Stiamo sempre lavorando con polinomi → Alg. 1 B Berstain
↘ Alg. 2 Castel jo → Schema triangolare

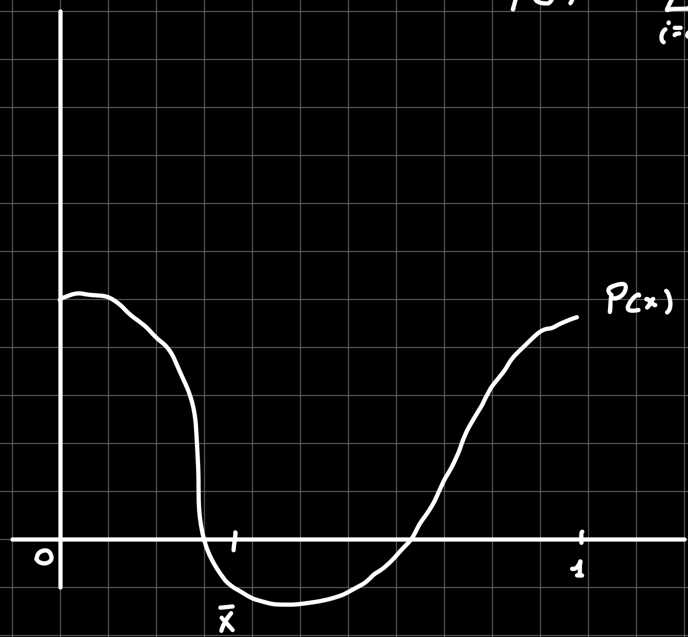
Algoritmo di Castel jo e $\underbrace{\text{Suddivisione}}$ → interesse di suddividere il polinomio in due sotto parti (due polinomi)

↓

P(x) in base Berstain

↓

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [0,1]$$



coefficienti da trovare

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \; ? \; B_{i,n}(x) \qquad x \in [0,\bar{x}]$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \; ? \; B_{i,n}(x) \qquad x \in [\bar{x},1]$$

Tutto sempre nella base di Berstain.

Vogliamo valutare il polinomio in $\bar{x}$: p(x) per $x = \bar{x}$

$$\begin{array}{cccccc}
b_0^{[0]} & b_1^{[0]} & b_2^{[0]} & \dots & b_{n-1}^{[0]} & b_n^{[0]} \\
b_0^{[1]} & b_1^{[1]} & b_2^{[1]} & \dots & b_{n-1}^{[1]} & \\
b_0^{[2]} & b_1^{[2]} & b_2^{[2]} & b_{n-2}^{[2]} & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
b_0^{[n-1]} & b_1^{[n-1]} & & & & \\
b_0^{[n]} & & & & &
\end{array}$$

1-x, x

$b_0^{[n]} = P(\bar{x})$ ⇒ troviamo anche i nostri (2) coefficienti dei polinomi

E costruisco il sistema triangolare di Castel jo.

$$b_i^{[j]} = (1-\bar{x})\, b_i^{[j-1]} + \bar{x}\, b_{i+1}^{[j-1]}$$

→ coeff. intervallo $[\bar{x},1]$

coeff. intervallo $[0,\bar{x}]$

$$p_L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_0^{[i]} B_{i,n}(x) \qquad x \in [0,\bar{x}]$$

$$p_R(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i^{[n-i]} B_{i,n}(x) \qquad x \in [\bar{x},1]$$

* $P(0) = b_0,$ ↱ il primo dei coeff.

