ПРОИЗВОДНАЯ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Как известно, производная функции одной переменной $y = y(x)$ характеризует скорость ее изменения при изменении x. Поэтому, очевидно, частная производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x характеризует скорость изменения этой функции в результате изменения x, или, по-другому, в направлении оси OX, а частная производная по y – скорость изменения функции в направлении оси OY. Однако, в каждой точке плоскости, кроме этих двух направлений, существует еще бесконечное множество других, и во многих случаях представляет интерес скорость изменения, или производная функции, по любому заданному направлению.

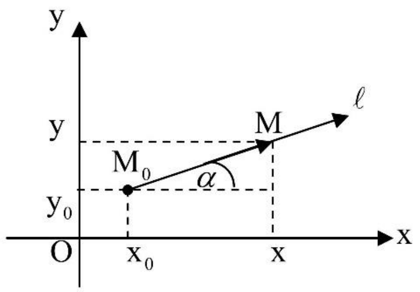

Рис. 12

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$. На произвольно направленной оси ℓ в плоскости XOY выберем фиксированную точку M_0 и переменную точку M (рис. 12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Производной функции* $z = z(x,y)$ в точке M_0 *по направлению* ℓ называется $\dfrac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{z(M) - z(M_0)}{\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|}$.

Эта производная *характеризует скорость изменения функции в точке* M_0 *в направлении* ℓ.

Выведем формулу вычисления производной по направлению. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат зафиксирована точка $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ – произвольная, а направление ℓ образует с положительным направлением OX угол α (рис. 12). Обозначим $\left|\overrightarrow{M_0 M}\right| = t$. Тогда $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\sin\alpha$, поэтому функция $z = z(x, y)$ на выбранном направлении фактически зависит от одной переменной t (рис.13). Поэтому в соответствии с определением

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=o} = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\sin\alpha .$$

$$\begin{tikzcd}
& z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\
t & & t
\end{tikzcd}$$

Рис. 13

Пусть теперь $u = u(x, y, z)$ – функция трех переменных, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная, $M(x, y, z)$ – произвольная точка и $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы заданного направления ℓ в пространстве. Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\cos\beta, \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

и
$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \qquad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Градиентом* функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Если обозначить $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор направления ℓ, то, очевидно, производная по направлению (5) – скалярное произведение $grad\ u$ и $\vec{\tau}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(grad\ u,\ \vec{\tau}\right) = \left|grad\ u\right| \left|\vec{\tau}\right| \cos\omega,\ \ \omega = \left(\widehat{grad\ u,\ \ell}\right).$$

Так как $\left|\vec{\tau}\right| = 1$, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left|grad\ u\right| \cos\omega$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ достигает максимума в том случае, когда $\ell \uparrow\uparrow grad\ u$. Это означает, что $grad\ u(M)$ *указывает на направление наискорейшего возрастания функции в точке M.* При этом скорость наибольшего возрастания в данной точке равна $\left|grad\ u\right| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$.

Итак, *градиентом скалярной величины называется вектор, который по численному значению и направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было отмечено выше, графиком функции двух переменных является пространственная поверхность. Поэтому величина производной $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)$ указывает, как будет меняться высота (значение переменной z) при движении из точки N_0 на поверхности, соответствующей M_0, в направлении ℓ (рис. 14): если $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)<0$, то при движении в данном направлении из точки N_0 высота будет уменьшаться, если же $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)>0$ – увеличиваться. Если $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0)=0$, то движение в направлении ℓ – это движение вдоль линии уровня, то есть линии постоянной высоты.

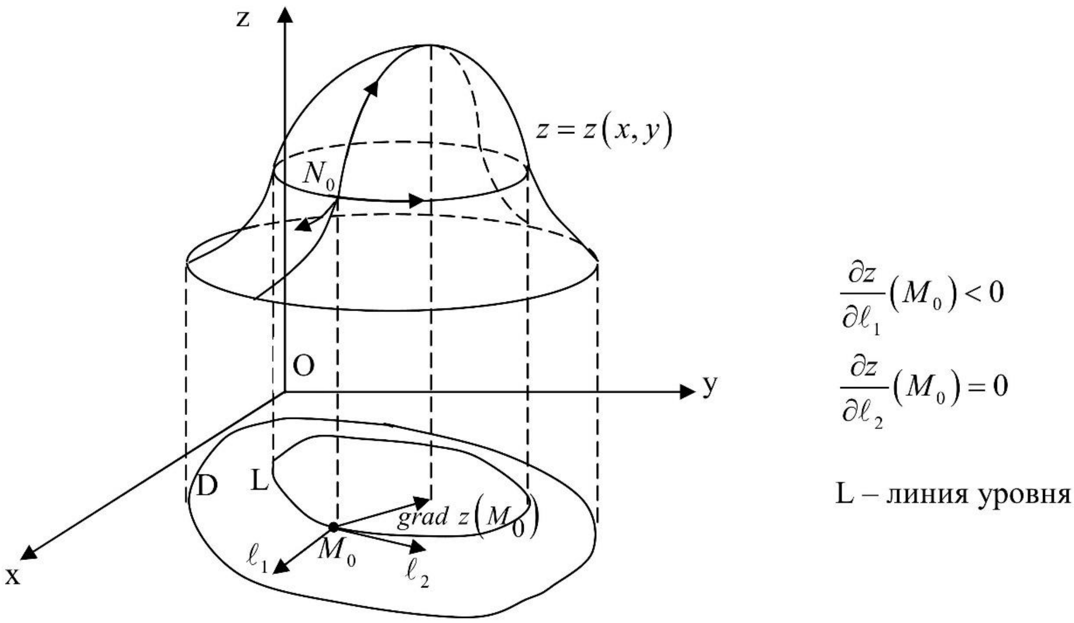

Рис. 14

Вектор $grad\ z(M_0)$ указывает, в каком направлении надо двигаться, чтобы крутизна подъема из точки N_0 была наибольшей.

ПРИМЕР. Вычислить производную по направлению вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ функции $z=2x\sqrt{y}-\frac{x^2}{3y^3}+4x$ в точке $M_0(3,1)$, если $M(-1,4)$. Найти направление наискорейшего возрастания этой функции в точке M_0.

Найдем частные производные первого порядка в точке $M_0(3,1)$:

$$z'_x(3,1)=2\sqrt{y}-\frac{2x}{3y^3}+4\Big|_{(3,1)}=4,\quad z'_y(3,1)=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{x^2}{y^4}\Big|_{(3,1)}=12.$$

Найдем вектор заданного направления и его направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{M_0 M}=(-4,3)\Rightarrow\left|\overrightarrow{M_0 M}\right|=5\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\frac{4}{5},\ \ \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial \ell}(3,1) = -\frac{16}{5} + \frac{36}{5} = 4$. Это означает, что движение в направлении вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ из точки $N_0(3,1,15)$, лежащей на поверхности, будет подъемом (высота будет увеличиваться).

Направление наискорейшего возрастания функции в точке $M_0(3,1)$ – $grad\ z(3,1) = (4,12) = 4(1,3)$.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Касательной плоскостью* к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. *Нормалью* называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Покажем, что $grad\ F(M_0)$ направлен по нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Рассмотрим кривую L, лежащую на поверхности и проходящую через точку M_0 (рис. 15). Пусть она задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \\ z = z(t) \end{cases}$$

Если $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, движущейся при изменении t вдоль L, то $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, а $\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ – радиус-вектор точки M_0.

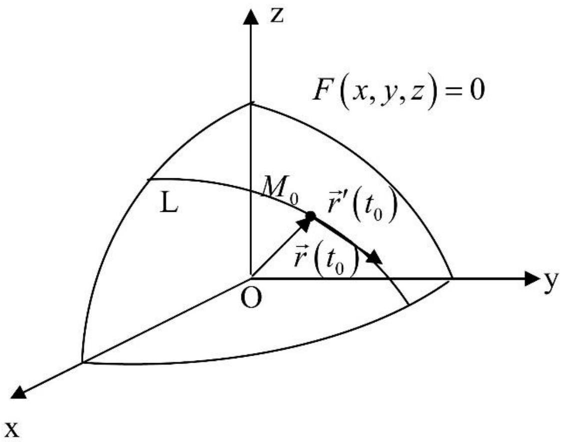

Рис. 15

Так как L лежит на поверхности, то $F\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)\equiv 0$. Продифференцируем это тождество по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0. \qquad (6)$$

По определению $grad\ F=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\ \dfrac{\partial F}{\partial y},\ \dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$, а $\vec{r}'(t)=\big(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\big)$. Поэтому (6) означает, что скалярное произведение $\big(grad\ F,\ \vec{r}'(t)\big)=0$ во всех точках кривой L.

