$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_1\, x_2 \to f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}$ ALG. 1

$x_1 \geq 0$

$x_1 + x_2 \geq 0$

* $E_{TOT\ FINALE} = E_{IN} + E_{ALG}$

* $\mathbb{F}(10, 7, \lambda, \omega)$

$$E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \simeq |c_1||\varepsilon_1| + |c_2||\varepsilon_2| \qquad c_i = \frac{x_i}{f(x_i)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_1}{x_1 + x_2}} \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{x_1}{x_1 + x_2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_1+x_2}} = \frac{1}{2} - c_1$$

RAZIONALIZZAZIONE:

$$\left(\sqrt{x_1 + x_2} - \sqrt{x_1}\right) \frac{\sqrt{x_1+x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{\cancel{x_1} + x_2 - \cancel{x_1}}{\sqrt{x_1+x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1+x_2} + \sqrt{x_1}}$$

ALG 2

Caso 1:

$x_1 = 0.1 \cdot 10^1$

$x_2 = 0.1 \cdot 10^{-3}$

$f(x_1, x_2) = 0.4999875 \cdot 10^{-6}$

$ALG_1 = 0.4994869 \cdot 10^{-6}$ INSTABILE

$ALG_2 = 0.4999875 \cdot 10^{-6}$ STABILE

$c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_2 \simeq 1$

* Gli algoritmi non sono sempre stabili

Caso 2:

$x_1 = 1$

$x_2 = -0.999999 = -1 + 10^{-6}$

$f(x_1, x_2) = -0.999$

ALG. 1 $= -0.9985858$

ALG. 2 $= -0.9985858$

Algoritmi risultati sbagliati

$c_1 \simeq c_2 \simeq \frac{1}{2} 10^3$ MAL CONDIZIONATO

Esempio (problema): $ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

Sia: $a = 1$, $b = -10^5$, $c = 1$

$\mathbb{F}(10, 7, \lambda, \omega)$

Esatti:

$X_1 \simeq 10^5$
$X_2 \simeq \frac{1}{10^5}$

Calcolati:

$x_1 \simeq 10^5$
$X_2 = \emptyset$

* Errore di assorbimento

* La (2) e' un problema

Formule alternative:

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (3)$$

$$x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (4)$$

Risultato piu' corretto rispetto a (2)

Parlato di errore numerico ($E_{REL} + E_{ALGORIT.}$), parliamo ora dell'errore analitico:

Sia il seguente problema:

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \underbrace{f(x)}_{\text{funzione non razionale}} = \sin(x)$! il calcolatore calcola sviluppo di Taylor $\simeq P(x)$

funzione non razionale $\simeq$ funzione polinomiale

produce l'errore analitico

Quando e' grande e quando e' piccolo?

* Metodo in avanti: ripercorrere tutti i passi

* Il calcolatore lavora solo con funzioni polinomiali.

Def. Errore Analitico

Sia $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non razionale, allora e sia $f(x)$ una sua approssimazione razionale, allora:

$$E_{ANAL} = \left| \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} \right|$$ si dice errore analitico

$$E_{TOT} \simeq E_{ANAL} + E_{IN} + E_{ALG.}$$

* $\sin(x) \to ?$
$\cos(x) \to ?$
$\tan(x) \to ?$
Funz. polinom. quali sono?

$\nearrow$ FUNZIONI COMPUTABILI DAL CALCOLATORE

PRENDERE E STUDIARE LE FUNZIONI POLINOMIALI:

DEF. UNA FUNZIONE p DEFINITA $\forall x \in \mathbb{R}$ DA $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ DOVE n E' UN NUMERO INTERO NON NEGATIVO, $a_0, a_1, \dots, a_n$ SONO N° REALI CHE $\in \mathbb{R}$, E' DETTO POLINOMIO.

- FUNZIONI POLINOMIALI A VARIABILE REALI
- FUNZIONI POLINOMIALI A VARIABILE NON REALI

$\Big\}$???

