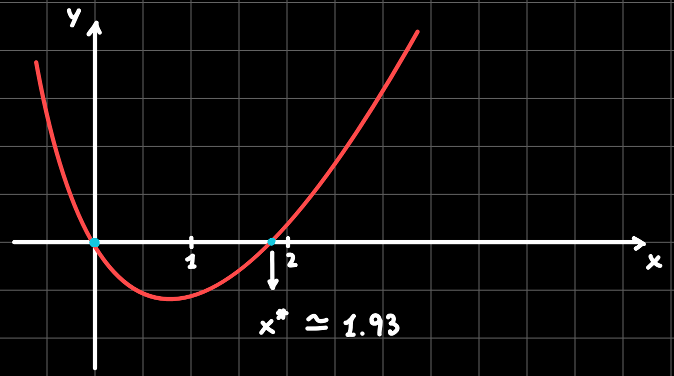
Lezione 11

Metodi per risolvere eq. non lineari: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vogliamo determinare x^* (x stella) t.c. $f(x^*) = 0$; x^* è detto **zero** (o **radice**) di f dell'eq. $f(x) = 0$

Es: $f(x) = x^2 - 4\sin(x)$



* Un eq. non lineare può avere un numero **arbitrario** di zeri (o radici).

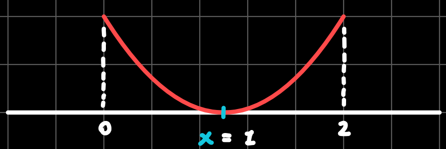
Es:

$f(x) = 0 \Rightarrow$
- $e^x + 1 = 0$ — nessuna sol.
- $e^{-1} - x = 0$ — una sol.
- $x^2 - 4\sin(x) = 0$ — due sol.
- $\sin(x) = 0$ — infinite sol.

Th. di Bolzano: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua (senza salti) e sia l'intervallo $[a,b] \in \mathbb{R}$ t.c. $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, deve avere almeno uno **zero** (o **radice**) nell'intervallo. Ovvero esiste un punto x^* t.c. $f(x^*) = 0$. È un teorema utilizzato per localizzare le radici delle equazioni.

Esempio: (molteplicità di una radice)

$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

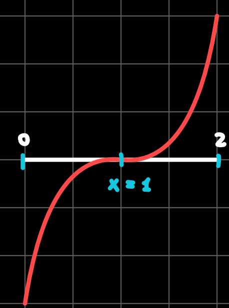


* x^* ha molteplicità m se $f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ e $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

*Es: $f(x) = (x-1)^3$

La radice ha molteplicità **due**, $f(x) = (x - x^*)^m q(x)$ t.c. $q(x) \neq 0$.

Quando $m = 1$ $(f(x^*) = 0 \quad f'(x^*) \neq 0)$, x^* è una radice semplice.



(molteplicità tre)

Errore inerente: (in che relazione sono errore sui dati ed errore sul risultato?)

Input: funzione $f(x)$ (in aritmetica esatta) — Es: $f(x) = a x^2 + bx + c$

funzione $\hat{f}(x)$ (in aritmetica finita) — $\hat{f}(x) = \hat{a} x^2 + \hat{b} x + \hat{c}$

Output: x^* radice di $f(x)$ (in aritmetica esatta)

$\tilde{x}^*$ radice di $\hat{f}(x)$ (in aritmetica finita) $(\hat{f}(\tilde{x}^*) = 0)$

* **Problema da risolvere**: determinare le radici di $\hat{f}(x) = 0$ e non di $f(x) = 0$.

Errore sui dati: distanza fra $f(x)$ e $\hat{f}(x)$.

$$E(x) := |f(x) - \hat{f}(x)|$$

Errore (Assoluto) sul risultato: $|\hat{x}^* - x^*|$

*Nota ⇒ I dati (input) sono la funzione e il risultato (output) sono le radici.

