Fattorizzazione LU di una matrice:

OBIETTIVO: $\boxed{A = LU}$ → (fattorizzazione della matrice A)

$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \underbrace{LU\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \rightarrow$ possiamo porre $\underline{y} := U\underline{x}$ (incognito) $\quad L\underline{y} = \underline{b}$ (noto, noto)

↳ posso trovarlo

① $L\underline{y} = \underline{b}$

② $U\underline{x} = \underline{y}$ (noto)

} fattorizzando la matrice

Metodo di Gauss

Es: $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad L_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ *^1 & 1 & \\ *^2 & & 1 \end{pmatrix}$$

stessa dim. di A (3×3)

$$*^1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad *^2 = -\frac{a_{31}}{a_{11}} \qquad \Big\} a_{11} \neq 0$$

$$\Rightarrow L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$$

← prima riga invariata

azzera elem. prima colonna sotto alla diagonale

minore principale di ordine 2 della matrice A iniziale

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}}$$

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} \Big\} \text{determinante della sottomat}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

consideriamo $L_2 \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$L_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & *^1 & 1 \end{pmatrix} \qquad *^1 = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

* $n-1$ operazioni

↳ pk sono $n-1$ colonne che considero

$$\underbrace{L_2(L_1 A)}_{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

← invariata
← invariata
} prime due

U ↳ mat. tr. sup.

azzera gli elem. 2° colonna

$L_2 L_1 A = U \Rightarrow A = (L_2 L_1)^{-1} U \Rightarrow A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{?}\, U \quad (\bigstar)$

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Le inverse si ottengono eliminando il segno "-" da L_1 e da L_2

Matrice stessa con tutti gli elem. non nulli cambiati di segno

$$L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}}{a_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$ Matrice ancora triangolare

Ponendo $L = L_1^{-1} L_2^{-2}$ da $(\bigstar)$ otteniamo $A = LU$

Perché considero solo $n-1$ minori principali pk l'ultima colonna non la considero.

di ordine $k = 1, \dots, n-1$

Th. Esistenza fattorizzazione LU: se tutti i minori principali di ordine k di A sono non nulli ($\neq 0$) allora $\exists!$ (esiste ed è unica) la fattorizzazione LU della matrice A.

num di add/molt/div/sott.

Costo computazionale:

1° passo → calcolare L_1 2 op.

2° passo → prodotto $L_1 A$ 4 elem. 2 op (2 op. per elem)

3° passo → calcolare L_2 1 op.

4° passo → prodotto $L_2 L_1 A$ 1 elem. 2 op.

In generale, per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$L_1 = n-1$
$\vdots$
$L_2 = n-2$
$\vdots$
$L_3 = n-3$
$\vdots$
$L_{n-1} = n-(n-1) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

uguale

$L_1 A \qquad A^{(1)} = L_1 A \qquad OP = (n-1)(n-1)$

$L_2(L_1 A) \qquad A^{(2)} = L_2 A^{(1)} \qquad OP = (n-2)(n-2)$

$L_3(L_2(L_1 A)) \qquad A^{(3)} = L_3 A^{(2)} \qquad OP = (n-3)(n-3)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$L_{n-1}(L_{n-2} \dots L_1) A \rightarrow L_{n-1} A^{(n-2)} \qquad OP = \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{matrice } 1\times 1}$

Costo totale calcolo matrici L: $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + 2^2 + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$N \text{ TOT.}: \quad \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n^2}{6} \approx \frac{n^3}{6}$$

ESEMPIO : RISOLVERE

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$A = LU$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{L_1 A}_{A^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

U

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underset{\Downarrow \; -4}{-\frac{12}{3}} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = U \Rightarrow A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{L} U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

① $L\underline{y} = \underline{b}$

② $U\underline{x} = \underline{y}$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \overset{①}{\Rightarrow} L\underline{y} = \underline{b} \quad \text{E DOPO ②}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -3 \\ y_3 = 8 \end{cases}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13}{6} \\ x_2 = -\frac{7}{3} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

