Il problema da risolvere è trovare una soluzione di un sistema lineare. Se è composto da più equazioni e più incognite si dice sistema quadrato o normale.

In forma matriciale: (dati di partenza)

matrice con elementi $\in \mathbb{R}$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \underline{b} \in \mathbb{R}^{m}$$, determinare $\underline{x}$ (incognito) $\in \mathbb{R}^{n}$

vettori

t.c. valga $A\underline{x} = \underline{b}$ (forma di un sistema lineare) + (limitata a matrici quadrate $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nel nostro caso)

Ci chiediamo:

- vettore $\underline{b}$ può essere scritto come combinazione lineare delle colonne di A?
  - ↳ se vero, gli elementi di $\underline{x}$ sono i coefficienti di quella combinazione lineare.
- La soluzione potrebbe esistere o non esistere e potrebbe essere o non essere unica.
- A è non singolare se vale una di queste definizioni equivalenti:
  - ↳ $\det(A) \neq 0$
  - ↳ $rk(A) = \dim(A)$ ($rk(A)$ = numero di colonne linearmente indipendenti)
  - ↳ $\exists A^{-1}$ t.c. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
  - ↳ Sia $\underline{z}$ (un qualsiasi vettore non nullo), se applico A su $\underline{z}$ non otteniamo un vettore nullo.
    $\forall \underline{z} \in \mathbb{R}^n \quad A\underline{z} \neq \underline{0}, \quad \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$
  - ↳ λ_i autovalori di A e u_i gli autovettori, $Au_i = \lambda_i u_i \Rightarrow \lambda_i \neq 0 \quad \forall i$

Esistenza Soluzione: (la matrice è non singolare)

A	b	# Soluzioni
non singolare	arbitrario	unica → il caso che considereremo nel nostro studio
singolare	$b \in R(A)$	infinite
singolare	$b \notin R(A)$	nessuna

$$A = [\overset{\text{prima colonna}}{a_1}, a_2, \dots, \overset{i\text{-sima colonna}}{a_n}], \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\text{scalare}} \overset{\text{colonne di } A}{a_i}$$

$R(A)$ è l'insieme $\{ \underline{z} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \underline{z} = \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \}$

↳ range della matrice A

Condizionamento del Problema $A\underline{x} = \underline{b}$: esaminare come, perturbazioni sugli elementi della matrice A e sugli elementi del termine noto b influenzano la soluzione x del sistema lineare. Queste perturbazioni sono dovute agli errori di approssimazione quando la matrice A ed il termine noto b vengono rappresentati con numeri finiti.

I nostri dati sono: matrice A e il termine noto b, si vuole determinare l'accuratezza della soluzione $\underline{x} \Rightarrow |\underline{x} - \tilde{\underline{x}}|$ ($\underline{x}$ → sol. esatta, $\tilde{\underline{x}}$ → sol. numerica), ma per farlo ci serve uno strumento per misurare il vettore, la norma vettoriale.

Def. Norma Vettoriale $\|\cdot\|$: funzione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dato $\underline{x}$ associa uno scalare

$\underline{x} \longrightarrow \|\underline{x}\|$ (grandezza di $\underline{x}$).

Funzione che gode delle seguenti proprieta':

i) $\|\underline{x}\| > 0, \forall x$
ii) $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$
iii) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (disuguaglianza triangolare)
iv) $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Alcune norme vettoriali:

- Norma Uno $= \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Norma Due $= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\underline{x}^T x} = (x^T x)^{1/2} \rightarrow$ norma due o euclidea $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Norma Infinito $= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

E sono tutti i casi particolari della norma p: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Relazione tra norme:

- $\|\underline{x}\|_1 \geq \|\underline{x}\|_2 \geq \|\underline{x}\|_\infty$
- $\|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_2$
- $\|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$
- $\|\underline{x}\|_1 \leq n\,\|\underline{x}\|_\infty$

Sono tutte equivalenti, se una norma e' piccola allora lo saranno anche le altre.

Es:
$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_\infty$
$\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\underline{x}\|_2$

Th. di equivalenza delle norme: Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due norme vettoriali. Allora le due norme sono equivalenti, cioe' esistono α e $\beta \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha \leq \beta$, t.c. $\forall\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e':
$\alpha\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq \beta\|\cdot\|''$.

