(u, v)\Delta_x u + z'_v(u, v)\Delta_x v + \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x u + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v)\,\Delta_x v,$$

причем $$\lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) = \lim_{\Delta_x u,\, \Delta_x v \to 0} \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) = 0. \qquad (4)$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + z'_v(u, v) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\alpha(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta(\Delta_x u, \Delta_x v) \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right).$$

Функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y), поэтому непрерывны. Значит, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x v = 0$.

Кроме того, $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = v'_x$.

Отсюда с учетом (4) имеем

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x + u'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \alpha\left(\Delta_x u, \Delta_x v\right) + v'_x \cdot \lim_{\Delta_x u, \Delta_x v \to 0} \beta\left(\Delta_x u, \Delta_x v\right) =$$

$$= z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x .$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично, задавая $\Delta y \neq 0$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Способ написания этих формул станет наглядным, если составить схему зависимости сложной функции от ее формальных (промежуточных) и фактических переменных (рис. 8):

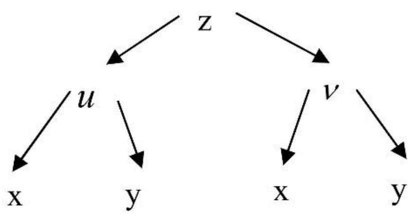

Рис. 8

Вернемся к примеру в начале этого параграфа.

ПРИМЕР. Найти частные производные первого порядка сложной функции $z = u^2\, v + u\, v^2$, $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

$$z'_u = 2uv + v^2, \quad z'_v = u^2 + 2uv,$$

$$u'_x = \sin y, \quad u'_y = x \cos y, \quad v'_x = -y \sin x, \quad v'_y = \cos x.$$

Отсюда

$$z'_x = \left(2uv + v^2\right) \sin y + \left(u^2 + 2uv\right)\left(-y \sin x\right),$$

$$z'_y = \left(2uv + v^2\right) x \cos y + \left(u^2 + 2uv\right) \cos x,$$

где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

Эта идея применима для составления формул вычисления производных сложных функций, зависящих от любого числа как фактических, так формальных переменных.

ПРИМЕР. Составить формулы вычисления производных первого порядка функции $z = z(u, v, w)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(y, t)$.

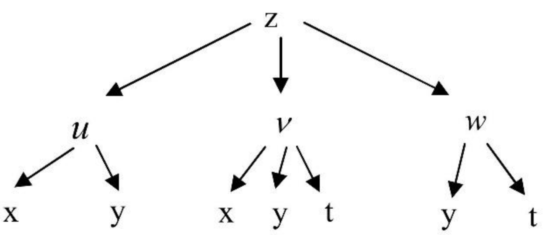

Рис. 9

Согласно схеме зависимости (рис. 9) эта функция зависит фактически от трех переменных x, y, t, и формулы вычисления производных имеют вид:

$$z'_x = z'_u\, u'_x + z'_v\, v'_x\ , \quad z'_y = z'_u\, u'_y + z'_v\, v'_y + z'_w\, w'_y, \quad z'_t = z'_v\, v'_t + z'_w\, w'_t.$$

Рассмотрим сложную функцию $z = z(x, u, v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

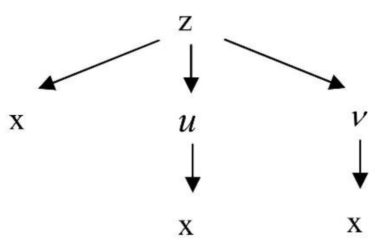

Рис. 10

Формально эта функция зависит от трех переменных, а фактически $z = z(x)$ – функция только одной переменной x. Поэтому производная от нее по x – не частная, а обыкновенная производная, которая в таком случае называется *полной производной* данной *сложной функции*. Вычисляется она по формуле $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (рис. 10). В этой формуле $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ – *частная* производная функции, зависящей от трех переменных x, u, v, а $\dfrac{dz}{dx}$ – *полная* производная.

Используя формулу вычисления полной производной, можно дифференцировать показательно-степенные функции.

ПРИМЕР. Найти первую производную функции $y=(tg\ 2x)^{\cos 3x}$.

Обозначим $u=tg\ 2x,\ \ v=\cos 3x$, тогда получим $y=u^{v}$ – сложная функция двух переменных и $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ (рис. 11).

