Sistemi Lineari:

Dati di partenza:

$A\underline{x} = \underline{b}$ — A: matrice (elem. reali), $\underline{x}$, $\underline{b}$: vettori

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, determinare $\underline{x}$ (incognito) $\in \mathbb{R}^n$

t.c. valga $\boxed{A\underline{x} = \underline{b}}$. → Forma di un sis. lin.

→ Nel corso ci limitiamo a matrici quadrate ($\boxed{A \in \mathbb{R}^{n\times n}}$)

Ci chiediamo:

- vettore $\underline{b}$ può essere scritto come comb. lin. delle colonne di A?
  - → se vero, gli elementi di x sono i coefficienti di questa comb. lineare
- La soluzione potrebbe esistere o meno e potrebbe esse o non essere unica.
- A è non singolare: → definizioni equivalenti
  - $\det(A) \neq 0$
  - $\exists$ l'inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$
  - rk pari alla dim.
    - → num. di colonne di A lin. indip.
  - sia $\underline{z}$ (un qualsiasi vettore), se applichiamo A a $\underline{z}$ non otteniamo un vettore nullo.
    $\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n \quad A\underline{z} \neq \underline{0} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
  - λ_i autovalori di A e u_i autovettori di A

    $A u_i = \lambda_i u_i \implies \lambda_i \neq 0 \ \forall i$

Mat. sing. o non sing.?

↑

Esistenza Soluzione:

A	$\underline{b}$	# soluzioni
non sing	arbitrario	unica sol. * → il caso che considereremo
singolare	$\underline{b} \in R(A)$	infinite sol.
singolare	$\underline{b} \notin R(A)$	nessuna sol.

$A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$ — $\underline{a}_1$: prima colonna di A; $\underline{a}_n$: i-sima colonna di A

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \qquad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)^T$

$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}_i$ → COLONNE DI A

↳ SCALARE

$R(A)$ ↑ RANGE DELLA MAT. A

↓

E' L'INSIEME $\{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \underline{z} = \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{a}_i \}$

→ (A E $\underline{b}$ SONO RAPPRESENTATI DA NUM. FINITI)

CONDIZIONAMENTO DEL PROB.: COME PERTURBAZIONI SUI DATI (A) INFLUENZANO IL RISULTATO (b)

DATI SONO: MATRICE A E IL TERMINE NOTO b.

L'ACCURATEZZA DELLA SOLUZIONE $\underline{x}$?

* $| \underline{x} - \tilde{\underline{x}} |$?

$\underline{x}$ ↓ SOL. ESATTA, $\tilde{\underline{x}}$ ↓ SOL. NUMERICA

SERVE UNA MISURA DEL VETTORE

⇓

NORMA VETTORIALE

DEF. NORMA VETTORIALE $\| \cdot \|$: (FUNZIONE $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

DATA $\underline{x}$ ASSOCIA UNO SCALARE

$$\underline{x} \longrightarrow \underbrace{\| \underline{x} \|}$$

↳ GRANDEZZA DI $\underline{x}$

FUNZIONE CHE GODE DELLE SEGUENTI PROP.:

i) $\|x\| \geq 0, \forall x$

ii) $\|x\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

iv) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

ALCUNE NORME VETTORIALI:

(NORMA UNO)

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

(NORMA INFINITO)

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(NORMA DUE)

$$\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\underline{x}^T x} = (x^T x)^{1/2}$$

→ NORMA 2 O EUCLIDEA

$\underline{x} = (x_1, x_2)$

$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Relazione tra norme vettoriale:

- $\|\underline{x}\|_1 \geq \|\underline{x}\|_2 \geq \|\underline{x}\|_\infty$
- $\|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_2$
- $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$
- $\|\underline{x}\|_1 \leq n\,\|\underline{x}\|_\infty$

Tutte le norme sono equivalenti

↓

se una norma è piccola allora lo saranno anche le altre.

Es.

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$$

$$\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_2$$

$\tilde{\underline{x}}$ sia un'approssimazione della soluzione esatta $\underline{x}$

Err. Assoluto: $\|\underline{x} - \tilde{\underline{x}}\|$

Err. Relativo: $\dfrac{\|\underline{x} - \tilde{\underline{x}}\|}{\underbrace{\|\underline{x}\|}_{\text{norma della sol. esatta}}}$

$* \ \overset{\text{reale}}{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

↓

approssimata numericamente $\tilde{A}$

↳ quindi si definiscono le norme matriciali

$$\|\tilde{A} - A\|$$

Norme Matriciali:

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\|\cdot\|$ è una funzione:

$$\mathbb{R}^{m\times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow \|A\|$$

con le proprietà analoghe a prima:

i) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A$

ii) $\|A\| = 0 \iff A = 0$ (mat. con tutti elem. nulli)

iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $\|\alpha A\| = \alpha\|A\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Matrice vettoriale indotta: data una norma vettoriale, la corrispondente norma matriciale indotta è data da:

$$\|A\| = \max_{\substack{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \\ \neq \underline{0}}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$$

→ codifica relativa della trasformazione

PROPRIETÀ: $\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|$ $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

ALCUNE NORME MATRICIALI:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

SOMMA ELEMENTI COLONNA

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

SOMMA ELEMENTI RIGHE

$$\|A\|_2 = \left(\lambda_{max}(A^T A) \right)^{1/2}$$ NORMA SPETTRALE

RELAZIONI TRA NORME MATRICIALI:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{n} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\max_{i j} |a_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i j} |a_{i j}|$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

ERRORE INERENTE: RELAZIONE SOLUZIONE NUMERICA E ESATTA CON QUELLO SUI DATI

COME SI STUDIA?

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

SARANNO AFFETTI DA PERTURBAZIONI

$$* \; \tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$$

COME SI STUDIA? :

$$A(\underline{x} + \delta x) = \underline{b} + \delta \underline{b}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

IN CHE RELAZIONE SONO ERRORE SULLA SOLUZIONE

$$\frac{\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \qquad \delta x = \tilde{x} - x$$

$$\tilde{b} = \underline{b} + \delta \underline{b}$$

$$\boxed{\delta \underline{b} = \tilde{\underline{b}} - \underline{b}}$$

DISTANZA ELEM. PER ELEM.

$$\delta \underline{b} = \begin{pmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \vdots \\ \delta b_n \end{pmatrix}$$

$$\delta b_i := \tilde{b}_i - b_i$$

$$\frac{\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$$

$$^{*}\ \frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq ? \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

ED ERRORE SUI DATI :

$$\frac{\|\tilde{\underline{b}} - \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$$A(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{b} + \delta \underline{b}, \quad A\cancel{\underline{x}} + A\delta\underline{x} = \cancel{\underline{b}} + \delta \underline{b}$$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$$A\,\delta \underline{x} = \delta \underline{b}$$

$$\delta \underline{x} = A^{-1} \delta \underline{b}$$

$$\|\delta \underline{x}\| = \|A^{-1} \delta \underline{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta \underline{b}\|$$

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta \underline{b}\|}{\left(\frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}\right)} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$$\underline{b} = A\underline{x}$$

$$\|\underline{b}\| = \|A\underline{x}\| \leq \|A\| \|\underline{x}\|$$

$$\|\underline{x}\| \geq \frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}$$

SIGNIFICATIVA

$K(A)$ — NUM. DI CONDIZIONE DELLA MATRICE A

L'ERRORE RELATIVO E' $\leq K(A)$ · PERTURBAZIONE (RELATIVA) SUL TERMINE NOTO

$$K(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$(A + \delta A)(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{b}$$

* ($A + \delta A$ INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ $r = \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$)

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{K(A)}{1 - r} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

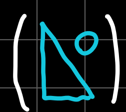
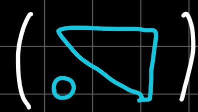
Caso generale : $(A + \delta A)(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{b} + \delta \underline{b}$

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{K(A)}{1 - r} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \right)$$

* METODI NUMERICI DIRETTI PER LA RISOLUZIONE DI SISTEMA LINEARE

DIRETTI ↑ ARRIVANO ALLA SOLUZIONE IN UN NUMERO FINITO DI PASSI

MATRICI TRIANGOLARI (INF. O SUP):

INFERIORE $L =$  SUPERIORE $U =$ 

$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$ $\quad\quad$ $\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

SIA $\underset{\text{TRIANG. INF.}}{L}\, \underline{y} = b$ $\quad\quad l_{ii} \neq 0 \quad \forall i$

ES:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11} x_1 = b_1 \\ l_{21} x_1 + l_{22} x_2 = b_2 \\ l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow$$

SOSTITUZIONE IN AVANTI

$x_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$ 1 OP

$x_2 = \dfrac{b_2 - l_{21} x_1}{l_{22}}$ 3 OP

$x_3 = \dfrac{(b_3 - l_{31} x_1 - l_{32} x_2)}{l_{33}}$ 4 OP

COSTO COMP. 9 OP.

