Ulteriore formalizzazione della propagazione dell'errore modellizzando il problema da risolvere con una funzione matematica e la soluzione del problema con la valutazione della funzione. Le funzioni effettivamente calcolabili sono le funzioni razionali (valore ottenuto mediante un numero finito di passi) mentre quelle non razionali (es: trigonometriche) possono essere solo approssimate da opportune funzioni razionali.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed un vettore $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ di dati di input comprendente le variabili pure e i coefficienti numerici che definiscono f.

Si considera ogni funzione composta da una parte simbolica, rappresentata esattamente, ed una numerica. Ad esempio la rappresentazione di una retta e' composta dalla sua equazione simbolica (la "forma" della funzione) $y = mx + q$ e dai valori numerici dei coefficienti m, q. In questo caso il vettore di dati in input e' (x, m, q) dove x (variabile indipendente) e' la variabile pura (cioe' il valore su cui la funzione viene valutata).

Ciao Mom :)

Il valore effettivamente calcolato puo' essere effetto da errori introdotti da diversi fenomeni:

- **Errore Algoritmico**: errore generato dal fatto che le operazioni sono effettuate in aritmetica finita (di macchina).
- **Errore Inerente**: errore conseguente a quello iniziale sui dati di input $x_1, x_2, \dots, x_n$ e alla loro rappresentazione approssimata mediante numeri finiti.
- **Errore Analitico**: errore generato, se la funzione f non e' razionale, dalla sua approssimazione con una funzione razionale.

Se $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ sono le rappresentazioni finite di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $\tilde{f}$ e' la funzione effettivamente, il valore che si ottiene al posto di $f(x)$ e' allora $\tilde{f}(\tilde{x})$, dove $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$.
Si esamina il caso in cui f e' razionale, ovvero, e' una funzione che puo' essere espressa come il rapporto (quoziente) di due polinomi ($f(x) = P(x)/Q(x)$ dove $Q(x) \neq 0$).

Th. Siano gli $x_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, e sia f una funzione razionale tale che $f(x) \neq 0$ e $f(\tilde{x}) \neq 0$. Indicati:

con $E_{TOT} = \left| \dfrac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|$ l'errore totale relativo di $\tilde{f}(\tilde{x})$ rispetto a $f(x)$

$\left| \dfrac{f(\tilde{x})}{f(x)} - \cancel{\dfrac{f(x)}{f(x)}}^{\,1} \right| \Leftarrow$ con $E_{IN} = \left| \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|$ l'errore inerente

$\Downarrow$

$\left| \dfrac{f(\tilde{x})}{f(x)} - 1 \right|$

e con $E_{ALG} = \left| \dfrac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \right|$ l'errore algoritmico. $\Rightarrow E_{ALG} = \left| \dfrac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} - \cancel{\dfrac{f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}}^{\,1} \right|$

$\Uparrow$

$\left| \dfrac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} - 1 \right|$

NOTA : $E_{IN} = \left| \frac{f(\tilde{x})}{f(x)} - 1 \right|$ QUINDI $\Rightarrow$ $1 + E_{IN} = \frac{f(\tilde{x})}{f(x)}$, $E_{ALG} = \left| \frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} - 1 \right|$ QUINDI $\Rightarrow$ $1 + E_{ALG} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$

RISULTA $E_{TOT} = E_{ALG}(1+E_{IN}) + E_{IN}$; APPLICANDO L'ANALISI DEL PRIMO ORDINE RISULTA SEMPLIFICATA : $E_{TOT} \simeq E_{ALG} + E_{IN}$

TERMINI LINEARI

ESPANDENDO : $E_{TOT} = E_{ALG}(1+E_{IN}) + E_{IN}$ $\Rightarrow$ $E_{TOT} = E_{ALG} + E_{ALG} \cdot E_{IN} + E_{IN}$ $\Rightarrow$ $E_{TOT} = E_{ALG} + E_{IN} + E_{ALG} \cdot E_{IN} \approx 0$

PRODOTTO DI DUE ERRORI RELATIVI, QUINDI E' DI ORDINE SUPERIORE (ORDINE DI u^2) E VA TRASCURATO

Dim. SI HA : $E_{TOT} = \left| \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(x)} - \cancel{\frac{f(x)}{f(x)}} \right| = \underbrace{\left| \frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(x)} - 1 \right|}_{E_{TOT}}$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER $f(\tilde{x})$ PER SAPERE DUE CONTRIBUTI

$= \left| \underbrace{\frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}}_{E_{ALG}} \cdot \underbrace{\frac{f(\tilde{x})}{f(x)}}_{E_{IN}} - 1 \right| = \left| (1 + E_{ALG}) \cdot (1 + E_{REL}) - 1 \right| \overset{\text{ESPANSIONE}}{=} \cancel{1} + E_{ALG} + E_{IN} + E_{ALG} \cdot E_{IN} - \cancel{1} = E_{ALG} + E_{IN} + E_{ALG} \cdot E_{IN}$

- QUANTO L'ALGORITMO SBAGLIA $\rightarrow$ E_{ALG} $\rightarrow$ $1 + E_{ALG} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$
- QUANTO I DATI PERTURBATI CAMBIANO IL RISULTATO $\rightarrow$ E_{IN} $\rightarrow$ $1 + E_{IN} = \frac{f(\tilde{x})}{f(x)}$

QUINDI : $E_{TOT} = E_{ALG}(1 + E_{IN}) + E_{IN}$ — APPROSSIMAZIONE $\longrightarrow$ $E_{TOT} \simeq E_{ALG} + E_{IN}$.

