Metodo di Sturm: sia $p(x)$ a coefficienti reali, si costruisce la sequenza di Sturm che è una sequenza fatta:

a diviso b

$$a = q\,b + r$$

$$p(x) = q(x)\,\underbrace{p'(x)}_{b} + \underbrace{r(x)}_{r}, \qquad \underbrace{p(x)}_{a}$$

definiamo un nuovo pol. $S_1(x)$

ogni op. abbassa il grado del pol fino a un numero finito di passi fino pol. di grado zero

$S_1(x) := -r_1(x)$ ⇒ $S_2(x) := -r_2(x)$ ⇒ $S_2(x) := -r_2(x)$ ⇒ . . . . .

$p'(x) := q_2(x)\,S_1(x) + r_2(x)$ $\qquad S_1(x) := q_2(x)\,S_2(x) + r_3(x)$ $\qquad S_1(x) := q_2(x)\,S_2(x) + r_3(x)$

otteniamo una sequenza di polinomi

$S_k(x)$ → (ultimo pol. non nullo)

Sequenza di Sturm ottenuta:

$p(x) \quad p'(x) \quad S_1(x) \quad S_2(x) \quad .... \quad S_k(x)$

Ex: $p(x) = x^4 - 3x - 1 \to p'(x) = 4x^3 - 3 \to S_1(x) = \frac{9}{4}x + 1 \to S_2(x) = \frac{2443}{729}$

↓ pol. di grado zero

Seq. = $p(x) \quad p'(x) \quad S_1(x) \quad S_2(x)$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e calcolo:

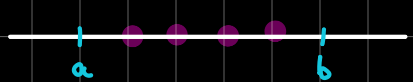
$p(x_0) \quad p'(x_0) \quad S_1(x_0) \quad S_2(x_0) \quad .... \quad S_k(x_0)$ ⇒ sono tutti numeri, sono una seq. di numeri reali

⇓

posso controllare una variazione di segno e contarlo.

Th: il n° di zeri reali e distinti di $p(x)$ compresi da $[a, b]$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ t.c. $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$ è pari al (numero di variazioni di segno della sequenza di Sturm in a) − (numero di variazioni di segno della sequenza di Sturm in b)

* $a < b$ ⇒ intervallo ben definito



calcolo seq. di Sturm in a e in b

(num variaz. di segno in a) − (num. di variazioni di segn. in b) = num di zeri

Ex: APPLICO IL Th.

$p(x) = x^4 - 3x - 1$

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	21	3	..	..	..	..
$p'(x)$	-35	-7	..	..	..	..
$S_1(x)$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{4}$	..	..	..	..
$S_2(x)$	$\frac{2443}{729}$	//	//	//	//	//
$S(x)$	2 VAR	2 VAR	1 VAR	1 VAR	0 VAR	0 VAR

TAB. DISPENSA

COSTANTE

⇓

NUM. DI VAR. DI SEGNO

1° INTERVALLO : $[a, b] = [-2, -1]$ $\quad \underset{2}{S(a)} - \underset{2}{S(b)} = 0$ → NON CI SONO ZERI IN $[-2, -1]$

2° INTERVALLO : $[a, b] = [-1, 0]$ $\quad \underset{2}{S(a)} - \underset{1}{S(b)} = 1$ ⇒ UN SOLO ZERO IN $[-1, 0]$

3° INTERVALLO : $[a, b] = [0, 1]$ $\quad \underset{1}{S(a)} - \underset{1}{S(b)} = 0$ ⇒ NO ZERI IN $[1, 0]$

4° INTERVALLO : ~~~~~~

ALG. DELLA SEPARAZIONE DELLE RADICI (GENERA UN INSIEME DI INTERVALLI CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE UNA SOLA RADICE) → ∀ INTERVALLO SI USA UN METODO NUMERICO PER CALCOLARE LA RADICE

↓

a) BISEZ. + NEWTON

b) NEWTON CON GUESS PUNTO MEDIO DELL' INTERVALLO E TESTARE NUMERICAMENTE LA CONVERGENZA.

⇓

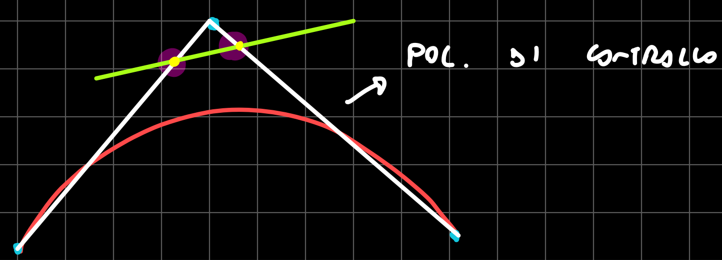
I VALORI NON DEVONO USCIRE DALL' INTERVALLO DI RICERCA

LO CHIEDE ALL'ORALE

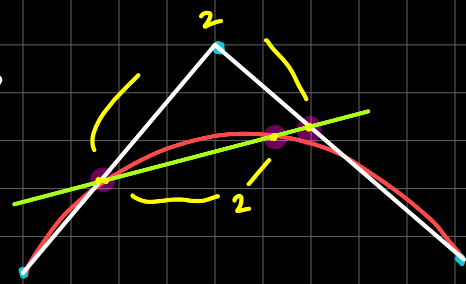
Metodo di Lane - Riesenfeld per zeri polinomi nella base di Bernstein

