FUNZIONI POLINOMIALI : DATO $p(x) = a_0 + a_1 x \dots + a_n x^n$ — FORMA CANONICA — $\{1, x, \dots, x^n\}$ $x \in [a, b]$ — INTERVALLO

↳ CAMBIARE BASE DI RAPPRESENTAZIONE : $\{\ell_0(x), \ell_1(x), \dots \ell_n(x)\}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, \ell_i(x) \qquad x \in [a,b]$$

$^*E_{INERENT}$ → DIPENDE DAI DATI

↳ CAMBIO I DATI E HO ERR. NUMERICI PIÙ PICCOLI

$$E_{IN} \leq \sum_{i=0}^{n} |c_i||\varepsilon_i| + |c_x||\varepsilon_x|$$

→ i-SIMO DATO

$$c_i = \frac{b_i}{p(x)} \cdot \text{DERIVATA } \frac{\partial f(b_0, b_1, \dots, b_n)}{\partial b_i} \Rightarrow c_i = \frac{b_i}{p(x)} \cdot \ell_i(x)$$

$$c_x = \frac{x}{p(x)} \cdot p'(x)$$

BASE DI BERNSTEIN $[B_{i,n}(x) \quad i = 0, \dots n]$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) \qquad x \in [a, b]$$

→ VARIABILI

↳ POLINOMI DI GRADO n

COSTRUIRE UNA NUOVA BASE CON PROPRIETÀ → VANTAGGIO → E_{IN} MOLTO PICCOLO → BASE BUONA DAL PUNTO DI VISTA NUMERICO

LA BASE CANONICA — NON VA SEMPRE BENE.

P. VISTA NUMERICO

≠

P. VISTA ANALITICO

POL. → INTERESSANTI → PERCHÉ ?

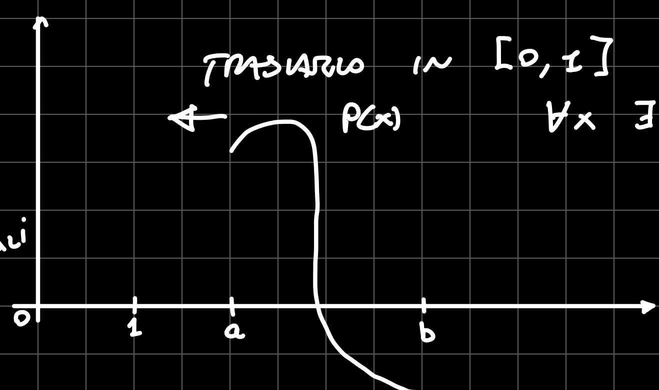
→ PER COMPLETARE IL POL. DI BER.

INTRODUZIO : CAMBIO DI VARIABILE

↳ $p(x) \quad x \in [a, b]$

COME SI FACEVA CON GLI INTERVALLI

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$



TRASLARLO IN $[0, 1]$

$\forall x \; \exists t$ t.c. $p(x) = p(t)$

FORMULE DI CAMBIO DI VARIABILE:

$$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad x = a + t(b-a)$$

DIFF. TRA CAMBIO DI BASE / CAMBIO DI VARIABILE ? → RIDURRE E_{IN} NELLA VALUTAZIONE POLINOMIALE

$$b_i \; B_{i,n}(x)$$

$$E_{IN} \simeq \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |c_i||\varepsilon_i|}_{\text{QUI CAMBIO DI BASE}} + |c_x||\varepsilon_x| \qquad c_x = \frac{x\,p'(x)}{p(x)}$$

QUI CAMBIO DI VARIABILE PK DIPENDE DA x

COME FUNZIONA LO SVILUPPO DI TYLOR

ESEMPIO : $p(x) = 100 - x \quad x \in [100, 101] \quad p(x) = 0(101-x) - 1(x-100)$ $\quad x \in [100, 101]$, $t \mid t \in [0,1]$

$$p(t) = 0(1-t) - 1 \cdot t = -t$$

COSA VUOL DIRE PERTURBARE?

FORMULA RICORRENTE PER LE FUNZIONI BASE DI BERNSTAIN IN $[0,1]$

→ POL. DI BERN.

$P_0 \quad B_{0,0}(x) = 1$

$P_1 \quad B_{0,1}(x), \; B_{1,1}(x)$

$P_2 \quad B_{0,2}(x), \; B_{1,2}(x), \; B_{2,2}(x)$

$\vdots$

$P_n \quad B_{0,n}(x), \; \dots, \; B_{n,n}(x)$

FORMULA IN $[0,1]$:

$$B_{i,n}(x) = x\,B_{i-1,n-1}(x) + (1-x)\,B_{i,n-1}(x)$$

CON $B_{0,0}(x) = 1$ (CASO BASE)

E CON $B_{i,n}(x) = 0 \quad \forall i \notin \{0, n\}$

QUESTA FORMULA, PK E' MEGLIO DI QUELLA PRIMA?

↳ COME POSSO FARE LA VALUTAZIONE NUMERICA?

