Непрерывность функции в точке

Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

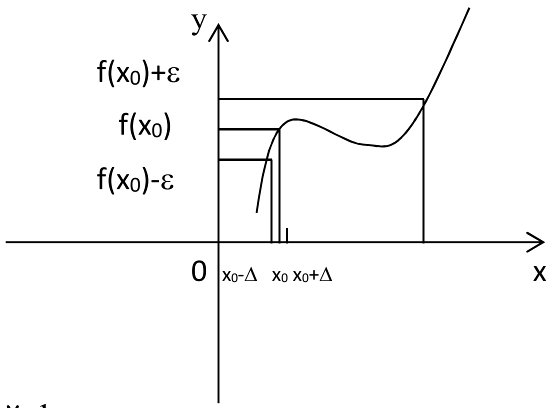
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тот же факт можно записать иначе:

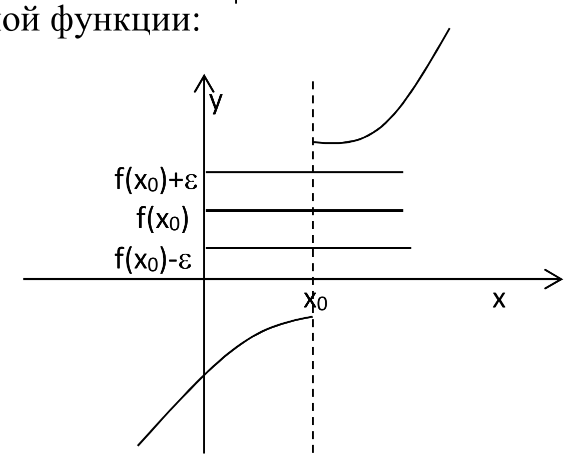
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке x = x_0, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$.

При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx→0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx→0.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения x = x_0 из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

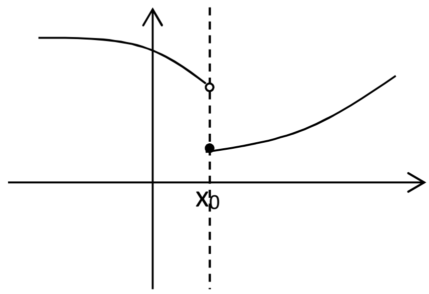
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

Точки разрыва и их классификация.

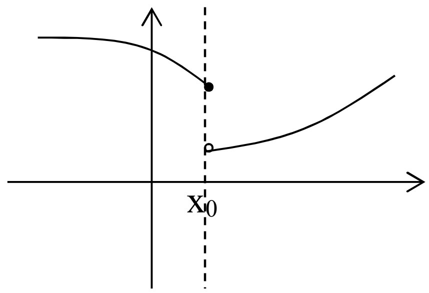
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

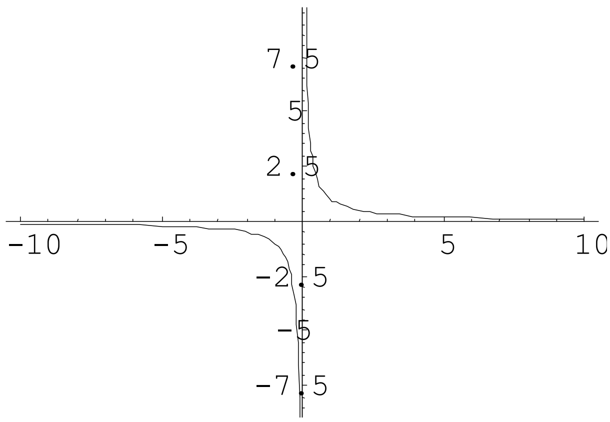
<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x)=\begin{cases}1, & x-\textit{рациональное число}\\ 0, & x-\textit{иррациональное число}\end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

