Numeri Reali $\mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

↓

$n° \in \mathbb{R}$

ES 1

$\alpha = 21.37$ (DOMANDA → BASE ?) NON SEMPRE CERTA

↳ $(+21.37)_{10}$

↳ FORM. SCIENTIFICA $\alpha = (+0.2137)_{10} \times 10^2$

ES 2

$\alpha = +(0.0045)_{10} \times 10^2$ FORMA SCIENTIFICA ?

↳ $\alpha = (+0.45)_{10} \times 10^{-2}$

p $= 2$, $= -2$ ESPONENTE DELLA BASE

$$\alpha = \pm(0.\underbrace{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\text{CIFRE NUMERO}}\ldots)_\beta \times \beta^p$$

$0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \ldots \leq \beta - 1 \qquad \alpha_1 \neq 0$

*Notazione Posizionale : $\alpha = \pm\underbrace{(\alpha_1\cdot\beta^{-1} + \alpha_2\cdot\beta^{-2} + \alpha_3\cdot\beta^{-3}\ldots)_\beta}_{\text{MANTISSA}} \times \beta^p$

POSSONO AVERE INFINITA' DI CIFRE ↓ PER IL NOSTRO CALCOLATORE SI DOVRANNO LIMITARE A UN NUMERO FINITO.

$= \pm(M)_\beta \times \beta^p$

$0 \leq \alpha_i \leq \beta - 1 \qquad \alpha \neq 0$

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \beta^{-i}$$

Numeri Finiti : NUMERI CHE USANO I CALCOLATORI (MACCHINE DISCRETE) PK I NUMERI REALI SONO INFINITI

$[\mathbb{F}]$

↓

SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ → $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$

Def : $\mathbb{F}(\beta, t, \lambda, \omega)$ E' L'INSIEME DI $n°$ FINITO :

BASE; $n°$ DI CIFRE CON LA QUALE SCRIVIAMO LA MANTISSA; ESPONENTI PIU' PICCOLI E GRANDI CHE SI POSSONO MEMORIZZARE

CARATTERIZZAZIONE

$$\{\emptyset\} \cup \{\alpha \in \mathbb{R} \; ; \; \alpha = \pm m_t \times \beta^p \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0, \lambda \leq p \leq \omega\}$$

$\beta \geq 2 \qquad t \geq 1 \qquad \underbrace{m_t = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \, \beta^{-i}}_{\text{MANTISSA}} \qquad \tilde{\alpha} \in \mathbb{F}$

Esempio : $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$ VOGLIAMO CAPIRE DA QUANTI $n°$ E' FATTO L'INSIEME. I $n°$ SARANNO A 3 CIFRE

MANTISSA → $\tilde{\alpha} = \pm(0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_2 \cdot 2^p \qquad -1 \leq p \leq 2 \qquad \alpha_1 \neq 0$

$= \pm (0.1 d_2 d_3)_2 \cdot 2^p$

ORA POSSIAMO SCRIVERE TUTTI I NUMERI DI QUESTO INSIEME:

SEGUE:

$$\left.\begin{matrix} 0.100 \\ 0.101 \\ 0.110 \\ 0.111 \end{matrix}\right\} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{0} \cdot 2^{1} \cdot 2^{2} \Rightarrow 33 \text{ ELEMENTI}$$