L'ERRORE TOTALE SERVE A SEZIONARE GLI ERRORI PER VEDERE LA PROVENIENZA :
- CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA (ERRORE INERENTE)
- STABILITA' DI UN ALGORITMO (ERRORE ALGORITMICO)

1) CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA : MISURA QUANTO UN PROBLEMA MATEMATICO E' SENSIBILE A PICCOLE PERTURBAZIONI NEI DATI DI INPUT. UN PROBLEMA E' BEN CONDIZIONATO SE PICCOLE VARIAZIONI NEI DATI PRODUCONO PICCOLE VARIAZIONI NELLA SOLUZIONE; E' MAL CONDIZIONATO SE PICCOLE PERTURBAZIONI CAUSANO GRANDI CAMBIAMENTI NEL RISULTATO. QUESTA E' UNA PROPRIETA' INTRINSECA (INTERNA) DEL PROBLEMA, NON DIPENDE DALL'ALGORITMO UTILIZZATO PER RISOLVERLO. L'ERRORE INERENTE (E_{IN}) QUANTIFICA PROPRIO QUESTO ASPETTO : RAPPRESENTA QUANTO LA SOLUZIONE $f(\tilde{x})$ DIFFERISCE DA $f(x)$ A CAUSA DELLA PERTURBAZIONE DEI DATI DA x A $\tilde{x}$.
AD ESEMPIO : INVERTIRE UNA MATRICE QUASI SINGOLARE O SOTTRARRE NUMERI MOLTO SIMILI SONO PROBLEMI INTRINSECAMENTE MAL CONDIZIONATI.

2) STABILITA' DI UN ALGORITMO : MISURA QUANTO UN'ALGORITMO CONTROLLA LA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI DURANTE IL CALCOLO. UN ALGORITMO E' STABILE SE L'ERRORE CHE INTRODUCE DURANTE L'ESECUZIONE RIMANE PICCOLO E CONTROLLATO; E' INSTABILE SE AMPLIFICA GLI ERRORI IN MANIERA INACCETTABILE. L'ERRORE ALGORITMICO E_{ALG} QUANTIFICA QUESTA PROPRIETA' : RAPPRESENTA LA DIFFERENZA TRA IL RISULTATO CALCOLATO $\tilde{f}(\tilde{x})$ E IL RISULTATO ESATTO $f(\tilde{x})$ CHE SI OTTERREBBE CON I DATI PERTURBATI. A DIFFERENZA DEL CONDIZIONAMENTO, LA STABILITA' DIPENDE DALLA SCELTA DELL'ALGORITMO E PUO' ESSERE MIGLIORATA CON TECNICHE NUMERICHE APPROPRIATE. DUE ALGORITMI DIVERSI PER LO STESSO PROBLEMA POSSONO AVERE STABILITA' MOLTO DIVERSE.

LA DECOMPOSIZIONE DELL'ERRORE TOTALE $E_{TOT} \simeq E_{ALG} + E_{IN}$ PERMETTE DI SEPARARE QUESTI DUE CONTRIBUTI E IDENTIFICARE SE UN ERRORE ELEVATO DERIVA DA UN PROBLEMA MAL CONDIZIONATO O DA UN ALGORITMO INSTABILE.

SI INTENDE ORA INTRODURRE I COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE (O INDICI DI CONDIZIONAMENTO) CHE MISURANO QUANTO UN PROBLEMA È SENSIBILE AGLI ERRORI NEI DATI. L'IDEA È QUANTIFICARE COME PICCOLI ERRORI RELATIVI SUI DATI DI INPUT ε_i VENGONO AMPLIFICATI (O ATTENUATI) NEL RISULTATO FINALE.

SE IL PROBLEMA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (PRENDE n NUMERI REALI E RESTITUISCE UN NUMERO REALE) È DIFFERENZIABILE IN UN INTORNO DI x, NELLE IPOTESI CHE I DATI $x_i \neq 0$ PER $i = 1, \dots, n$, SI PUÒ DARE LA SEGUENTE MAGGIORAZIONE DELL'ERRORE INERENTE:

- RISULTATO ESATTO CON DATI ESATTI $x = (x_1, \dots, x_n)$
- RISULTATO ESATTO CON DATI PERTURBATI $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$

$$\underbrace{\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right|}_{\varepsilon_{IN}} \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i \, \varepsilon_i|$$

ε_{IN}, QUANTO CAMBIA IL RISULTATO PER VIA DEI DATI PERTURBATI

ε_{REL} SUL DATO i-ESIMO, DEFINITO COME $\varepsilon_i = \dfrac{(\tilde{x}_i - x_i)}{x_i}$ CON $|\varepsilon_i| < u$, PER $i = 1, \dots, n$ SONO GLI ERRORI RELATIVI SUI DATI DEL PROBLEMA

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE PER IL DATO i-ESIMO

L'ERRORE È AL MASSIMO LA SOMMA DI TUTTI I CONTRIBUTI

L'ERRORE RELATIVO SUL RISULTATO È AL MASSIMO LA SOMMA PESATA $(c_1 \cdot \varepsilon_1 + \dots + c_n \cdot \varepsilon_n)$ DEGLI ERRORI RELATIVI SUI SINGOLI DATI, DOVE I PESI SONO I COEFFICIENTI c_i.

DEFINIZIONE DI c_i (COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE) $\Rightarrow c_i = \dfrac{x_i}{f(x)} \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$

SCOMPOSIZIONE DEI COMPONENTI:

1) $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$: DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE i-MA; MISURA, "QUANTO VARIA f SE VARIO LEGGERMENTE x_i?". È LA SENSIBILITÀ ASSOLUTA DI f RISPETTO A x_i.

2) $\dfrac{x_i}{f(x)}$: FATTORE DI NORMALIZZAZIONE. CONVERTE LA SENSIBILITÀ ASSOLUTA IN SENSIBILITÀ RELATIVA. RENDE c_i ADIMENSIONALE (UN NUMERO PURO).

3) c_i (COMPLETO) : SENSIBILITÀ RELATIVA. MISURA, "SE x_i VARIA DI 1%, DI QUANTO VARIA f IN PERCENTUALE?"

ESEMPIO NUMERICO:
- SE $c_i = 5$, UN ERRORE DELL'1% SU x_i CAUSA UN ERRORE DEL 5% SU $f(x)$
- SE $c_i = 0.1$, UN ERRORE DELL'1% SU x_i CAUSA UN ERRORE DEL 0.1% SU $f(x)$

INFATTI APPLICANDO LO SVILUPPO DI TAYLOR DI FUNZIONE IN PIÙ VARIABILI CON ARRESTO AI TERMINI DEL PRIMO ORDINE AL PROBLEMA f SI HA:

$$f(\tilde{x}) = \underbrace{f(x)}_{\text{VALORE NEL PUNTO } x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}_{\text{SOMMA DELLE VARIAZIONI IN OGNI DIREZIONE (TERMINI LINEARI)}} + \underbrace{o(h^2)}_{\text{RESTO}}$$

h^2: DISTANZA TOTALE AL QUADRATO TRA $\tilde{x}$ E x

RESTO (TERMINI DI ORDINE SUPERIORE TRASCURABILI)

NOTA SULLA h^2 CHE È LA DISTANZA EUCLIDEA AL QUADRATO TRA I PUNTI x E $\tilde{x}$:

$$h^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \varepsilon_i^2$$

$$\varepsilon_i = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i}$$

NELL'IPOTESI CHE $x_i \neq 0$ PER $i = 1, \dots, n$

(Per distanza euclidea si intende la lunghezza del segmento che li unisce, calcolabile applicando il Th. di Pitagora)

Applichiamo la disuguaglianza triangolare: $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

Allora: $E_{IN} = \left| \dfrac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \left| \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i) \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{f(x)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{(\tilde{x}_i - x_i)}{f(x)} \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{x_i}{f(x)} \cdot \dfrac{(\tilde{x}_i - x_i)}{x_i} \cdot \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|$

Sostituendo con lo sviluppo di Taylor (trascurando $o(h^2)$)

$(\tilde{x}_i - x_i) = x_i \cdot \varepsilon_i \rightarrow \dfrac{(\tilde{x}_i - x_i)}{x_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{(\tilde{x}_i - x_i)}{x_i} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i \cdot \varepsilon_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|}_{C_i} \cdot |\varepsilon_i| = \sum_{i=1}^{n} |C_i \cdot \varepsilon_i|$$

I coefficienti C_i (coefficienti di amplificazione), quantificano quanto l'errore relativo ε_i sul dato x_i viene amplificato (o attenuato) nell'errore sul risultato $f(x)$. Casi importanti:

- $|C_i| \gg 1$ (molto maggiore di 1):
  - Il dato x_i è molto influente
  - Piccoli errori su x_i causano grandi errori su $f(x)$
  - Il problema è mal condizionato rispetto a x_i
- $|C_i| \approx 1$:
  - Il dato x_i ha influenza moderna
  - Gli errori si propagano senza amplificazione significativa
- $|C_i| \ll 1$ (molto minore di 1):
  - Il dato x_i è poco influente
  - Anche grandi errori su x_i hanno poco effetto su $f(x)$

L'errore inerente E_{IN} dipende solo da quale funzione f stai calcolando, non da come la calcoli. I coefficienti C_i dipendono dalle derivate parziali $\partial f / \partial x_i$. Se scrivi f in modi diversi (es: $x^2 - 1$ vs $(x-1)(x+1)$), i C_i rimangono gli stessi. Ma il modo in cui implementi f può cambiare l'errore algoritmico E_{ALG}.