ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если каждой паре (x, y) значений двух не зависящих друг от друга переменных x и y из некоторой области их изменения D по некоторому правилу ставится в соответствие единственное значение переменной z, то говорят, что на области D задана функция двух переменных $z = z(x, y)$.

Область D называется *областью определения функции двух переменных*, а множество значений, принимаемых переменной z, – ее *областью значений.*

Самый распространенный способ задания функции двух переменных – аналитический, то есть с помощью формул.

ПРИМЕР. а) $z = x^2 + y^2$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Эта функция определена на всей плоскости. Из аналитической геометрии известно, что $z = x^2 + y^2$ – уравнение эллиптического параболоида, поэтому можно сказать, что эллиптический параболоид является графиком этой функции (рис. 1).

б) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта функция определена, если $x^2 + y^2 \le 1$, то есть внутри единичного круга. После возведения в квадрат обеих частей равенства $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ получим уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, но так как $z \ge 0$, то график этой функции – верхняя полусфера (рис. 2).

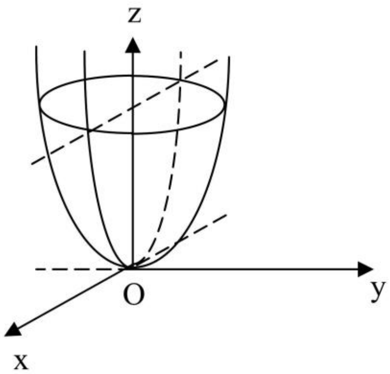

Рис. 1

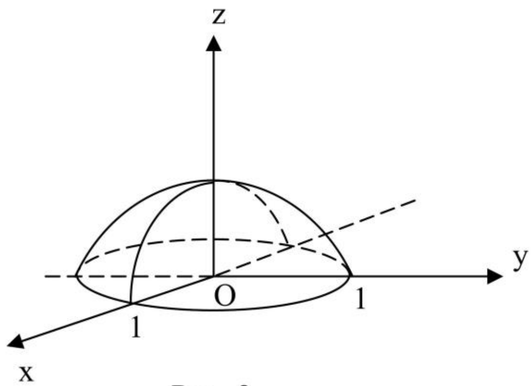

Рис. 2

в) $z = 2x + 3y - 5$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Графиком этой функции является плоскость.

Таким образом, *графиком функции двух переменных является поверхность.*

Рассматривая функции двух переменных, мы будем иметь дело с множествами точек, которые представляют собой часть плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Окрестностью* (или ε*-окрестностью*) точки $M(x_0, y_0)$ называется множество точек плоскости, координаты которых связаны неравенством $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2$.

Другими словами, окрестностью точки $M(x_0, y_0)$ на плоскости будем называть круг с центром в этой точке радиуса ε, не включающий окружность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка M называется *внутренней точкой* множества D, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в D.

То есть внутренние точки области принадлежат ей вместе с некоторой достаточно малой своей окрестностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если любая окрестность точки M содержит как точки области D, так и точки, не принадлежащие D, то M называется *граничной точкой* области D. Множество всех граничных точек области D называется ее *границей*.

Или, по-другому, граница плоской области – это линия, которая ее ограничивает, а точки области, не лежащие на ее границе, – внутренние точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется *открытой,* или *незамкнутой.* Если к области относятся и все точки границы, то она называется *замкнутой*.

Вся плоскость по определению считается и открытой, и замкнутой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Плоская область называется *ограниченной*, если существует круг, целиком содержащий эту область.

ПРИМЕР. $D=\{(x, y): |x|\le 1,\ |y-1|\le 2\}$ – прямоугольник с центром в точке (0,1) (рис. 3) – ограниченная и замкнутая область;