Per una data norma vettoriale si definisce:
- Errore Assoluto: $\|\tilde{x} - x\|$
- Errore Relativo: $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$

Il ragionamento si applica in modo analogo anche alle matrici per misurare l'accuratezza di A rispetto alla sua approssimazione $\tilde{A}$.

Norme Matriciali: Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\|\cdot\|$ e' una funzione $\mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ con le proprieta analoghe a quelle viste per le norme vettoriali.

i) $\|A\| > 0, \forall A$
ii) $\|A\| = 0 \iff A = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0})$
iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (disuguaglianza triangolare)
iv) $\|\alpha A\| = \alpha\|A\|, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Norma Indotta di Matrice: Per ogni norma vettoriale, possiamo definire una corrispondente norma matriciale:

$$\|A\| = \max_{\substack{\underline{x} \neq 0 \\ \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \longrightarrow \text{codifica relativa della trasformazione}$$

Si noti, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deve essere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ da cui si tratta del max di una norma in $\mathbb{R}^m$ su una norma in $\mathbb{R}^n$.

Risultato: Se $\|\cdot\|$ denota una norma vettoriale e la sua corrispondente norma matriciale indotta, allora:

$$\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\| \quad , \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Le norme matriciali più importanti sono:

Norma Uno: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ (somma elementi colonna)

Norma Due: $\|A\|_2 = \left(\lambda_{max} \cdot (A^T A) \right)^{1/2}$ "norma spettrale"

Norma Infinito: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ (somma elementi riga)

Relazioni tra norme matriciali: valgono le seguenti relazioni, che possono essere dimostrate dalle relazioni fra le norme vettoriali e la definizione di norma indotta.

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|A\|_\infty$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \, \|A\|_1$
- $\max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n \max_{i,j} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

Errore Inerente (come si studia?): si considera separatamente eventuali perturbazioni sulla matrice A e sul vettore dei termini noti $\underline{b}$.

Introduciamo un vettore di perturbazione $\delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ sul termine noto; cerchiamo $\underline{x} + \delta\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ soluzione del sistema perturbato:

$$A(\underline{x} + \delta\underline{x}) = \underline{b} + \delta\underline{b} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}, \quad \delta\underline{b} = \begin{bmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \vdots \\ \delta b_n \end{bmatrix}$$

$\delta b_i = \tilde{b}_i - b_i$ (distanza tra gli elementi)

In che relazione sono errore sulla soluzione: $\frac{\|\tilde{\underline{x}} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|\underline{x}\|}$

ed errore sui dati: $\frac{\|\tilde{\underline{b}} - \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$.

* $\frac{\|\delta x\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$?

$$A(\underline{x} + \delta\underline{x}) = \underline{b} + \delta b, \quad \cancel{A\underline{x}} + A\delta x = \cancel{\underline{b}} + \delta b \xrightarrow{A\underline{x} = \underline{b}} A\delta x = \delta b \Rightarrow \overbrace{A^{-1}A}^{I}\delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\|\delta\underline{x}\| = \|A^{-1}\delta\underline{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\left(\frac{\|b\|}{\|A\|}\right)} = \underbrace{\boxed{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}}_{K(A)} \cdot \boxed{\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

$K(A)$ → NUMERO DI CONDIZIONE DELLA MATRICE A

$$b = Ax$$
$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$
$$\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

*NELLA FUNZIONE TEST:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$K(A) = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$ → NUMERO DI CONDIZIONE VALUTATO SPERIMENTALMENTE

$$K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$ → COND() SU MATLAB ↳ FUNZIONE

L' ERRORE RELATIVO E' $\le K(A)\cdot$ PERTURBAZIONE RELATIVA SUL TERMINE NOTO

$$K(A) := \|A\|\cdot\|A^{-1}\|, \quad (A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

*$(A+\delta A$ INVERTIBILE $\iff r = \|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1)$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)}{1-r}\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