2 Applicazioni della fattorizzazione:

1) Calcolo dell'inversa: Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, determinare la matrice A^{-1} t.c. $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Data la mat. $\boxed{AX = I_n}$ **

$X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, x_3, \dots, x_n]$

$I_n = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

** Equivalente a:

$$\begin{cases} A\underline{x}_1 = \underline{e}_1 \\ A\underline{x}_2 = \underline{e}_2 \\ \vdots \\ A\underline{x}_n = \underline{e}_n \end{cases}$$

"n sistemi lineari di dim. n con la stessa matrice dei coefficienti"

Nota ripresa *

$A\underline{x} = b$

$LU\underline{x} = \underline{b}$

$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$

Risoluzione prod. in due passaggi:

1) Si fattorizza la matrice A (costo $\frac{n^3}{6}$ affrontato 1 sola volta)

2) Si risolvono n sis. lineari con l'approccio di scomporli in due passaggi:

$$\begin{cases} L\,y_1 = e_1 & n^2 \\ U\,x_1 = y_1 & n^2 \end{cases} \quad \begin{cases} L\,y_2 = e_2 & n^2 \\ U\,x_2 = y_2 & n^2 \end{cases} \quad \dots\dots \quad \begin{cases} L\,y_n = e_n & n^2 \\ U\,x_n = y_n & n^2 \end{cases}$$

CALCOLO DEL DETERMINANTE:

$$\det(A) = \det(LU) \overset{\text{BINET}}{=} \det(L)\det(U) = \left(\prod_{i=1}^{n} e_{ii}\right)$$

CON MATRICE DI PERMUTAZIONE

SCAMBIO DELLE RIGHE

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NON POSSO FARE LA FATTORIZZAZIONE LU. $(a_{11} = 0)$

$$\begin{cases} 3x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$a_{11} \neq 0$

SCAMBIO CON LA MATRICE DI PERMUTAZIONE "P":

$PA = A$ CON RIGHE SCAMBIATE

MATRICE IDENTITA' CON RIGHE O COLONNE SCAMBIATE

e_1: $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_3 = [\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}]$

$P = [\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}]$

$P = [\underline{e_2}, \underline{e_1}, \underline{e_3}]$

$P = [\underline{e_1}, \underline{e_3}, \underline{e_2}]$

SE P E' UNA MATRICE DI PERMUTAZIONE:

SE $\underbrace{P \cdot A}_{\text{SCAMBIO RIGHE}}$ $\qquad \underbrace{A \cdot P}_{\text{SCAMBIO COLONNE}}$

INOLTRE LE MATRICI DI PERMUTAZIONE SONO NON SINGOLARI (SONO INVERTIBILI)

$P^{-1} = P^T$

$$P \to [e_1, e_3, e_2]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

CI INTERESSA DETERMINARE SE $\exists$ UNA MATRICE P t.c. $P \cdot A$ (SCAMBIO RIGHE) POSSO FATTORIZZARE A.

↳ $PA = LU$

Metodo di Gauss (con scambio delle righe):

Es.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad P_1 = I \qquad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

SCAMBIO LE RIGHE 2 E 3 DELLA MATRICE $A^{(1)}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = L_2 P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

$$0 = -\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}}$$

FORMA PER RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE.

$$PA = LU$$

$$L_2 P_2 A^{(1)} = U \Rightarrow L_2 P_2 L_1 \underbrace{\,}_{P_2^{-1} P_2} P_1 A = U$$

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A^{(0)} = L_1 P_1 A$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_2 P_2 L_1 P_2^{-1}}_{T} \underbrace{P_2 P_1}_{P} A = U$$

$$\Rightarrow PA = T^{-1} U$$

↳ TRIANG. INFERIORE CON DIAGONALE TUTTI "1".

$$L = T^{-1}$$

$$\Rightarrow PA = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Th. : LA FATTORIZZAZIONE $PA = LU$ CON LO SCAMBIO RIGHE $\exists$ SEMPRE.