*Nota ⇒ x^* una radice di $f(x) = 0$
$\hat{x}^*$ una radice di $\hat{f}(x) = 0$

Th. di Lagrange (o valore medio): Se una funzione $f(x)$ e' continua su un intervallo $[a,b]$ e derivabile in ogni punto interno ad esso, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che la pendenza della retta tangente nel punto $(c, f(c))$ e' uguale alla pendenza della retta secante che collega i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Th. del valore medio:
$$\frac{\overbrace{f(\hat{x}^*) - f(x^*)}^{\text{rapporto incrementale}}}{\hat{x}^* - x^*} = f'(\xi), \quad \xi \in (\overset{a}{x^*}, \overset{b}{\hat{x}^*})$$

$$E(x^*) = |f(\hat{x}^*) - \overbrace{\hat{f}(\hat{x}^*)}^{0}| = |f(\hat{x}^*)| \Rightarrow \frac{|f(\hat{x}^*) - \overbrace{f(x^*)}^{0}|}{|\hat{x}^* - x^*|} = \frac{|f(\hat{x}^*)|}{|\hat{x}^* - x^*|} = \frac{\overbrace{E(\hat{x}^*)}^{\text{errore sui dati}}}{\underbrace{|\hat{x}^* - x^*|}_{\text{errore assoluto sul risultato}}} = |f'(\xi)|$$

$$\frac{E(\hat{x}^*)}{|\hat{x}^* - x^*|} = |f'(\xi)| \Rightarrow |\hat{x}^* - x^*| = \frac{E(\hat{x}^*)}{|f'(\xi)|}$$

L'errore $|\hat{x}^* - x^*|$ dipende criticamente sia dalla derivata della f in prossimità della radice, quanto dall'errore di valutazione della f.

- Nel vivo dei metodi per il calcolo per risolvere equazioni non lineari (Concetto Generale)

Sono i metodi iterativi: partiamo da un punto iniziale $x^{(0)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(1)}$

(Guess sulla posizione, sara' vicino alla soluzione)
Posso scegliere il punto anche guardando il plot.

Applicando una certa regola si può generare $x^{(1)}$ più vicina alla soluzione.

In modo iterativo continuo:

$$x^{(0)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(1)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(2)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(3)} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(k)}$$

Dato un certo $x^{(0)}$ (come guess iniziale vicina sulla soluzione) si genera una successione di valori $x^{(k)}$.
↳ Successione $\{x^{(k)}\}_k$

Dom. 1) Convergenza: la successione $x^{(k)}$ converge, $\exists \lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$?

Dom. 2) Consistenza: supponendo esista il limite, e' una soluzione di $f(x) = 0$?
↳ si ha convergenza alla soluzione s.s.s. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x^*$ e $f(x^*) = 0$

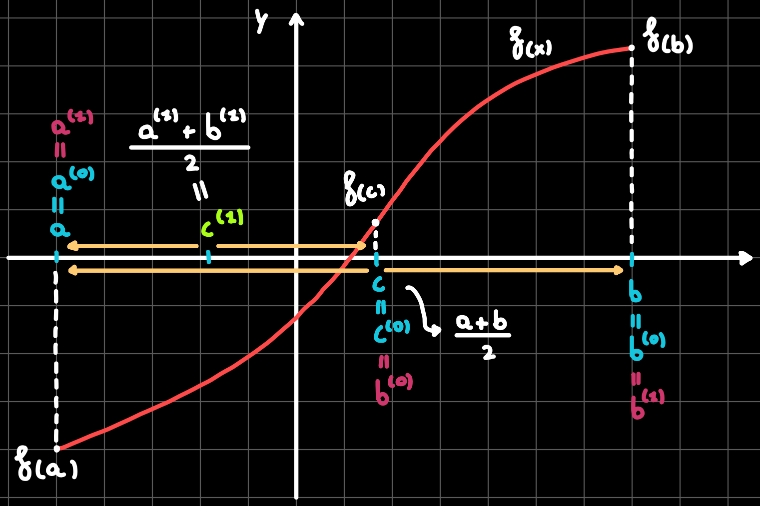
Dom. 3) Velocita' di convergenza (minor numero di passaggi per la soluzione): quanto velocemente $|x^{(k)} - x^*| \to 0$?

Importante: così' otteniamo una sola sol. → le radici possono essere più di una.

Idea → qual'ora convergente, il metodo genera una radice (scegliere diversi guess iniziali per generare tutte le radici), la convergenza dipende fortemente dalla scelta del guess iniziale.

$-\Rightarrow +$
$+\Rightarrow -$

Metodo di Bisezione: Sia $f(x) \in C([a,b])$ t.c. $f(a)f(b) < 0$ (cioè entrambe di segno opposto)



- $\exists$ almeno una soluzione di $f(x) = 0$ in $[a,b]$
- se $f(c) == 0$ stop $(x^* = c)$
- se $f(a)\cdot f(c) < 0$ (la radice $\in [a,c]$)
  ↳ restringo la ricerca a $[a,c]$:
  $a^{(1)} = a^{(0)}, b^{(1)} = c^{(0)}$
- se $f(a)\cdot f(c) > 0$, $f(c)\cdot f(b) < 0$, la radice $\in [c,b]$) restringo la ricerca a $[c,b]$:
  $a^{(1)} = c^{(0)}, b^{(1)} = b^{(0)}$

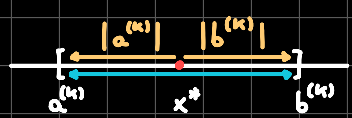
Costruisco la successione di intervalli contenenti la soluzione.