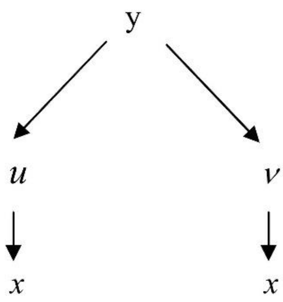

Рис. 11

Поэтому $y'=v\,u^{v-1}\cdot\dfrac{2}{\cos^{2}2x}+u^{v}\,\ln u\cdot(-3\sin 3x)=u^{v}\left(\dfrac{2v}{u\cos^{2}2x}-3\sin 3x\cdot\ln u\right)$,

где $u=tg\ 2x,\ \ v=\cos 3x$.

Заметим, что найти производную показательно-степенной функции можно и по-другому – с помощью процедуры логарифмического дифференцирования.

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Рассмотрим уравнение $4x^{3}+3xy+y^{3}=0$. Очевидно, есть пары значений x и y, обращающих его в верное числовое равенство, например: $(0,0)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ и т.д. Однако не всякая пара (x,y) удовлетворяет этому уравнению. Значит, можно утверждать, что этим уравнением задана некоторая функция $y=y(x)$ (или $x=x(y)$), хотя явно вид этой зависимости в данном случае получить довольно сложно.

Функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего независимые и зависимую переменные, называется *неявной функцией*.

В приведенном примере равенство $4x^{3}+3xy+y^{3}=0$ задает неявную функцию одной переменной. Уравнением $x-2y+5=0$ также задается неявная функция, которая легко может быть представлена в явном виде: $x = 2y - 5$ или $y = \dfrac{x+5}{2}$.

Однако не всякое уравнение, не разрешенное относительно одной из переменных, определяет неявную функцию. Например, уравнение $x^2 + 2y^4 + 3 = 0$ не задает функцию, так как, очевидно, нет ни одной пары действительных чисел, которая ему удовлетворяет.

Кроме неявных функций одной переменной, существуют неявные функции нескольких переменных. Так, например, тройки чисел $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ обращают выражение $xe^y + ye^z + ze^x = 1$ в верное числовое равенство, поэтому $xe^y + ye^z + ze^x - 1 = 0$ – функция двух переменных, заданная неявно. Здесь ни одну из трех переменных невозможно явно выразить через две другие.

$x^2 + y^2 - z = 0$ – также неявная функция двух переменных, но $z = x^2 + y^2$ – та же функция, заданная явно.

Пусть в общем случае дано уравнение $F(x, y) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждому значению x из некоторого множества X соответствует единственное значение $y \in Y$, которое вместе с x удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, то говорят, что это уравнение определяет на множестве X *неявную функцию* одной переменной $y = y(x)$.

Таким образом, для неявной функции имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in X$.

В некоторых случаях каждому $x \in X$ соответствует несколько значений y. Тогда равенство $F(x, y) = 0$ определяет не одну, а несколько неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 4 = 0$ задает две неявные функции, которые можно записать в явном виде, разрешив его относительно y: $y = \sqrt{4 - x^2}$ или $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

Ответ на вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $F(x, y)$, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ определяло единственную функцию $y = y(x)$, дает теорема о существовании неявной функции.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в этой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ единственную неявную функцию, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0, причем $y(x_0) = y_0$.

(Без доказательства).

Рассмотрим функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы о существовании неявной функции. Тогда равенство $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = y(x)$, для которой в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ имеет место тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$. Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

– формула для вычисления производной неявной функции одной переменной.

ПРИМЕР. Найти производную неявной функции $4x^3 + 3xy + y^3 = 0$.

$$F'_x = 12x^2 + 3y,\; F'_y = 3x + 3y^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{12x^2 + 3y}{3x + 3y^2} = -\frac{4x^2 + y}{x + y^2}.$$

Если считать, что это равенство задает функцию $x = x(y)$, то $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x + y^2}{4x^2 + y}$.

Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$. При условиях, аналогичных сформулированным в теореме о существовании неявной функции, это уравнение определяет z как функцию двух переменных $z = z(x, y)$. Поэтому $F(x, y, z(x,y)) \equiv 0$ – тождество. Продифференцировав его по x и по y, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\\ &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}\end{aligned} \qquad \text{при условии, что } F'_z \neq 0.$$

ПРИМЕР. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $xe^y + ye^z + ze^x - 1 = 0$.

$$F'_x = e^y + ze^x,\; F'_y = xe^y + e^z,\; F'_z = ye^z + e^x \;\Rightarrow\; z'_x = -\frac{e^y + ze^x}{ye^z + e^x},\; z'_y = -\frac{xe^y + e^z}{ye^z + e^x}$$

при условии, что $ye^z + e^x \neq 0$.