

Формула Тейлора

Тейлор (1685-1731) – английский математик

Теорема Тейлора. 1) Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ и некоторой ее окрестности производные порядка до $(n+1)$ включительно. { Т.е. и все предыдущие до порядка n функции и их производные непрерывны и дифференцируемы в этой окрестности }.

2) Пусть x - любое значение из этой окрестности, но $x \neq a$.

Тогда между точками x и a найдется такая точка ε , что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- это выражение называется формулой Тейлора, а выражение:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в виде некоторого многочлена $P_n(x)$, значение которого в точке $x = a$ равно значению функции $f(x)$, а значения его производных равно значениям соответствующих производных функции в точке $x=a$.

$$P_n(a) = f(a); \quad P'_n(a) = f'(a); \quad P''_n(a) = f''(a); \quad \dots \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (1)$$

Многочлен $P_n(x)$ будет близок к функции $f(x)$. Чем больше значение n , тем ближе значения многочлена к значениям функции, тем точнее он повторяет функцию.

Представим этот многочлен с неопределенными пока коэффициентами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n \quad (2)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов вычисляем производные многочлена в точке $x = a$ и составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P''_n(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots \dots \dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1C_n \end{cases} \quad (3)$$

Решение этой системы при $x = a$ не вызывает затруднений, получаем:

$$\begin{aligned} f(a) &= C_0 \\ f'(a) &= C_1 \\ f''(a) &= 2 \cdot 1 C_2 \\ f'''(a) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 C_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 C_n$$

Подставляя полученные значения C_i в формулу (2), получаем:

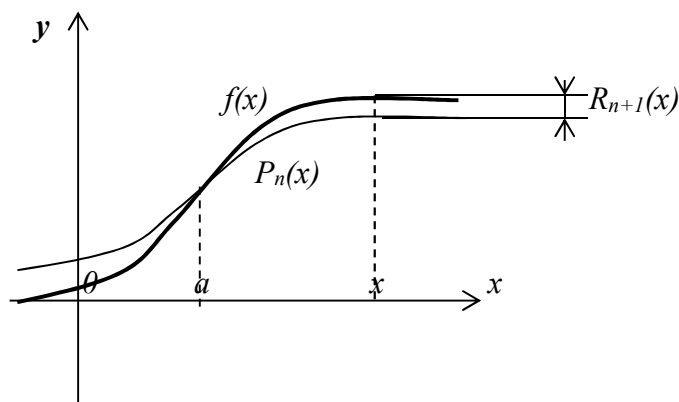
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Как было замечено выше, многочлен не точно совпадает с функцией $f(x)$, т.е. отличается от нее на некоторую величину. Обозначим эту величину $R_{n+1}(x)$. Тогда:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее величину $R_{n+1}(x)$.



Как видно на рисунке, в точке $x = a$ значение многочлена в точности совпадает со значением функции. Однако, при удалении от точки $x = a$ расхождение значений увеличивается.

Иногда используется другая запись для $R_{n+1}(x)$. Т.к. точка $\varepsilon \in (a, x)$, то найдется такое число θ из интервала $0 < \theta < 1$, что $\varepsilon = a + \theta(x-a)$.

Тогда можно записать:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Тогда, если принять $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

где $0 < \theta < 1$

Если принять $n = 0$, получим: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x$ – это выражение называется формулой Лагранжа. (Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) французский математик и механик).

Формула Тейлора имеет огромное значение для различных математических преобразований. С ее помощью можно находить значения различных функций, интегрировать, решать дифференциальные уравнения и т.д.

При рассмотрении [степенных рядов](#) будет более подробно описаны некоторые особенности и условия разложения функции по формуле Тейлора.

Формула Маклорена.

Колин Маклорен (1698-1746) шотландский математик.

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1$$

Мы получили так называемую формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа.

Следует отметить, что при разложении функции в ряд применение формулы Маклорена предпочтительнее, чем применение непосредственно формулы Тейлора, т.к. вычисление значений производных в нуле проще, чем в какой-либо другой точке, естественно, при условии, что эти производные существуют.

