Punto della situazione:

Problemi ben posti → Analisi → in avanti (err. cancellaz. num)
↳ in dietro

Errore alg. ↔ Errore inerente

Prob. ben posto

ε per operazione → errore

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to f(x) = \dfrac{(1 \overset{\varepsilon_1}{+} x) \overset{\varepsilon_2}{-} 1}{x} \xrightarrow{\varepsilon_3} = \dfrac{\cancel{1} + x \cancel{-1}}{x} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

* E_{iner} non c'è: $\left| \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = 0$

se $\tilde{x} \in \mathbb{F}$: $\dfrac{(1+\tilde{x})-1}{\tilde{x}} = 1$

$$E_{ALG} = \left| \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \right|$$

Facciamo l'analisi in avanti:

$$E_{ALG} = \left| \frac{\dfrac{((1+x)(1+\varepsilon_1)-1)\cdot(1+\varepsilon_2)}{x}(1+\varepsilon_3) - 1}{1} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{1} + x + (1+x)\varepsilon_1 \cancel{-1}}{x}(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{x(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + (1+x)\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{x} - 1 \right|$$

$$= \left| \cancel{1} + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \overbrace{\cancel{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}^{\text{TRASCURABILE}} + \frac{1+x}{x}\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \cancel{-1} \right|$$

$$\simeq \left| \frac{1+x}{x}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right| = \left| \frac{1}{x}\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right|$$

$$\left| \frac{1}{x}\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right| \leq \left| \frac{1}{x}\varepsilon_1 \right| + 3u$$

ε_1 → $= 0$ se l'operazione della somma da nessun errore

Analisi in avanti dell'errore alg. (→ stima dell'errore) la vedremo in laboratorio

$$E_{ALG.} \simeq \theta(\underset{\text{n° operazi.}}{n}, \underbrace{x}_{\text{quantità dati}}) \cdot \underset{\text{unità di arrot.}}{u}$$

- SE $\theta(n, x) = c \cdot n$ ALGORITMO STABILE
- SE $\theta(n, x) = c^n$ ALGORITMO INSTABILE

$$\left| \frac{1}{x} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right| \leq \underbrace{\left| \frac{1}{x} \varepsilon_1 \right| + 3u}$$

$$\left| \frac{1}{x} \varepsilon_1 \frac{u}{u} + 3u \right| = \left(\frac{1}{x} \frac{\varepsilon_1}{u} + 3 \right) u$$

$$\theta(n,x) \cdot u$$

CI CONCENTRIAMO ORA SULL' ERRORE INERENTE USANDO ANCHE STRATEGIE DIFFERENZIALI.

DARE UNA STIMA DI E_{IN} PER $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE

P. BEN POSTO

SI PUO' CALCOLARE LA DERIVATA

STIME PIU' VELOCI

$$* \quad E_{INER} = \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|$$

SVILUPPO DI TAYLOR (APPROSSIMAZIONE)

$$x_0 \qquad f(\tilde{x}_0) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + O(h^2) \qquad h = (x - x_0)$$

$$E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{x}_0) - f(x_0)}{f(x_0)} \right| = \left| \frac{f(x_0) + (\tilde{x}_0 - x_0) f'(x_0) - f(x_0)}{f(x_0)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(\tilde{x}_0 - x_0) f'(x_0)}{f(x_0)} \frac{x_0}{x_0} \right| = \text{SE } x_0 \neq 0$$

$$= \left| \frac{x_0 \, f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{\tilde{x}_0 - x_0}{x_0} \right|}_{\text{ERRORE SUI DATI}} \qquad |\varepsilon_{x_0}| < u$$

$C(f, x_0)$ E' IL NUMERO DI CONDIZIONE

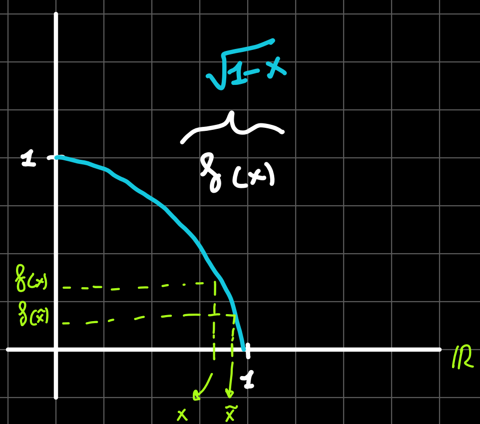
$\swarrow$ n° PICCOLO $\downarrow$ ERRORE PICCOLO

