CONTINUO EQ. NON LINEARI :

→ DI TIPO ITERATIVO (PARTENZA DA UN GUESS) → GENERA SUCCESSIONE DI VALORI → HA UN LIMITE → ALLORA CONVERGENTE → ORDINE DI CONVERGENZA ?

VELOCITÀ ?

RECAP : METODI → UNA SOLA RADICE

1 EQ → 0, ..., n RADICI

METODI VISTI → "BISEZIONE" E "FALSA POSIZIONE"

METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE : SONO DEFINITI DA UN PUNTO INIZIALE $x^{(0)}$, UNA FUNZIONE E DETERMINARE x^* t.c. $f(x^*) = 0$

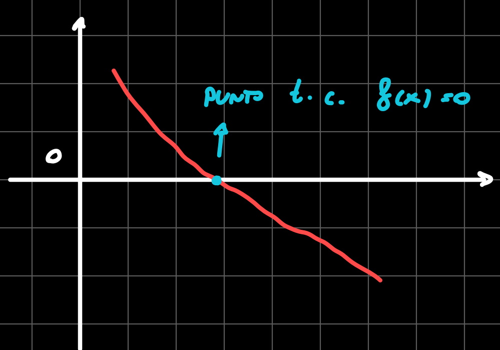
- PUNTO INIZIALE $x^{(0)}$
- UNA FUNZIONE $g : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ OPPORTUNA
- CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI n° REALI $x^{(k)}$ $\{x^{(k)}\}_k$ t.c. $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$

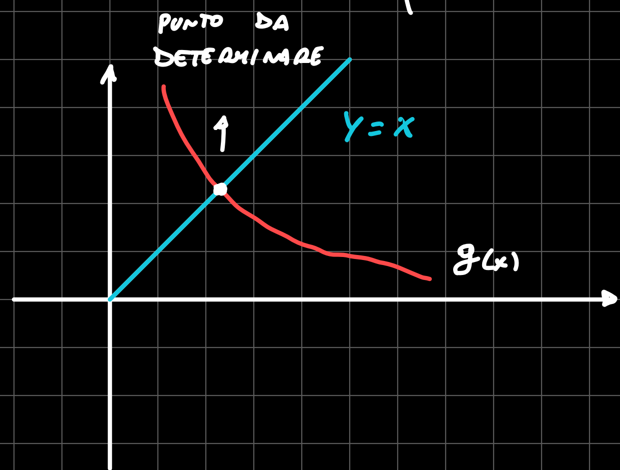
PROB. → SOL DEL SISTEMA NON LINEARE !

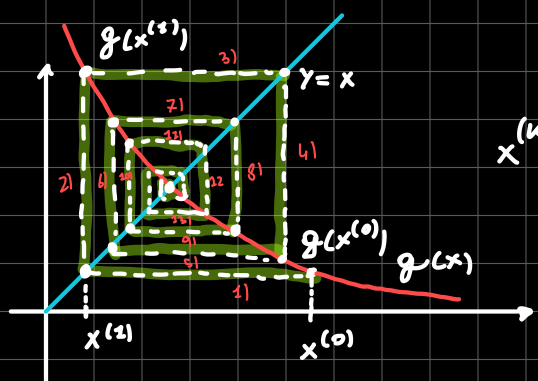
ITERAZIONI DI PUNTO FISSO : SI RIFORMULA IL PROBLEMA $f(x) = 0$ COME $g(x) = x$ (IL PROBLEMA DI PUNTO FISSO, CERCO x t.c. LA FUNZIONE VALGA x IN QUEL PUNTO) OVVERO :

$$x^* \text{ t.c. } f(x^*) = 0 \iff g(x^*) = x^*$$

ES. PRATICO : $f(x) = e^{-x} - x = 0$ $\quad g(x) = e^{-x}$ $\quad \left(g(x) = x \quad \begin{matrix} e^{-x} = x \\ e^{-x} - x = 0 \end{matrix} \right)$