Однако, выбор числа a очень важен для практического использования. Дело в том, что при вычислении значения функции в точке, расположенной относительно близко к точке a , значение, полученное по формуле Тейлора, даже при ограничении тремя – четырьмя первыми слагаемыми, совпадает с точным значением функции практически абсолютно. При удалении же рассматриваемой точки от точки a для получения точного значения надо брать все большее количество слагаемых формулы Тейлора, что неудобно.

Т.е. чем больше по модулю значение разности $(x - a)$ тем более точное значение функции отличается от найденного по формуле Тейлора.

Кроме того, можно показать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$, причем более высокого порядка, чем $(x - a)^n$, т.е.

$$R_{n+1}(x) = o([x - a]^n).$$

Таким образом, ряд Маклорена можно считать частным случаем ряда Тейлора.

Представление некоторых элементарных функций по формуле Тейлора.

Применение формулы Тейлора для разложения функций в степенной ряд широко используется и имеет огромное значение при проведении различных математических расчетов. Непосредственное вычисление интегралов некоторых функций может быть сопряжено со значительными трудностями, а замена функции степенным рядом позволяет значительно упростить задачу. Нахождение значений тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических функций также может быть сведено к нахождению значений соответствующих многочленов.

Если при разложении в ряд взять достаточное количество слагаемых, то значение функции может быть найдено с любой наперед заданной точностью. Практически можно сказать, что для нахождения значения любой функции с разумной степенью точности (предполагается, что точность, превышающая 10 – 20 знаков после десятичной точки, необходима очень редко) достаточно 4-10 членов разложения в ряд.

Применение принципа разложения в ряд позволяет производить вычисления на ЭВМ в режиме реального времени, что немаловажно при решении конкретных технических задач.

Функция $f(x) = e^x$.

Находим:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$

$$\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1$$

$$\text{Тогда: } e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

Пример: Найдем значение числа e .

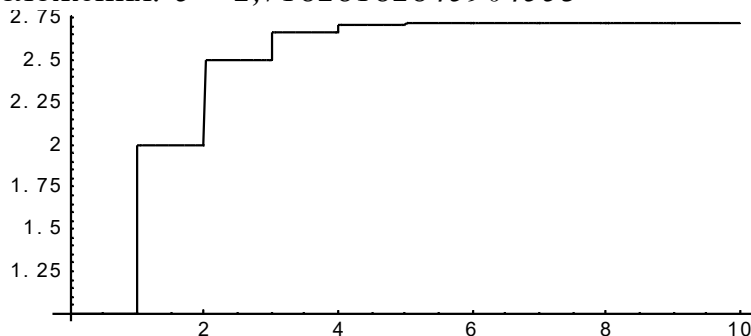
В полученной выше формуле положим $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}$$

Для 8 членов разложения: $e = 2,71827876984127003$

Для 10 членов разложения: $e = 2,71828180114638451$

Для 100 членов разложения: $e = 2,71828182845904553$



На графике показаны значения числа e с точностью в зависимости от числа членов разложения в ряд Тейлора.

Как видно, для достижения точности, достаточной для решения большинства практических задач, можно ограничиться 6-7 – ю членами ряда.

Функция $f(x) = \sin x$.

Получаем $f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2); \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2); \quad f'''(0) = -1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2); \quad f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2); \quad f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

Итого:

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Функция $f(x) = \cos x$.

Для функции $\cos x$, применив аналогичные преобразования, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos \varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$. (α - действительное число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)$$

Тогда:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \quad 0 < \theta < 1$$

Если в полученной формуле принять $\alpha = n$, где n - натуральное число и $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тогда

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n$$

Получилась формула, известная как бином Ньютона.

Пример: Применить полученную формулу для нахождения синуса любого угла с любой степенью точности.

На приведенных ниже графиках представлено сравнение точного значения функции и значения разложения в ряд Тейлора при различном количестве членов разложения.

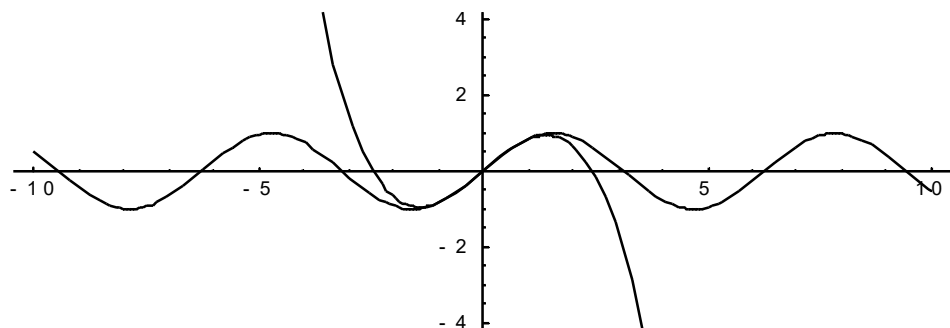


Рис. 1. Два члена разложения

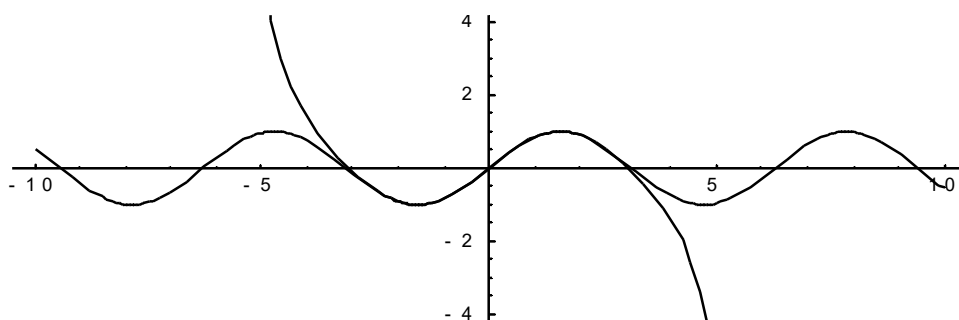


Рис. 2. Четыре члена разложения

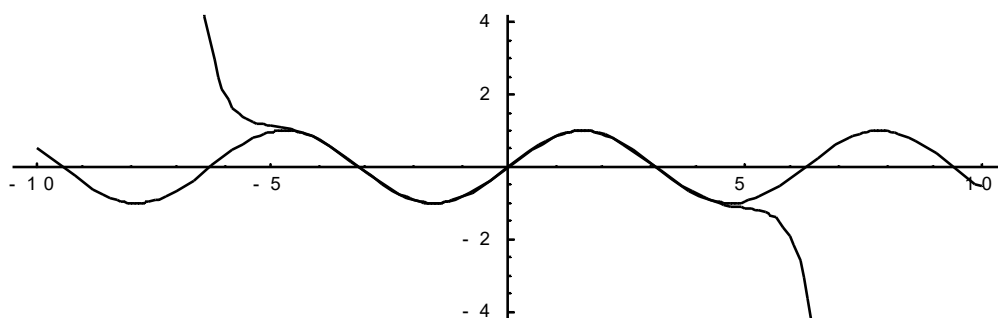


Рис. 3. Шесть членов разложения

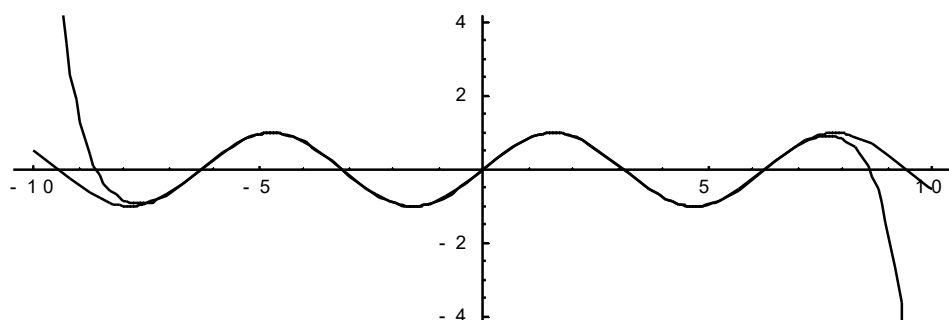


Рис. 4. Десять членов разложения

Чтобы получить наиболее точное значение функции при наименьшем количестве членов разложения надо в формуле Тейлора в качестве параметра a выбрать такое число, которое достаточно близко к значению x , и значение функции от этого числа легко вычисляется.

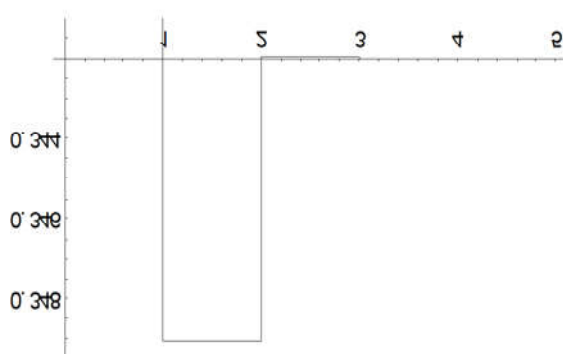
Для примера вычислим значение $\sin 20^\circ$.

Предварительно переведем угол 20° в радианы: $20^\circ = \pi/9$.

Применим разложение в ряд Тейлора, ограничившись тремя первыми членами разложения:

$$\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^5 = 0,348889 - 0,007078 + 0,000043 = 0,341854$$

В четырехзначных таблицах Брадиса для синуса этого угла указано значение $0,3420$.



На графике показано изменение значений разложения в ряд Тейлора в зависимости от количества членов разложения. Как видно, если ограничиться тремя членами разложения, то достигается точность до $0,0002$.

Выше говорилось, что при $x \rightarrow 0$ функция $\sin x$ является бесконечно малой и может при вычислении быть заменена на эквивалентную ей бесконечно малую функцию x . Теперь видно, что при x , близких к нулю, можно практически без потери в точности ограничиться первым членом разложения, т.е. $\sin x \cong x$.

Пример: Вычислить $\sin 28^\circ 13' 15''$.

Для того, чтобы представить заданный угол в радианах, воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned}
I^0 &= \frac{\pi}{180}; & 28^0 &= \frac{28\pi}{180}; \\
I' &= \frac{\pi}{60 \cdot 180}; & 13' &= \frac{13\pi}{60 \cdot 180}; \\
I'' &= \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; & 15'' &= \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};
\end{aligned}$$

$$28^0 13' 15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180} \left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60} \right) = 0,492544 \text{ рад}$$

Если при разложении по формуле Тейлора ограничиться тремя первыми членами, получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$$

Сравнивая полученный результат с точным значением синуса этого угла,

$$\sin 28^0 13' 15'' = 0,472869017612759812,$$

видим, что даже при ограничении всего тремя членами разложения, точность составила 0,000002, что более чем достаточно для большинства практических технических задач.

Функция $f(x) = \ln(1 + x)$.

Получаем:

$$f(x) = \ln(1 + x); \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{(1+x)^3}; \quad f'''(0) = 2;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!;$$

$$\text{Итого: } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right)^{n+1};$$

Полученная формула позволяет находить значения любых логарифмов (не только натуральных) с любой степенью точности. Ниже представлен пример вычисления натурального логарифма $\ln 1,5$. Сначала получено точное значение, затем – расчет по полученной выше формуле, ограничившись пятью членами разложения. Точность достигает 0,0003.

$$\ln 1,5 = 0,405465108108164381$$

$$\ln 1,5 = \ln(1 + 0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} - \frac{0,5^4}{4} + \frac{0,5^5}{5} - \frac{0,5^6}{6} + \frac{0,5^7}{7} = 0,4058035$$

Разложение различных функций по формулам Тейлора и Маклорена приводится в специальных таблицах, однако, формула Тейлора настолько удобна, что для подавляющего большинства функций разложение может быть легко найдено непосредственно.