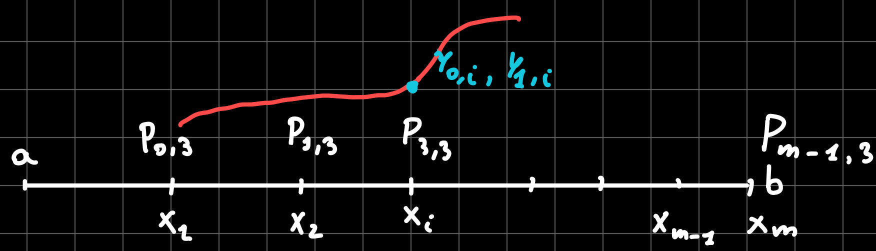
INTERPOLAZIONE A TRATTI (LINEARE, QUADRATICA, CUBICA)

DATI DI PARTENZA : $(x_i, y_{0,i}, y_{1,i})_{i=0,\dots,m}$



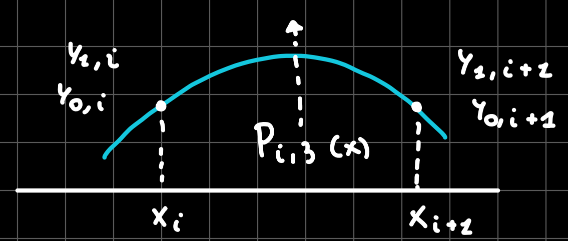
$$PPH(x) = \begin{cases} P_{0,3}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ P_{1,3}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ P_{m-1,3}(x) & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

$C^1_{[a,b]}$

$PPH(x_i) = y_{0,i} \quad i=0,\dots,n$

$PPH'(x_i) = y_{1,i} \quad i=0,\dots,n$

IL POLINOMIO SARÀ UNICO



$$P_{i,3}(x) = \sum_{j=0}^{3} C_{j,i} \, B_{j,3}(x)$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$\boxed{C_{0,i} = y_{0,i}}$ $\boxed{C_{3,i} = y_{0,i+1}}$

2 DI 4 LI CONOSCO ORA

$$P'(x) = \sum_{j=0}^{2} \frac{3}{x_{i+1} - x_i} (C_{j+1,i} - C_{j,i}) B_{j,2}(x)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

$$P'_{i,3}(x_i) = \frac{3}{h_i}(C_{1,i} - \underset{\overset{\|}{y_{0,i}}}{C_{0,i}}) = y_{1,i} \qquad P'_{i,3}(x_{i+1}) = \frac{3}{h_i}(\underset{\overset{\|}{y_{0,i+1}}}{C_{3,i}} - C_{2,i}) = y_{1,i+1}$$

$$\boxed{C_{1,i} = y_{i,0} + \frac{h_i}{3} y_{i,1}} \qquad \boxed{C_{2,i} = y_{i+1,0} - \frac{h_i}{3} y_{i+1,1}}$$

VA FATTO PER OGNI TRATTO.

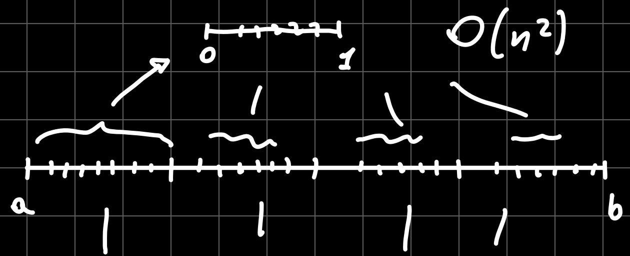
SPOSTIAMOCI DA INTERVALLI $[x_i, x_{i,1}]$ IN $[0,1]$; LE DERIVATE CAMBIANO DI UNO SCALARE CHE DIPENDONO DALL'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO

$$\forall [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow [0,1] \qquad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$x \longrightarrow t$$

$P_{i,3}(t) \quad t \in [0,1]$

$(0, y_{i,0}, h_i y_{i,1}) \; (1, y_{i+1,0}, h_i y_{i+1,1})$



COMB. LINEARE

$\Sigma \quad \Sigma \quad \Sigma \quad \Sigma$

$O(n) \quad O(n) \quad O(n) \quad O(n)$

$f(x) \quad x \in [a,b] \qquad PPH(x) \qquad (x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i=0,\dots,m}$

$$|f(x) - PPH(x)| < TOL$$

VOGLIAMO COMBATTERE L'INFLESSIBILITA' AGGIUNGENDO LA REGOLARITA' CHE SERVE

STIMARE L'ERRORE: VUOL DIRE CAPIRE IN QUANTI PUNTI DEVO VALUTARE IL POLINOMIO PERCHE' IL POLINOMIO CHE RAPPRESENTA LA CURVA SIA < TOL

Th: SIA $f(x) \in C^4_{[0,4]}$, ALLORA

$$|f(x) - PPH(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 \max_{a \leq z \leq b} |f^{(4)}(z)| \quad \#$$

$$h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$$

↳ MASSIMA AMPIEZZA

x_i

$$\max_{a \leq z \leq b} |f^{(4)}(z)| \leq M$$

↓

QUANTI INTERVALLI PRENDERE

$$|f(x) - PPH(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 M < \varepsilon$$

ESEMPIO $\quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$

$$|f^{(4)}(z)| \leq 25$$

$$\frac{1}{384} h^4 \cdot 25 < \varepsilon = 10^{-3}$$

$$h \leq 0.352 \qquad h = \frac{b-a}{m}$$

$$m = \frac{10}{h} = \frac{10}{0.352} = 28.4091 \qquad m = 29$$

↳ PUNTI DA VALUTARE

CONFRONTO TRA INT. POL. E INT. POL. A TRATTI

CHIUSO L'ARGOMENTO DI INTERPOLAZIONE

NUOVO ARG. = INTEGRAZIONE NUMERICA

CALCOLARE / RISOLVERE L'INTEGRALE

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

→ NECESSITA CHE CONOSCIAMO LA PRIMITIVA

↓ ANALITICAMENTE NON SEMPRE SI PUO' PROCEDERE

↓ NUMERICAMENTE SI.

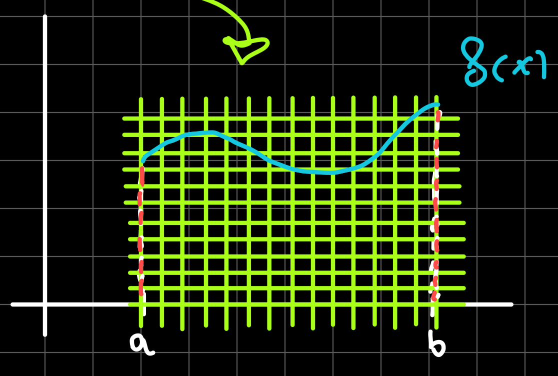
ES (ANALITICAMENTE NON SI TROVA, NUM. SI)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx$$

FORMULE DI QUADRATURA

→ FORME PER RISOLVERE NUMERICAMENTE L'INTEGRALE

DATA UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO DETERMINARE L'AREA



SI LEGA ALL' INTERPOLAZIONE PERCHE':

IDEA BASE

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P(x)\,dx$$

→ SE SO RICOSTRUIRE IL POLINOMIO, ALLORA

↓ POLINOMIO CHE INTERPOLA $f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int^b P(x)\,dx + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{più piccolo} \\ \text{possibile}}}{R} \Rightarrow \text{Formule di quadratura interpolatorie}$$

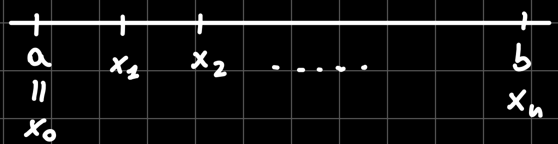
$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_{i,n}(x) \quad \text{con} \quad L_{i,n}(x) = \frac{\prod_{s=0,\, s\neq i}^{n} (x - x_s)}{\prod_{s=0,\, s\neq i}^{n} (x_i - x_s)}$$

Formule di Quadratura di Newton - Cotes

$$L_{i,n}(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ \emptyset & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$f(x) \quad x \in [a, b]$

* Punti Equispaziati



$$x_i = a + i \cdot h$$

$$\text{con } h = \frac{b-a}{n} \quad \text{per } i = 0, \dots, n$$

Interpolo $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{i,n}(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_{i,n}(x)\,dx}_{w_i}$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, w_i} \quad \text{Formula di quadratura}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x = a + ht \qquad t = \frac{x-a}{b-a} \cdot n$$

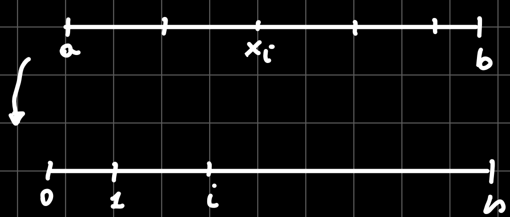
$$x \longrightarrow t$$

Es

Cambio di variabile da intervallo $[a, b]$ a $[0, n]$

$$w_i = \int_a^b L_{i,n}(x)\,dx \overset{!}{=} \int_a^b \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq i}}^{n} \frac{x - x_s}{x_i - x_s}\,dx$$

Mappatura punti di interpolaz.



$$= h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\cancel{\alpha} + ht - \cancel{\alpha} - h_j}{\cancel{\alpha} + h_i - \cancel{\alpha} - h_j}\, dt = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}} \frac{t-j}{i-j}\, dt$$

