МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМЫ

1. Условие монотонности функций.
2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
3. Первый достаточный признак экстремума.
4. Общая схема отыскания экстремума.
5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков.

1. Условие монотонности функций

Определение

Функция $f(x)$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***) на (a,b), если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, таких, что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Теорема

Для того чтобы дифференцируемая на (a,b) функция $f(x)$ не убывала (не возрастала), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ на этом интервале была неотрицательной (неположительной).

Доказательство

Необходимость

Условие: $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

Утверждение: $f'(x) \ge 0$.

Зафиксируем любые $x_1 < x_2$ из (a,b). По формуле Лагранжа:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1);$, $c \in (x_1, x_2)$.

По условию $f(x_2) \ge f(x_1)$, то есть $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$, $(x_2 - x_1) > 0$.

Следовательно, $\boxed{f'(c) \ge 0}$ (из формулы Лагранжа).

Достаточность

Условие: $f'(x) \ge 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

Утверждение: $f(x)$ не убывает.

Зафиксируем любые $x_1 < x_2$ из (a,b).

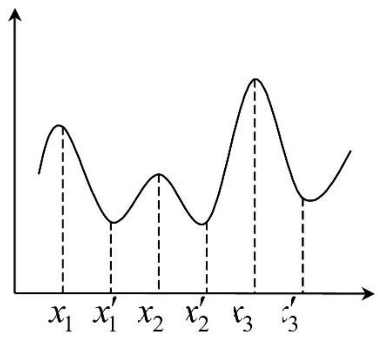
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

По условию $f'(c) \ge 0$, $(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x_2) \ge f(x_1)}$.

2. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

Определение

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 ***локальный максимум*** (***минимум***), если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ ($f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$) для любых $x_1 + \Delta x$ ($\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$) из достаточно малой окрестности точки x_1.



x_1, x_2, x_3 – точки локального максимума.

x_1', x_2', x_3' – точки локального минимума.

Локальный максимум и минимум объединим общим названием ***локальный экстремум***.

Замечание 1

Экстремум достигается только во внутренних точках $[a,b]$.

Замечание 2

Максимумы и минимумы не обязательно являются наибольшими и наименьшими значениями $f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема (необходимое условие экстремума)

Если

1) $f(x)$ – дифференцируема;

2) x_1 – точка экстремума,

то

$$\boxed{f'(x_1)=0.}$$

Доказательство

Пусть для определенности x_1 – точка максимума. Тогда

$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$ для любого достаточного малого Δx.

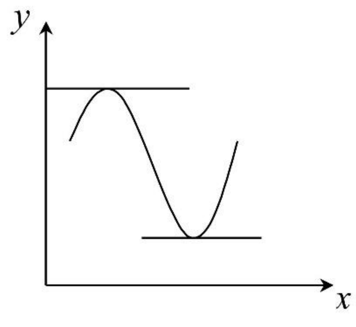
$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0$, если $\Delta x>0$.

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0$, если $\Delta x<0$.

$f'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$.

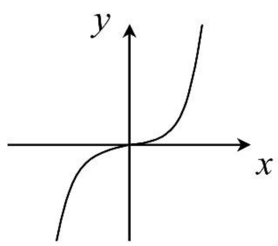
$\left.\begin{matrix} f'(x_1)\le 0 \\ f'(x_1)\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{f'(x_1)=0}$, так как $f'(x_1)$ не зависит от способа стремления $\Delta x\to 0$.

Геометрический смысл необходимого условия экстремума



Если в точке локального экстремума существует касательная к графику функции, то она параллельна оси Ox.

Пример



Пример иллюстрирует необходимый, но не достаточный характер условия.

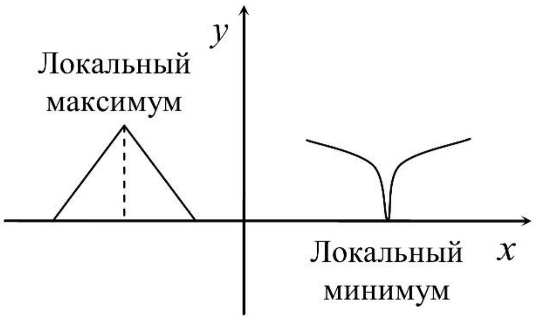
$f(x)=x^3$, $f'(0)=0$, но $x_1=0$ не является точкой экстремума.