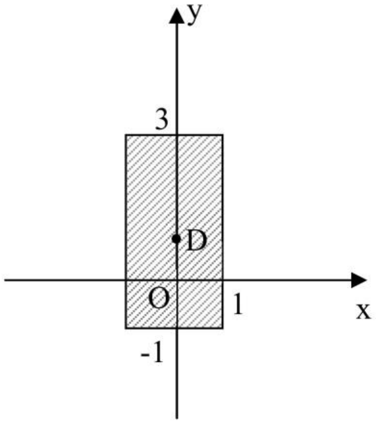

Рис. 3

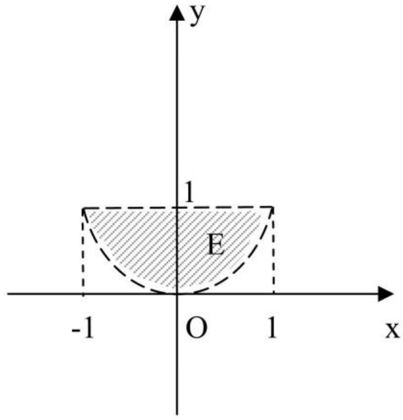

Рис. 4

$E = \{(x, y):\ x^2 < y < 1\}$ – ограниченная и открытая (незамкнутая) область (рис. 4);

$G = \{(x, y):\ x > -1,\ |y-1| < 2\}$ – неограниченная и открытая область (рис. 5);

$H = \{(x, y):\ x \ge -1,\ |y-1| \le 2\}$ – неограниченная и замкнутая область (рис. 6).

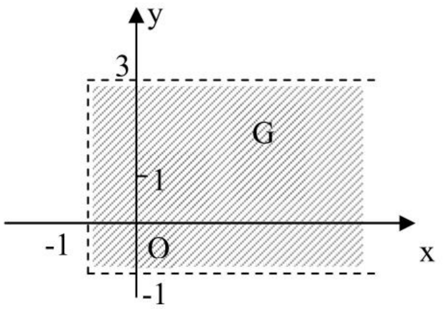

Рис. 5

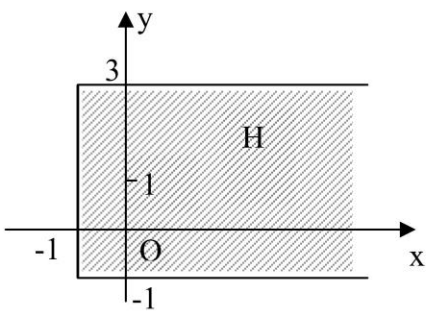

Рис. 6

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Пусть значение переменной y зафиксировано, то есть $y = y_0$. Тогда $z = z(x, y_0)$ – функция одной переменной x. Зададим в некоторой точке $x = x_0$ приращение $\Delta x \ne 0$, так что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Полученное таким образом приращение функции $z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = \Delta_x z(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по x функции* $z = z(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) \in D$. Оно получено в результате изменения только переменной x.

Если функция $z = z(x, y_0)$ имеет в точке $x = x_0$ производную, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x} = z'_x(x_0, y_0)$$

называется *частной производной первого порядка функции* $z = z(x, y)$ *по* x в точке (x_0, y_0).

Аналогично, если зафиксировать $x = x_0$ и задать приращение $\Delta y \ne 0$, так, что $(x_0,\ y_0 + \Delta y) \in D$, то получим частное приращение функции $z = z(x, y)$ по переменной y: $\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$ в точке $(x_0, y_0) \in D$. Если функция $z = z(x_0, y)$ имеет производную в точке $y = y_0$, то

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z\left(x_0,\, y_0+\Delta y\right)-z\left(x_0,\, y_0\right)}{\Delta y}=z'_y\left(x_0,\, y_0\right)$$

называется *частной производной первого порядка функции* $z=z\left(x,\, y\right)$ *по* y в точке $\left(x_0,\, y_0\right)$.

Из определения следует, что в различных точках $\left(x_0,\, y_0\right)\in D$ частные производные будут принимать различные значения. Таким образом, частные производные функции двух переменных также являются функциями двух переменных. Кроме того, частные производные вычисляются так же, как обыкновенные, при условии лишь, что одна из двух переменных фиксирована, то есть не изменяется.

ПРИМЕР. Вычислить все частные производные первого порядка функций

а) $z=\dfrac{x^2}{y^3}-2x+3y^2$

$$z'_x\Big|_{y=const}=\frac{1}{y^3}\cdot 2x-2,\qquad z'_y\Big|_{x=const}=-\frac{3}{y^4}\cdot x^2+6y\,.$$

б) $z=x^y$

$$z'_x\Big|_{y=const}=y\;x^{y-1},\qquad z'_y\Big|_{x=const}=x^y\;\ln x\,.$$

Частные производные первого порядка можно обозначать по-другому: $z'_x=\dfrac{\partial z}{\partial x},\; z'_y=\dfrac{\partial z}{\partial y}$ $\Bigl($сравните с обозначением обыкновенных производных: если $z=z\left(x\right)$, то $z'=\dfrac{dz}{dx}\Bigr)$. При этом $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – не частное, а единый неделимый символ, в то время, как обыкновенная производная $\dfrac{dz}{dx}$ – частное от деления дифференциала dz на дифференциал dx.

ЗАМЕЧАНИЕ. При вычислении частных производных от функций большего числа переменных полагается, что все переменные, кроме той, по которой берется производная, фиксированы, то есть постоянны.

ПРИМЕР. Найти все частные производные первого порядка функции $u=\dfrac{z^3}{x^2+2y^4}$.

$$u'_x\Big|_{y,z=const}=z^3\,\frac{(-1)}{(x^2+2y^4)^2}\left(x^2+2y^4\right)'_x=-\frac{2xz^3}{(x^2+2y^4)^2},$$

$$u'_y\Big|_{x,z=const} = z^3 \frac{(-1)}{(x^2+2y^4)^2}\left(x^2+2y^4\right)'_y = -\frac{8y^3z^3}{(x^2+2y^4)^2},$$

$$u'_z\Big|_{x,y=const} = \frac{3z^2}{x^2+2y^4}.$$

По определению вторая производная – это производная от первой производной, поэтому функция двух переменных имеет 4 производные второго порядка:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} \text{ или } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} \text{ или } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

Очевидно, функция $z = z(x, y)$ имеет 8 производных третьего порядка, 16 – четвертого,…, 2^n производных n-го порядка.

$$\begin{tikzcd}
 & & & z(x,y) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & \\
 & \frac{\partial z}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \frac{\partial z}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \arrow[d] \arrow[dr] & & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \arrow[d] \arrow[dr] & & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \arrow[d] \arrow[dr] & & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} & \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x} & \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} & \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y} & \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} & \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}
\end{tikzcd}$$

…

Частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$ и т.д. называются *смешанными частными производными второго, третьего и т.д. порядков.*

ПРИМЕР. Вычислить производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ от функции $z = \dfrac{y}{x^2} + 2xy + x^3\sqrt{y}$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=const} = y\cdot\frac{(-2)}{x^3} + 2y + 3x^2\sqrt{y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_{x=const} = -\frac{2}{x^3} + 2 + \frac{3x^2}{2\sqrt{y}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=const} = \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{x^3}{2\sqrt{y}} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{y=const} = -\frac{2}{x^3} + 2 + \frac{3x^2}{2\sqrt{y}}.$$

Оказалось, что эти смешанные частные производные равны: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$. Это равенство неслучайно.

ТЕОРЕМА. Частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны при условии их непрерывности.

(Без доказательства).

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрический смысл частных производных первого порядка: так как уравнение $z = z(x, y)$ задает поверхность, а условие $x = const$ – её сечение плоскостью, то $z'_y(x_0, y_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ к кривой, полученной сечением поверхности $z = z(x, y)$ плоскостью $x = x_0$. Аналогично, $z'_x(x_0, y_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной в точке N к кривой, полученной сечением поверхности $z = z(x, y)$ плоскостью $y = y_0$ (рис. 7).