Caso $n=1$ (Forma di Quadratura dei Trapezi)

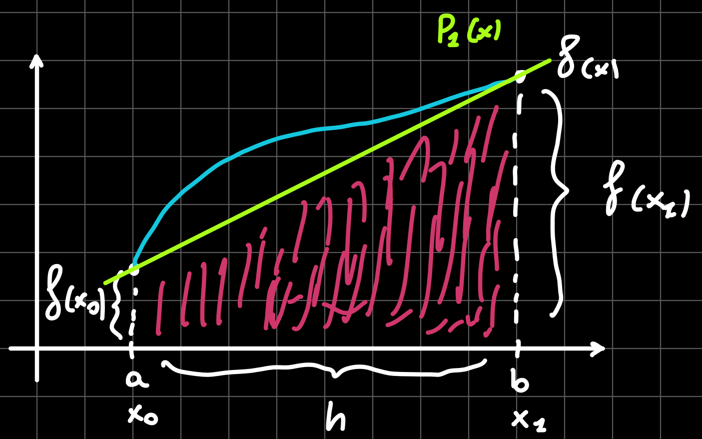
↳ formula del trapezio

$$w_0 = h\int_0^1 \frac{t-1}{0-1}\, dt = \int_0^1 (-t+1)\, dt = \frac{1}{2}$$

$$w_1 = h\int_0^1 \frac{t-0}{1-0}\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq f(x)\, w_0 + f(x)\, w_1 = f(x_0)\,\frac{1}{2}h + f(x_1)\,\frac{1}{2}h$$

$$= \frac{\overset{b-a}{h}}{2}\left(f(x_0) + f(x_1) \right)$$



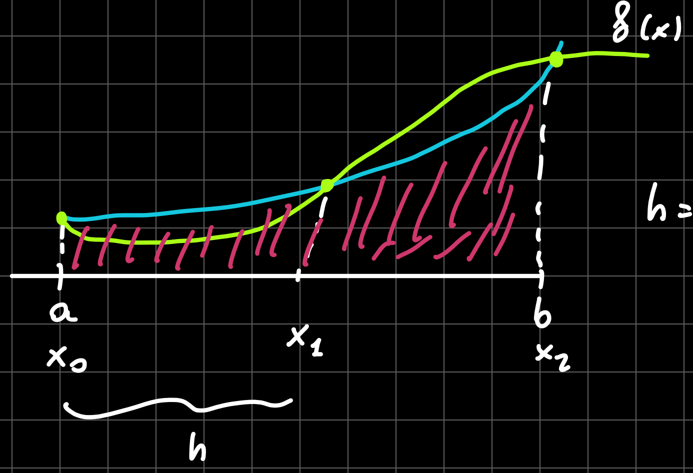
Caso $n=2$ (Formula di Quadratura di Simpson)

$$w_0 = h\int_0^2 \frac{(t-1)}{(0-1)} \cdot \frac{(t-2)}{(0-2)}\, dt = h\int_0^2 (t^2-3t+2)\, dt = \frac{1}{3}h$$

$$w_1 = h\int_0^2 \frac{(t-0)}{(1-0)} \cdot \frac{(t-2)}{(1-2)}\, dt = h\int_0^2 (t^2-2t)\, dt = \frac{4}{3}h$$

$$w_2 = h\int_0^2 \frac{(t-0)}{(2-0)} \frac{(t-1)}{(2-1)} dt = h\int_0^2 (t^2-t)\,dt = \frac{1}{3}h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$



$$h = \frac{b-a}{2}$$

ESEMPIO : $\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \boxed{0.746824....}$

TRAPEZI : $\int_0^1 e^{-x^2}dx \simeq \frac{h}{2}\left(e^0 + e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + 0.36789...\right) = \boxed{0.683939}$

SIMPSON:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \simeq \frac{h}{3}\left(e^0 + 4e^{-1/4} + e^{-1}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + 4\cdot 0.778801 + 0.36789\right) =$$

$$= 0.747180$$

AUMENTANDO GLI "h" SI HA UN RISULTATO SEMPRE PIU' PRECISO !!!

STIMA DELL' ERRORE PRIMA DEL CALCOLO:
↳ PARTENDO DALL' ERRORE DI INTERPOLAZIONE

ERRORE FORMULA DEI TRAPEZI : $R = -\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\eta) \quad \eta \in (a, b)$

NOTA %

ERRORE DI SIMPSON : $R = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$

$h = \frac{b-a}{2}$

TRAPEZI : SE USO POL. DI GRADO 1, L'INTEGRALE E' ESATTO

SIMPSON : SE USO POL. DI GRADO 1, 2, 3, L'INTEGRALE E' ESATTO

n DISPARI → TRAPEZI

n PARI → SIMPSON