Input → guess o intervallo

* Metodo di bisez. convergenza globale

converge sempre ma è lento

↱ calcolo della derivata costosa o impossibile

Metodo delle secanti

Idea: sostituire la $f'(x)$ con la sua approssimazione è il rapp. increm. $\dfrac{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}{x^{(k)}-x^{(k-1)}}$

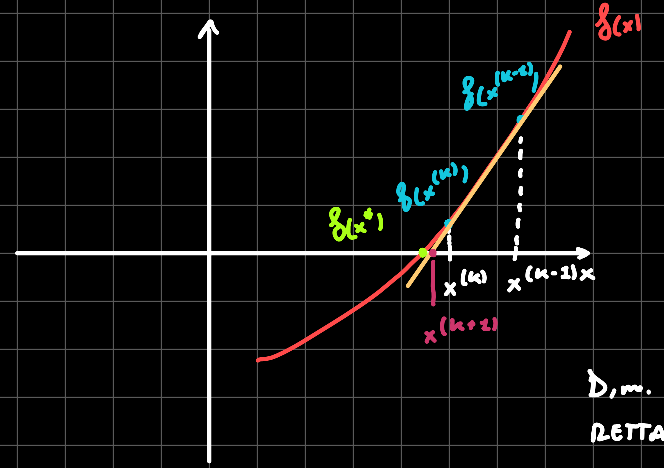
Con Newton era: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

↑ parte da $x^{(0)}$

↳ Metodo secanti: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})} \cdot (x^{(k)} - x^{(k-1)})$

si parte da $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ due punti → val. di innesco del metodo.

Interpret. geom.:



Passi → prendi la retta per i due punti e interseca in x, l'interes. diventa il nuovo val. approssimato della funzione.

Dim.

retta per $f(x_1)$ e $f(x_2)$

$$r(x) = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

sostit. $x_1 \to x^{(k-1)}$, $x_2 \to x^{(k)}$

Pongo $r(x) = 0$ (calcolo x^* t.c. $r(x^*) = 0$ $\quad x^* \leftarrow x^{(k+1)}$

perché $f''(x^*) \neq 0$?

Teorema: Sia $f \in C^2_{[a,b]}$, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$, allora $\exists\, [x^* - \rho, x^* + \rho]$ t.c. se $x^{(0)}$ e $x^{(1)} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, il metodo delle secanti converge a x^* e sia che la velocità di conv. è data dalla relazione:

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq \gamma\, |x^{(k)} - x^*|^p \qquad p \simeq 1.618, \ \forall k \geq K$$

↳ velocità di convergenza minore rispetto a Newton (Newton vel. conv = 2)

Risoluzione numerica di eq non lin.

Intervallo iniziale
- Bisez.
- Falsa posiz. (Regola falsi)

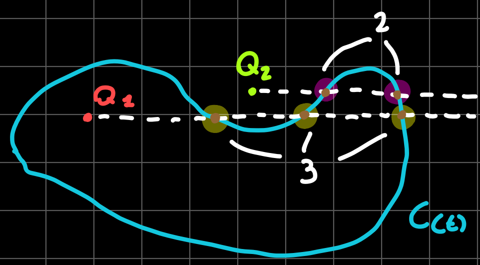
Convergenza globale (sotto opportune ipotesi)
[convergono sempre]

Punto iniziale
- Punto fisso
  - Newton
  - Secanti

Conv. locale
(sotto opp. ipotesi sulla funz.)
(convergono se punto iniz. appropriato)

→ alla grafica nel nostro caso

Applicazioni: determinare se un punto è interno o esterno alla curva (chiusa)



Punto Q_1 → interno → intersezioni con la curva dispari
Punto Q_2 → esterno → intersezioni con la curva pari

Se il num. di intersez. di una semiretta per il punto è
- dispari → interno
- pari → esterno

è sufficiente confrontare le semirette orizzontali.

retta → forma cartesiana → eq. 1° grado (nel piano)

$$C(t) = (x(t), y(t)) = (c_1, c_2)$$

$$r = ax + by + c = 0$$

Per trovare l'intersez. deve soddisfare le cond. della curva e della retta:

$$a\,c_1(t) + b\,c_2(t) + c = 0$$ * deve essere sodd.