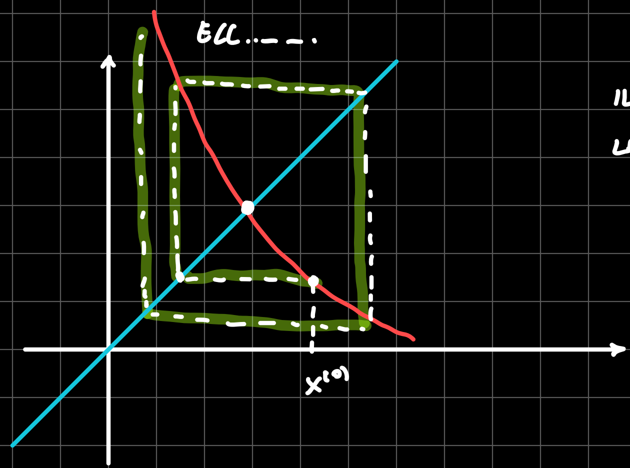




$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

$$x^{(1)} = g(x^{(0)})$$

Es DOVE NON ACCADE:



IL CAMBIO DI PUNTO INIZIALE LA
LA REGOLA DEL PUNTO FISSO DIVERGE!

Th.: SE $g(x)$ POSSIEDE UN PUNTO FISSO x^* E SE $g \in \underbrace{C^1}_{\text{DERIVATA CONTINUA IN UN INTERVALLO}}([x^*-\underbrace{\rho}_{\text{RO}}, x^*+\rho])$
$\underbrace{\rho}_{\text{RO}}$ MAGGIORE DI ZERO ($\rho > 0$) E SODDISFA: $|g'(x)| \leq \lambda < 1$
PER $x \in [x^*-\rho, x^*+\rho]$

ALLORA: i) LA SUCCESSIONE $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ CONVERGE A x^*, $\forall x^{(0)} \in [x^*-\rho; x^*+\rho]$
ii) $\forall x^0 \in [\sim\sim]$ TUTTI GLI $x^{(k)}$ APPARTENGONO A QUELL'INTERVALLO
iii) x^* È L'UNICO PUNTO FISSO DI g IN $[\sim\sim]$

(TUTTO DIPENDE DALLA DERIVATA DI g → NON TROPPO GRANDE → FUNZIONA)

Dim: i) PER DIMOSTRARE CHE $x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x^*$ PROVIAMO CHE $\forall k \geq K$

$$|x^{(k+1)} - x^*| < |x^{(k)} - x^*|$$

$$\underset{\underset{g(x^{(k)})}{\parallel}}{x^{(k+1)}} - \underset{\substack{\text{PUNTO FISSO} \\ \text{DELLA FUNZ. } g \\ \parallel \\ g(x^*)}}{x^*} = g(x^{(k)}) - g(x^*) \underset{\text{Th. VALORE MEDIO}}{=} g'(\xi^{(k)}) \cdot (x^{(k)} - x^*)$$

RAPPORTO INCREMENTALE
$$\left\{ \frac{g(x^{(k)}) - g(x^*)}{x^{(k)} - x^*} \right. = g'(\xi^{(k)})$$

$\exists$ IL RAPPORTO INCREMENTALE $\xi \in (x^{(k)}, x^*)$

$$|x^{(k+1)} - x^*| = \underbrace{|g'(\xi^{(k)})|}_{\leq \lambda} |x^{(k)} - x^*| \leq \lambda |x^{(k)} - x^*| \leq \lambda^2 |x^{(k-1)} - x^*| \leq \%$$

$$(x^{(k)} - x^*) \leq \lambda |x^{(k-1)} - x^*|$$

$$\% \leq \lambda^2 |x^{(k-2)} - x^*| \leq \dots \leq \lambda^k |x^{(0)} - x^*|$$

$$|x^{(k-1)} - x^*| \leq \lambda |x^{(k-2)} - x^*|$$

$$\Rightarrow |x^{(k+1)} - x^*| \leq \lambda^k |x^{(0)} - x^*|$$

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k+1)} - x^*| \leq \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\lambda^k}_{\to 0} |x^{(0)} - x^*| \quad k \to +\infty$$

$$\lim_{k\to+\infty} |x^{(k+1)} - x^*| = 0 \iff x^{(k+1)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x^*$$

QUESTO DIMOSTRA IL PUNTO i) E ii)

Dim iii) Dimostriamo che x^* e' l'unico punto fisso di g.