L' ERRORE RELATIVO E' $\le \frac{K(A)}{1-r}\cdot$ PERTURBAZIONE RELATIVA SULLA MATRICE A

CASO GENERALE:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{K(A)}{1-r}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

METODI NUMERICI "DIRETTI" (→ NUMERO FINITO DI PASSI PER ARRIVARE A SOLUZIONE) PER LA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: I METODI SI BASANO SU UNA FATTORIZZAZIONE DELLA MATRICE A, OSSIA COSTRUISCONO DUE MATRICI IL CUI PRODOTTO SIA UGUALE AD A:

1) FATTORIZZAZIONE LU (L (LOW) MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE CON DIAGONALE UNITARIA, U (UP) MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE). ↳ *$A = LU$

2) FATTORIZZAZIONE QR (Q MATRICE ORTOGONALE, R (RIGHT) MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE). *$A = QR$

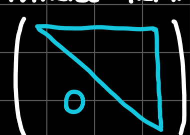
LO SCOPO E' QUELLO DI RICONDURRE LA SOLUZIONE DEL SISTEMA $Ax = b$ ALLA SOLUZIONE DI DUE SISTEMI CON MATRICI STRUTTURATE. LA SOLUZIONE DEL SISTEMA SI OTTIENE IN DUE FASI:

1° FASE: FATTORIZZAZIONE DI A

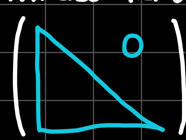
2° FASE: SOLUZIONE DI DUE SISTEMI LINEARI LE CUI CARATTERISTICHE DI SOLUZIONE SONO PIU' SEMPLICI E MENO COSTOSE RISPETTO A QUELLE DEL SISTEMA ORIGINARIO.

MATRICI TRIANGOLARI (INF. O SUP.):

↗ MATRICE TR. INF.

$L =$ 

↗ MATRICE TR. SUP.

$U =$ 

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$
$$\det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

SIA $Lx = b \qquad l_{ii} \ne 0 \ \forall i$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} l_{11}x_1 = b_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = b_2 \\ l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \overset{\text{SOSTITUZIONE IN AVANTI}}{\Longrightarrow}$$

$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$ — 1 OP

$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$ — 3 OP — 9 OPERAZIONI

$x_3 = \frac{b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}}$ — 5 OP

Costo, in generale, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}} \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

Costo i-simo elemento x_i: 1 divisione (per l_{ii}) + $(i-1)$ prodotti (per $l_{ij} x_j$) + $(i-1)$ sottrazioni

Costo totale: $\sum_{i=1}^{n} 1 + (i-1) + (i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = \overset{\text{costo}}{\boxed{n^2}}$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Sia $Ux = y$ $\qquad u_{ii} \neq 0 \ \forall i$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = y_1 \\ u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = y_2 \\ u_{33} x_3 = y_3 \end{cases}$$

Sostituzione all'indietro $\Longrightarrow$

$$x_3 = \frac{y_3}{u_{33}}$$

$$x_2 = \frac{y_2 - u_{23} x_3}{u_{22}}$$

$$x_1 = \frac{y_1 - u_{12} x_2 - u_{13} x_3}{u_{11}}$$

Costo, in generale, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\boxed{x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \qquad i = 1,2,\dots,n} = \underset{\text{costo}}{\boxed{n^2}}$$

Ma se non dovesse essere triangolare?

Lo scopo è quello introdotto prima, riprendiamo:

"Lo scopo è quello di ricondurre la soluzione del sistema $Ax = b$ alla soluzione di due sistemi con matrici strutturate. La soluzione del sistema si ottiene in due fasi:

1° fase: fattorizzazione di A

2° fase: soluzione di due sistemi lineari le cui caratteristiche di soluzione sono più semplici e meno costose rispetto a quelle del sistema originario."

1) Fattorizzazione $LU \Rightarrow A = LU$
2) Fattorizzazione $QR \Rightarrow A = QR$

Procedimento: $A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow L\underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b}$ —— possiamo porre ⟶ $\underline{y} := U\underline{x}$, $\overset{\text{noti}}{L\underline{y} = \underline{b}}$ ↳ posso trovarlo

Fattorizzando la matrice, 1° passo $L\underline{y} = \underline{b}$, 2° passo $U\underline{x} = \underline{y}$

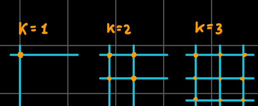
Minore principale di ordine "k" di una matrice A: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} \boxed{*} & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}} \qquad \overset{A'}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}} \qquad \overset{A'}{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}$$

Ordine uno $\qquad$ Ordine due $\qquad$ Ordine tre

Considero la sottomatrice quadrata A' formata dall'intersezione delle prime K righe e colonne di A. Il minore principale di ordine K di A è il determinante $\det(A')$.

ES $(K{:}2) \rightarrow a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$



Metodo di Gauss: Sia $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad L_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ *^1 & 1 & \\ *^2 & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1^{(1)} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(1)}} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

← PRIMA RIGA INVARIATA

$\dim(L_1^{(1)}) = \dim(A)$

$a_{11} \neq 0$

$$*^1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} , \quad *^2 = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$$

$$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} \Big\}$$

MINORE PRINCIPALE DI ORDINE 2

AZZERO GLI ELEMENTI SOTTO AL PRIMO ELEMENTO DELLA DIAGONALE.

$$L_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & *^1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{L_2^{(2)} \cdot (L_1^{(1)} A)}_{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

← PRIMA RIGA INVARIATA

← SECONDA RIGA INVARIATA

← $n-1$ OPERAZIONI PERCHE' SONO $n-1$ COLONNE CHE PRENDO IN CONSIDERAZIONE.

$$*^1 = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

U → Matrice Triangolare Superiore

AZZERO GLI ELEMENTI SOTTO AL SECONDO ELEMENTO DELLA DIAGONALE.

$L_2^{(2)} \cdot (L_1^{(1)} A) = U \Rightarrow A = (L_2 L_1)^{-1} \cdot U \Rightarrow A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$, PONENDO $L_1^{-1} L_2^{-1} = L$ OTTENIAMO $A = LU$

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{bmatrix} \qquad L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice ancora triangolare

Continuo appunti, non ordinato:

PERCHÉ CONSIDERO SOLO $n-1$ MINORI PRINCIPALI
PK L'ULTIMA COLONNA NON LA CONSIDERO.

DI ORDINE $k = 1, \dots, n-1$

Th. Esistenza fattorizzazione LU: se tutti i minori principali di ordine k di A sono non nulli ($\neq 0$) allora $\exists!$ (esiste ed è unica) la fattorizzazione LU della matrice A.

NUM DI ADD/MOLT/DIV/SOTT.

Costo computazionale:

1° passo → calcolare L_1 2 op.

2° passo → prodotto $L_1 A$ 4 elem. 2 op (2 op. per elem.)

3° passo → calcolare L_2 1 op.

4° passo → prodotto $L_2 L_1 A$ 1 elem. 2 op.

In generale, per $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$L_1 = n-1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 = n-2$

$L_3 = n-3$

$\vdots$

$L_{n-1} = n-(n-1) = 1$

UGUALE

$L_1 A$ $\quad$ $A^{(1)} = L_1 A$ $\quad$ OP $= (n-1)(n-1)$

$L_2(L_1 A)$ $\quad$ $A^{(2)} = L_2 A^{(1)}$ $\quad$ OP $= (n-2)(n-2)$

$L_3(L_2(L_1 A))$ $\quad$ $A^{(3)} = L_3 A^{(2)}$ $\quad$ OP $= (n-3)(n-3)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$L_{n-1}(L_{n-2} \dots L_1) A \to L_{n-1} A^{(n-2)}$ $\quad$ OP $= \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{MATRICE } 1\times 1}$

Costo totale calcolo matrici L: $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

$$(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+\dots+2^2+1 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\text{N tot.}: \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3-n^2}{6} \approx \frac{n^3}{6}$$

ESEMPIO : RISOLVERE

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$A = LU$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{L_1 A}_{A^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad U$$

$-\frac{12}{3} \Downarrow -4$

$$L_2 L_1 A = U \Rightarrow A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{L} U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1 $L\underline{y} = \underline{b}$

2 $U\underline{x} = \underline{y}$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \overset{1}{L\underline{y} = \underline{b}} \quad \text{E DOPO } 2$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -3 \\ y_3 = 8 \end{cases}$$

$$U \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13}{6} \\ x_2 = -\frac{7}{3} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

2 APPLICAZIONI DELLA FATTORIZZAZIONE :

1) CALCOLO DELL' INVERSA : SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ INVERTIBILE, DETERMINARE LA MATRICE A^{-1} t. c. $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

DATA LA MAT. $\boxed{AX = I_n}$ **

$X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, x_3, \dots, x_n]$

$I_n = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

** EQUIVALENTE A:

$$\begin{cases} A\underline{x}_1 = \underline{e}_1 \\ A\underline{x}_2 = \underline{e}_2 \\ \vdots \\ A\underline{x}_n = \underline{e}_n \end{cases}$$

"n SISTEMI LINEARI DI DIM. n CON LA STESSA MATRICE DEI COEFFICIENTI"

NOTA RIPRESA *

$A\underline{x} = b \qquad \begin{cases} L\underline{y} = \underline{b} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$

$LU\underline{x} = \underline{b}$

RISOLUZIONE PROD. IN DUE PASSAGGI :

1) SI FATTORIZZA LA MATRICE A (COSTO $\frac{n^3}{6}$ AFFRONTATO 1 SOLA VOLTA)

2) SI RISOLVONO n SIS. LINEARI CON L'APPROCCIO DI SCOMPORLI IN DUE PASSAGGI :

$$\begin{cases} L y_1 = e_1 & n^2 \\ U x_1 = y_1 & n^2 \end{cases} \quad \begin{cases} L y_2 = e_2 & n^2 \\ U x_2 = y_2 & n^2 \end{cases} \quad \dots\dots \quad \begin{cases} L y_n = e_n & n^2 \\ U x_n = y_n & n^2 \end{cases}$$

Calcolo del determinante:

$$\det(A) = \det(LU) \overset{\text{BINET}}{=} \det(L)\,\det(U) = \left(\prod_{i=1}^{n} e_{ii}\right)$$

con matrice di permutazione
↑
scambio delle righe

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non posso fare la fattorizzazione LU. $(a_{11} = 0)$

$$\begin{cases} 3x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_2 = 5 \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

⇓

$a_{11} \neq 0$

Scambio con la matrice di permutazione "P":

$PA = A$ con righe scambiate

↳ matrice identità con righe o colonne scambiate

$$e_1: \quad I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$$

$$P = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$$

$$P = [\underline{e}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3]$$

$$P = [\underline{e}_1, \underline{e}_3, \underline{e}_2]$$

Se P è una matrice di permutazione:

se $\underbrace{P \cdot A}_{\text{scambio righe}}$ $\qquad \underbrace{A \cdot P}_{\text{scambio colonne}}$

Inoltre le matrici di permutazione sono non singolari (sono invertibili)

$$P^{-1} = P^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to [\underline{e_1}, \underline{e_3}, \underline{e_2}] \qquad PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

CI INTERESSA DETERMINARE SE $\exists$ UNA MATRICE P t.c. $P \cdot A$ (SCAMBIO RIGHE) POSSO FATTORIZZARE A.

$\hookrightarrow PA = LU$

Metodo di Gauss (con scambio delle righe):

Es.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad P_1 = I \qquad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

SCAMBIO LE RIGHE 2 E 3 DELLA MATRICE $A^{(1)}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = P_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = L_2 P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathcal{U}$$

$$-\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}}$$

$$L_2 P_2 A^{(1)} = \mathcal{U} \Rightarrow L_2 P_2 L_1 \underbrace{}_{P_2^{-1} P_2} P_1 A = \mathcal{U}$$

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A^{(0)} = L_1 P_1 A$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_2 P_2 L_1 P_2^{-1}}_{T} \underbrace{P_2 P_1}_{P} A = \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow PA = T^{-1} \mathcal{U}$$

$\hookrightarrow$ TRIANG. INFERIORE CON DIAGONALE TUTTI "1".

$$L = T^{-1}$$

$$\Rightarrow PA = L\mathcal{U}$$

$PA = LU$ $\to$ FORMA PER RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Th. : la fattorizzazione $PA = LU$ con lo scambio righe $\exists$ sempre.

Importante : $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad PA = LU$ $\qquad$ prima $\rightarrow$ $\begin{cases} A\underline{x} = \underline{b} & A = LU \\ LU\underline{x} = \underline{b} \end{cases}$

ora $\rightarrow$ $\underbrace{PA}_{\text{scambio righe di } A}\underline{x} = P\underline{b}$ $\rightarrow$ scambio righe termine noto

$PA = LU$

$\Rightarrow LU\underline{x} = P\underline{b} = \underline{\tilde{b}} \Rightarrow \boxed{LU\underline{x} = \underline{\tilde{b}}}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} L\underline{y} = \underline{\tilde{b}} \\ U\underline{x} = \underline{y} \end{cases}$$

$\tilde{L} = L + \delta L \qquad \tilde{U} = U + \delta U$

* $\delta L = \tilde{L} - L$
↳ diff. tra elem. di $\tilde{L}$ ed L

Stabilità fattorizzazione LU:

Aritmetica finita $\rightsquigarrow$ genera $\tilde{L}$ $\tilde{U}$ (invece di L e U esatti)

$\tilde{L}\tilde{U} = \tilde{A} \qquad \tilde{A} = A + \delta A$

$A = LU$

$\cancel{A} + \delta A = (L + \delta L)(U + \delta U) = \cancel{LU} + L\,\delta U + \delta L\, U + \delta L\,\delta U \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A = L\,\delta U + \delta L\, U + \delta L\,\delta U$ } di che pur non commettendo grandi errori, se L o U hanno elem. grandi allora anche l'errore sarà grande. L'ordine di grandezza dell'errore dipende dalla grandezza dei elem. di U o L

se gli elem. di L e U sono grandi, gli elementi di δA sono grandi

La fattorizzazione (LU) è stabile s.s.s. gli elem. di L e U non sono troppo grandi rispetto agli elem. di A

Formalmente :
- **stabile in senso forte** se $\exists$ due costanti α e β indipendenti dalla dimensione (quindi dall'ordine n di A) t. per cui gli elem.

$$|l_{ij}| \leq \alpha \qquad |u_{ij}| \leq \beta$$

- **Stabilità in senso debole** se le costanti α e β dipendono dalla dim. della matrice (quindi dall'ordine n)

l_{is} SONO DEFINITI SEMPRE COME: $l_{is} = -\dfrac{a_{is}^{(s-1)}}{\underbrace{a_{ss}^{(s-1)}}_{\text{ESPLODE PER DENOMINATORE PICCOLO E NUM. GRANDE}}}$ $i = s+1$ A n

POSSONO ASSUMERE VALORI GRANDI QUANDO DEN << NUM

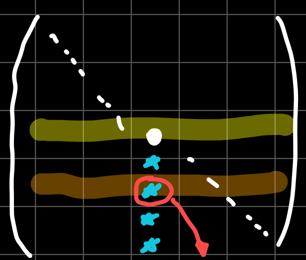
$a_{is}^{(s-1)} \gg a_{ss}^{(s-1)}$

IDEA: SCAMBIO DI RIGHE ANCHE PER ELEMENTI FASTIDIOSI SULLA DIAGONALE CHE POSSANO FAR ESPLODERE IL DENOMINATORE.

SOL: FARE SEMPRE LO SCAMBIO DI RIGHE

METODO DI GAUSS CON SCAMBIO RIGHE E PERNO MASSIMO → ELEMENTO DIAGONALE O PIVOT

$A^{(s-1)} =$

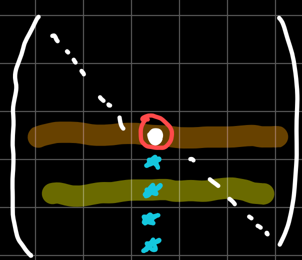


SI SCAMBIANO LE DUE RIGHE APPLICANDO UNA MATRICE "P" DI PERMUTAZIONE.

SELEZIONO L'ELEM DI MODULO MASSIMO, SCAMBIO LA RIGA S CON LA RIGA CON ELEM. DI MODULO MASSIMO.

LEZIONE 7

$P_s A^{(s-1)} =$



*IDEA: SCAMBIO LA RIGA "DIAGONALE" CON LA RIGA CONTENENTE L'ELEMENTO DI MODULO MASSIMO (SOTTO DIAGONALE) DELLA COLONNA S-ESIMA.

$|a_{ss}^{(s-1)}| \geq |a_{is}^{(s-1)}|, \quad i = s, \ldots, n$

IN QUESTO MODO $|l_{is}| = \dfrac{|a_{is}^{(s-1)}|}{|a_{ss}^{(s-1)}|} \leq 1$ → GLI ELEMENTI DI L NON POSSONO CRESCERE SENZA LIMITAZIONI!

STABILITA' IN SENSO DEBOLE

SI DIMOSTRA: $\max |u_{is}| \leq \underbrace{2^{n-1}}_{\beta} \cdot \max |a_{is}|$ ← GLI ELEMENTI DI U POSSONO CRESCERE ESPONENZIALMENTE AL CRESCERE DI n.

⇒ LA FATTORIZZAZIONE CON SCAMBIO RIGHE E PERNO MASSIMO E' STABILE IN SENSO DEBOLE

IN MATLAB → FUNZIONE LU(), OUTPUT P, L, U E.C. $PA = LU$

Es: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

SOL. ESATTA: $x_1 = 1 + \frac{1}{10^{20}-1} \simeq 1 \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{10^{20}-1} \simeq 1$

FATT. $A = LU$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10^{-20}} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}$$

U

$$L_1 A = U \Rightarrow A = (L_1)^{-1} U$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$$

RISOLVIAMO $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L\underline{y} = \underline{b} \quad U\underline{x} = \underline{y}$

$$L\underline{y} = \underline{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ 10^{20} y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 10^{20} \end{array}$$

| ARIT. FINITA

$= -10^{20}$

$$U\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 10^{-20} x_1 + x_2 = 1 \\ -10^{20} x_2 = -10^{20} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

ARIT. FINITA

$$\underline{x} = (0, 1)^T$$

*

$$\boxed{\text{SOL. ESATTA: } x_1 = 1 + \frac{1}{10^{20}-1} \simeq 1 \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{10^{20}-1} \simeq 1}$$

↳ FALSO, NON COINCIDONO

ALLORA

APPLICO SCAMBIO RIGHE E PERNO MASSIMO:

Applico Scambio righe e perno massimo :

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow U$$

SI METTE IL MENO DAVANTI ALL' ELEM. NON BANALE DELLA MATR.

$$* \; L_1 P_1 A = U \Rightarrow P_1 A = L_1^{-1} U$$

$$PA = LU \qquad P = P_1 \qquad L = L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$$

RISOLVIAMO : $L\underline{y} = P\underline{b} \qquad U\underline{x} = \underline{y}$

$$L\underline{y} = P\underline{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 2 \\ 10^{-20} y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 \end{array}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{COINCIDE CON LA SOL. ESATTA !}}$$

Fattorizzazio QR : $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A = \underbrace{Q}_{\text{matrice ortogonale}} \underbrace{R}_{\text{triangolare superiore}}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = (\nabla)$

Q ortogonale $Q^T Q = I$ (equiv. $Q^{-1} = Q^T$)

La fattorizzazione QR $\exists$ sempre!

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ (A non singolare)

Fatt. $\Rightarrow$ $QR\underline{x} = \underline{b}$ $\Rightarrow$ 1° passo: Poniamo $\underline{y} = R\underline{x}$ e risolviamo $Q\underline{y} = \underline{b}$

I sost. $A = QR$

$$\underbrace{Q^T Q}_{= I}\underline{y} = Q^T\underline{b}$$

$$\underline{y} = Q^T\underline{b}$$

Secondo passo: Risolviamo $R\underline{x} = \underline{y}$ con sostituz. all'indietro ($R = \nabla$)

Matrici elementari di Householder, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c.

(*) $H\underline{a} = \begin{pmatrix} \pm\|\underline{a}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← vett. forma particolare; $\|\cdot\|_2$: norma euclidea

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

(Azzera tutte le componenti di $\underline{a}$ tranne la prima!)

Prop. di H: $H^T = H$ (simm.)

$H^T = H^{-1}$ i.e. $H^T H = I$ (ortog.)

Si considera $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \pm \|\underline{a}\|_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

vettore di Householder

$$\underset{n\times n}{H} = I - \overbrace{\frac{2}{\|\underline{v}\|_2^2}}^{\beta} \underbrace{\underline{v}\,\underline{v}^T}_{n\times n} = I - \beta\, \underline{v}\,\underline{v}^T$$

Si può dimostrare (dim è sulle disp) che H ottenuta in questo modo è simmetrica, ortogonale, e ha la proprietà (*).

Algoritmo per fatt. QR (A $n \times n$ oppure A $m \times n$ $m > n$)

A $n \times n$ $\quad A = (\underline{a}_1 \ \underline{a}_2 \ \ldots\ldots \ \underline{a}_n)$

↳ colonne di A

Poniamo $A_1 = A$ e costruiamo H_1 di Householder t.c.

elem. non nulli

$$\underbrace{H_1 A_1}_{A_2} = \begin{pmatrix} \|\underline{a}_1^{(1)}\| & x & \cdots & x \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & x & \cdots & x \end{pmatrix} \qquad H_1 = I - \beta_1 V_1^T V_1$$

costruiamo H_2 di Householder t.c.

$$H_2 A_2 = \begin{pmatrix} \|\underline{a}_1^{(1)}\| & x & \cdots & x \\ 0 & \|\underline{a}_2^{(2)}\| & x \cdots & x \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x \cdots & x \end{pmatrix} \qquad H_2 = I - \beta_2 \underline{V}_2^T \underline{V}_2$$

Ripetendo il passaggio su tutte le colonne si ottiene:

$$H_{n-1} A_{n-1} = \begin{pmatrix} \|\underline{a}_1^{(1)}\| & x & x & x \\ 0 & \|\underline{a}_2^{(2)}\| & x & x \\ \vdots & & \ddots & x \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \|\underline{a}_n^{(n-1)}\| \end{pmatrix} \rightarrow R \text{ (triang. sup)}$$

Prodotto di matrici ortogonali è ancora una mat. ortogonale.

$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 H_1}$ $A = R$ $\qquad HA = R \Rightarrow A = \underset{\substack{\| \\ Q}}{H^T} R \Rightarrow A = QR$

Il prodotto di mat. ortogonali è ancora una mat. ortogonale.

$H \rightarrow H_{n-1} \cdots H_2 H_1$

Cose importanti:

- Costo computazionale: $\boxed{\frac{2}{3} n^3}$ $\Rightarrow$ Gauss per LU $\approx \frac{1}{3} n^3$

  costo doppio rispetto alla fatt. LU

- Stabilità della fatt. QR: (analisi all'indietro)

• Stabilità della fatt. QR: (analisi all'indietro)

$\tilde{Q} = Q + \delta Q$
$\tilde{R} = R + \delta R$
$\tilde{A} = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$

se anche δA è grande → non va bene

$\tilde{A} = A + \delta A \qquad \underbrace{\tilde{A}}_{A + \delta A} = (Q + \delta Q)(R + \delta R) \overset{A = QR}{\Rightarrow} \delta A = \delta Q R + Q \delta R + \delta Q \delta R$

Le stime che si ottengono sono: • $\boxed{\max |q_{ij}| \le \|Q\|_2 = 1}$ poiché Q è ortog.

• $\boxed{\max |r_{ij}| \le \sqrt{n} \max |a_{ij}|}$

Confronto:

Fatt. LU:

$\max |u_{ij}| \le 2^{n-1} \max |a_{ij}|$

Fatt QR

$\max |r_{ij}| \le \sqrt{n} \max |a_{ij}|$

Entrambe le fattorizzazioni LU (con scambio righe e pivot massimo) e QR sono stabili in senso debole, però essendo

$\sqrt{n} << 2^{n-1}$

l'alg. QR risulta più stabile della fatt. LU.

Fine!