Recap

↳ ① Num. finiti → n° reali discretizzati $[u]$
↳ ② Errori assoluti o relativi → Unità di ... che indica la precisione
↳ ③ Algoritmo caratterizzazione di u

Soluzione problema articolato sul calcolatore:

↳ Def: problemi ben posti → dalla sol vogliamo fare un'analisi sull'errore
  ↳ 1) ammettere 1 ed 1 sola soluzione
  ↳ 2) la sol deve dipendere con continuità dai dati

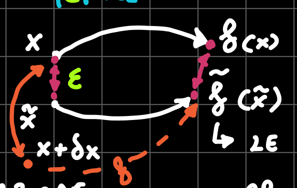
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ continua — Es. di problema ben posto perché rispetta 1) e 2)

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to \sqrt{x}$
$x \to x^2 + 3x - \sqrt{x}$

3) Problema più complesso
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x,y \to f(x,y)$
$x,y \to x+y$

4) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Analisi dell'errore
↳ 1) Analisi in avanti
↳ 2) Analisi all'indietro



* errore

* Stimare l'errore

↳ le op. sono fatte da op. di aritmetica finita

Dato perturbato: astrazione mentale

Caso 1) Andiamo a calcolarlo

$$E_{REL} \left| \frac{f(x) - \tilde{f}(\tilde{x})}{f(x)} \right|$$

Caso 2) Stima $\left| \frac{x + \delta x - x}{x} \right| = \left| \frac{\delta x}{x} \right|$

Esempio di analisi in avanti dell'errore 1) (Tecnica di stima errore prima del calcolo)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (sono n° reali)
$x,y \to x \cdot y$
$x \to \tilde{x} \equiv fl(x) = x(1+\varepsilon_1)$ con $|\varepsilon_1| < u$
$y \to \tilde{y} \equiv fl(x) = x(1+\varepsilon_2)$ con $|\varepsilon_2| < u$
$\tilde{x} \tilde{\cdot} \tilde{y} = fl(\tilde{x} \cdot \tilde{y}) = (\tilde{x} \cdot \tilde{y})(1+\varepsilon_3) =$ con $|\varepsilon_3| < u$
↳ $(x(1+\varepsilon_1) \cdot y(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)$

Abbia seguito quello che vuole fare il nostro cal in arith. finita.

$$E_{REL} = \left| \frac{x \cdot y - x(1+\varepsilon_1) \cdot y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{x \cdot y} \right|$$ } esp. errore relativo

$$E_{REL} = \left| \frac{\cancel{x \cdot y} - x(1+\varepsilon_1)\cdot \cancel{y}(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{\cancel{x\cdot y}} \right| = \left| 1 - (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \right|$$

VAL ASSOL.

PIU' PICCOLO   PIU' PICCOLO

$$= \left| 1 - (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3 \right|$$

IL PRODOTTO DI CIFRE PICCOLE SONO CIFRE ANCORA PIU' PICCOLE

(ANALISI DELL'ERROR ALL'INAVATI) CON LA CANCELLAZIONE NUMERICA

$$\simeq \left| \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| < 3u$$

ESEMPIO DI CASO CHE NON VA BENE: (ERRORE NUM. RICORRENTE DA EVITARE)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$x, y \to x + y$$

$$x \to \tilde{x} = fl(x) = x(1+\varepsilon_1) \qquad |\varepsilon_1| < u$$
$$y \to \tilde{y} = fl(y) = y(1+\varepsilon_2) \qquad |\varepsilon_2| < u$$

$$\tilde{x} \,\tilde{+}\, y = fl(\tilde{x} + \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y})(1+\varepsilon_3) \qquad |\varepsilon_3| < u$$

$$= \left(x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2) \right)(1+\varepsilon_3)$$

RIS. DELLA COMPUTAZ.

DIFF. RELATIVA:

$$E_{REL} = \frac{|(x+y) - (x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)|}{|x+y|}$$

$$= \frac{|x+y - (x + x\varepsilon_1 + y + y\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)|}{|x+y|}$$

$$= \frac{|x+y - (x+y) - (x+y)\varepsilon_3 - (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)|}{|x+y|}$$

TRASCURABILI

$$= \frac{|-(x+y)\varepsilon_3 - x\varepsilon_1 - y\varepsilon_2 - x\varepsilon_1\varepsilon_3 - y\varepsilon_2\varepsilon_3|}{|x+y|}$$

TRASCURABILI

$$= \frac{x}{|x+y|}\varepsilon_1 + \frac{y}{|x+y|}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\simeq \frac{x}{|x+y|}\varepsilon_1 + \frac{y}{|x+y|}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

FATTORI MOLTIPLICATIVI.

