Основные правила дифференцирования

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Таблица основных производных

1) $C' = 0$;	9) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;	10) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5) $\left(e^x\right)' = e^x$	13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Пример 1. Найти производную функции

$$y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x \ .$$

Сначала преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x \cos x = x\cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}\ .$$

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример 4. Найти производную функции

$$y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример 5. Найти производную функции

$$y = x^2 e^{x^2}\ln x$$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)'\ln x + x^2 e^{x^2}\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2}2x\right)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} = xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x)$$

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},$$

т.к.

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}; \quad (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}.$$

Учитывая полученный результат, можно записать

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции *f(x)*.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$lny = vlnu$$

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

Пример 6. Найти производную функции $f(x)=(x^2+3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u=x^2+3x;\qquad v=x\cos x;$

Производные этих функций: $u'=2x+3;\quad v'=\cos x-x\sin x;$

Окончательно:

$$f'(x)=x\cos x\cdot(x^2+3x)^{x\cos x-1}\cdot(2x+3)+(x^2+3x)^{x\cos x}(\cos x-x\sin x)\ln(x^2+3x)$$

Пример 7.

$$(x^x)'=x^x(\ln x^x)'=x^x(x\ln x)'=x^x(\ln x+x\frac{1}{x})=x^x(\ln x+1).$$

Пример 8.

$$\left(\frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\right)'=\frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(7\ln(2x+5)+\frac{1}{5}\ln(3x-7)-8\ln(4x-1)-7\ln\sin x\right)'=$$

$$=\frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(\frac{14}{2x+5}+\frac{3}{5(3x-7)}-\frac{32}{4x-1}-7ctgx\right).$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция $y=f(x)$ задана в виде: $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, причем функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\Phi(x)$, то $y=\psi(\Phi(x))$, и

$$y'(x)=\psi'(t)\Phi'(x)=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

Пример 9. Параметрические уравнения кривой, называемой циклоидой

$$x=a(1-\cos t),$$
$$y=a(t-\sin t).$$

Найдем $y'(x)$:

$$x'(t)=a\sin t,$$
$$y'(t)=a(1-\cos t),$$

$$y'(x)=\frac{a(1-\cos t)}{a\sin t}=\frac{1-\cos t}{\sin t}.$$

Односторонние производные функции в точке

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.