* $P_L(0) = b_0,$

left

* $P(1) = b_n = P_R(1)$
  RIGHT

* $P(\bar{x}) = b_0^{[n]}$

* $P_L(\bar{x}) = b_0^{[n]}$

Esercizio: $p(x) = 2B_{0,2}(x) - 2B_{1,2}(x) + 2B_{2,2}(x) \qquad x \in [0, 1]$

Con algoritmo 2.: $x = [0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$ $\Rightarrow$ polinomio di grado due

$P(\frac{1}{2})$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & & -2 & & 2 \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}/ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}/ & \\
 & 0 & & 0 & & \\
 & 1 & / & & & \\
 & 0 & & P(\frac{1}{2}) = 0 & &
\end{array}
$$

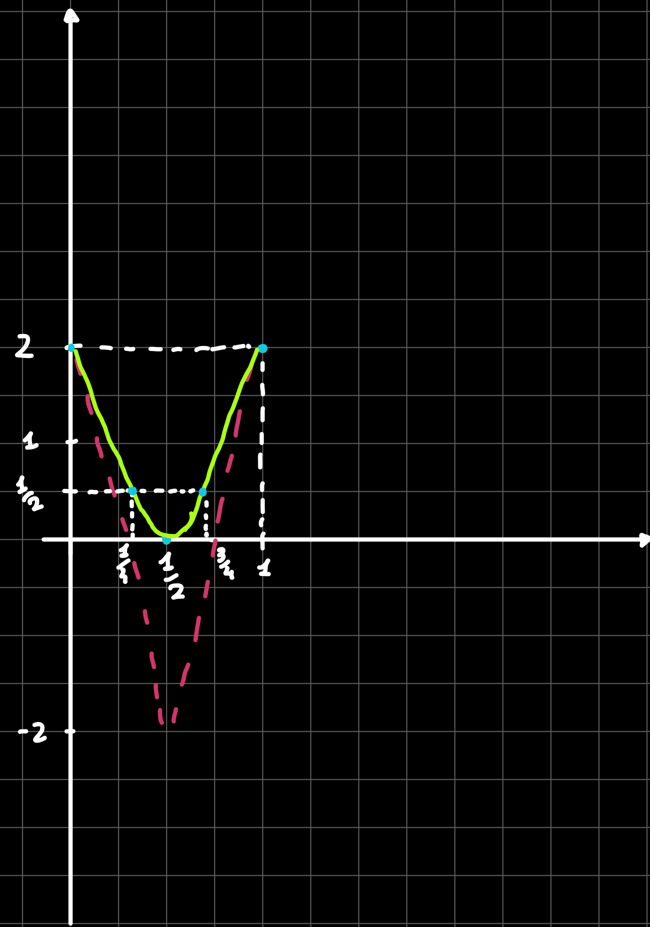
$P(\frac{1}{4})$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & & -2 & & 2 \\
\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4}/ & 1 & / & \\
 & 1 & & -1 & & \\
 & 1 & / & & & \\
 & \frac{1}{2} & & P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} & &
\end{array}
$$

$P(\frac{3}{4})$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 2 & & -2 & & 2 \\
\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} & 1 & / & \\
 & -1 & & 1 & & \\
 & 1 & / & & & \\
 & \frac{1}{2} & & P(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} & &
\end{array}
$$

$P(0) = 2$
$P(1) = 2$
$P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$
$P(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$
$P(\frac{1}{2}) = 0$



$P_L(x) = 2B_{0,2}(x) + 1B_{1,2}(x) + \frac{1}{2}B_{2,2}(x) \qquad x \in [\emptyset, \frac{1}{4}]$

$P_R(x) = \frac{1}{2}B_{0,2}(x) - B_{1,2}(x) + 2B_{2,2} \qquad \bar{x} \in [\frac{1}{4}, 1]$

Cerca un video esplicativo che spieghi questo.

Che vantaggi numerici avrà suddividere? → L'errore inerente sarà più piccolo.
→ Si lavora in modo accurato per controllare gli errori.

* I conti li fa il calcolatore, io devo solo capire quello che fanno gli <u>algoritmi</u>!!!