IN GENERALE, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is} x_s}{l_{ii}} \quad i = 1, \dots, n$$

COSTO i-SIMO ELEMENTO x_i:

1 DIVISIONE + $(i-1)$ PRODOTTI + $(i-1)$ SOTTRAZ.

↑ (DIVISIONE PER l_{ii}) $\quad$ ↑ $l_{is} x_s$

COSTO TOT =

$$\sum_{i=1}^{n} 1 + (i-1) + (i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n} = 2 \sum_{i=1}^{n} i - n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

MAT. TRIANG. SUP. $\quad u_{ii} \neq 0$

SIA $\quad U\underline{x} = \underline{y}$

ES

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

METODO SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO

$$\begin{cases} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = y_1 \\ u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = y_2 \\ u_{33} x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad x_3 = \frac{y_3}{u_{33}} \;\downarrow\; x_2 = \frac{y_2 - u_{23} x_3}{u_{22}} \;\downarrow\; x_1 = \frac{y_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3}{u_{11}}$$

IN GENERALE, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

COSTO COMP. n^2

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{l_{ii}} \qquad i = 1, \dots, n$$

SE NON E' TRIANGOLARE ?

IDEA: TRASFORMARE IL SISTEMA $A\underline{x} = \underline{b}$ IN UNA FORMA EQUIVALENTE, MA PIU' FACILE DA RISOLVERE.

↳ 1° METODO $\quad A = LU$

↳ 2° METODO $\quad A = QR$

→ (FATTORIZZAZIONE DELLA MATRICE A)

OBIETTIVO: $A = L\,U$

L: MAT. TR. INF. $\quad U$: MAT. TR. SUP.

$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow L\underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \rightarrow$ POSSIAMO PORRE $\underline{y} := U\underline{x}$ (INCOGNITO) $\quad L\underline{y} = \underline{b}$ (NOTO, NOTO)

↳ POSSO TROVARLO

1) PASSO $\quad L\underline{y} = \underline{b}$

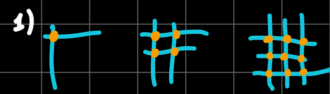
2) PASSO $\quad U\underline{x} = \underline{y}$ (NOTO)

FATTORIZZANDO LA MATRICE

Minore Principale di ordine k di una matrice A : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{ordine 1} \qquad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}} & * \\ * \quad * & * \end{pmatrix} \quad \text{ordine 2}$$

A' = intersezione delle prime n righe e n colonne

1) 

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * & * \end{matrix} & * \end{pmatrix} \quad \text{ordine 3}$$

Consideriamo la sottomatrice quadrata A' formata dall'intersezione delle prime k righe e colonne di A.

Il minore principale di ordine k di A è il determinante $\det(A')$

ES: minore di ordine $2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Metodo di Gauss

ES: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

stessa dim. di A (3×3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad L_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ *^1 & 1 & \\ *^2 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} *^1 = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} \\[2ex] *^2 = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} \end{array}\right\} a_{11} \neq 0$$

$$\Rightarrow L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \leftarrow \text{prima riga invariata}$$

azzera elem. prima colonna sotto alla diagonale

Consideriamo $L_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$L_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & *^1 & 1 \end{pmatrix} \qquad *^1 = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$\underbrace{L_2(L_1 A)}_{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{INVARIATA} \\ \leftarrow \text{INVARIATA} \\ \end{matrix} \Big\} \text{ PRIME DUE}$$

$U \to$ MAT. TR. SUP.

$\to$ AZZERA GLI ELEM. 2° COLONNA

Es: Fattorizzazione LU di una matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Minore principale di ordine 1 $\neq 0$ $\det(A') \neq 0$

Minore principale di ordine 2 $\det(A'') = 6 - 4 = 2 \neq 0$

Minore principale di ordine 3 $\det(A''') \neq 0$

} E' POSSIBILE ESEGUIRE LA FATTORIZZAZIONE LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

u_{11}

$$l_{21} = \frac{4 \to a_{21}}{2 \to u_{11}} = 2 \qquad u_{11} = 2$$

$$l_{31} = \frac{6 \to a_{31}}{2 \to u_{11}} = 3$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ *^2 & *^2 & \\ & & \end{bmatrix} \to \text{INVARIATA}$$

$*^2 \quad a_{21} - l_{21} \cdot u_{11}$

$*^2 \quad a_{22} -$