INTERPOLAZIONE POLINOMIALE (RIASSUNTO):

↳ TUTTI I PROBLEMI DEVONO ESSERE BEN POSTI:
- UNA E UNA SOLA SOLUZ.
- REGOLARITA' TRA DATI

↳ SUCCESSIVAMENTE SI TROVANO I METODI NUMERICI.

1) AMMETTE UNA E UNA SOLA SOL? VALUTO IL POL. IN FORMA CANONICA

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Th. (DI ESISTENZA E UNICITA'): DATI $n+1$ PUNTI (x_i, y_i) $i=0\dots n$ CON x_i DISTINTI, ESISTE ED E' UNICO IL POLINOMIO $P(x) \in \mathbb{P}_n$ CHE VERIFICA LE CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE:

$$P(x) = y_i \quad i=0,\dots,n$$

Dim. $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$\left.\begin{array}{ll} P(x_0) = y_0 & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ P(x_1) = y_1 & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots & \vdots \\ P(x_n) = y_n & \underbrace{a_0}_{\text{COEFF. INCOGNITE}} + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = n \end{array}\right\} \begin{array}{l} n+1 \text{ EQ} \\ \underbrace{n+1 \text{ INC.}}_{\text{SIST LIN}} \end{array}$$

IN GENERALE:

$$\underset{(n+1)\cdot(n+1)}{V}\, \underset{(n+1)\times 1}{a} = \underset{(n+1)\cdot \times 1}{y} \quad \text{\} SISTEMA IN FORMA MATRICE}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

↓

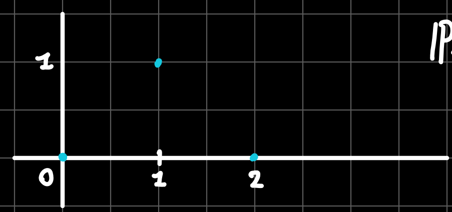
MATRICE DI VANDERMONDE

ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE SE LA MATRICE E' NON SINGOLARE, CIOE' DETERMINANTE DIVERSO DA ZERO:

$$\det(V) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ j>i}}^{n} (x_j - x_i) \neq 0 \quad \Big\} \text{ VERO} \rightarrow \text{UNA E UNA SOLA SOLUZIONE}$$

Esempio :

	x_0	x_1	x_2
x	0	1	2
y	0	1	0
	y_0	y_1	y_2



$\mathbb{P}_2$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

INCOGNITE $\rightarrow$ TROVATE NO RISOLTO L'INTERPOLAZIONE

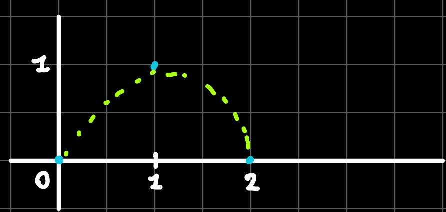
$$\begin{cases} P(0) = 0 & a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 0^2 = 0 & a_0 = 0 \\ P(1) = 1 & a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1 & a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ P(2) = 0 & a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 0 & a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 - a_2 \\ 1 - a_2 + 2a_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 2x - x^2$$

* Il polinomio di interpolazione può essere visto come l'inversa ..... ?

	x_0	x_1	x_2
x	0	1	2
y	0	1	0
	y_0	y_1	y_2



Verifica : $(2x - x^2)$

$x = 0$, $y = 0$ $\qquad x = 1$, $y = 1$ $\qquad x = 2$, $y = 0$ $\qquad \checkmark$

ES.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

	x_0	x_1	x_2
x	0	1	2
y	0	1	2
	y_0	y_1	y_2

$$\begin{aligned} P(0) = 0 \quad & \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2\, 0^2 = 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$P(1) = 1$

$P(2) = 2$

$a_0 = 0$

$a_0 + a_1 + a_2 = 1$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 - a_2 \\ 1 - a_2 + 2a_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \underbrace{x \in \mathbb{P}_2}_{\text{UNICO CHE INTERPOLA}}$$