SPAZIO VETTORIALI DI POLINOMI P_n, SPAZIO DI FUNZIONI DI DIMENSIONE $n+1$

$\hookrightarrow$ BASTA TROVARE $n+1$ FUNZ. POLIN. $\in P_n$ LIN. IND. OGNI FUNZIONE DI QUESTO SI SPAZIO SI PUO' SCRIVERE COME COMB. LIN. $n+1$ FUNZ. POLINOM. ($n+1$ E' LA BASE)

Th. SIA $p(x)$ UN POLINOMIO DI GRADO $n \geq 1$, OGNI EQUAZIONE ALGEBRICA (EQ. UGUAGLIATO A ZERO, ES $p(x) = 0$) DI GRADO n HA ESATTAMENTE m RADICI REALI O COMPLESSE, CIASCUNA CONTATA CON LA SUA MOLTEPLICITA'; CIOE':

ESPRESSO COME

$$p(x) = a_n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot (x - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{m_n}$$

DOVE λ_i $i = 1, -k$ SONO LE RADICI DISTINTE E m_i $i = 1, -k$ SONO LE MOLTEPLICITA' TALE CHE LA SOMMA DELLE MOLT. DIA $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$

SEMPRE n RADICI!

QUESTO Th CI DA' UN'ALTRO MODO DI SCRIVERE I POLINOMI.

Th. (DEL RESTO): SIANO $a(x)$ E $b(x)$ POLINOMI CON $b(x) \neq 0$ (NON E' POLINOM. NULLO), ALLORA ESISTONO E SONO UNICI I POLINOMI $q(x)$ E $r(x)$ PER QUI VALE CHE

$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$ CON $r(x) = 0$ O $r(x)$ CON GRADO MINORE DI $b(x)$

(SE HO DUE POL. E VOGLIAMO FARE LA DIVISIONE, ESISTE SEMPRE UN POL. QUOZIENTE E UN POLINOM. $r(x) = 0$ OPPURE GRADO MINORE DI $b(x)$)

SIAMO INTERESSATI A LAVORARE CON I POLINOMI!!!

(Valutazione Numerica di un calcolatore di un Polinomio)

1° Prob. → Come Valutarli (come det. il valore del polinomio)

↳ ovvero, dato / assegnato un polinom. $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$\text{Dati} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \bar{x}\} \quad x = \bar{x}$$

Risultato: $p(\bar{x})$

Ho capito? (A cosa serve questo)

↳ dati dei numeri: $P(x) = 3 + 2x^2 + 2{,}10\,x^3$ per $\bar{x} = 7.5$ $\quad P(\bar{x}) = ?$

↳ E_{IN} ?

↳ E_{ALG} ?

↳ E_{ANAL} ? (c'è o non c'è)

↳ E numerico ?

Algoritmo per risolvere ?

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n \cdot x^n, \quad P(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}_{\text{Questo è l'algoritmo}}$$

Algoritmo

$s \leftarrow 1$

$p \leftarrow a_0$

per $K = 1$ fino a n

  $s \leftarrow s \cdot \bar{x}$

  $p \leftarrow p + a_k \cdot s$

$P(\bar{x}) = p$

calcolo → * Complessità Computazionale: contare il n° di op. elem. fatte.

↳ $n + 2n$ (addiz. : n, molt. : $2n$)

Possiamo scrivere un algoritmo più economico: Metodo / Algoritmo di Horner

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$$

$$= a_0 + x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1})$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3x + \dots + a_nx^{n-2}))$$

$$\vdots$$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n)))$$

Scritto : (Algoritmo 2)

$p \leftarrow a_n$

per k da $n-1$ fino a 0

$p = a_k + p \cdot \bar{x}$

$p(\bar{x}) = p$

*Complessità = n addi/sott.

n molt./div.

Vi sono più algoritmi ...... (c'è ne sono altri)