Funzioni Polinomiali: uniche funzioni matematiche computabili

→ Pol. in forma canonica (o in base canonica)

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ → computabili con buona precisione

P_n → spazio, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ base canonica

$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_k)^{m_k}$

$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$

Valutazione Polinomiale → valutare numericamente un polinomio, significa, dati $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ e $\bar{x}$ risultato $p(\bar{x})$.

1) * **Metodo dalla forma canonica**

2) * **Metodo/Algoritmo di Horner** → compx computazionale leggermente minore A

3) * **Metodo ....**

↳ Partiamo da $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$

* **Metodo di Ruffini**: divisione tra polinomio e binomio.

$p(x) \quad \bar{x} \to p(\bar{x})$

↓

$b(x) = (x - \bar{x})$

↓

$p(x) = q(x)\,(x - \bar{x}) + r(x)$

↓

$p(x) = q(x)\,(x - \bar{x}) + r$

↓

$$p(\bar{x}) = q(\bar{x}) \cdot \overbrace{(\bar{x} - \bar{x})}^{q(x) \cdot 0 = 0} + r = r$$

MA STESSO CODICE

↑

DIVERSI

Metodo Ruffini **Metodo Orlan**

Metodo Ruffini Orlan

Metodo Ruffini

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$(x - \bar{x})$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_0 \\
 & & & & \\
\bar{x} & & \bar{x} b_n & \bar{x} b_{n-1} & x b_1 \\
\hline
 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & r
\end{array}$$

$b_n \leftarrow a_n$

$b_{n-1} \leftarrow a_{n-1} + \bar{x} \cdot b_n$

$b_{n-2} \leftarrow a_{n-2} + \bar{x} \cdot b_{n-1}$

$\vdots$

$r \leftarrow a_0 + x \cdot b_1$

$$\left\{\begin{array}{l}
p \leftarrow a_n \\
p \leftarrow a_{n-1} + \bar{x} \cdot p \\
p \leftarrow a_{n-2} + \bar{x} \cdot p \\
\vdots \\
r \leftarrow a_0 + \bar{x} \cdot p
\end{array}\right.$$

$p \leftarrow a_n$

per $k = n-1, \dots, 0$

$\quad p \leftarrow a_k + \bar{x} \cdot p$

$p(\bar{x}) \leftarrow p$

Esempio numerico:

$p(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^4$; $\bar{x} = 2$

$p(2)$ $p'(2)$

	3	0	-2	1	1	
$\bar{x}$ = 2		6	12	20	42	
	3	6	10	21	43	$= p(2)$

	3	6	10	21	
2		6	24	68	
	3	12	34	89	$= p'(2)$

Valutazione numerica derivata di un polinomio

Valutare la derivata di un polinomio:

$$p(x) = \overbrace{q(x) \cdot (x-\bar{x})}^{\text{derivata del prodotto}} + r$$

$$p'(x) = q'(x)(x-\bar{x}) + q(x) \cdot \overbrace{(x-\bar{x})'}^{1}$$

$$p'(x) = q'(x)(x-\bar{x}) + q(x)$$

$$p'(x) = \underbrace{q'(\bar{x})(\bar{x}-\bar{x})}_{0} + q(\bar{x})$$

$$p'(x) = q(\bar{x})$$

↳ È possibile trovare TUTTE le derivate.

1. Siano i 3 algoritmi, qual'è quello più affidabile? 2. Errore inerente?

Valutazione polinomiale: 1

↳ E_{ALG} di Ruffini / Horner (analisi in avanti) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ $\bar{x}$

Sia $f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ } questo è il problema posto

* n addizioni e n moltiplicazioni

$$\underbrace{a_0}_{1}, \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{n}, \underbrace{\bar{x}}_{1} = n+2 \to f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{x}) = p(\bar{x}) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots x(a_{n-1} + x a_n)$$

$$E_{ALG} = \left| \frac{\tilde{f}(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{\bar{x}}) - f(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{\bar{x}})}{f(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{\bar{x}})} \right|$$

$$= \left| \frac{\tilde{p}(\tilde{x}) - p(\tilde{\bar{x}})}{p(\tilde{\bar{x}})} \right| \leq \frac{\overbrace{\gamma_{2n}}^{\text{costante}}}{|p(\tilde{\bar{x}})|} \cdot \sum_{i=0}^{n} |\tilde{a}_i \cdot \tilde{\bar{x}}^i|$$

val assoluto

con $\gamma_{2n} \leq \overbrace{2.01}^{\text{circa } 2} \cdot n \cdot u$

se vero → algoritmo perfetto

Coeff. pos. → no errore algoritmico

Se $\tilde{\bar{x}}$ è vicino a zero possiamo avere un errore grave!