$\boxed{\text{FATTORE DI AMPLIFICAZIONE DELL'ERRORE}}$

PIU' GRANDE SE $x+y \to 0$

ERRORE: $\boxed{\text{CANCELLAZIONE NUMERICA}}$

* CANCELLAZIONE NUMERICA

ADDIZIONE TRA DUE DATI

↳ SIA $\mathbb{F}(10, 6, \underbrace{L, U}_{\text{NON CI INTERESSANO}})$ ARROTONDAMENTO

$x = 0.147554326 \cdot 10^0$
$y = -0.147251742 \cdot 10^0$

$\left.\right\}$ $x+y \overset{\text{ESATTO}}{=} 0.000302584$ (REALE)

IN ARITMET. FINITA:

$\tilde{x} = fl(x) = 0.147554$

$\tilde{y} = fl(y) = -0.147252 \cdot 10^0$

$fl(x) \tilde{+} fl(y) = 0.000302 \cdot 10^0 = 0.302 \cdot 10^{-3}$

NELLA SOTTRAZIONE C'È STATA UNA CANCELLAZIONE NUMERICA

$$E_{REL} = \frac{|0.302584 \cdot 10^{-3} - 0.302 \cdot 10^{-3}|}{|0.302584 \cdot 10^{-3}|} \simeq 0.2 \cdot 10^{-2}$$

$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t} = 0.5 \cdot 10^{-5}$

ERRORE TOT / FINALE ? SEZIONARE GLI ERRORI PER VEDERE LA PROVENIENZA

* CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA
* STABILITA' DI UN ALGORITMO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x)$

$\tilde{x} \to \tilde{f}(\tilde{x})$

$$E_{TOT} = \frac{|f(x) - \tilde{f}(\tilde{x})|}{|f(x)|}$$

E. INERENTE

↑

* E_{IN}

* E_{ALG}

↓

ALGORITMICO

QUESTO PRODUCE UN ERRORE DA REALE A ARIT. FINITA

E_{IN} : PRESO $x \xrightarrow{1} \tilde{x}$ PRODUCE $\tilde{f}(\tilde{x})$

$L_D = \left| \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \right|$

E_{ALG} : PARTE DA $\tilde{x}$ SENZA FARE ERRORI
PRODUCE $f(\tilde{x})$ ($\tilde{x} \rightarrow f(\tilde{x})$)

E_{ALG} : $\left| \frac{f(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \right|$ → STABILITA'? NON STABILITA'?

SEPARATAMENTE CI DANNO ? (ERRORI) ?

Th : SIANO x E $\tilde{x}$ t.c. $f(x) \neq 0$ E $f(\tilde{x}) \neq 0$, ALLORA $E_{TOT} \stackrel{!}{=} E_{ALG}(1+E_{IN})+E_{IN}$
$\simeq E_{ALG} + E_{IN}$

NOTA = TUTTE LE PROPRIETA' (OPERAZIONI) DECADONO IN ARITMETICA FINITA (ES $(x+y)\cdot z \neq x\cdot z + y\cdot z$

RIPRENDIAMO L'ESEMPIO DELL'ADDIZIONE: E_{IN} ? $E_{ALG.}$?

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$x, y \longrightarrow x+y$

$$E_{IN} = \left| \frac{(x+y) - (x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2))}{x+y} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{x+y} - (\cancel{x+y} + x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2)}{x+y} \right|$$

$$= \left| \frac{x}{x+y}\varepsilon_1 + \frac{y}{x+y}\varepsilon_2 \right| \leq \left| \frac{x}{x+y} \right| |\varepsilon_1| + \left| \frac{y}{x+y} \right| |\varepsilon_2|$$

$$E_{ALG} = \left| \frac{\cancel{(\tilde{x}+\tilde{y})} - \cancel{(\tilde{x}+\tilde{y})}(1+\varepsilon_3)}{\cancel{\tilde{x}+\tilde{y}}} \right| = \left| 1 - (1+\varepsilon_3) \right| = |\varepsilon_3|$$