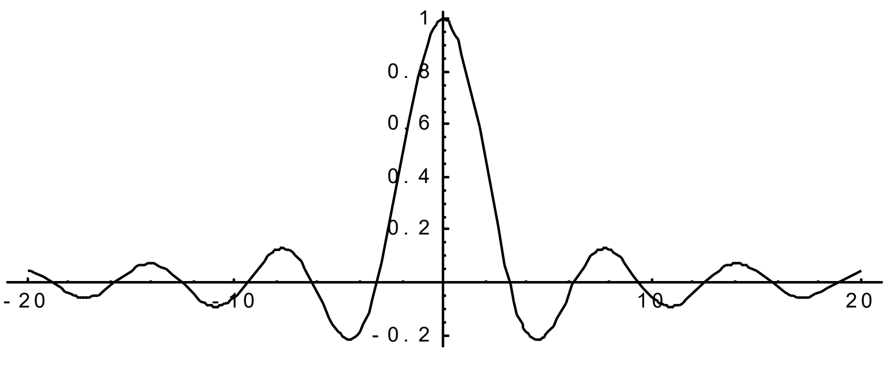


<u>Пример.</u> f(x) = $\dfrac{\sin x}{x}$

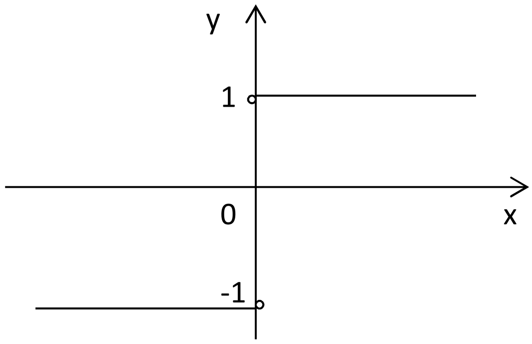
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \textit{при}\quad x\neq 0\\ 1, & \textit{при}\quad x=0\end{cases}$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $–M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

<u>Свойство 2:</u> Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

<u>Свойство 3:</u> (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

<u>Свойство 4:</u> Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

<u>Свойство 5:</u> (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

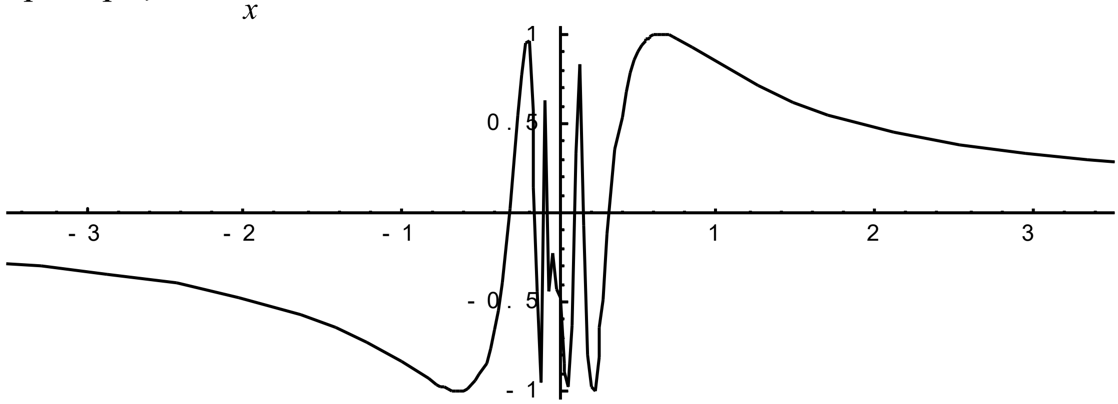
Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \Delta$ верно неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от х, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и х.

<u>Свойство 6:</u> Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

<u>Пример.</u> $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

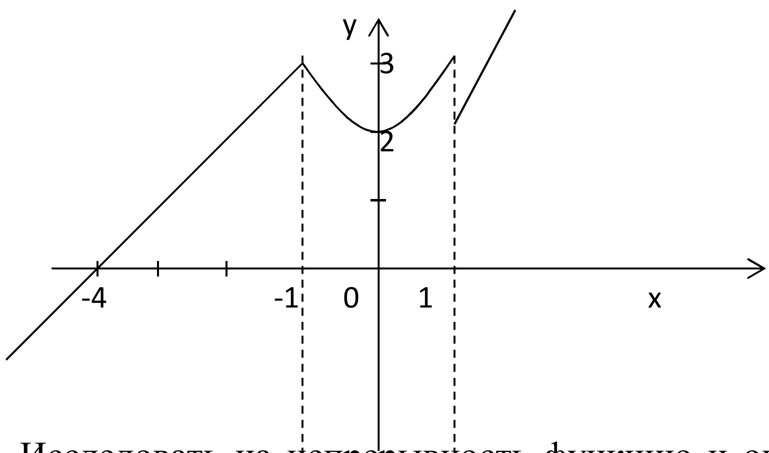
<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода