Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x. Пусть Δx − приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное $f(x+\Delta x)-f(x)$. Отметим здесь, что функция непрерывна в точке x, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δf.

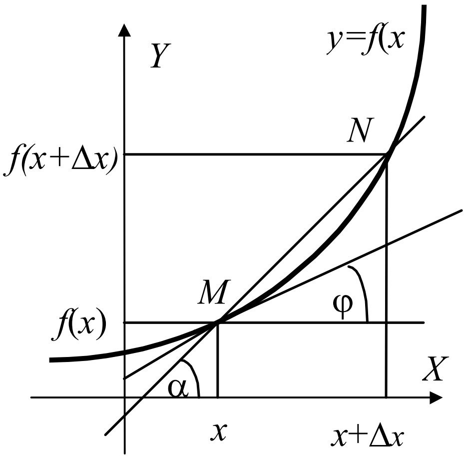

Рис. 1

Отношение $\Delta f/\Delta x$, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y=f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой $y=f(x)$, приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y=f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y/\Delta x$ или, что то же самое $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке $\Delta x=0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ в точке $\Delta x=0$, то он называется **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y=f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке (a, b)**.

Производная – это скорость изменения функции в точке x. Из определения производной следует, что $f'(x)\approx\Delta f/\Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между Δf и Δx.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

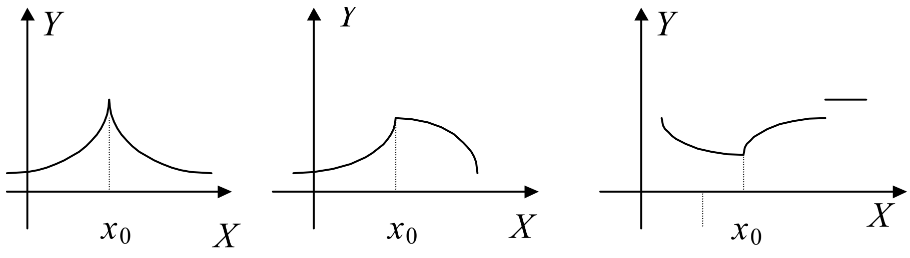

Рис. 2

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя является непрерывной в этой точке.

Механический смысл производной.

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: s=f(t). Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле: $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{(t_0 + \Delta t) - t_0} = s'(t_0).$$

Таким образом, производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент. Соответственно производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом x.

Геометрический смысл производной.
Уравнение касательной к графику функции.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Составим уравнение касательной к графику функции y = f(x) при x = x_0. Эта прямая должна проходить через точку с координатами (x_0,y_0), лежащую на графике функции, где y_0 = f(x_0), и иметь угловой коэффициент, равный производной f(x) при x = x_0. Получим: y = f`($x_0$)x + b, причем $y_0$ = f`(x_0)x_0 + b, то есть b = y_0 - f`(x_0)x_0. Тогда уравнение касательной можно записать в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Свойства производной (правила дифференцирования). Производная сложной и обратной функций.

Пусть при рассматриваемых значениях x существуют производные функций f(x) и g(x), то есть эти функции являются дифференцируемыми при данных значениях аргумента. Сформулируем и докажем некоторые свойства производных.

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x).$

Доказательство.

$$(f(x)+g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f+g+\Delta g)-(f+g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}) = f'+g'.$$

2. $(kf(x))' = kf'(x),$ где k=const.

Доказательство.

$$(kf(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(kf+\Delta kf)-kf}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta kf}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta f}{\Delta x} = kf'(x).$$

3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

Доказательство.

$$(f(x)\cdot g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\Delta f+f\Delta g+\Delta f\Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}g+f\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g\right) = f'g+fg'+f'\cdot 0,$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g = 0$ в силу непрерывности *g(x)*.

4. Если *g(x)*≠0, то $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

Доказательство.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg+g\Delta f-f\Delta g-fg)}{\Delta x\cdot g(g+\Delta g)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g+\Delta g)} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

5. Производная сложной функции.

Если функция u = φ(x) имеет при некотором значении x производную u_x'=φ´(x), а функция y = f(u) имеет при соответствующем значении u производную y_u'= f´(u), то сложная функция y = f(φ(x)) тоже имеет при данном значении x производную, равную

$$y'(x) = f'(u)\cdot u'(x).$$

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{\Delta u\to o}\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u),$ то $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u)+\alpha,$ где $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0.$

Тогда $\Delta y = y'(u)\Delta u+\alpha\Delta u.$ Разделив обе части равенства на Δx, получим:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем:

$$y'(x) = f'(u)u'(x),$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

6. Производная обратной функции.

Если для функции y=f(x) существует обратная функция x=φ(y), которая в некоторой точке y имеет производную φ′(y)≠0, то в соответствующей точке x функция f(x) тоже имеет производную, причем

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Так как φ(y) непрерывна, Δx→0 при Δy→0, и при переходе к пределу при Δy→0 получаем:

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Производные основных элементарных функций.

Используя полученные формулы и свойства производных, найдем производные основных элементарных функций.

1. Если $f(x)=C$=const, то ΔC=0, поэтому

$$C'=0.$$

2. $y=x^n$, где n – натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

Следовательно,

$$y' = nx^{n-1}.$$

3. $y = \sin x$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x = \cos x.$$

4. $y = \cos x$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} 2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x) = -2\cdot\frac{1}{2}\sin x = -\sin x.$$

5. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. Аналогично можно получить формулу $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$.

8. $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \dfrac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \dfrac{1}{x}$

9. $(shx)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx.$ Таким же образом можно найти производные остальных гиперболических функций.

10. По формуле производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

$$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} .$$

$$(arcctgx)' = (\frac{\pi}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2} .$$

11. Если α – произвольное действительное число, то

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} .$$