Равенство нулю скалярного произведения векторов – необходимое и достаточное условие их перпендикулярности. Значит, в точке M_0 $\vec{r}'(t_0)\perp grad\ F(M_0)$. Но вектор $\vec{r}'(t)$ – вектор скорости – направлен по касательной к траектории точки $M(x,y,z)$ $\vec{r}(t)$, то есть по касательной к кривой L (рис. 15). Так как L выбрана произвольно, то $grad\ F(M_0)$ перпендикулярен всевозможным касательным, проведенным к линиям, лежащим на $F(x,y,z)=0$ и проходящим через точку M_0. А это по определению означает, что $grad\ F(M_0)$ перпендикулярен касательной плоскости, то есть является ее нормалью.

Отсюда уравнение касательной плоскости к данной поверхности имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \qquad (7)$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (8)$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением $z=z(x,y)$, получим: $z-z_0=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ – уравнение касательной плоскости, и $\dfrac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ – уравнение нормали.

ПРИМЕР. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Очевидно

$$F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-R^2 \Rightarrow\ F'_x(M_0)=2x_0,\ F'_y(M_0)=2y_0,\ F'_z(M_0)=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости (7):

$$x_0\left(x-x_0\right)+y_0\left(y-y_0\right)+z_0\left(z-z_0\right)=0 \Rightarrow$$

$$x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0-\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)=0 \;\Rightarrow\; x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0=R^2 .$$

Уравнения нормали (8):

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0} \;\Rightarrow\; \frac{x}{x_0}-1=\frac{y}{y_0}-1=\frac{z}{z_0}-1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

Заметим, что эта прямая проходит через начало координат, то есть центр сферы.

ПРИМЕР. Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $z=x^2+y^2$ в точке $M_0\left(2,-3,13\right)$.

Эта поверхность задана явным уравнением и $z'_x=2x,\ z'_y=2y$.

Поэтому уравнение касательной плоскости в данной точке имеет вид: $z-13=4\left(x-2\right)-6\left(y+3\right)$ или $4x-6y-z-13=0$.

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z=z\left(x,\,y\right)$ определена во всех точках некоторой области D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $M\left(x_0,\,y_0\right)\in D$ называется точкой максимума (минимума) функции $z=z\left(x,\,y\right)$, если существует её окрестность $D_1\subset D$, всюду в пределах которой $z\left(x,\,y\right)\le z\left(x_0,\,y_0\right)$ $\left(z\left(x,\,y\right)\ge z\left(x_0,\,y_0\right)\right)$.

Из определения следует, что если $M\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка максимума, то

$\Delta z=z\left(x,\,y\right)-z\left(x_0,\,y_0\right)\le 0\quad \forall\left(x,\,y\right)\in D_1$; если $M\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка минимума, то

$\Delta z=z\left(x,\,y\right)-z\left(x_0,\,y_0\right)\ge 0\quad \forall\left(x,\,y\right)\in D_1$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции двух переменных). Пусть функция $z=z\left(x,\,y\right)$ имеет в точке $M\left(x_0,\,y_0\right)$ экстремум. Если в этой точке существуют производные первого порядка, то

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=0\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=0.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение $y = y_0$. Тогда $z = z(x, y_0)$ – функция одной переменной x. Она имеет экстремум при $x = x_0$ и по необходимому условию экстремума дифференцируемой функции одной переменной (см. гл. 5) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y_0)\right|_{x=x_0} = 0$.

Аналогично, зафиксировав значение $x = x_0$, получим, что $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y)\right|_{y=y_0} = 0$.

Что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Стационарной точкой* функции $z = z(x, y)$ называется точка M , в которой обе частные производные первого порядка равны нулю:

$$\begin{cases} z'_x(M) = 0 \\ z'_y(M) = 0 \end{cases}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сформулированное необходимое условие не является достаточным условием экстремума.

Пусть $z = xy \ \Rightarrow \ \begin{cases} z'_x = y = 0 \\ z'_y = x = 0 \end{cases}$. Значит, $O(0, 0)$ – стационарная точка этой функции. Рассмотрим произвольную ε - окрестность начала координат.