ALG. 1 → 1° PASSO: CALCOLO DELLE FUNZIONI $[B_{0,n}(x) \dots B_{n,n}(x)]$

2° PASSO: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x)$

MANCA $B_{1,3}$ E $B_{3,3}$ → COEFF. = 0

ESEMPIO: $p(x) = 2B_{0,3}(x) + 2B_{2,3}(x) \quad x \in [0,1]$

$x = [0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1]$

$B_{0,0}(x) = 1$

$(1-x)$ x

$B_{0,1}(x) \quad B_{1,1}(x)$

$B_{0,2}(x) \quad B_{1,2}(x) \quad B_{2,2}(x)$

$B_{0,3}(x) \quad B_{1,3}(x) \quad B_{2,3}(x) \quad B_{3,3}(x)$

$\left.\begin{array}{l}(1-x) = | \\ x = \backslash\end{array}\right\}$? → E' VERO?

$$\text{MATRICE } B = \begin{array}{c|cccc} & B_{0,3} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 8/27 & 12/27 & 6/27 & 1/27 \\ 1/2 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 2/3 & 1/27 & 6/27 & 12/27 & 8/27 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

LO OTTENGO GRATIS DA 1/3 AL CONTRARIO

↳ MATRICE SIMMETRICA

NESSO?

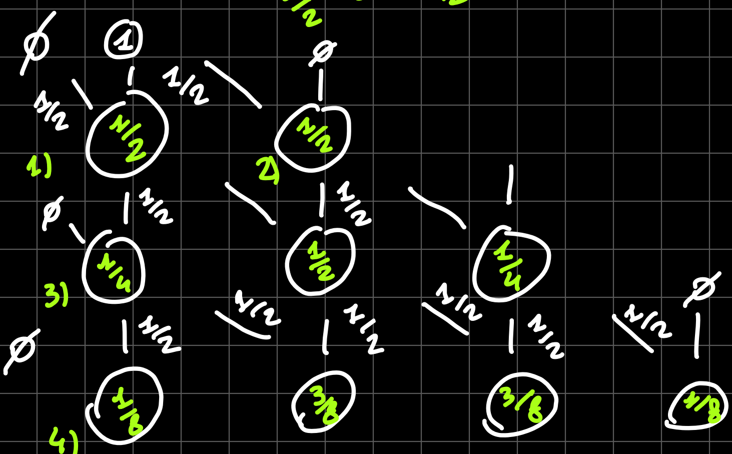
MATRICI?

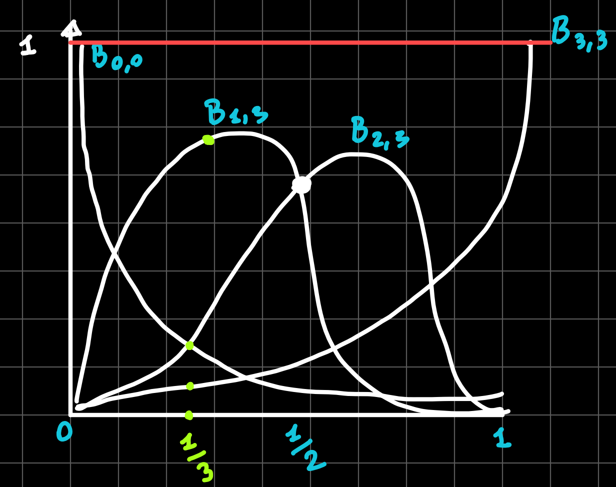
2) $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

1) $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$





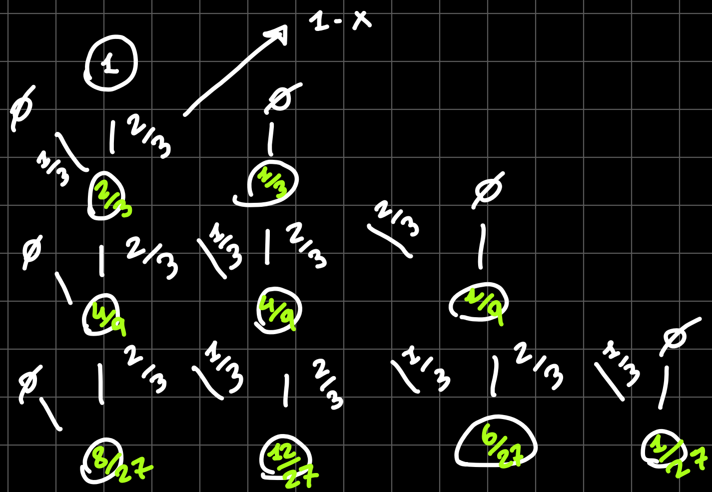
4) $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$$p(0) = \sum_{i=0}^{3} b_i B_{i,3}(0) =$$

$$= b_0 \underbrace{B_{0,3}(0)}_{=1}$$

$$= b_0$$

$x = \frac{1}{3}$



ALGORITMO DI VALUTAZIONE

$$\begin{pmatrix} P(0)\\ P(1/3)\\ P(1/2)\\ P(2/3)\\ P(1)\end{pmatrix} \equiv \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_{0,3} & B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3}\end{array}\\ \begin{array}{c} 0\\ 1/3\\ 1/2\\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 8/27 & 12/27 & 6/27 & 1/27\\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8\\ 1/27 & 6/27 & 12/27 & 8/27\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 2\\ \emptyset\\ 2\\ \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{3} b_i \, B_{i,3}(x)$$

COSA NON ABBIAMO DETTO $\Rightarrow$ COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE