POLINOMIO DI BERSTAN : ALG. 1 : $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x)$

↳ calcolo $[B_{0,n}(\bar{x}), \dots, B_{n,n}(\bar{x})]$

↳ COMBINAZIONE LINEARE

↳ PROPRIETA' $B_{i,n}(x)$

1) $B_{i,n} \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

2) $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$, PARTIZIONE DELL'UNITA'

3) $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(x)$ E' COMB. CONVESSA

COMBINAZIONE CONVESSA $\min_i \{b_i\} \leq P(x) \leq \max_i \{b_i\}$

COMPLESSITA' COMPUTAZIONALE DELL' ALG. 1:

SCHEMA RICORRENTE

$$\begin{array}{ccccc}
 & B_{0,0}(x) = 1 & & & \\
B_{0,1}(x) & & B_{1,1}(x) & & \\
B_{0,2}(x) & & B_{1,2}(x) & & B_{2,2}(x)
\end{array}$$

($\varnothing$, $1-x$, x, $\varnothing$; $1-x$, x, $1-x$, x, $\varnothing$)

$B_{1,2}(x) = x\, B_{0,1}(x) + (1-x) B_{1,1}(x)$ $\quad O(n^2)$

PER LO SCHEMA RICORRENTE

$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ADDIZIONI / SOTTRAZIONI $\xrightarrow{\text{PRECISO}} \frac{(n-1) \cdot n}{2}$

$n \cdot (n+1)$ MOLTIPLICAZIONI / DIVISIONI $\rightarrow n(n+1)$

COMBINAZIONE LINEARE : n (ADDIZIONI / SOTTRAZIONI), n (MOLTIPLICAZIONI / DIVISIONI) $\Big\}$ $O(n)$

QUESTO SERVE PK UN CALC. CHE LAVORA CON FUNZ. DEVE SAPER CALCOLARE POLINOMI CON ALGORITMI EFFICIENTI.

ALGORITMO n° 2 (DE CASTEL JAU)

PRONUNCIA : DE CASTEL GIO SO $\Rightarrow$ MATEMATICO FRANCESE

↳ HA PREFERITO NON CONDIVIDERE ED E' MENO CONOSCIUTO

BEZIER (INGEGNERE) $\Downarrow$ PUBBLICO TUTTO ED E' IL NOTO PERCHE' E' FAMOSO

BEZIER → USA IL POL. DI BERSTAIN

CASTEL SO DEFINI' LO STESSO POLINOMIO DI BERSTAIN MA PER CONTO SUO IN MODO DIVERSO.

↳ VEDIAMO IN CHE MODO: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_{i,n}(t)$

$$b_i^{[s]} = (1-x)\, b_i^{[s-1]} + x\, b_{i+1}^{[s-1]} \qquad s = 1, \dots, n \quad i = 0, \dots, n-s$$

con $b_i^{[0]} = b_i$

$$\begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{i \longrightarrow} \\ \hline j \downarrow & b_0^{[1]} & b_1^{[1]} & \cdots\cdots & b_{n-1}^{[1]} \\ & b_0^{[2]} & b_1^{[2]} & \cdots & b_{n-2}^{[2]} \\ & \vdots & & \ddots & \\ & b_0^{[n]} & & & \end{array}$$

$1-x$ $\quad x$ $\quad 1-x$ $\quad x$ $\quad x-1$ $\quad x$

$$b_0^{[n]} = p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x)$$

Complessità computazionale:

$$\left.\begin{array}{ll} \hookrightarrow \; n \cdot (n+1) & \text{MOLT / DIV.} \\ \hookrightarrow \; \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} & \text{ADD / SOTT.} \end{array}\right\} O(n^2)$$

Problema se i valori:

$b_0^{[0]} \quad b_1^{[0]} \cdots\cdots \; b_{n-1}^{[0]} \quad b_n^{[0]}$

sono molto oscillanti → positivi e negativi

Stabilità di Alg. 2

$$\underset{\text{ASSOLUTO}}{E_{ALG}} = \left| \tilde{P}_{(x)} - P_{(x)} \right| \leq c(n) \cdot \varepsilon_{max} \cdot \max_i \{ b_i \}$$

$|\varepsilon_{max}| < u$

SINGLE $\quad$ DOUBLE PRECISION $\qquad c(n) \simeq O(n)$

$$\underset{\text{RELATIVO}}{E_{ALG}} = \left| \frac{\tilde{P}_{(x)} - P_{(x)}}{P_{(x)}} \right| \leq c(n) \cdot \varepsilon_{MAX} \leq c(n) \cdot u$$

$$P_{(x)} = \sum_{i=0}^{n} b_i \, B_{i,n}(x) \qquad x \in [0,1]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i \left(x \, B_{i-1,n-1}(x) + (1-x) \, B_{i,n-1}(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i \, x \, B_{i-1,n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n} b_i \, (1-x) \, B_{i,n-1}(x)$$