ES:

Provare a calcolare l'errore algoritmico con l'analisi in avanti: ricavare E_{ALG} per $p(x) = a_0 \overset{\varepsilon_2}{+} a_1 \overset{\varepsilon_1}{\cdot} x$ con Ruffini / Horner mediante l'analisi in avanti. Una volta trovato, riscriverlo nella forma:

$$\frac{\gamma_{2n}}{|p(\tilde{x})|} \cdot \sum_{i=0}^{m} |\tilde{a}_i \cdot \tilde{x}^i|$$

Opinione personale: potrebbe essere domanda d'orale

---

(2) E_{IN} nella valutazione polinomiale:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{x}) - f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{x})}{f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)} \right|$$

$$\simeq \left| \sum_{i=0}^{n} c_i \varepsilon_i + c_x \varepsilon_x \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |c_i||\varepsilon_i| + |c_x||\varepsilon_x|$$

$|\varepsilon_i|, |\varepsilon_x| < u$

derivata parziale

$$c_i = \frac{a_i}{f(a_0, a_1, \dots, a_n, \bar{x})} = \frac{\partial f(a_0, a_1, \dots, a_n, \bar{x})}{\partial a_i} = \frac{a_i}{p(\bar{x})} \cdot \bar{x}^i$$

$$c_x = \frac{a_x}{f(a_0, a_1, \dots, a_n, \bar{x})} = \frac{\partial f(a_0, a_1, \dots, a_n, \bar{x})}{\partial x} = \frac{\bar{x}}{p(\bar{x})} \, p'(\bar{x})$$

Cambio base se E_{IN} è troppo grande. Analiticamente una base è uguale ad un'altra; numericamente sono diverse.

Esercizio: Analisi in avanti, si determini l'errore inerente E_{IN} nella valutazione di $p(x) = a_0 + a_1 x$.

Esempio numerico: $p(x) = 100 - x \qquad x \in [100, 101]$

$$p(x) = a_0 + a_1 x \rightarrow \begin{aligned} a_0 &= 100 \\ a_1 &= -1 \\ \bar{x} &= 101 \end{aligned}$$

ma posso anche calcolarlo esattamente

stima errore inerente

$$E_{IN} \leq \left| \frac{a_0}{a_0 + a_1 x} \right| |\varepsilon_0| + \left| \frac{a_1}{a_0 + a_1 x} x \right| |\varepsilon_1| + \left| \frac{x}{a_0 + a_1 x} a_1 \right| |\varepsilon_x|$$

$$= \boxed{\left|\frac{100}{100-101}\right|}^{100} |\varepsilon_0| + \boxed{\left|\frac{-1}{100-101}\,101\right|}^{100} |\varepsilon_1| + \boxed{\left|\frac{101}{100-101}\right|}^{101} |\varepsilon_x|$$

* Piccola perturbazione, il problema produce un errore di 100 volte.

Perturbiamo uno dei dati, per es a_1 di $\frac{1}{100}$

$$\left|\frac{\tilde{a}_1 - a_1}{a_1}\right| = \frac{1}{100}$$

$$\tilde{a}_1 = \pm \frac{1}{100} a_1 + a_1$$

$$p(x) = 100 - x$$

$$\underbrace{q(x)}_{\text{pol. perturbato}} = 100 - \left(1 - \frac{1}{100}\right)x = 100 - \frac{99}{100}x$$

Per $x = 101 \Rightarrow p(101) = -1$, $q(101) = 0.01$

pol. perturbato

$$\left|\frac{q(101) - p(101)}{p(101)}\right| = \left|\frac{0.01 + 1}{-1}\right| = 1.01 = 101 \cdot \frac{1}{100}$$

Per $\bar{x} = 100.5 \Rightarrow p(100.5) = -0.5$

$q(100.5) = 0.505$

$$\left|\frac{q(100.5) - p(100.5)}{p(100.5)}\right| = \left|\frac{0.505 + 0.5}{0.5}\right| = 2.01 = 201 \cdot \frac{1}{100}$$

Indroduzione del problema:

Cercare quindi una base ottimale da punto di vista numerico

dimostra il problema di Weierstrass ?

$\underbrace{\text{Bernstein}}_{\text{base ottima dal punto di vista num.}}$ $\Rightarrow$ dato $f(x)$ si puo' approssimare ad un polinomio

$$|\underbrace{f(x)}_{\text{continua}} - p(x)| < \varepsilon \qquad x \in [a,b] \quad \Rightarrow \text{Weierstrass}$$