Следствие 1

Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она ***может иметь*** экстремумы только в тех точках, где $f'(x_1)=0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует.



3. Первый достаточный признак экстремума

Теорема 1 (для дифференцируемой функции)

Если

1) $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c;
2) точка c является точкой возможного экстремума $f(x)$ ($f'(c)=0$),

тогда

1) если $f'(x)>0$ (<0) для $x<c$ и $f'(x)<0$ (>0) для $x>c$, то c – точка локального максимума (минимума);
2) если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c, то экстремума в точке c нет.

Доказательство

1. Пусть $f'(x)>0$, $x<c$; $f'(x)<0$, $x>c$.

$x_0<c$,

$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$ по теореме Лагранжа, где $\xi \in (x_0, c)$.

$f'(\xi) > 0$, $(c - x_0) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) > f(x_0)}$ $\forall x_0 < c$.

$x_0 > c$,

$f(x_0) - f(c) = f'(\xi)(x_0 - c)$.

$f'(\xi) < 0$, $(x_0 - c) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) > f(x_0)}$ $\forall x_0 > c$.

Следовательно, c – точка максимума.

2. Пусть $f'(x) > 0$ $\forall x$ из окрестности c.

$x_0 < c$:

$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$.

$$\boxed{f(c) > f(x_0).}$$

$x_0 > c$:

$f(x_0) - f(c) = f'(\xi)(x_0 - c)$.

$$\boxed{f(x_0) > f(c).}$$

Таким образом, c не является точкой экстремума, что и требовалось доказать.

Теорема 1 (для функции, недифференцируемой в точке возможного экстремума)*

Если

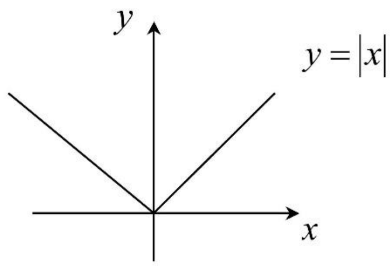
$f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c за исключением самой точки c, и непрерывна в этой точке,

то

справедливо утверждение Теоремы 1.

(Без доказательства).

Пример



В точке $x=0$ функция $f(x)$ недифференцируема, но непрерывна.

$f'(x<0)<0$, $f'(x>0)>0$.

$x=0$ – точка локального минимума.

4. Общая схема отыскания экстремума

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и дифференцируема на этом интервале за исключением конечного числа точек.

1. Ищем точки возможного экстремума (критические):
   а) точки, где $f'(x)=0$;
   б) точки, где не существует $f'(x)$.

Располагаем их в порядке возрастания: $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$.

2. Определяем *знак* $f'(x)$ на интервалах (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b).
3. Вычисляем (в случае необходимости) $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$.
4. Определяем *тип экстремума* по *Теореме 1* или *Теореме 1**.

Пример

$f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

1. $f'(x)=2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-2x$.

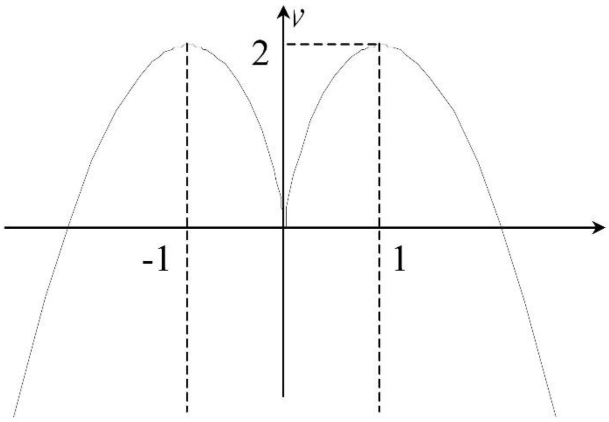
а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}-2x=0$;

$$\boxed{x_1=-1},\ \boxed{x_2=1}.$$

б) $f'(x)$ не существует в точке $x_3=0$.

$$\boxed{x_3=0.}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
		макс.		мин.		макс.	



5. Исследование на экстремум с помощью производных высших порядков

Теорема 2 (второй достаточный признак экстремума)

Если $f(x)$ имеет в критической точке c конечную вторую производную $f''(x)$, *тогда*

если $f''(c) > 0$, то c – точка локального минимума;

если $f''(c) < 0$, то c – точка локального максимума.

Доказательство

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c+\Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Пусть $f''(c) > 0$.

Так как c критическая точка, $f'(c) = 0$.

Тогда, если $\Delta x < 0$, то $f'(c+\Delta x) < 0$,

если $\Delta x > 0$, то $f'(c+\Delta x) > 0$.

Таким образом, первая производная меняет знак с «–» на «+» при переходе через точку c. Следовательно, c – точка локального минимума.

Второе утверждение ($f''(c)<0$) доказывается аналогично.

Теорема 3 (третий достаточный признак экстремума)

Если

1) $f(x)$ имеет в критической точке c конечную производную порядка $2n$: $f^{(2n)}(c)$;

2) $f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(2n-1)}(c)=0$,

то

если $f^{(2n)}(c)>0$, c – точка локального минимума,

если $f^{(2n)}(c)<0$, c – точка локального максимума.

(Без доказательства).

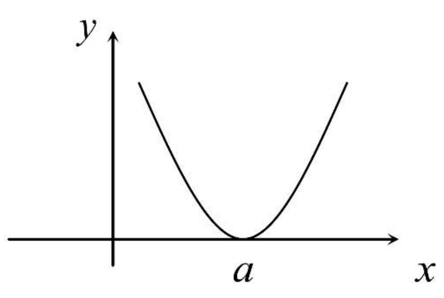
Пример

$f(x)=(x-a)^6$.

1) $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(5)}(a)=0$;

2) $f^{(6)}(a)=6!>0$.

a – точка локального минимума.



НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

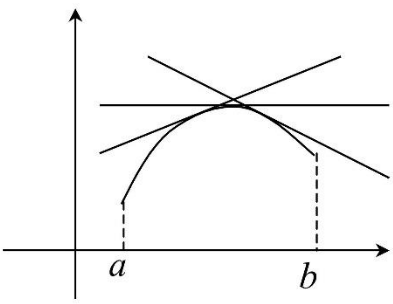
1. Точки перегиба.
2. Общая схема отыскания перегиба.

1. Точки перегиба

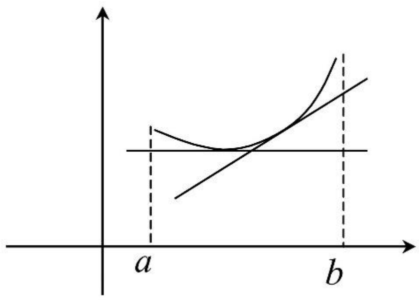
Определение

Говорят, что кривая обращена ***выпуклостью вверх*** (***вниз***) на (a,b), если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой касательной на (a,b).

Такие кривые называются ***выпуклыми*** (***вогнутыми***).



Выпуклая (не выше)



Вогнутая (не ниже)

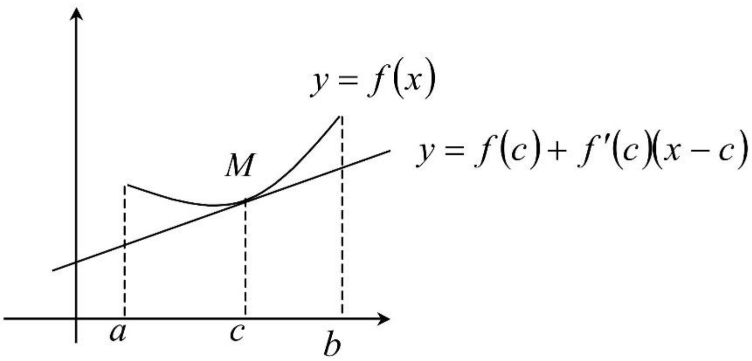
Теорема (достаточное условие выпуклости)

Если во всех точках (a,b) $f''(x)\le 0$ ($f''(x)\ge 0$),

то график $y=f(x)$ на (a,b) является выпуклым (вогнутым).

Доказательство

Пусть для определенности $f''(x)\ge 0$.



Фиксируем любую точку c на (a,b).

Уравнение касательной к кривой в точке $M(c,f(c))$

$$\bar{y} = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Рассмотрим

$$y - \bar{y} = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Используя формулу Тейлора

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2,$$

получаем

$$y - \bar{y} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2,$$

где точка ξ лежит между c и x.

По условию $f''(\xi) \geq 0 \Rightarrow \boxed{y - \bar{y} \geq 0}$.

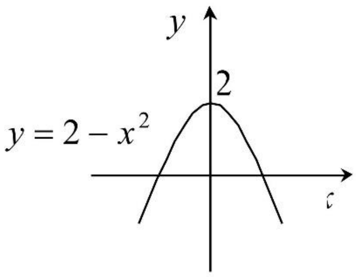
Таким образом, из условия $f''(x) \geq 0$ следует вогнутость графика.

Аналогично, из условия $f''(x) \leq 0$ следует выпуклость графика.

Примеры

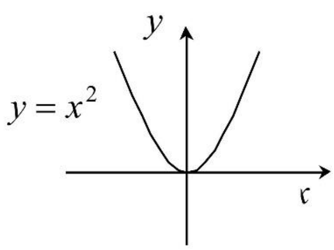
1. $y = 2 - x^2$,

$y'' = -2$ (график выпуклый).



2. $y = x^2$,

$y'' = 2$ (график вогнутый).



Определение

Точка $x=c$ называется ***точкой перегиба функции*** $y=f(x)$, если существует такая окрестность точки c, в пределах которой график $y=f(x)$ слева и справа от c имеет различное направление выпуклости. При этом точка $M(c,f(c))$ называется ***точкой перегиба графика функции*** $y=f(x)$.

Теорема (необходимое условие перегиба)

Если

1) существует $f''(x)$ на (a,b);
2) c – точка перегиба функции $y=f(x)$, $c\in(a,b)$,

то

$f''(c)=0$.

(Без доказательства).

Следствие 1

Если $f(x)$ дважды дифференцируема на (a,b), то перегиб функции возможен только в тех точках, где $f''(x)=0$.

Следствие 2

$f(x)$ может иметь перегиб в тех точках, где $f''(x)$ не существует.

Теорема (достаточное условие перегиба)

Если

1) c – точка возможного перегиба $f(x)$;
2) $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c за исключением, быть может, самой точки c,

то

1) если $f''(x)$ меняет знак при переходе через c, то в точке c – перегиб;
2) если $f''(x)$ не меняет знак, то перегиба нет.

Доказательство

Пусть $f''(x)\geq 0$, $x<c$ (слева); $f''(x)\leq 0$, $x>c$ (справа).

Тогда по теореме о достаточном условии выпуклости, слева – вогнутая кривая, справа – выпуклая кривая, в точке c – перегиб.

2. Общая схема отыскания перегиба

1. Поиск *точек возможного перегиба*:

   а) точки, где $f''(x)=0$;

   б) точки, где $f''(x)$ не существует ($a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$).

2. Определение *знака* $f''(x)$ в областях (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_n,b).

3. Установление *наличия перегиба* (достаточное условие перегиба).

КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

1. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1. Общая схема исследования функции и построения ее графика

Рассмотрим $y=f(x)$. Исследование функции состоит из трех этапов.

I. Информация об особенностях $f(x)$ без производных:

   1) область определения $f(x)$;

   2) четность ($f(x)=f(-x)$), нечетность ($f(x)=-f(-x)$); периодичность ($f(x)=f(x+T)$, T – период для любого x). Сужение области изменения x для дальнейшего исследования;

   3) асимптоты:

      а) вертикальные – $\boxed{x=a}$, где a – точка разрыва второго рода;

      б) наклонные – $\boxed{\bar{y}=kx+b}$.

   4) точки пересечения с осями координат.

II. Информация из вида $f'(x)$ (схема исследования на экстремум).

III. Информация из вида $f''(x)$ (схема исследования на перегиб).

Результаты этапов I, II, III заносятся в таблицу, с ее помощью строится график: вначале проводятся асимптоты, ставятся опорные точки, найденные в I, II, III, проводится линия.

Примеры

1. $y = xe^{-4x}$.

I. $f(x)$:

1) $x \in (-\infty, +\infty)$;

2) функция общего вида;

3) асимптоты:

а) $f(x) = xe^{-4x}$ непрерывна всюду, нет вертикальных асимптот;

б) $k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{4x}} = 0$, $b_+ = 0$,

$\boxed{\bar{y} = 0}$ – наклонная (горизонтальная) асимптота при $x \to +\infty$;

так как $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ наклонная (горизонтальная) асимптота при $x \to -\infty$ отсутствует;

4) $\boxed{x_1 = 0}$, $\boxed{y_1 = 0}$ – точка пересечения с осями.

II. $f'(x)$:

$y' = e^{-4x} - 4xe^{-4x} = e^{-4x}(1 - 4x)$,

1) $y' = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{1}{4}}$;

2) отсутствуют точки, для которых производная не существует.

III. $f''(x)$:

$y'' = -4e^{-4x}(1 - 4x) - 4e^{-4x} = e^{-4x}(16x - 8)$,

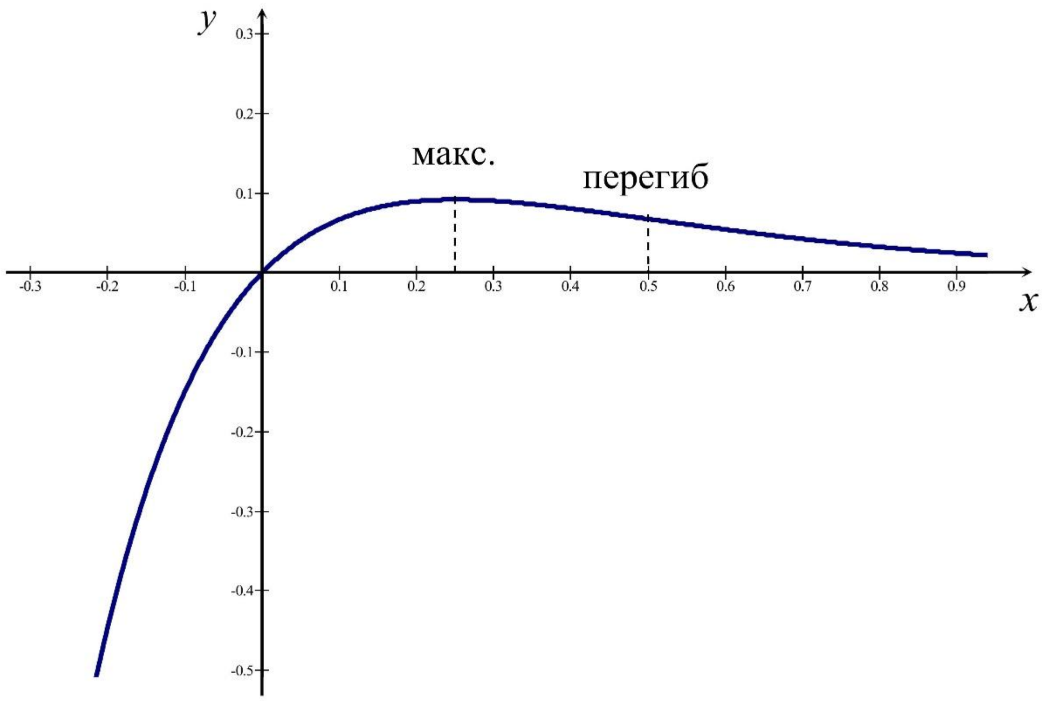
1) $y'' = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = \dfrac{1}{2}}$;

2) отсутствуют точки, для которых вторая производная не существует.

I, II, III $\Rightarrow\ -\infty < 0 < \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2} < +\infty$.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
y	$-$	0	$+$	$\frac{1}{4e}$	$+$	$\frac{1}{2e^2}$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$\nearrow\frown$	$\frown$	$\nearrow\frown$	макс.	$\searrow\frown$	перегиб	$\searrow\smile$

График



2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}\quad t \in (-\infty, +\infty).$

Рассмотрим случай, когда $a > 0$.