IMPORTANTE : $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad PA = LU$

PRIMA → $\begin{cases} A\underline{x} = \underline{b} & A = LU \\ LU\underline{x} = \underline{b} \end{cases}$

ORA → $\underbrace{PA}_{\text{SCAMBIO RIGHE DI } A}\underline{x} = \underbrace{P\underline{b}}_{\text{SCAMBIO RIGHE TERMINE NOTO}}$

$PA = LU$

$\Rightarrow LU\underline{x} = P\underline{b} = \underline{\tilde{b}} \Rightarrow \boxed{LU\underline{x} = \underline{\tilde{b}}}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{\tilde{b}} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

$\tilde{L} = L + \delta L \qquad \tilde{U} = U + \delta U$

* $\delta L = \tilde{L} - L$

↳ DIFF. TRA ELEM. DI $\tilde{L}$ ED L

STABILITÀ FATTORIZZAZIONE LU:

ARITMETICA FINITA ⇝ GENERA $\tilde{L}$ $\tilde{U}$ (INVECE DI L E U ESATTI)

$\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{A} \qquad \tilde{A} = A + \delta A$

$$\cancel{A} + \delta A = (L + \delta L)(U + \delta U) = \cancel{LU} + L\,\delta U + \delta L\,U + \delta L\,\delta U \Rightarrow$$

$A = LU$

$\Rightarrow \delta A = L\,\delta U + \delta L\,U + \delta L\,\delta U$

SE GLI ELEM. DI L E U SONO GRANDI, GLI ELEMENTI DI δA SONO GRANDI

} DI CHE PUR NON COMMETENDO GRANDI ERRORI, SE L O U HANNO ELEM. GRANDI ALLORA ANCHE L'ERRORE SARÀ GRANDE. L'ORDINE DI GRANDE DELL'ERRORE DIPENDE DALLA GRANDEZZA DEI ELEM. DI U O L

LA FATTORIZZAZIONE (LU) È STABILE S.S.S. GLI ELEM DI L E U NON SONO TROPPO GRANDI RISPETTO AGLI ELEM. DI A

FORMALMENTE :
- STABILE IN SENSO FORTE SE $\exists$ DUE COSTANTI α E β INDIPENDENTI DALLA DIMENSIONE (QUINDI DALL'ORDINE n DI A) t. PER CUI GLI ELEM.

$$|l_{ij}| \le \alpha \qquad |u_{ij}| \le \beta$$

- STABILITÀ IN SENSO DEBOLE SE LE COSTANTI α E β DIPENDONO DALLA DIM. DELLA MATRICE (QUINDI DALL'ORDINE n)

l_{is} sono definiti sempre come: $l_{is} = -\underbrace{\frac{a_{is}^{(s-1)}}{a_{ss}^{(s-1)}}}_{\text{esplode per denominatore piccolo e num. grande}}$ $i = s+1$ a n

possono assumere valori grandi quando den << num

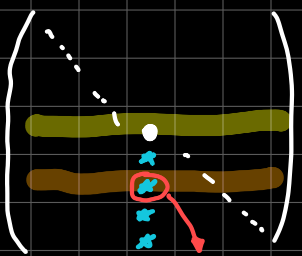
$a_{is}^{(s-1)} >> a_{ss}^{(s-1)}$

Idea: scambio di righe anche per elementi fastidiosi sulla diagonale che possano far esplodere il denominatore.

Sol: fare sempre lo scambio di righe

Metodo di Gauss con scambio righe e perno massimo → elemento diagonale o pivot

$A^{(s-1)} =$

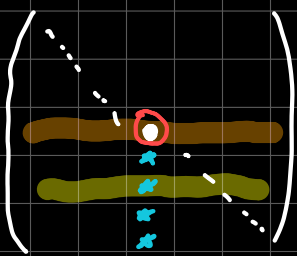


→ si scambiano le due righe applicando una matrice "P" di permutazione.

Selezionano l'elem di modulo massimo, scambio la riga s con la riga con elem. di modulo massimo.

