$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [0, 1)$$

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \, B_{i,n-1}(x) \qquad x \in [0, 1]$$

$$d_i = n(b_{i+1} - b_i) \qquad i = 0, \dots, n-1$$

SE ABBIAMO UN POL. NELLA BASE DI BERSTEIN:

$p(x) \quad x \in [0, y]$

$$p'(x) = \frac{1}{b-a} p'(t) \qquad x \in [0, y) \quad t \in [0, 1]$$

ALGORITMO:

PASSO 1: SI APPLICA DE CASTELJAU PER VALUTARE / SUDDIVIDERE $p(x)$ IN $\bar{x}$

$b_0^{[0]}$ —— $b_n^{[0]}$

$b_0^{[n-1]} \quad b_1^{[n-1]}$

$b_0^{[n]} = p(\bar{x})$

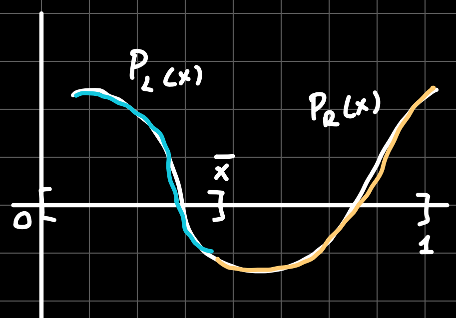
$$\underset{\text{LEFT}}{p_L}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_0^{[i]} B_{i,n}(x) \qquad x \in [0, \bar{x})$$

$$\underset{\text{RIGHT}}{p_R}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i^{[n-i]} B_{i,n}(x) \qquad x \in [\bar{x}, 1]$$

PASSO 2: CALCOLARE $p'(x)$ IN UNO DEI DUE SEGUENTI MODI:

$$p'(\bar{x}) = p_L'(\bar{x}) = \frac{n \cdot (b_0^{[n]} - b_0^{[n-1]})}{\bar{x}}$$

$\bar{x} \to$ AMPIEZZA DELL'INTERVALLO



$$p'(x) = p_R'(\bar{x}) = \frac{n(b_1^{[n-1]} - b_0^{[n]})}{1 - \bar{x}}$$

$$\begin{array}{ccc} b_0^{[0]} & \text{———} & b_n^{[0]} \\ | & & / \\ b_0^{[n-1]} & & b_1^{[n-1]} \\ & & \\ b_0^{[n]} & = & p(\bar{x}) \end{array}$$

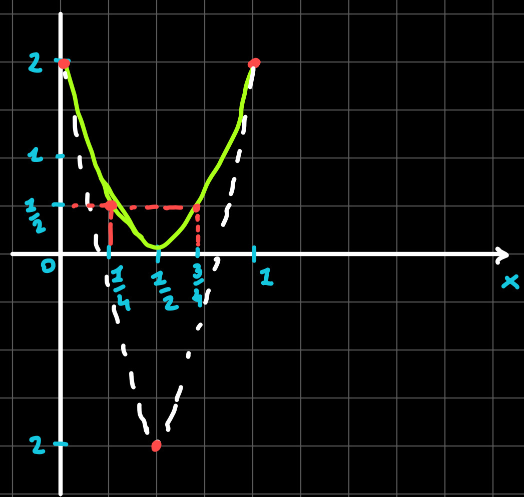
Basta memorizzare oppure

→ Si sceglie generalmente quella che comprende l'intervallo più grande :

$$P'_R(\bar{x})$$

Es : $p(x) = 2\,B_{0,2}(x) - 2\,B_{1,2}(x) + 2\,B_{2,2}(x) \qquad x \in [0,1]$

$x = \{0,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1\}$



$$P'(1/2) = \begin{array}{ccccc} 2 & & -2 & & 2 \\ {\scriptstyle 1/2}\ | & {\scriptstyle -1/2}\,/ & | & / & \\ \emptyset & & \emptyset & & \\ | & / & & & \\ \emptyset & & & & \end{array}$$

$$P'_R(1/2) = P'_L(1/2) = \frac{2\,(0-0)}{1/2} = 0$$

$$P'(1/4) = \begin{array}{ccccc} 2 & & -2 & & 2 \\ {\scriptstyle 3/4}\ | & {\scriptstyle 1/4}\,/ & | & / & \\ 1 & & -1 & & \\ | & / & & & \\ 1/2 & & & & \end{array}$$

$$P'(1/4) = P'_R(1/4) = \frac{\overbrace{2\,(-1 - 1/2)}^{\text{stiamo calcolando una derivata}}}{3/4} = -4$$

ULTIMO PASSO : PRIMITIVA (ANTIDERIVATA)

DATO IL POLINOMIO $p'(x)$ DI GRADO $n-1$ E SIAMO INTERESSATI A TROVARE UNA PRIMITIVA:

$$q(x) = p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B_{i,n-1}(x) \quad x \in [0,1]$$

$$q^{-1}(x) \overset{PRIM.}{=} p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x) \quad x \in [0,1]$$

$$d_i = n(b_{i+1} - b_i) \quad i = 0, \dots, n \implies b_{i+1} = \frac{d_i}{n} + b_i \quad i = 0, \dots, n-1 \quad b_0 = 0$$

SUPPONIAMO $i = n-1$

$$b_n = \frac{d_{n-1}}{n} + b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = \frac{d_{n-2}}{n} + b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \frac{d_0}{n} + \underbrace{b_0}_{\text{COSTANTE ADITTIVA}}$$

$b_0 = 0$ (A SCELTA)

TROVO IL VALORE DI UNA PRIMITIVA, SONO DIVERSE DI UNA COSTANTE

NOTA:

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i B_{i,n}(x)$$

$$q^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i B_{i,n+1}(x) \quad i = n-1, \dots, i = 0$$

$$b_{i+1} = \frac{d_i}{n+1} + b_i \quad i = 0, \dots, n$$

USO LA PRIM. PER RISOLVERE L'INTEGRALE DI UN POLINOMIO:

INTEGRAZIONE:

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i B_{i,n}(x) \quad x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 q(x)\,dx = \left[q^{-1}(x) \right]_0^1 = q^{-1}(1) - q^{-1}(0) = b_{n+1} - \cancel{b_0} = \boxed{b_{n+1}}$$

$$b_{i+1} = \frac{d_i}{n+1} + b_i \qquad i=0,\dots,n$$

LO VALUTO NEGLI ESTREMI

$$\boxed{b_{n+1}} = \frac{d_n}{n+1} + b_n$$

$$= \frac{d_n}{n+1} + \frac{d_{n-1}}{n+1} + b_{n-1}$$

$$= \frac{d_n}{n+1} + \frac{d_{n-1}}{n+1} + \dots + \frac{d_0}{n+1} + \cancel{b_0}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i$$

CAMBIO DI VARIABILE :

$q(x) \quad x \in [a,b]$

$$\int_a^b q(x)\, dx \qquad [a,b] \to [0,1]$$

$$x \to t$$

$$x = a + t(b-a)$$

$$\int_a^b q(x)\, dx = (b-a) \int_0^1 q(x)\, dt$$

$$\int_a^b q(x)\, dx = \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i \qquad q(x) \quad x \in [a,b]$$

ESERCIZIO : INTEGRALE DI UN POLINOMIO IN BASE DI BERNSTEIN

$$\int_0^1 B_{i,n}(x)\, dx \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i\, B_{i,n}(x)$$

$$r(x) = B_{i,n}(x)$$

↳ INDICI TUTTI $\emptyset$, LA i-ESIMA È 1

↳ $d_S = \begin{cases} 0 & i \neq S \\ 1 & i = S \end{cases}$

$$\int_0^1 B_{i,n}(x)\, dx = \frac{1}{n+1}$$

ESEMPIO $p(x) = \overset{d_0}{2} B_{0,2}(x) - \overset{d_1}{2} B_{1,2}(x) + \overset{d_2}{2} B_{2,2}(x) \qquad x \in [0,1]$

$$\int_0^1 p(x)\, dx = \frac{1 + \text{SOMMA DEI } d_i}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\int_a^b q(x)\, dx = \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=0}^{n} d_i}$$

$q(x) \quad x \in [a,b]$

$$p^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i\, B_{i,3}(x)$$

$b_3 = 2/3 + 0 = 2/3$ → VALORE DELLA PRIMITIVA

$b_2 = -2/3 + 2/3 = 0$

$b_1 = 2/3$

$b_0 = 0$ (SCELTO)

$$* \; b_{i+1} = \frac{d_i}{n+1} + b_i \qquad i = 0, \dots, n$$

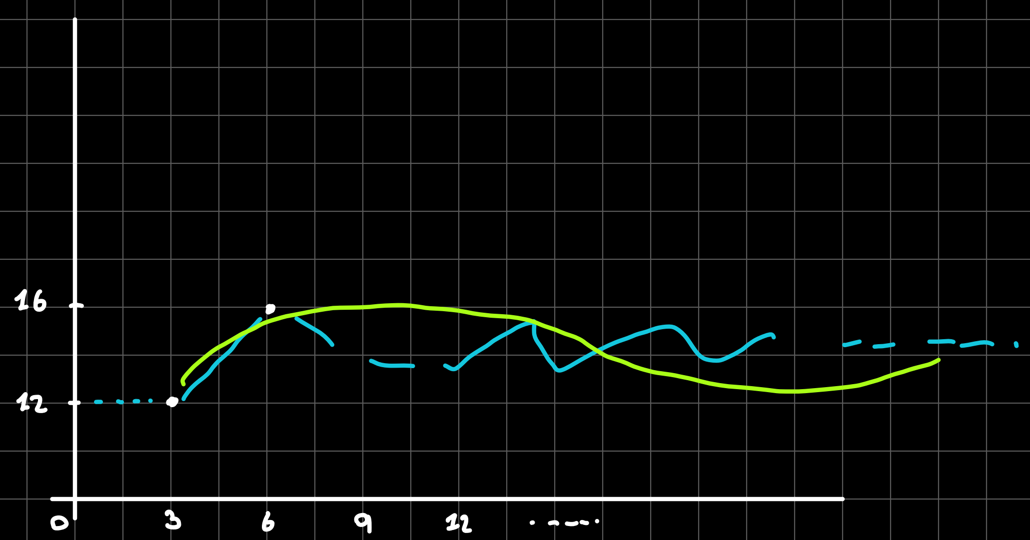
Nuovo argomento : Interpolazione Polinomiale → passare da un discreto al continuo

Supponiamo di avere una serie di informazioni :

ora h	0	3	6	9	.....	24
Temp. °C	12	?	16	?	....	13

informazioni mancanti → soluzione : studio come si propagano su altri (l'andamento)

Grafico



soluzione : uso i polinomi, valutando nei punti con valori mancanti (Pol. interpolanti)

ES

Come far muovere un personaggio nei video giochi : attraverso key-frames e tra un key-frame all'altro si usa l'interpolazione polinomiale.
↳ di punti
↳ di curve
↳ di dati

ES

Musica : informazioni perse recuperate con l'interpolazione

Vediamo i metodi dato l'idea. Vediamo come si pone il problema :

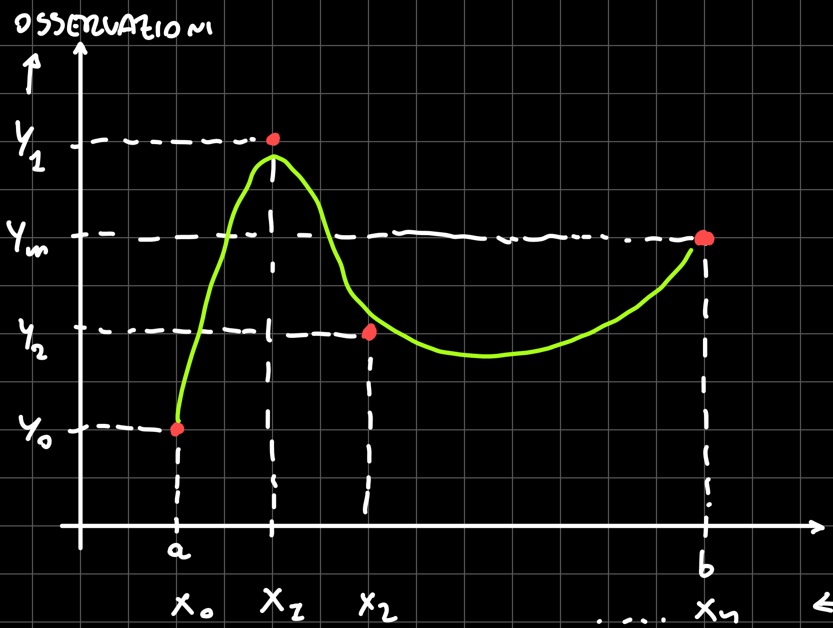
Siano assegnate $n+1$ osservazioni in corrispondenza di $n+1$ punti, (cioè siano assegnati (x_i, y_i) $i=0, \dots, n$ con x_i distinti)

Sia $\mathbb{P}_n$ lo spazio delle funzioni pol. di grado $\leq n$ e sia $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una sua base così che un polinomio
↳ PHI

$P(x) \in \mathbb{P}_n$ lo possiamo rappresentare come $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \ell_i(x)$

$x \in [a,b]$

Allora il problema di interpolazione polinomiale di dati con una funzione $p(x) \in \mathbb{P}_n$ consiste nel determinare i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ (n° reali) t.c. $p(x_i) = y_i$ $i = 0, \dots, n$ dette condizioni di interpolazione.



← Punti distinti

* Affrontiamo problemi ben posti, nel nostro caso è da verificare se lo è prima di risolverlo.

* Punti n+1 grado n
n + 1 coefficienti