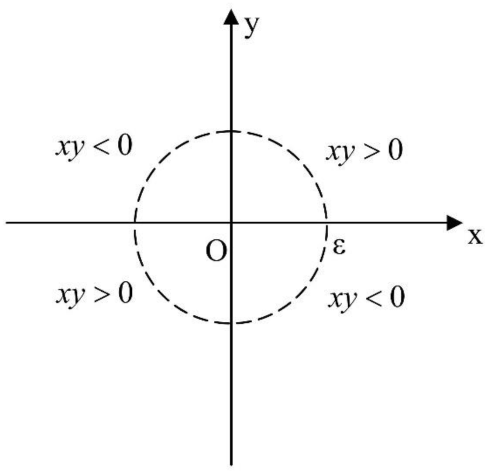

Рис. 16

В пределах этой окрестности $\Delta z = z(x, y) - z(0, 0) = xy$ имеет, очевидно, разные знаки (рис. 16). А это означает, что точка $O(0, 0)$ точкой экстремума по определению не является.

Таким образом, *не всякая стационарная точка – точка экстремума*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Непрерывная функция может иметь экстремум, но не иметь стационарной точки.

Рассмотрим функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Её графиком является верхняя $(z \geq 0)$ половина конуса, и, очевидно, $O(0,\,0)$ – точка минимума (рис. 17).

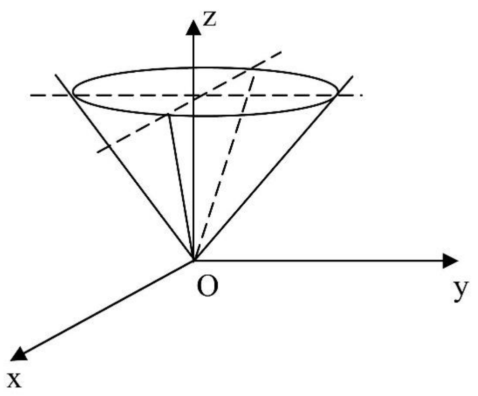

Рис. 17

Но $z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'_x(0,\,0),\ z'_y(0,\,0)$ не существуют, и точка $\mathrm{O}(0,\,0)$ стационарной не является. (Заметим, что верхняя половина конуса не имеет касательной плоскости в начале координат.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z=z(x,\,y)$ равны нулю или не существуют, называются ее *критическими* точками.

ТЕОРЕМА (достаточное условие экстремума функции $z=z(x,\,y)$). Пусть функция $z=z(x,\,y)$ имеет частные производные второго порядка в некоторой окрестности *стационарной* точки $M(x_0,\,y_0)$. Пусть, кроме того,

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}(M) & z''_{xy}(M) \\ z''_{xy}(M) & z''_{yy}(M) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если

1) $\Delta>0$, то M – точка экстремума, именно: точка максимума, если $z''_{xx}(M)<0$, или точка минимума, если $z''_{xx}(M)>0$;

2) $\Delta<0$, то экстремума в точке M нет;

3) $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования для выяснения характера точки M.

(Без доказательства).

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-2x+y$.

Найдем стационарные точки: $\begin{cases} z'_x=3x^2-2=0 \\ z'_y=1\neq 0 \end{cases}$. Стационарных точек нет, значит, функция не имеет экстремума.

ПРИМЕР. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + x y^2 + y^2 + 5x^2$.
Чтобы найти стационарные точки, надо решить систему уравнений:

$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0, 0),\ M_2\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right),\ M_3(-1, 2),\ M_4(-1,-2)$, то есть данная функция имеет четыре стационарные точки.

Проверим достаточное условие экстремума для каждой из них:

$$z''_{xx} = 12x + 10,\ z''_{xy} = 2y,\ z''_{yy} = 2(x+1) \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20\ ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как $\Delta_3 < 0,\ \Delta_4 < 0$, то в точках M_3, M_4 экстремума нет.
$\Delta_1 > 0$ и $z''_{xx}(M_1) = 10 > 0$, значит, $M_1(0, 0)$ – точка минимума и $z_{\min} = z(0, 0) = 0$; $\Delta_2 > 0$ и $z''_{xx}(M_2) = -10 < 0$, значит, $M_2\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$ – точка максимума и $z_{\max} = z\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right) = \dfrac{125}{27}$.