Lezione 7

$P_s A^{(s-1)} =$



* Idea: scambio la riga "diagonale" con la riga contenente l'elemento di modulo massimo (sotto diagonale) della colonna s-esima.

$$|a_{ss}^{(s-1)}| \geq |a_{is}^{(s-1)}|, \quad i = s, \dots, n$$

In questo modo $|l_{is}| = \frac{|a_{is}^{(s-1)}|}{|a_{ss}^{(s-1)}|} \leq 1$ → gli elementi di L non possono crescere senza limitazioni!

→ stabilità in senso debole

Si dimostra: $\max |u_{is}| \leq 2^{n-1} \cdot \max |a_{is}|$ ← gli elementi di U possono crescere esponenzialmente al crescere di n.

2^{n-1} ↳ β

=> la fattorizzazione con scambio righe e perno massimo è stabile in senso debole

In Matlab → funzione LU(), output P, L, U t.c. PA = LU

Es: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sol. esatta: $x_1 = 1 + \dfrac{1}{10^{20}-1} \simeq 1 \qquad x_2 = 1 - \dfrac{1}{10^{20}-1} \simeq 1$

Fatt. $A = LU$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10^{-20}} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 A = \overset{U}{\begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}}$$

$$L_1 A = U \Rightarrow A = (L_1)^{-1} U$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$$

Risolviamo $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L\underline{y} = \underline{b} \qquad U\underline{x} = \underline{y}$

$$L\underline{y} = \underline{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ 10^{20} y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 10^{20} \end{array}$$

Arit. finita $= -10^{20}$

$$U\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 10^{-20} x_1 + x_2 = 1 \\ -10^{20} x_2 = -10^{20} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Arit. finita
$\uparrow$
$\underline{x} = (0, 1)^T$

* $\boxed{\text{Sol. esatta: } x_1 = 1 + \dfrac{1}{10^{20}-1} \simeq 1 \qquad x_2 = 1 - \dfrac{1}{10^{20}-1} \simeq 1}$

↳ Falso, non coincidono

Allora

Applico scambio righe e perno massimo:

APPLICO SCAMBIO RIGHE E PERNO MASSIMO :

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI METTE IL MENO DAVANTI ALL' ELEM. NON BANALE DELLA MATR.

$$\Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 P_1 A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$* \; L_1 P_1 A = U \Rightarrow P_1 A = L_1^{-1} U$$

$$PA = LU \qquad P = P_1 \qquad L = L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$$

RISOLVIAMO : $L\underline{y} = P\underline{b}$ $\qquad U\underline{x} = \underline{y}$

$$L\underline{y} = P\underline{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ 10^{-20} y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 \end{array}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{COINCIDE CON LA SOL. ESATTA !}}$$

Fattorizzazio QR : $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \underbrace{Q}_{\text{matrice ortogonale}}\underbrace{R}_{\text{triangolare superiore}} \qquad R = (\nabla)$$

$\vee$
$\mathbb{R}^{n\times n}$

Q ortogonale $\quad Q^T Q = I \quad$ (equiv. $Q^{-1} = Q^T$) $\qquad$ La fattorizzazione QR $\exists$ sempre!

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad$ (A non singolare)

1° passo

Fatt. $\Rightarrow$ $QR\underline{x} = \underline{b}$ $\Rightarrow$ Poniamo $\underline{y} = R\underline{x}$ e risolviamo $Q\underline{y} = \underline{b}$

I sost.

$A = QR$ $\qquad \underbrace{R\underline{x}}_{\underline{y}}$

$$\underbrace{Q^T Q}_{= I}\,\underline{y} = Q^T\underline{b}$$

$$\underline{y} = Q^T\underline{b}$$

Secondo passo : Risolviamo $R\underline{x} = \underline{y}$ con sostituz. all'indietro

R: ∇

Matrici elementari di Householder, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $\qquad$ (*)

$$H\underline{a} = \begin{pmatrix} \pm\|\underline{a}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

vett. forma particolare

norma euclidea

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(Azzera tutte le componenti di $\underline{a}$ tranne la prima!)

Prop. di H : $\quad H^T = H$ (simm.)