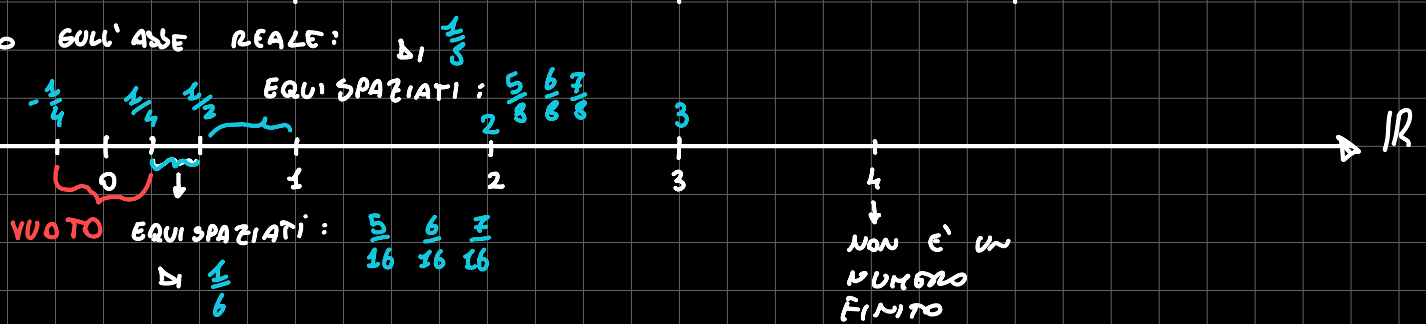
ORA VOGLIAMO VEDERLI SULL'ASSE REALE PER VEDERE COME SONO DISTRIBUITI

↓

$$\left.\begin{aligned} 0.100 &= 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \\ 0.101 &= 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ 0.110 &= 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} \\ 0.111 &= 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}\right\} \text{n° DI MANTISSE}$$

$\frac{4}{8}\cdot 2^{-1} = \frac{4}{16}$	$\frac{4}{8}\cdot 2^{0} = \frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}\cdot 2^{1} = \frac{4}{4}$	$\frac{4}{8}\cdot 2^{2} = \frac{4}{2}$
$\frac{5}{8}\cdot 2^{-1} = \frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}\cdot 2^{0} = \frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}\cdot 2^{1} = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}\cdot 2^{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{6}{8}\cdot 2^{-1} = \frac{6}{16}$	$\frac{6}{8}\cdot 2^{0} = \frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}\cdot 2^{1} = \frac{6}{4}$	$\frac{6}{8}\cdot 2^{2} = \frac{6}{2}$
$\frac{7}{8}\cdot 2^{-1} = \frac{7}{16}$	$\frac{7}{8}\cdot 2^{0} = \frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}\cdot 2^{1} = \frac{7}{4}$	$\frac{7}{8}\cdot 2^{2} = \frac{7}{2}$

SCRIVIAMO SULL'ASSE REALE:



CARATTERISTICHE DEI NUMERI

↳ ADDENSATI → VICINO ALLO ZERO

↳ LONTANI TRA LORO → LONTANI DALLO ZERO

STANDARD ANSI / IEEE 754 DEL 1985

↳ DETTA COME SONO I NUMERI FINITI IN BASE 2 SU CALCOLATORI.

↳ TIPO → EXTENDED (NON TRATTEREMO) E BASIC

SINGLE E DOUBLE

32 BIT 64 BIT

$\mathbb{R}$ I NUMERI FINITI DEVONO ESSERE USATI

CHI È IF ?

(32 BIT)

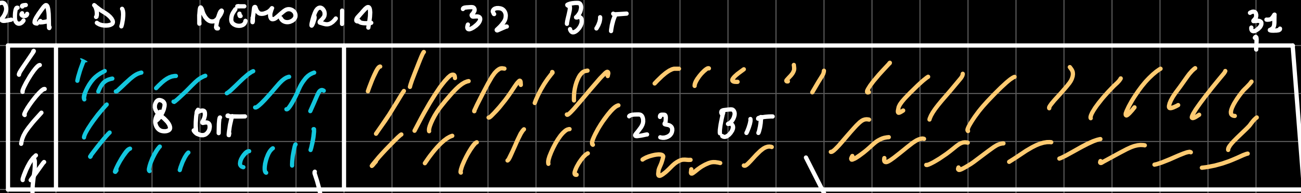
$IF(2, 24, -127, +128)$ BASIC SINGLE

$IF(2, 53, -1023, +1024)$ BASIC DOUBLE

(64 BIT)

} TUTTI I n° FINITI

AREA DI MEMORIA 32 BIT



1° BIT → SEGNO

\+ 0

\- 1

PER L'ESPONENTE

[e]

MANTISSA

(NOTA: I n° SONO I BASE 2)

SONO 23 PER d_1 È SEMPRE 1.

$$0.d_1 d_2 \ldots \rightarrow 1.\underbrace{d_1, d_2, \ldots, d_{t-1}}_{t=24}$$

$d_1 = 1$

CONVENZIONE:

n° VICIN A ZERO

$00 \sim\sim\sim 0 = 0 \rightarrow -127$

$11 \sim\sim\sim 1 = 255 \rightarrow +128$

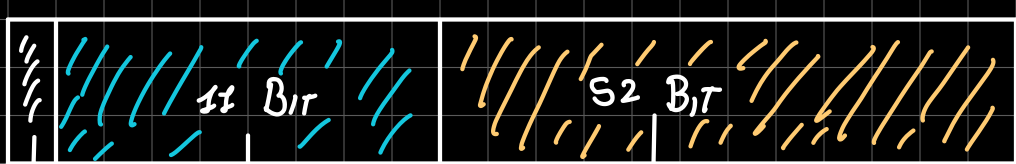
} RANGE ESPONENTI → PER RANGE MAGGIORE → DOUBLE

n° LONTANO DA ZERO

$$\left.\begin{aligned} e &= p - 2 \\ p &= e + 2 \end{aligned}\right\}$$ FORMULE PER TROVARE L'ESPONENTE

→ ???

ANALOGO DEL DOUBLE:



SEGNO

ESPONENTE [e]

MANTISSA

$0 \rightarrow -1023$

$2047 \rightarrow +1024$

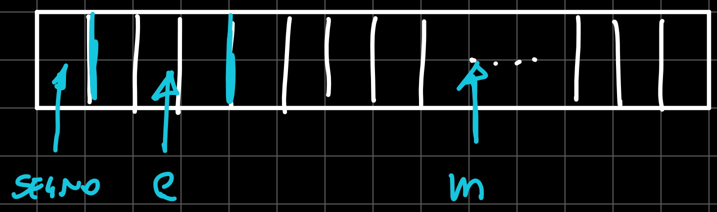
} RANGE ESPONENTE

(Analisi tutto quello che può succedere)

Computazione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{F}$ — * Floating Point?

Dato un n° reale α come si passa ad un suo rappresentante $\tilde{\alpha}$. (0.1 in base 10 in base 2 ha una rappresentazione periodica)

Es in base 10)



$\mathbb{F}(10,\ 5,\ -50,\ +49)$

Dato $\alpha = 0.345678 \cdot 10^0 \in \mathbb{R}$? $\tilde{\alpha} \in \mathbb{F}$

Domanda 1 → è in forma scientifica? (sì)

Domanda 2 → l'esponente è nel range? (sì) $-50 \le p \le 49$

Domanda 3 → Mantissa $t \le 5$? (no)

D3 → Troncamento mantissa: tronchiamo a 5 cifre $\tilde{\alpha} = 0.34567 \cdot 10^0$

↳ Arrotondamento mantissa: applica regole / formule

(migliore da fare se possibile)

1 2 3 4 5 6° pos.

$$\begin{array}{r} 0.345678 \\ +\ \ \ \ \ 5 \end{array} \quad = \frac{\beta}{2}$$

$$0.34568\,|\,3$$

$\tilde{\alpha} = 0.34568 \cdot 10^0$

Altro esempio:

$\alpha = 34.5678 \cdot 10^{49}$

| Form. Sc.

$= 0.345678 \cdot 10^{51}$ → esponente non in range

Non rappresentabile!

1) Forma scientifica
2) Esponente → no → overflow

Altro esempi

$\alpha = 0.00345678 \cdot 10^{-49}$

| Form. Sci.

$= 0.345678 \cdot 10^{-51}$

1) Forma scientifica
2) Esponente → no → underflow → non si blocca ma

approssimato a gradual under floor

Altro Esempio :

Problema che risolviamo e' passare da $\mathbb{R} \to \mathbb{F}$

Esempio iniziale $\mathbb{F}(2, 3, -1, 2)$

1° Domanda → Quanti bit si usano per memorizzarli ?