$\underset{i=1}{\Vert} \rightarrow i=0$ non c'è

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i \, x \, B_{i-1,n-1}(x)}_{\text{TOLGO IL PRIMO TERMINE DELLA SOMMATORIA}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i \, (1-x) \, B_{i,n-1}(x)}_{\text{TOLGO L'ULTIMO TERMINE DELLA SOMMATORIA}}$$

↓

SCHIFTO GLI INDICI

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} \cdot B_{i,n-1}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i (1-x) B_{i,n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(b_{i+1} \cdot x + b_i (1-x)\right)}_{= b_i^{[1]}(x)} \cdot B_{i,n-1}(x)$$

↳ DIPENDONO DA x

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{[1]} B_{i,n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{[2]} B_{i,n-2}(x)$$

$$^{*}\, b_i^{[2]} = b_{i+1}^{[1]} x + b_i^{[1]} (1-x)$$

$$= \sum_{i=0}^{0} b_i^{[n]} B_{0,0}(x) = b_0^{[n]}$$

SIGNIFICATO AI COEFF.

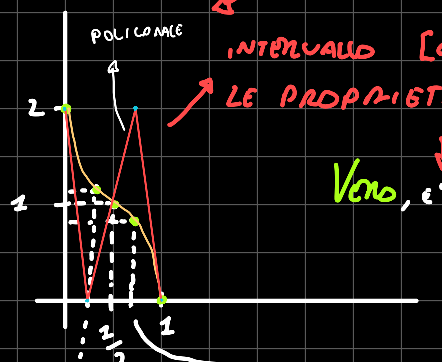
⇓

DISEGNARE LA POLIGONALE

ESEMPIO: $p(x) = 2B_{0,3}(x) + 0 \cdot B_{1,3}(x) + 2B_{2,3}(x) + 0 \cdot B_{3,3}(x) \quad x \in [0,1]$

$x = [0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1]$

$p(0) = 2 \qquad p(1) = 0$



$\frac{1}{3} \simeq \frac{28}{27} \qquad \frac{2}{3} \simeq \frac{26}{27}$

INTERVALLO [0, 2] PER LE PROPRIETÀ

⇓

VERO, È RISPETTATO

$x = \frac{1}{2}$

$^{*}\, 1 - x = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & & 0 & & 2 & & 0 \\
1-x & | & x/ & | & / & | & / \\
 & 1 & & 1 & & 1 \\
 & | & / & | & / \\
 & 1 & & 1 \\
 & | & / \\
 & 1 & \rightarrow & = p(\frac{1}{2})
\end{array}$$

$x = \frac{1}{3}$

$1 - x = \frac{2}{3}$

$x =$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & & 0 & & 2 & & 0 \\
1-x & | & x/ & | & / & | & / \\
 & \frac{4}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} \\
 & | & / & | & / \\
 & \frac{10}{9} & & \frac{8}{9} \\
 & | & / \\
 & \frac{28}{27} & \rightarrow & = p(\frac{1}{3})
\end{array}$$

$x = \frac{2}{3}$

$1 - x = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & & 0 & & 2 & & 0 \\
1-x & | & x/ & | & / & | & / \\
 & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{2}{3} \\
 & | & / & | & / \\
 & \frac{10}{9} & & \frac{8}{9} \\
 & | & / \\
 & \frac{26}{27} & \rightarrow & = p(\frac{2}{3})
\end{array}$$

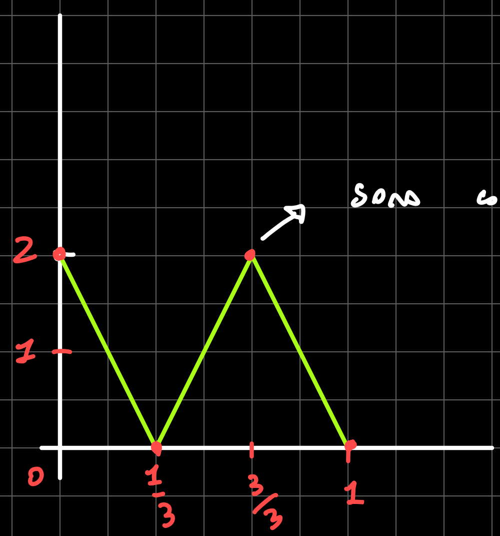
NOTA → ABBIAMO FATTO OP. SOLO CON QUANTITÀ POSITIVE!

ES x CASA: VALUTARE IL SEGUENTE POL. NELLA BASE DI BERNSTAIN

$$p(x) = 2B_{0,2}(x) - 2B_{1,2}(x) + 2B_{2,2}(x) \qquad x \in [0,1]$$

NEI PUNTI: $x = [0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI COEFFICIENTI



SONO COME CALAMITE