$\searrow$ n° GRANDE $\downarrow$ ERRORE GRANDE

ESEMPIO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to f(x) = \sqrt{1-x}$ CON $x < 1$

NUMERO DI CONDIZIONE $c(\sqrt{1-x}, x) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right) = \left|\frac{x}{2(1-x)}\right|$$



SE X VICINO A 1 L'ERRORE INERENTE E' PICCOLO, LONTANO DA 1 L'ERRORE INER. E' GRANDE.

ESEMPIO NUMERICO: SIA L'INSIEME $\mathbb{F}(10, 4, \lambda, \omega)$ $\quad u = \frac{1}{2} 10^{1-4} = \frac{1}{2} 10^{-3} = 0.\bar{5} \cdot 10^{-3}$

$x = 0.99984$

$y = 0.9998$

$$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| = \left|\frac{0.9998 - 0.99984}{0.99984}\right| \simeq 4 \cdot 10^{-5}$$

$$C(f, x) = C(\sqrt{1-x}, 0.99984) = \left|\frac{0.99984}{2(1-0.99984)}\right| \simeq 3.12 \cdot 10^3$$

$$E_{IN} \text{ STIMATO} \simeq C(f,x) \cdot |\varepsilon_x| = 0.312 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \simeq 0.1248$$

$$E_{IN} = \left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \simeq 0.118$$

$\rightarrow$ MOLTO SIMILI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE E_{IN}, NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

* DERIVATE PARZIALI TANTE QUANTI GLI ARGOMENTI

VETTORE

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

VETTORE

$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right.$$

$\to$ DERIVATA PARZIALE

Sviluppo di Taylor:

$h = \tilde{x}_n - x_1$

$$f(\tilde{x}) = f(x) + (\tilde{x}_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\tilde{x}_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + (\tilde{x}_n - x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} + O(h^2)$$

$$h^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)$$

$$\simeq f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} - f(x)}{f(x)} \right|$$

$$\left| \frac{f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} - f(x)}{f(x)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(\tilde{x}_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f(x)} \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(\tilde{x}_i - x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f(x)} \cdot \frac{x_i}{x_i} \right| \quad \text{SE } x_i \neq 0 \quad = \sum_{i=1}^{n} \left| \overbrace{\frac{x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}{f(x)}}^{c_i} \varepsilon_i \right|$$

con $\varepsilon_i = \dfrac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|C_i|}_{\text{NUMERI DI CONDIZIONI}} \cdot \underbrace{|\varepsilon_i|}_{\text{ERRORI SUI DATI}} \quad \text{CON} \quad C_i = \frac{x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{f(x)}$$

DERIVATA PARZIALE: CONSIDERO UNA SOLA VAR. E LE ALTRE SONO COSTANTI

ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_1, x_2 \to f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$E_{IN} \le \sum_{i=1}^{2} |C_i||\varepsilon_i| = |C_1||\varepsilon_1| + |C_2||\varepsilon_2|$$

$$C_1 = \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_2 = 1 \qquad C_2 = \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1 = 1$$

ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_1, x_2 \to f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$E_{IN} \le \sum_{i=1}^{2} |C_i||\varepsilon_i| = |C_1||\varepsilon_1| + |C_2||\varepsilon_2|$$

$$C_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \qquad C_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

SITUAZIONE DI CANCELLAZIONE NUMERICA

GRANDI QUANDO $x_1 + x_2 \to 0$

QUESTA È L'ANALISI INDIETRO (STIMA)?

CANC. NUM: SOMMA O SOTTRAZIONE TENDE A ZERO E I DATI SONO AFFETTI DA ERRORI.

ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad x_1, x_2 \to f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}$ $\quad x_1 \ge 0,\ x_1 + x_2 \ge 0$

$\mathbb{F}(10, 7, \lambda, \omega)$

QUANDO SI PARLA DI E INERENTE E QUANDO E ALGORITMICO