I. $f(x)$:

1) $x \in (-\infty, +\infty)$;

2) $x(-t) = a(-t + \sin t) = -a(t - \sin t) = -x(t)$,

$y(-t) = a(1 - \cos(-t)) = a(1 - \cos t) = y(t)$,

функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат;

учитывая периодичность тригонометрических функций, период данной функции $T=2a\pi$, дальнейшее исследование можно ограничить отрезком $[0, 2a\pi]$;

3) асимптоты:

а) функция не имеет точек разрыва, вертикальных асимптот нет;

б) функция периодична, следовательно, наклонных асимптот нет;

4) точки пересечения с осями координат:

с осью абсцисс

$y(t)=0 \Rightarrow \cos t=1,\ t=2\pi k, k\in Z,$

$x(2\pi k)=a(2\pi k-\sin(2\pi k))=2a\pi k, k\in Z;$

с осью ординат

$x(t)=0 \Rightarrow t-\sin t=0,\ t=0,$

$y(0)=0.$

II. y'_x:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=ctg\frac{t}{2}.$$

1) $y'_x=0 \Rightarrow \frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,\ t=\pi+2\pi k, k\in Z,$

$x(\pi+2\pi k)=a(\pi+2\pi k-\sin(\pi+2\pi k))=a(\pi+2\pi k), k\in Z,$

$y(\pi+2\pi k)=a(1-\cos(\pi+2\pi k))=2a;$

2) $\nexists y'_x: \frac{t}{2}=\pi k, k\in Z,\ t=2\pi k, k\in Z,$

$x(2\pi k)=a(2\pi k-\sin(2\pi k))=2a\pi k, k\in Z,$

$y(2\pi k)=a(1-\cos(2\pi k))=0.$

III. y''_{xx}:

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(ctg\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{-1}{4a\cdot\sin^4\frac{t}{2}}.$$

1) $y'' = 0 \Rightarrow$ решений нет.

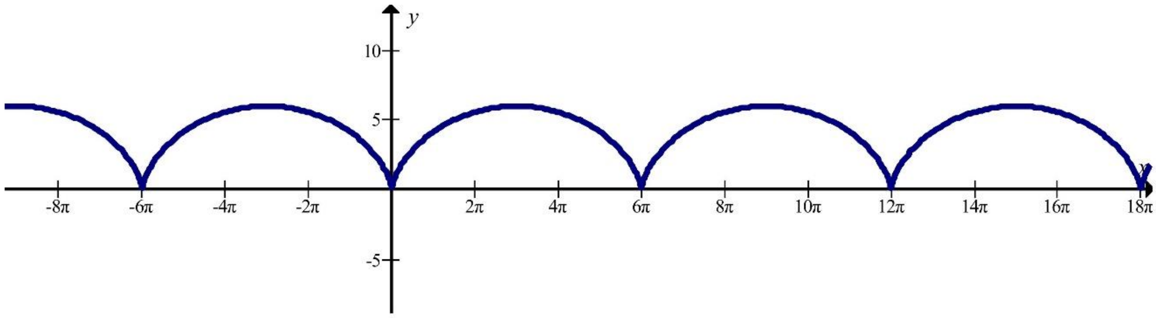
2) $\nexists y''_{xx}$: $\sin\frac{t}{2} = 0$, $\frac{t}{2} = \pi k, k \in Z$, $t = 2\pi k, k \in Z$.

Точки, в которых вторая производная не существует имеют координаты $(2\pi k, 0)$, $k \in Z$.

x	0	$(0, a\pi)$	$a\pi$	$(a\pi, 2a\pi)$	$2a\pi$
y	0	$+$	$2a$	$+$	0
y'	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$
y''	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$
	миним.	$\nearrow \frown$	макс.	$\searrow \frown$	миним.

График

$a = 3$



В примере рассмотрена кривая, которая носит название *циклоида*. Она совпадает с траекторией точки окружности радиуса a, которая катится без скольжения по оси абсцисс.

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Рассмотрим $f(x)$, непрерывную на $[a,b]$. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a,b]$ своих $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.

$\sup f(x)$ – *наибольшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

$\inf f(x)$ – *наименьшее значение* $f(x)$ на $[a,b]$.

Для определения значений $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$ следует найти:

1) значения $f(x)$ в точках возможного экстремума;

2) значения $f(x)$ на концах интервала $[a,b]$.

Из результатов 1) и 2) выбираются $\sup f(x)$ и $\inf f(x)$.