Essendo che lavoriamo con curve nella base di Bernstein:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad (t \in [0,1]) \qquad P_i = (x_i, y_i)$$

$t \in [0,1]$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i B_{i,n}(t)}_{C_1(t)} , \underbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i B_{i,n}(t)}_{C_2(t)} \Big)$$

$$* \Rightarrow \quad a \sum_{i=0}^{n} x_i B_{i,n}(t) + b \sum_{i=0}^{n} y_i B_{i,n}(t) + c = 0$$

$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = 1$ (PARTIZIONE DELL'UNITÀ)

$$\sum_{i=0}^{n} a x_i B_{i,n}(t) + b y_i B_{i,n}(t) + c B_{i,n}(t) = 0$$

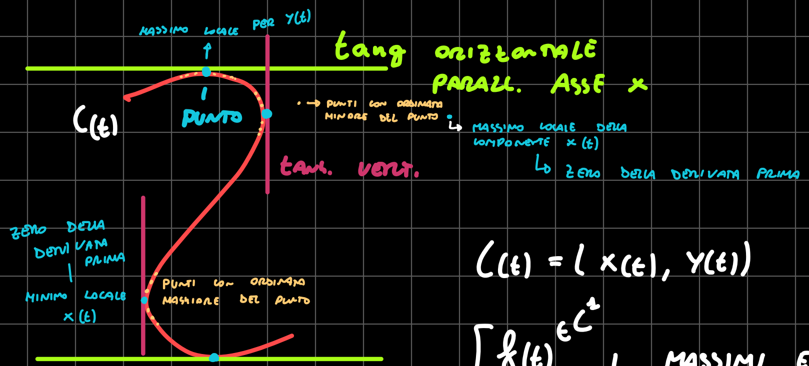
$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a x_i + b y_i + c) B_{i,n}(t) = 0}$$

ZERI DI UN POL. DI GRADO n

POLINOMIO DI GRADO n NELLA BASE DI BERNSTEIN CON COEFF $\underbrace{a x_i + b y_i + c = 0}_{\text{EQ. NON LIN.}}$

PUNTI ESTREMI DI UNA CURVA (PUNTI TANGENTE ORIZZ. O VERTICALE)

PRESA UNA CURVA :



$C(t) = (x(t), y(t))$

[$f(t) \in C^1$ I MASSIMI E MINIMI LOCALI SONO GLI ZERI DELLA DERIVATA PRIMA]

TANGENTE VERTICALE SONO I P.TI t.c. $\boxed{x'(t) = 0 \quad y'(t) \neq 0}$ → P.TI A TAN. VERT.

TANGENTE ORIZZONTALE SONO I P.TI t.c. → $x'(t) \neq 0 \quad y'(t) = 0$

CURV. NELL. BASE DI BERNST.

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

$$C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n (P_{i+1} - P_i) B_{i,n-1}(t)$$

$$= \Big(\sum_{i=0}^{n} n (x_{i+1} - x_i) B_{i,n-1}(t), \sum_{i=0}^{n} n (y_{i+1} - y_i) B_{i,n-1}(t) \Big)$$

$x'(t)$ $\qquad$ $y'(t)$

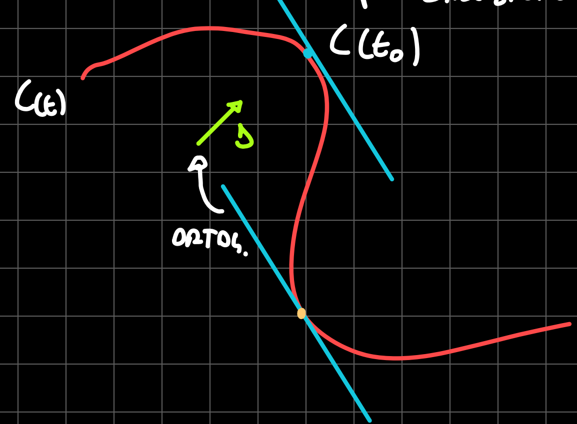
$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \quad , \; t \in [a,b]$$

$$C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{(b-a)} (P_{i+1} - P_i) \; B_{i,n-1}(t)$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{(b-a)} (x_{i+1} - x_i) B_{i,n-1}(t)}_{x'(t)} \; , \; \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{(b-a)} (y_{i+1} - y_i) B_{i,n-1}(t)}_{y'(t)} \Big)$$

SIMILE, PUNTI ESTREMI IN UNA DIREZIONE ASSEGNATA $D = (d_x, d_y)$

↑ → DIREZIONE → $C'(t_0)$



$C'(t) \cdot D = 0$ $\quad$ ($v \perp w$ QUANDO $\underbrace{v \cdot w}_{\text{PROD. SCAL.}} = 0$)

