Точки экстремума функции

Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y = f(x)$, если $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 .

Определение. Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Примеры.

1. $y=x^2$ имеет минимум при $x=0$.
2. $y=-|x-3|$ имеет максимум при $x=3$.
3. $y=\sin x$ имеет минимумы при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и максимумы при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции, то есть для любой точки выбранной окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, а если $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Переходя к пределу в полученных неравенствах, находим, что из первого из них следует, что $f'(x_0) \geq 0$, а из второго – что $f'(x_0) \leq 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Замечание. В теореме Ферма важно, что x_0 – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке [0;1], принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $x = 1$ и $x = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$,

то внутри интервала (ab) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть M и m – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда, если $m = M$, то $f(x) = m = M$ – постоянная функция, и $f'(x)=0$ для любой точки отрезка $[a,b]$. Если же $m<M$, то хотя бы одно из значений m или M достигается во внутренней точке c отрезка $[a,b]$ (так как на концах отрезка функция принимает равные значения). Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Замечание 1. В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.

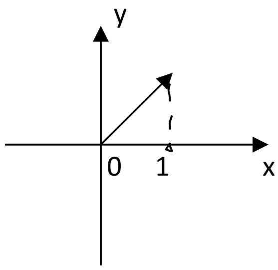


Рис. 1.

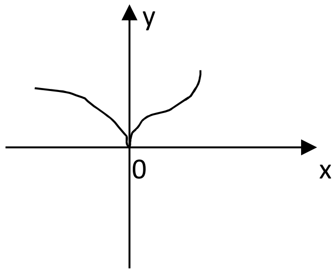


Рис. 2.

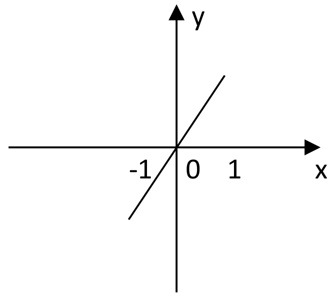


Рис. 3.

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 1, $f(0)=f(1)=0$, но $x=1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис.2, не дифференцируема при $x = 0$, а для третьей функции $f(-1)\neq f(1)$.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка c, $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Доказательство.

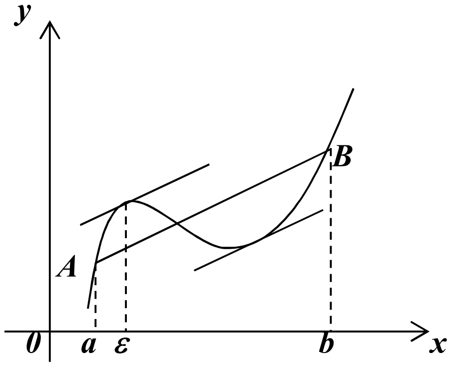
Обозначим $Q = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $F(a)=F(b)=0$. Следовательно, на интервале (a,b) есть точка c, в которой $F'(c)=0$. Но $F'(x)=f'(x) - Q$, то есть $F'(c) = f'(c) - Q$. Подставив в это равенство значение Q, получим

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Замечание. Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и b.

Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB.



Определение. Выражение $f(a)-f(b)=f'(\varepsilon)(b-a)$ называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**.

В дальнейшем эта формула будет очень часто применяться для доказательства самых разных теорем.

Иногда формулу Лагранжа записывают в несколько другом виде:

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коши. Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[a,b]$ и дифференцируемые на (a,b), и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то на (a,b) найдется такая точка $x=c$, $a<c<b$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство.

Обозначим $Q=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При этом $g(b)-g(a)\neq 0$, иначе по теореме Ролля нашлась бы точка внутри отрезка $[a,b]$, в которой $g'(x)=0$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - Q(g(x) - g(a))$, для которой выполнены все условия теоремы Ролля (в частности, $F(a)=F(b)=0$). Следовательно, внутри отрезка $[a,b]$ существует точка $x=c$, в которой $F'(c)=0$. Но $F'(x)=f'(x) - Qg'(x)$, поэтому $f'(c) - Qg'(c)=0$, откуда $Q=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Подставляя в это равенство значение Q, получаем доказательство утверждения теоремы.

Раскрытие неопределенностей

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на некотором отрезке $[a,b]$ условиям теоремы Коши и $f(a) = g(a) = 0$, то отношение $f(x)/g(x)$ не определено при $x=a$, но определено при остальных значениях x. Поэтому можно поставить задачу вычисления предела этого отношения при $x\to a$. Вычисление таких пределов называют обычно «раскрытием неопределенностей вида $\{0/0\}$».

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a,b]$ условиям теоремы Коши и $f(a)=g(a)=0$. Тогда, если существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство.

Выберем $x\in[ab], x\neq a.$ Из теоремы Коши следует, что $\exists\xi : a<\xi<x,$ такое, что $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. По условию теоремы $f(a)=g(a)=0$, поэтому $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. При $x\to a$

$\xi \to a$. При этом, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует и $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A$. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$ Теорема доказана.

Пример.

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(a^x-x^a)'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a}\frac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{1}=a^a\ln a-a^a=a^a(\ln a-1)$$ при $a>0$.

Замечание 1. Если $f(x)$ или $g(x)$ не определены при $x=a$, можно доопределить их в этой точке значениями $f(a)=g(a)=0$. Тогда обе функции будут непрерывными в точке a, и к этому случаю можно применить теорему.

Замечание 2. Если $f'(a)=g'(a)=0$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям, наложенным в теореме на $f(x)$ и $g(x)$, к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно еще раз применить правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ и так далее.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xctgx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ctgx-\frac{x}{\sin^2 x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-x}{2x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{2\sin^2 x+2x\cdot 2\sin x\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x(\sin x+2x\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x+2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{3}.$$

Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то есть для вычисления предела отношения двух функций, стремящихся к бесконечности при $x\to a$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы при $x\neq a$ в окрестности точки a, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Доказательство.

Выберем в рассматриваемой окрестности точки a точки α и x так, чтобы $\alpha<x<a$ (или $a<x<\alpha$). Тогда по теореме Коши существует точка c ($a<c<x$) такая, что $\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Так как $\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}}$, получаем:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}$$, откуда $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, можно для любого малого ε выбрать α настолько близким к a, что для любого c будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$, или $A-\varepsilon < \dfrac{f'(c)}{g'(c)} < A+\varepsilon$. Для этого же значения ε из условия теоремы следует, что

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$ (так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$), поэтому

$\left|\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} - 1\right| < \varepsilon$, или $1-\varepsilon < \dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1+\varepsilon$.

Перемножив неравенства, получим

$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \dfrac{f'(c)}{g'(c)}\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$, или:

$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$. Поскольку ε – произвольно малое число, отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема верна и при $A=\infty$. В этом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Тогда и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = -2\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$; $\qquad g'(x) = e^x$;

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x)=e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x)=1+e^x;$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x)=e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{4}; \qquad g'''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2$; $\qquad g'(x) = 1 - \cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$ - опять получилась неопределенность. Применим правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = e^x - e^{-x}$; $\qquad g''(x) = \sin x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \dfrac{1 - 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ - применяем правило Лопиталя еще раз.

$f'''(x) = e^x + e^{-x}$; $\qquad g'''(x) = \cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$;

Неопределенности вида $0^0;\ \ 1^\infty;\ \ \infty^0$ можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки a при x→a. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции lny = g(x)lnf(x).

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Здесь $y = x^x$, $\ln y = x\ln x$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\begin{matrix} \text{\textit{правило}} \\ \text{\textit{Лопиталя}} \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$. Следовательно

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x;$ $\qquad g'(x) = 2e^{2x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$;- получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя еще раз.

$f''(x) = 2;$ $\qquad g'(x) = 4e^{2x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$;