2° Se ci da $\alpha = (0.11011)_2 \cdot 2^{-1}$ chi e' $\tilde{\alpha}$ che lo rappresenta in memoria ?

3° $\alpha = (11.011)_2 \cdot 2^2$ chi e' $\tilde{\alpha}$?

Quindi chiamiamo $fl: \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ — fl sta per float

$\alpha \to fl(\alpha) = \tilde{\delta}$

$$fl(\alpha) = \begin{cases} 0 \cdot \beta^0 & \text{se } \alpha = 0 \\ \pm m_t \cdot \beta^p & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \lambda \leq p \leq \omega \end{cases}$$

con m_t le prime t cifre di m

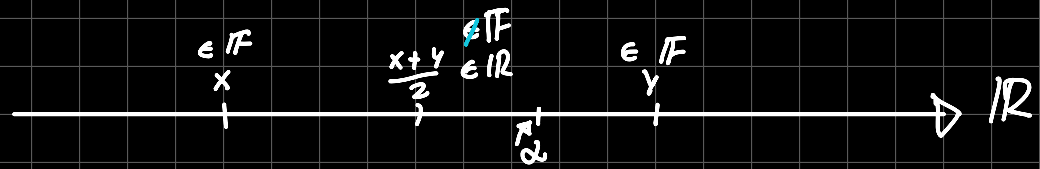
↳ con $m_t \begin{cases} \text{prime } t \text{ cifre di } m \text{ (troncamento)} \\ \text{prime } t \text{ cifre di } m + \frac{\beta}{2} \cdot \beta^{-(t+1)} \text{ (arrotondamento)} \end{cases}$

* se $p < \lambda$, $p > \omega$ α non e' rappresentabile

In breve : come approssimare un n° reale a un n° finito per il nostro calcolatore (che porterà a risultati non proprio esatti).

Interpretazione grafica della nostra situazione :

Siano $x, y \in \mathbb{F}$ n° finiti consecutivi (in mezzo non ci sono n° finiti ma n° reali)



Il float troncato di α e' x e il float arrotondato di α e' y

↓

$fl_T(\alpha) = x$

↓ Troncato

$$fl_A(\alpha) = \begin{cases} x & \text{se } \alpha < \frac{x+y}{2} \\ y & \text{se } \alpha \geq \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Standard ANSI/IEEE 754

* NaN : Not a Number (per es $\sqrt{x}$ con $x<0$) → arresta l'esecuzione
* Inf per % (Inf → informazione non numerica)
  ↳ esecuzione va avanti ma potrebbe interrompersi
* Gradual underflow
* Arrotondamento ai pari → quando conviene < arrotondamento / troncamento

↳ fl_{AP} (↓ arrot. pari)

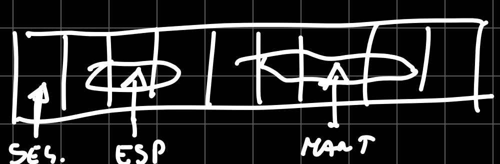
$$fl_{AP} = \begin{cases} x & \text{se } \alpha < \frac{x+y}{2} \\ \text{pari}(x,y) & \text{se } \alpha = \frac{x+y}{2} \\ y & \text{se } \alpha > \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Visita sito per queste cose!

*ES x CASA PER PROSSIMA VOLTA!!!

Simulare da inizio a fine di un "dato" dato dall'utente e lo vuole stampare a video

Esercizio: Seguendo lo standard ANSI/IEEE 754 si abbiamo 8 bit (base $\beta=2$) per rappresentare i numeri finiti e per la precisione 1 per segno, 3 esponente, 4 per mantissa,



Input: $\alpha = -(13.9)_{10}$

↓ inserire secondo standard (memorizzarlo)

↓ recuperarlo

↓

DECODIFICA → STAMPA

BASE 2 ⇄ BASE 10