HORNER → VALUTARE

RUFFINI → VALUTARE + DERIVATE

VOGLIAMO ORA VALUTARE LA DERIVATA DEI NOSTRI POLINOMI NELLA BASE DI BERNSTEIN:

FORMULA PER LE DERIVATE DELLE FUNZIONI BASE DI BERNSTEIN:
LA DERIVATA PRIMA DEL POL. BER.

$$\boxed{B'_{i,n}(x) = n\left(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right)}$$

⇓

QUESTA VALE ANCHE PER DERIVATE SUCCESSIVE ALL' ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [0,1]$$

⇓ → DERIVATA IN QUALCHE PUNTO

$$p'(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B'_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, n\left(B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)\right)$$

$$= n\sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i-1,n-1}(x) - n\sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n-1}(x)$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} b_i \, B_{i-1,n-1}(x) - n\sum_{i=0}^{n-1} b_i \, B_{i,n-1}(x)$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} \, B_{i,n-1}(x) - n\sum_{i=0}^{n-1} b_i \, B_{i,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{n\left(b_{i+1} - b_i\right)} \cdot B_{i,n-1}(x)$$

NUOVI COEFFICIENTI d_i

$$d_i = n\left(b_{i+1} - b_i\right) \quad i=0,\dots,n-1$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} \Big\} \text{ FORMA ANALITICA}$$

ABBIAMO FATTO TUTTO IN $[0,1]$ FINO AD ORA, MA SE DEVO CALCOLARE LA DERIVATA, DOBBIAMO RITORNARE IN $[a,b]$ DOPO LA DERIVATA IN $[0,1]$. (POTREBBE ESSERE SBAGLIATA QUESTA AFFERMAZIONE)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [a,b]$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1]$$

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\underset{x}{[a,b]} \rightarrow \underset{t}{[0,1]}$$

$$x = a + t(b-a)$$

$$p^{(k)}(x) = \frac{1}{(b-a)^k} \, p^k(x)$$

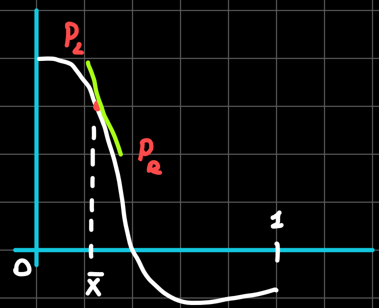
$$^* \; p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \, B_{i,n-1}(x) \qquad x \in [0,1]$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [\emptyset, 1]$$

DERIVATA NEGLI ESTREMI

$$p'(\bar{x}) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} p'(0) &= d_0 = n(b_1 - b_0) \\ p'(1) &= d_{n-1} = n(b_n - b_{n-1}) \end{aligned}}$$



APPLICO IL SIS. DI CASTEL JAU:

$$\begin{array}{cccc} b_0^{[0]} & b_1^{[0]} & \cdots & b_n^{[0]} \\ \vdots & & & \\ b_0^{[n-1]} & b_1^{[n-1]} & & \\ b_0^{[n]} & & & \end{array}$$

$$P_L'(\bar{x}) = \frac{n\left(b_0^{[n]} - b_0^{[n-1]}\right)}{\bar{x}} = P'(\bar{x})$$

$\bar{x} \longrightarrow$ AMPIEZZA DELL'INTERVALLO

$$P_R'(\bar{x}) = \frac{n\left(b_1^{[n-1]} - b_0^{n}\right)}{(1-\bar{x})} = P'(\bar{x})$$

SECONDA PARTE DELLA LEZIONE : FUNZIONI VETTORIALI , CURVE DI BEZIER

CURVE IN FORMA PARAMETRICA → MEMORIZZARE I POLINOMI

↳ E RIPRESENTARLI IN MODO DISCRETO

DIFFERENZA TRA ↗ PUNTI DI CONTROLLO ↘ POLIGONALE DI CONTROLLO

↘ INTERPOLAZIONE

* CURVE SEMPRE , [0,1]

↓

PERCHE' ???

↓

FUORI DA [0, 1]

IL SEGMENTO DIVENTA UNA RETTA

PER TRE PUNTI DI CONTROLLO

DI GRADO 1 HO UN

SEGMENTO DI GRADO 2