$\qquad\qquad\quad H^T = H^{-1}$ i.e $H^T H = I$ (ortog.)

Si considera $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \pm \|\underline{a}\|_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

vettore di Householder

$$\underset{n\times n}{H} = I - \overbrace{\frac{2}{\|\underline{v}\|_2^2}}^{\beta}\underbrace{\underline{v}\,\underline{v}^T}_{n\times n} = I - \beta\,\underline{v}\,\underline{v}^T$$

Si può dimostrare (dim è sulle disp) che H ottenuta in questo modo è simmetrica, ortogonale, e ha la proprietà (*).

Algoritmo per fatt. QR (A $n \times n$ oppure A $m \times n$ $m > n$)

A $n \times n$ $\quad A = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \ldots\ldots \ \underline{a}_n)$

↳ colonne di A

Poniamo $A_1 = A$ e costruiamo H_1 di Householder t.c.

→ elem. non nulli

$$\underbrace{H_1 A_1}_{A_2} = \begin{pmatrix} \|\underline{a}_1^{(1)}\| & x & \cdots & x \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & x & \cdots & x \end{pmatrix} \qquad H_1 = I - \beta_1 V_1^T V_1$$

costruiamo H_2 di Householder t.c.

$$H_2 A_2 = \begin{pmatrix} \|a_1^{(1)}\| & x & \cdots & x \\ 0 & \|a_2^{(2)}\| & x \cdots & x \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x \cdots & x \end{pmatrix} \qquad H_2 = I - \beta_2 \underline{V}_2^T \underline{V}_2$$

Ripetendo il passaggio su tutte le colonne si ottiene:

$$H_{n-1} A_{n-1} = \begin{pmatrix} \|a_{(1)}^{(1)}\| & x & x & x \\ 0 & \|a_2^{(2)}\| & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \|a_n^{(n-1)}\| \end{pmatrix} \rightarrow R \text{ (triang. sup)}$$

Prodotto di matrici ortogonali è ancora una mat. ortogonale.

$$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 H_1}\, A = R$$

Il prodotto di mat. ortogonali è ancora una mat. ortogonale.

$HA = R \Rightarrow A = H^T R \Rightarrow A = QR$

$H = H_{n-1} \cdots H_2 H_1$, $\quad H^T = Q$

Cose importanti:

costo doppio rispetto alla fatt. LU

- Costo computazionale: $\boxed{\frac{2}{3} n^3} \Rightarrow$ Gauss per LU $\approx \frac{1}{3} n^3$
- Stabilità della fatt. QR: (analisi all'indietro)

- STABILITÀ DELLA FATT. QR : (ANALISI ALL'INDIETRO)

$\tilde{Q} = Q + \delta Q$

$\tilde{R} = R + \delta R$

$\tilde{A} = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$

$\tilde{A} = A + \delta A \qquad \underbrace{\tilde{A}}_{A + \delta A} = (Q + \delta Q)(R + \delta R) \overset{A = QR}{\Longrightarrow} \delta A = \delta Q R + Q \delta R + \delta Q \delta R$

SE QUANDI δA È GRANDE → NON VA BENE

LE STIME CHE SI OTTENGONO SONO:

- $\boxed{\max |q_{ij}| \leq \|Q\|_2 = 1}$ POICHÉ Q È ORTOG.
- $\boxed{\max |r_{ij}| \leq \sqrt{n} \max |a_{ij}|}$

CONFRONTO:

FATT. LU:

$\max |u_{ij}| \leq 2^{n-1} \max |a_{ij}|$

FATT QR

$\max |r_{ij}| \leq \sqrt{n} \max |a_{ij}|$

ENTRAMBE LE FATTORIZZAZIONI LU (CON SCAMBIO RIGHE E PERNO MASSIMO) E QR SONO STABILI IN SENSO DEBOLE, PERÒ ESSENDO

$\sqrt{n} << 2^{n-1}$

L'ALG. QR RISULTA PIÙ STABILE DELLA FATT. LU.

FINE!