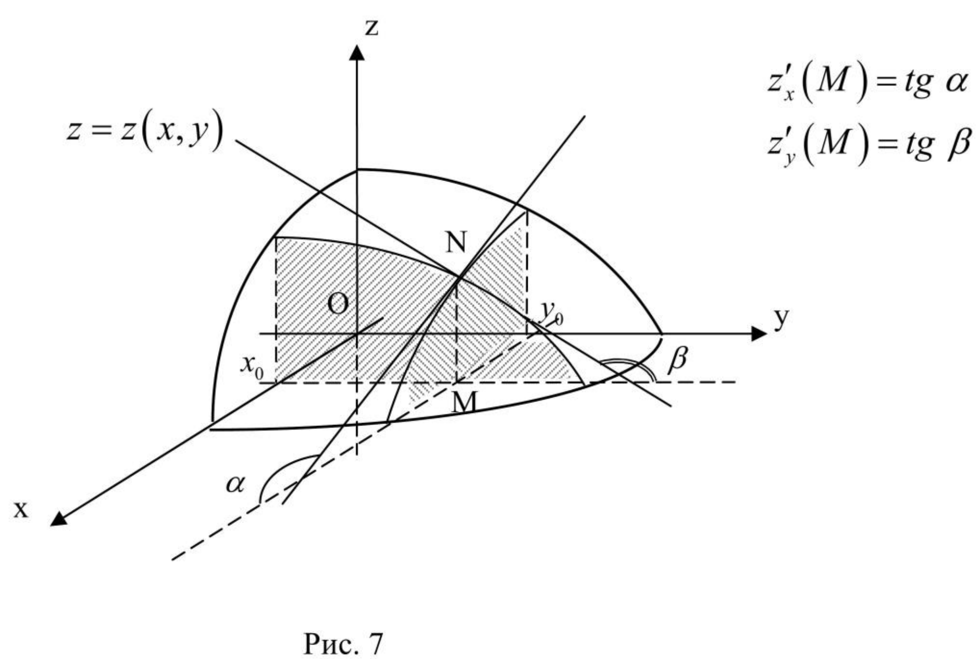

Рис. 7

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. УСЛОВИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ и зададим приращения $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ так, чтобы $(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полным приращением* функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$, соответствующим приращениям $\Delta x, \Delta y$, называется

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $z = z(x, y)$ называется *дифференцируемой* в некоторой точке $M(x, y)$, если её полное приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

где $A, B = const$, а $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

ТЕОРЕМА (достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных). Если функция $z = z(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ непрерывные частные производные $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ и рассмотрим полное приращение функции:

$$\Delta z = z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x, y) =$$

$$= \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y)\big)}_{\text{изменяется только } y} + \underbrace{\big(z(x + \Delta x,\ y) - z(x, y)\big)}_{\text{изменяется только } x}.$$

Так как по условию обе частные производные первого порядка существуют, применим к каждому слагаемому теорему Лагранжа: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $c \in (a, b)$ (см. гл. 5). При $b = y + \Delta y$, $a = y$ получим

$z(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - z(x + \Delta x,\ y) = z'_y(x + \Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y$, где $\overline{y}$ – между y и $y + \Delta y$;

Аналогично, при $b = x + \Delta x$, $a = x$: $z(x + \Delta x,\ y) - z(x,\ y) = z'_x(\overline{x},\ y)\,\Delta x$, где $\overline{x}$ – между x и $x + \Delta x$.

Тогда

$$\Delta z = z'_x(\overline{x},\ y)\Delta x + z'_y(x + \Delta x,\ \overline{y})\,\Delta y \tag{1}$$

Кроме того, частные производные $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ по условию непрерывны в окрестности точки $M(x, y)$, поэтому

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} z'_y(x + \Delta x, \overline{y}) = z'_y(x, y), \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} z'_x(\overline{x}, y) = z'_x(x, y) \Rightarrow$$

$$z'_x(\overline{x}, y) = z'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{2}$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0$;

$$z'_y(x + \Delta x, \overline{y}) = z'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y), \tag{3}$$

где $\beta(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow[\Delta x, \Delta y \to 0]{} 0$.

Подставим (2), (3) в (1):

$$\Delta z = \left(z'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x + \left(z'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y.$$

Обозначив $z'_x(x, y) = A,\ z'_y(x, y) = B$, получим требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Главная линейная часть полного приращения функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется ее *полным дифференциалом* в этой точке: $dz = z'_x(x, y)\,\Delta x + z'_y(x, y)\,\Delta y$.

Так как x и y – независимые переменные, то $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ и

$$dz = z'_x(x, y)\,dx + z'_y(x, y)\,dy.$$

ПРИМЕР. Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2} + 6x - 2y$

а) в точке $M(x, y)$, б) в точке $A(1, 4)$.

$$z'_x\Big|_{y=const} = 2\sqrt{y} \cdot \frac{(-2)}{x^3} + 6, \qquad z'_y\Big|_{x=const} = \frac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2.$$

а) $dz(x, y) = \left(\dfrac{-4\sqrt{y}}{x^3} + 6\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{y}} - 2\right)dy$,

б) $dz(1, 4) = (-8 + 6)dx + \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)dy = -2dx - 1{,}5dy$.