$1!$ SOL

UNA SOLA

NON DI GRADO 2

$\leq n$

Verifica:

	x_0	x_1	x_2
x	0	1	2
y	0	1	2
	y_0	y_1	y_2

$x = 0$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $x_2 = 2$

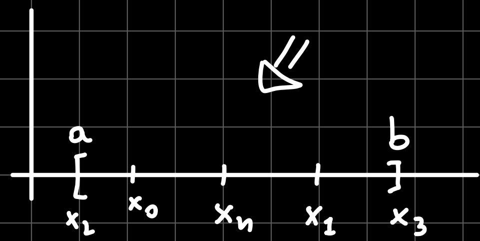
$y = 0$ $\quad$ $y = 1$ $\quad$ $y_2 = 2$

METODI PER DETERMINARE BASE INTERPOLANTE BUONI DAL PUNTO DI VISTA NUMERICO:

1° METODO DI INTERP. POL. NELLA BASE DI BERNSTEIN:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, B_{i,n}(x) \qquad (x_i, y_i) \; i = 0, \dots, n$$

$$x \in [a,b] \quad \min\{x_i\} \leftarrow a, \quad b \rightarrow \max\{x_i\}$$



$$B \cdot c = y$$

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{0,n}(x_0) & B_{1,n}(x_0) & \dots & B_{n,n}(x_0) \\ B_{0,n}(x_1) & B_{1,n}(x_1) & \dots & B_{n,n}(x_1) \\ \vdots & & & \\ B_{0,n}(x_n) & B_{1,n}(x_n) & \dots & B_{n,n}(x_n) \end{pmatrix}$$

CONDIZIONI:

$$p(x_0) = y_0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \, B_{i,n}(x_0) = y_0$$

$$= c_0 B_{0,n}(x_0) + c_1 B_{1,n}(x_0) + \dots + c_n B_{n,n}(x_0) = y_0$$

$$= c_0 B_{0,n}(x_1) + c_1 B_{1,n}(x_1) + \dots + c_n B_{n,n}(x_1) = y_1$$

$$= c_0 B_{0,n}(x_n) + c_1 B_{1,n}(x_n) + \dots + c_n B_{n,n}(x_n) = y_n$$

SPOSTIAMO L'INTERVALLO IN $[0,1]$ COL CAMBIO DI VARIABILE:

$$[a,b] \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow t$$

$$\Rightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \qquad x = a + (b-a)t$$

CAMBIANDO LE CONDIZIONI : $B \cdot c = Y$

$$
\begin{cases}
c_0 B_{0,n}(t_0) + c_1 B_{1,n}(t_0) + \dots + c_n B_{n,n}(t_0) = y_0 \\
c_0 B_{0,n}(t_1) + c_1 B_{1,n}(t_1) + \dots + c_n B_{n,n}(t_1) = y_1 \\
c_0 B_{0,n}(t_n) + c_1 B_{1,n}(t_n) + \dots + c_n B_{n,n}(t_n) = y_n
\end{cases}
$$

CHE E' LA STESSA MATRICE MA FACCIO I CALCOLI IN $[0,1]$, IN MODO PIU' ACCURATO E PRECISO.

$$
B = \begin{pmatrix}
B_{0,n}(t_0) & B_{1,n}(t_0) & \dots & B_{n,n}(t_0) \\
B_{0,n}(t_1) & B_{1,n}(t_1) & \dots & B_{n,n}(t_1) \\
\vdots & & & \\
B_{0,n}(t_n) & B_{1,n}(t_n) & \dots & B_{n,n}(t_n)
\end{pmatrix}
$$

ESEMPIO:

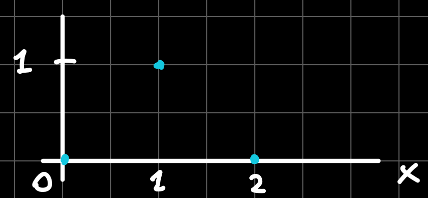
x	0	1	2
y	0	1	0

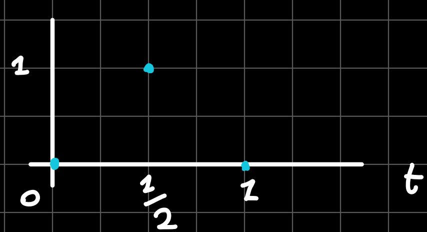
$$P(x) = c_0 B_{0,2}(x) + c_1 B_{1,2}(x) + c_2 B_{2,2}(x)$$

1) ANDIAMO IN $[0,1]$

$$[a, b] \to [0, 1]$$
$$x \to t$$
$$t = \frac{x-a}{b-a}$$
$$x = a + (b-a)t$$

$\Rightarrow$





$$P(x) = c_0 B_{0,2}(x) + c_1 B_{1,2}(x) + c_2 B_{2,2}(x) \qquad x \in [0, 2]$$

$$P(t) = c_0 B_{0,2}(t) + c_1 B_{1,2}(t) + c_2 B_{2,2}(t) \qquad t \in [0, 1]$$

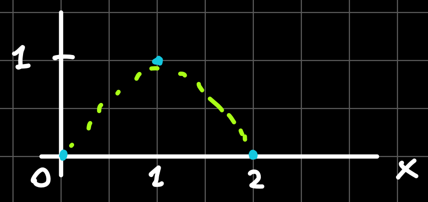
$P(0) = 0 \qquad c_0 = 0$

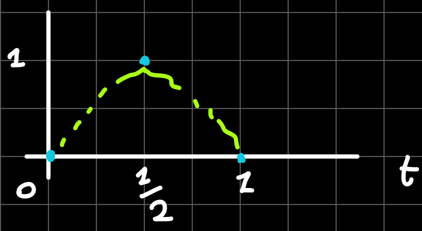
$P(1/2) = 1 \qquad \underbrace{c_0 B_{0,2}(1/2)}_{=0 \text{ PK } c_0 = 0} + c_1 B_{1,2}(1/2) + \underbrace{c_2 B_{2,2}(1/2)}_{=0 \text{ PK } c_2 = 0} = 1$

$P(1) = 0 \qquad c_2 = 0$

$p(1/2) = 1 \qquad c_1 B_{1,2}(1/2) = 1$

$c_1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \qquad c_1 = 2$





2° Metodo di Interpolazione Polinom. (Forma di Lagrange)

Prob.

$(x_i, y_i)_{i=0,\dots,n}$

Sol.: ho i miei punti: $x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n$ e risolvo l'interpol per probemi più semplici

	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$L_{0,n}(x)$	1	0	0	...	0

$L_{0,n}(x) = 0$

$L_{0,n}(x) = w_0 (x - x_1) \cdot (x - x_2)(\dots)(x - x_n) \qquad L_{0,n}(x_0) = 1$

$w_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n) = 1$

$$w_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$L_{0,n}(x) = \frac{(x - x_1)(x_1 - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$L_{1,n}(x)$	0	1	0	0	...	0

$L_{1,n}(x) = w_1 (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

$L_{1,n}(x_1) = 1 \qquad w_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots$

$$L_{1,n}(x_1) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x_1-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$\vdots$

$L_{n,n}(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1$

$(x_i, y_i)_{i=0,\dots,n}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_{i,n}(x)$$

I COEFFICIENTI SONO I DATI

POL. DI LAGRAN.

$\Downarrow$

COSTO COMPUT. E' ZERO

$$p(x_s) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L_{i,n}(x_s) = y_s \underbrace{L_{s,n}(x_s)}_{=1} = y_s$$

RISS. A CALCOLO VELOCE

PROB. INTERPOL

POL. IN BASE BERNSTEIN

BASE LAGRANGE

IL METODO DIPENDE DALL' APPLICAZIONE CHE VOGLIAMO NOI.