Siano x_1^* e x_2^* due punti fissi distinti in $[x^*-\rho, x^*+\rho]$

$$|\underbrace{x_1^*}_{g(x_1^*)} - \underbrace{x_2^*}_{g(x_2^*)}| = |g(x_1^*) - g(x_2^*)| \underset{\text{Th. VAL. MEDIO}}{=} |\underbrace{g'(\xi)}_{<1}|\,|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*| \quad \text{Assurdo!!}$$

$$\frac{g(x_1^*) - g(x_2^*)}{x_1^* - x_2^*} = g'(\xi) \qquad \xi \in (x_1^*, x_2^*)$$

RECAP: SERIE DI TAYLOR

Sia I un intorno di $\hat{x}$ e $f: I \to \mathbb{R}$, la serie di Taylor (Th) dice che:

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(\hat{x})}{s!} \cdot (x-\hat{x})^s \qquad f \text{ t.c. } \in \underset{\text{continua}}{C^\infty(I)} \to \text{Allora } \forall x \in I \setminus \{\hat{x}\}$$

Th. (Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange)

Sia $g \in C^{n+1}(I)$ allora $\forall x \in I \setminus \{\hat{x}\}$, esiste $\xi \in (x, \hat{x})$:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(\hat{x})}{j!}(x-\hat{x})^j + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\hat{x})^{n+1} \qquad \xi \in (x, \hat{x})$$

F2

Th.: Sia $\{x^{(k)}\}_k$ la successione generata da $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ e sia convergente a x^*.
Inoltre supponiamo che la funzione g abbia derivate continue fino a ordine opportuno dell'intorno di x^*.

Allora la successione ha ordine di convergenza p se e solo se

$$\boxed{g'(x^*) = g''(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0} \qquad g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

$* \; e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|e^{(k+1)}|}{|e^{(k)}|^p} = \gamma$$

Dim:

$$\underbrace{x^{(k+1)}}_{= g(x^{(k)})} - \underbrace{x^*}_{g(x^*)} = g(x^{(k)}) - g(x^*) = \%$$

→ Taylor con resto di Lagrange

$$\% \; \cancel{g(x^*)} + \underbrace{g'(x^*)}_{0}(x^{(k)} - x^*) + \underbrace{g''(x^*)}_{0}(x^{(k)} - x^*)^2 + \dots + \underbrace{\frac{g^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}}_{0}(x^{(k)} - x^*)^{p-1} + \frac{g^{(p)}(\xi)}{p!}(x^{(k)} - x^*)^p - \cancel{g(x^*)}$$

$$\Rightarrow |x^{(k+1)} - x^*| = \frac{1}{p!}|g^{(p)}(\xi)|\,|(x^{(k)} - x^*)^p| \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^p} =$$

$$= \frac{1}{p!}|g^{(p)}(x^*)|$$

→ Definizione di ordine di convergenza

Quando ci si ferma?

Criteri di Arresto

Teoricamente mi fermo $\underbrace{|x^{(k)} - x^*|}_{\text{ERR. ASS.}} \leq TOL_{ABS}$ oppure $\underbrace{\frac{|x^{(k)} - x^*|}{|x^*|}}_{\text{ERR. RELATIVO}} \leq TOL_{REL}$

$$= \quad |x^{(k)} - x^*| \leq TOL\,|x^*|$$

Ma, non conoscendo x^* devo trovare un metodo alternativo:

1) * Test sull'incremento da $x^{(k)}$ a $x^{(k-1)}$

$$\frac{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|}{\min(|x^{(k)}|, |x^{(k-1)}|)} \leq TOL_1$$