1) Isola le radici
2) Calcola ciascuna radice

Prop. di Variation Diminisching (curve piane): presa una qualsiasi retta nel piano, il n° di intersezioni (# intersez.) tra retta e polinom. nella base di Bernstain sarà sempre $\leq$ al num. di intersez. retta e poligono di controllo.



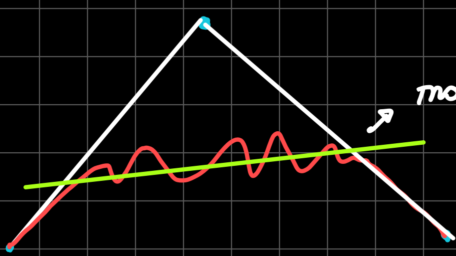
DUE INTERSEZ. ⇒ PROPRIETA' VALIDA



VALE LA PROP.

Ci dice che la curva non può oscillare nel poligono di controllo:

Non può fare:

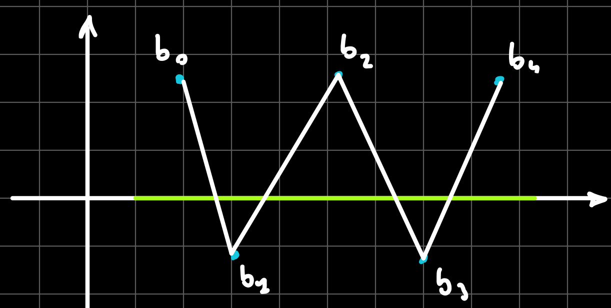


TROPPE INTERSEZ. NON VALE LA PROP!

num. interez. retta e pol > retta e poligonale.

Quindi:

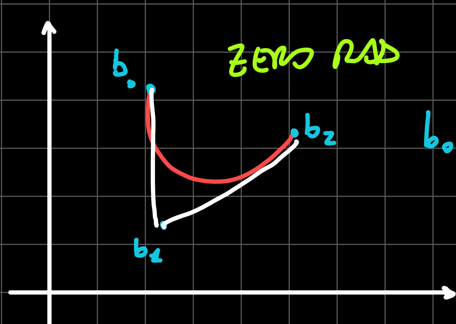
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x)$$



$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$

(Il num. di radici reali del pol. sarà) $\leq$ (num. di variaz. segno dei suoi coefficienti)

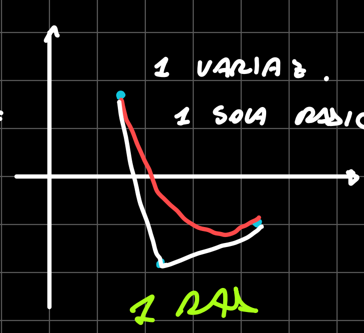
In particolare:



b_0, b_1, b_2, nessuna variazione

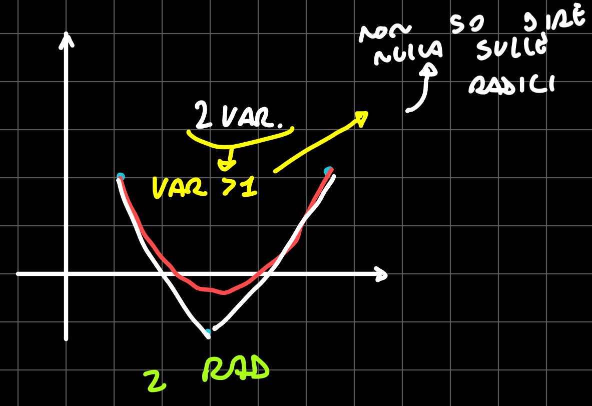
⇓

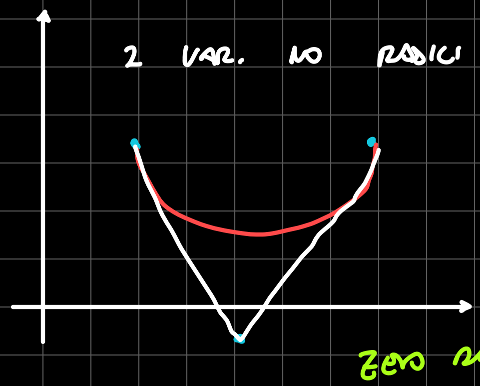
non ci sono radici

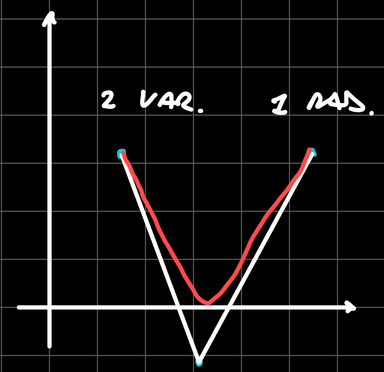


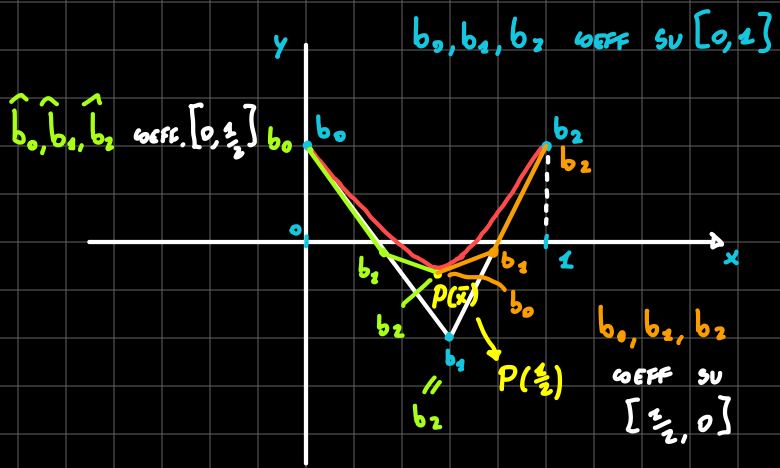
1 variaz.

1 sola radice









FACCIO LA SUDDIVISIONE!

$p(x)$, $x \in [a, b]$

$\bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$

$p(x)$, $x \in [0, 1]$

$\bar{x} = \dfrac{1}{2}$

> 1 VARIAZIONI DI SEGNO: SI SUDDIVIDE LA CURVA (POLINOMIO) NEL PUNTO MEDIO DELL'INTERVALLO DI DEFINIZIONE E SI RIPETE L'ANALISI DEL NUMERO DI VARIAZIONI DI SEGNO DELLA SEQUENZA DEI COEFF. PER CIASCUN TRATTO GENERATO.

→ IL PROCEDIMENTO GENERA UN INSIEME DI INTERVALLI CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE UNA SOLA RADICE.

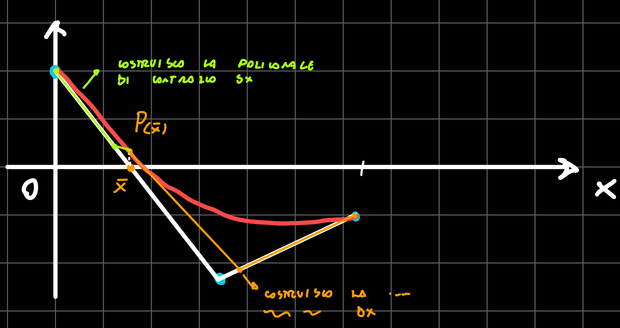
PASSO DUE: COME DETERMINO CON ACCURATEZZA LA RADICE?

DATO UN POLINOMIO $p(x)$ DI GRADO n

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x), \quad x \in [0,1]$$

T.C. LA SEQ. $b_0, b_1, b_2, \ldots$ HA UNA SOLA VARIAZIONE DI SEGNO, CALCOLO UN PUNTO x_0 IN UN INTERVALLO $x_0 \in [0, 1]$ DI DEFINIZIONE T.C. $p(x_0) = 0$

(SI PRENDE)
SIA $\bar{x}$ PUNTO DI INTERSEZIONE POL. DI CONTROLLO E ASSE X. SUDDIVIDIAMO IL POL. IN $\bar{x}$ CREANDO DUE NUOVE SEQ. DI COEFFICIENTI UNA RELATIVA A $[0, \bar{x}]$ E UNA RELATIVA A $[\bar{x}, 1]$.



CONTROLLIAMO IL NUM. DI VARIAZIONI DI SEGNO DELLE DUE NUOVE SEQUENZE.

SI APPLICA IL RAGIONAMENTO RICORSIVAMENTE FINO A QUANDO UNO DEI COEFFICIENTI ESTREMI DEI DUE TRATTI RISULTI UGUALE A ZERO (ENTRO UNA CERTA TOLLERANZA), QUESTO INDICA NELL'ESTREMO CORRISPONDE LA RADICE.

SIANO DUE CURVE PIANE: TROVARE INTERSEZ. DI CURVE

$$\overbrace{(P_x(s), P_y(s))}^{P_n(s)} \qquad \overbrace{(q_x(t), q_y(t))}^{q_m(t)}$$

$$\begin{cases} P_x(s) = q_x(t) \\ P_y(s) = q_y(t) \end{cases} \leftarrow \text{TROVARE } s \text{ E } t \qquad \begin{cases} P_x(s) - q_x(t) = 0 \\ P_y(s) - q_y(t) = 0 \end{cases}$$