$v = (v_x, v_y)$, $\quad w = (w_x, w_y)$

$v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y = 0$

$C(t) = (x(t), y(t)) \qquad C'(t) = (x'(t), y'(t))$

$* \Rightarrow \quad x'(t)\, d_x + y'(t)\, d_y = 0$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \, B_{i,n}(t) \quad , \; P_i = (x_i, y_i) \qquad t \in [0,1]$$

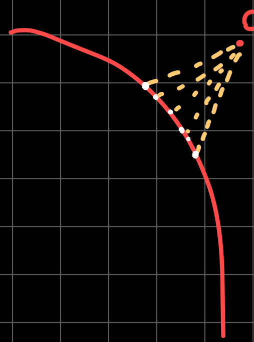
$$C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \, (P_{i+1} - P_i) \; B_{i,n-1}(t)$$

$$x'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \, (x_{i+1} - x_i) \, B_{i,n-1}(t) \qquad y'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \, (y_{i+1} - y_i) \, B_{i,n-1}(t$$

$$\Rightarrow d_x \sum_{i=0}^{n-1} n\cdot(x_{i+1}-x_i)\, B_{i,n-1}(t) + d_y \sum_{i=0}^{n-1} n\cdot(y_{i+1}-y_i)\, B_{i,n-1}(t)$$

$$\underbrace{n\sum_{i=0}^{n-1}\left[d_x(x_{i+1}-x_i)+d_y(y_{i+1}-y_i)\right] B_{i,n-1}(t)}_{\text{Pol. di grado } n-1} = 0$$

Distanza tra un punto e una curva :



→ segmen. lunghezza minima ?

$C(t)$

$C(t)$

Diret. vett. tra $C(t)$ e Q

↑

Vettore $C(t)$ e Q e' $(C(t) - Q)$

$C'(t)$

↳ direzione retta tangente

Pol. di grado n

Cond. di ortogonalità (prod. scalare = 0) = $(C(t) - Q) \cdot C'(t) = 0$ ← radici di un pol. di grado $n\cdot(n-1)$

Pol di grado $n-1$

1) Determinare tutti gli zeri di un polinomio di grado n

2) Determinare tutti gli zeri di un polinomio di grado n nella base di Bernstein. Lang Riesenfeld

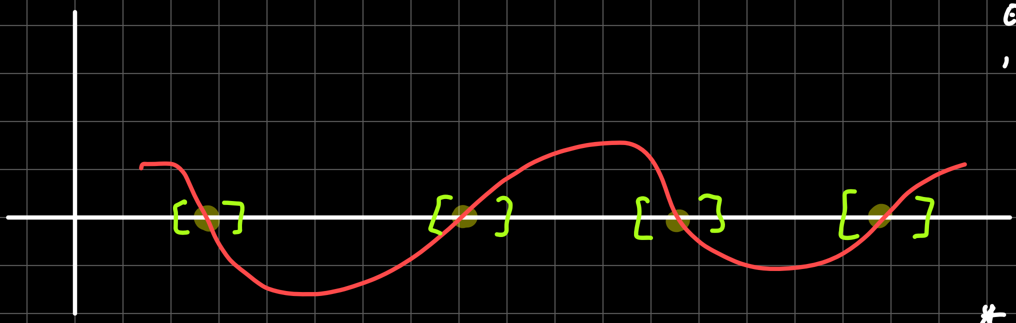
X Lab $f(x)$ → zeri

POL. DI GRADO n

Th. FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA: SE $p \in \mathbb{P}_n$ (POLINOMI DI GRADO $\leq n$) HA n RADICI REALI O COMPLESSE.

SE p HA COEFFICIENTI REALI E UNA RADICE COMPLESSA (NUMERO COMPLESSO $a + ib$, $b \neq 0$) ALLORA LA COMPLESSA CONIUGATA $(a - ib)$ SARA' UNA RADICE.

RADICI AL PIU' n
→ COMPLESSI
→ COINCIDENTI
→ NORMALI (SINGOLI)



* SI ISOLANO LE RADICI E POI SI APPLICANO I METODI

* FUNZ. DI MATLAB ROOTS

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

ROOTS (COEFF. DEL POL IN ORDINE DECRESCENTE)

ROOTS = ([a, b, c, d])