"TOL_1" non troppo piccola

precisione macchina $\varepsilon = 2u$ ← unita' di arr.

nella pratica: $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq TOL_1 + \varepsilon \min(|x^{(k)}|, |x^{(k-1)}|)$

2) * $|f(x^{(k)})| \leq TOL_2$

3) * Convergenza non garantita, non superare quindi un massimo numero di iterazioni

$k > MaxIter \Rightarrow$ mi fermo

* Metodo di Newton (metodo per la soluzione di sis. non. lineari)

↳ Polinomio di Taylor: $f(x^*) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})\cdot(x^* - \hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})(x^* - \hat{x})^2}{2} + \dots$

se $|x^* - \hat{x}|$ piccolo, $(x^* - \hat{x})^2$ sara' ancora piu' piccolo, e ancora di piu' per i termini successivi.

$$f(x^*) \simeq f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x^* - \hat{x})$$

$\| \; 0$ (zero)

$$x^* \simeq \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})}$$

(supponendo che $f'(\hat{x}) \neq 0$)

→ questo valore e' una

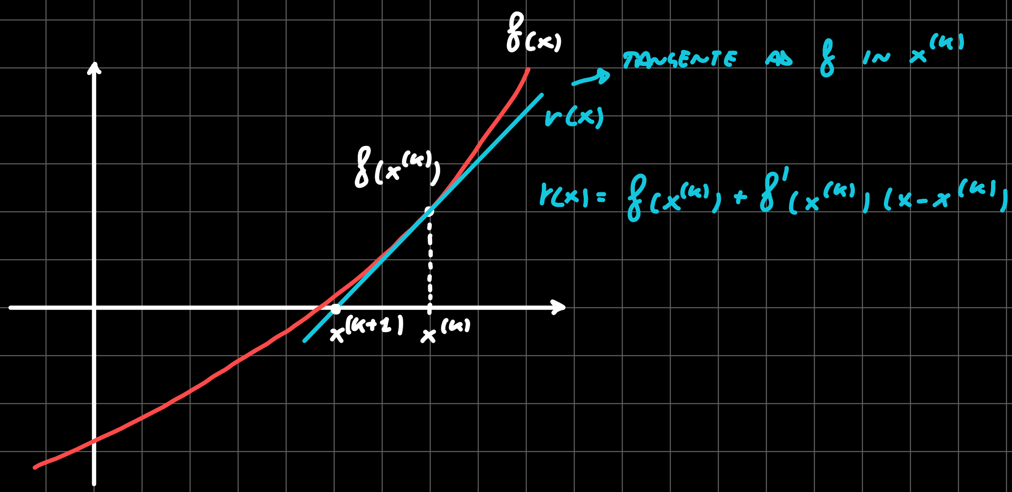
MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI x^* RISPETTO A $\hat{x}$.

L'idea del metodo di Newton consiste nel generare una success. di valori $x^{(k)}$ t.c.:

$$\{x^{(k)}\}_k \qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad f'(x^{(k)}) \neq 0 \quad \forall k$$

Metodo di Newton (o metodo delle tangenti): Sia $f \in C^2([a,b])$ e sia $\hat{x} \in [a,b]$ una approssimazione di x^* t.c. $f'(\hat{x}) \neq 0$ e $|\hat{x} - x^*|$ sia piccolo.

Idea



Ponendo $r(x) = 0$ (intersezione tangente con asse x)

$$r(x) = 0 \Rightarrow 0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

$$x = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Studio della convergenza e a che velocità

$$x^{(k+1)} = \underbrace{x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}_{= g(x^{(k)})}$$

$\Rightarrow$ riformuliamo come un metodo del punto fisso

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) , \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

PER IL Th F_2 SI HA CONVERGENZA IN UN OPPORTUNO INTORNO $[x^* - P, x^* + P]$ SE $|g'(x)| < 1$ IN QUESTO INTERVALLO

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)\,f'(x) - f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \exists\, p > 0 \text{ t.c. } |g'(x)| < 1$$

$\Rightarrow$ PER F2 SI HA CONVERGENZA

PRO'

$g'(x)$ E' CONTINUA SE $f(x)$, $f'(x)$ E $f''(x)$ SONO CONTINUE, OVVERO $f \in C^2([\ldots])$

$g'(x)$ E' BEN DEFINITA $\Leftrightarrow f'(x) \neq 0$ IN $[\ldots]$

$g'(x^*) = 0 \,! \Rightarrow |g'(x^*)| < 1$

IN UN OPPORTUNO INTORNO DI x^*

Th: SIA $f \in C^2([a,b])$, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ ALLORA $\exists$ UN INTERVALLO $[x^* - p, x^* + p]$ t.c. PER $x^{(0)}$ IN QUESTO INTERVALLO IL METODO DI NEWTON CONVERGE A x^*.

ORDINE DI CONVERGENZA : (Th. F2) POICHE' $g'(x^*) = 0 \Rightarrow$ L'ORDINE DI CONVERGENZA SARA' ALMENO DUE

$f(x^*) = 0$

$$g''(x) = \frac{[f'(x)\,f''(x) + f(x)\,f''(x)]^2 - 2\,f(x)\,f'(x)\,[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}$$

VALUTANDO IN x^*

$$g''(x^*) = \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right)^2 \Rightarrow$$

SE $f''(x^*) \neq 0$ L'ORDINE E' ESATTAMENTE 2 DI CONVERGENZA

SE $f''(x^*) = 0$ L'ORDINE SARA' ALMENO 3

COSA SUCCEDE SE $f'(x) = 0$?

x^* E' UNA RADICE DI MOLTEPLICITA' m $(m > 1)$

$$f(x) = (x - x^*)^m \cdot q(x) \quad m > 1 \quad q(x^*) \neq 0$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-x^*)^m \cdot q(x)}{m(x-x^*)^{m-1} q(x) + (x-x^*)^m q'(x)}$$

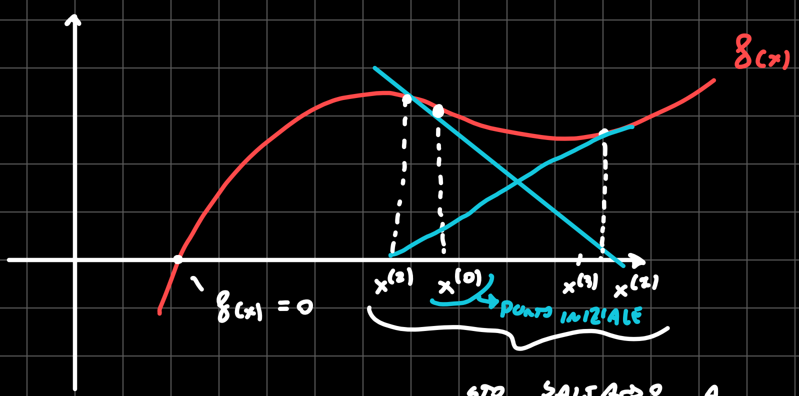
$$= x - \frac{(x-x^*) \cdot q(x)}{m\, q(x) + (x-x^*)\, q'(x)}$$

$\Rightarrow g'(x) = \ldots\ldots\ldots$ (calcoli da fare) $\Rightarrow g'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$

$m > 0 \Rightarrow |g'(x^*)| < 1$

Si ha convergenza però l'ordine di convergenza si riduce, sarà 1.

Punti deboli metodo di Newton:



sto saltando a destra e a sinistra

||

non vale se prendo per bene il punto iniziale $x^{(0)}$ corretto

Strategia → applicare il metodo di bisezione (con un intervallo opportuno iniziale) per determinare una approssimazione di una radice)

↓ fatto questo

Usare $\tilde{x}^*$ come punto iniziale del metodo di Newton

$x^{(0)} = \tilde{x}^*$