Mi fermo se sono vicino alla radice di una certa tolleranza TOL, se trovo esattamente la radice, oppure, l'intervallo è troppo piccolo.

$$\frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{\min(|a^{(k)}|,|b^{(k)}|)} < TOL$$

La costante TOL non può essere scelta arbitrariamente piccola, perché lavorando con numeri finiti la condizione di arresto dove con $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ si intende l'intervallo al k-esimo passo del metodo, potrebbe non essere mai soddisfatta.

Nota 1) $x^* = 0$



$$|b^{(k)} - a^{(k)}| > \min(|a^{(k)}|, |b^{(k)}|) \qquad \frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{\min(|a^{(k)}|,|b^{(k)}|)} > 1$$

Criterio di Arresto

Nota 2) Il test di arresto viene formulato così:

$$|b^{(k)} - a^{(k)}| \le Tol + 2u \cdot \min(|a^{(k)}|,|b^{(k)}|),$$ dove ora Tol può essere scelto arbitrariamente.

Il pro di questo metodo è che lavoro sui segni (non dipende dalla funzione $f(x)$).
Il contro è che è lento, ovvero, sfrutto poco le informazioni che ho per ottimizzare il problema.

Ordine di Convergenza (studio della velocità di convergenza ricondotto a quello dell'ordine di convergenza del metodo): Per confrontare diversi metodi iterativi che approssimano la stessa soluzione x^*, si può considerare la velocità con cui le successioni ottenute convergono alla soluzione.

Definizione: Sia $\{x^k\}_k$ una successione convergente ad x^* e sia $x^k \neq x^* \ \forall k$. Se esiste un numero reale $p \ge 1$, t.c.:

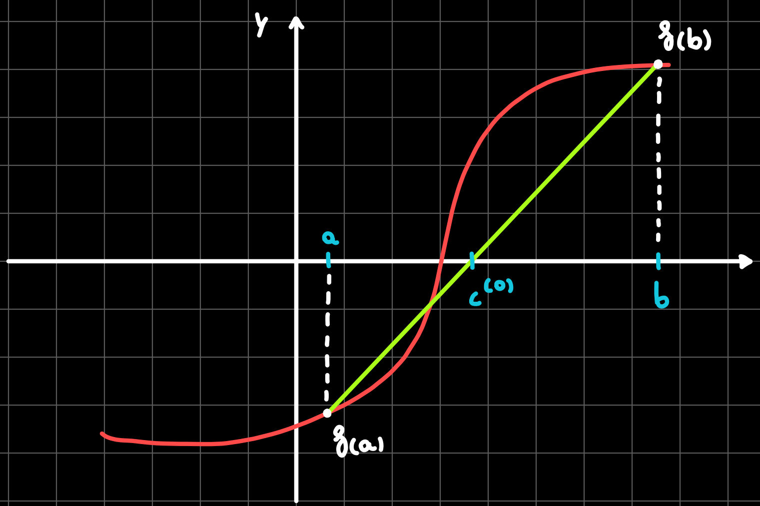
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|e^{(k+1)}|}{|e^{(k)}|^p} = \gamma \quad \text{dove } e^{(k)} = x^{(k)} - x^* \quad \text{con} \begin{cases} 0 < \gamma \le 1 & \text{se } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

si dice che la successione ha ordine di convergenza "p".

La costante γ è detta fattore di convergenza.

Terminologia:
- SE $P = 1$ E $0 < \gamma < 1$ SI DICE CHE LA CONVERGENZA È **LINEARE**.
- SE $P = 1$ E $\gamma = 1$ SI DICE CHE LA CONVERGENZA È **SUBLINEARE**.
- SE $P > 1$ E $\gamma > 0$ SI DICE CHE LA CONVERGENZA È **SUPERLINEARE**.
- SE $P = 2$ E $\gamma > 0$ SI DICE CHE LA CONVERGENZA È **QUADRATICA**.
- SE $P = 3$ E $\gamma > 0$ SI DICE CHE LA CONVERGENZA È **CUBICA**.

Metodo della falsa posizione: Sia $f(x) \in C([a,b])$ t.c. $f(a)f(b) < 0$



Si pone $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$ e si calcola $c^{(0)}$ come punto di intersezione della retta passante per $f(a)$ e $f(b)$ con l'asse x.
- SE $f(c^{(0)}) = 0 \longrightarrow$ **STOP**, ALTRIMENTI SI DEFINISCE UN NUOVO INTERVALLO CHE CONTENGA LA RADICE:
- SE $f(a^{(0)})f(c^{(0)}) < 0 \Rightarrow a^{(1)} = a^{(0)}$, $b^{(1)} = c^{(0)}$
- SE $f(a^{(0)})f(c^{(0)}) > 0 \Rightarrow a^{(1)} = c^{(0)}$, $b^{(1)} = b^{(0)}$

E SI **ITERA** IL PROCEDIMENTO A PARTIRE DALL'INTERVALLO $[a^{(1)}, b^{(1)}]$

Nota $\Rightarrow$ La velocità di convergenza del metodo di bisezione non dipende dalla $f(x)$ in quanto il metodo usa il segno che la funzione assume negli estremi per determinare il successivo intervallo che viene solo e comunque dimezzato.

Ma, il metodo di bisezione può comunque essere utilizzato per determinare delle buone approssimazioni iniziali della radice che possono essere utilizzate dai metodi iterativi successivi che si descrivono. A **condizioni** che $f(x)$ sia più regolare che solo continua, è possibile individuare una vasta classe di metodi che forniscono le stesse appross. del metodo di bisezione ma con un numero molto minore di iterazioni.

Metodi di Iterazione Funzionale

Sono definiti a partire da un **valore iniziale** $x^{(0)}$, una funzione $g(x)$ definita su un insieme $\mathcal{U}$ (sottoinsieme dei numeri reali) con codominio della funzione $\mathbb{R}$, e si vuole **determinare** x^* t.c. $f(x^*) = 0$.

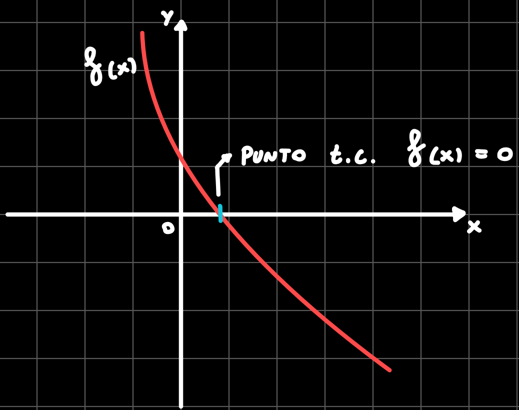
Il problema da risolvere è **trovare una soluzione** dell'equazione non lineare $f(x) = 0$.
- Punto iniziale $x^{(0)}$
  ↱ intervallo in cui è definita g
- Funzione opportuna $g(x): \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (prende un numero reale appartenente ad $\mathcal{U}$ e restituisce un numero reale, in modo da poter **costruire** la **successione iterativa**).
- Consideriamo una successione di n° reali $x^{(k)}\ \{x^{(k)}\}_k$ t.c. $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

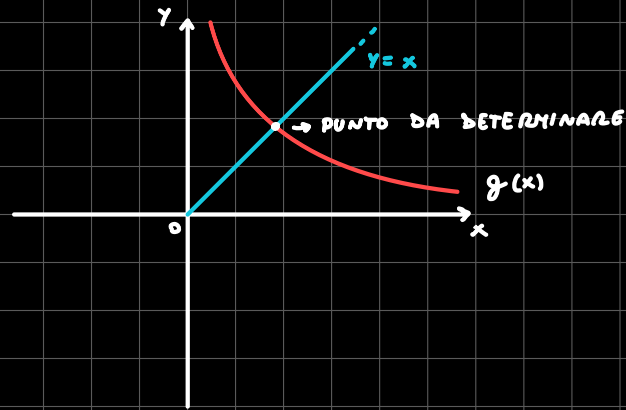
A partire da un valore iniziale $x^{(0)}$ è possibile approssimare le soluzioni della equazione $x = g(x)$. Le soluzioni dell'equazione sono dette **punti fissi** di $g(x)$.
↱ (cerco una x t.c. la funzione valga x in quel punto)

Iterazioni di punto fisso: per poter applicare lo schema "$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ $k = 0, 1, 2, \ldots$" all'eq. $f(x) = 0$, bisogna trasformarla in un'eq equivalente a $x = g(x)$.

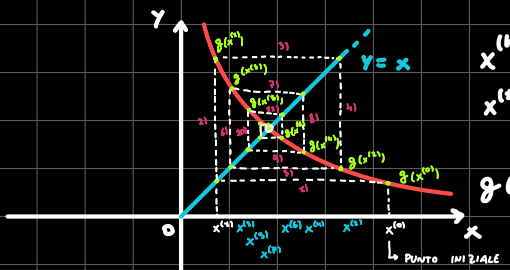
Cioè, riformulo il problema $f(x) = 0$ come $g(x) = x \Rightarrow x^*$ t.c. $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow g(x^*) = x^*$

Esempio pratico: $f(x) = e^{-x} - x = 0$, $g(x) = e^{-x}$ $\left(g(x) = x \quad e^{-x} = x, \ e^{-x} - x = 0 \right)$



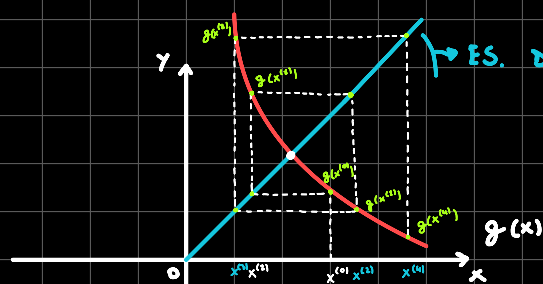


* Successione $\{x^{(k)}\}_k$ t.c. $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$: prende un valore iniziale $x^{(0)}$ vicino alla sol., applico g una volta per iteraz. $x^{(1)} = g(x^{(0)})$, $x_2 = g(x^{(1)})$, ... se convergono a x^* hai trovato un punto fisso



$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$

$x^{(1)} = g(x^{(0)})$



ES. dove non funziona

Nota[1]: è cambiata la pendenza della curva.

Nota[2]: scelto il punto iniziale $x^{(0)}$ la regola del punto fisso diverge.

(F_1)

Th.: Se $g(x)$ possiede un punto fisso x^* e se $g(x) \in C^1_{[x^* - \rho, x^* + \rho^*]}$ con $\rho > 0$ (rho') e soddisfa la condizione:

$|g'(x)| \leq \lambda < 1$ per $x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, allora: $\forall x^{(0)} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$, tutti gli iteranti $x^{(k)}$ generati da "$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ $k = 0, 1, 2, \dots$" appartengono a questo intervallo, la successione converge a x^* e x^* è l'unico punto fisso della g nell'intervallo $[x^* - \rho, x^* + \rho]$.

i) La successione $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ converge a x^* $\forall x^{(0)} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$

ii) $\forall x^{(0)} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$ tutti gli $x^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x^*$

iii) x^* è l'unico punto fisso di g nell'intervallo $[x^* - \rho, x^* + \rho]$

(Tutto dipende dalla derivata di g, se non troppo grande (nell'intorno giusto del punto fisso), il metodo funziona)

Il metodo $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ converge verso il punto fisso x^* se, in un intorno di x^*, $|g'(x^*)| < 1$, e più in generale, se: $\max_{x \in [x^* - \rho, x^* + \rho]} |g'(x)| < 1$.

* Nota: $g(x) \in C^1_{[x^* - \rho, x^* + \rho^*]}$ vuol dire che g è continua sull'intervallo $[x^* - \rho, x^* + \rho^*]$ e la sua derivata $g'(x)$ esiste ed è continua su tutto l'intervallo. È la condizione tipica richiesta per applicare criteri di convergenza del punto fisso.

Intuizione:

- Se g' è piccola in valore assoluto $\longrightarrow$ l'iterazione "si avvicina" al punto fisso $\longrightarrow$ convergenza
- Se g' è maggiore o uguale a 1 $\longrightarrow$ l'iterazione "esplode" o "oscilla" $\longrightarrow$ divergenza

Dim. : DIREMO CHE $x^{(k)} \longrightarrow x^*$ PER $k \to \infty$ SE $\forall k$ VALE $|x^{(k+1)} - x^*| < |x^{(k)} - x^*|$ SI HA CHE:

$$x^{(k+1)} - x^* = g(x^{(k)}) - g(x^*) = \overbrace{g'(\xi^{(k)})}^{\text{DERIVATA IN UN PUNTO MEDIO TRA I DUE PUNTI}}(x^{(k)} - x^*) \quad \text{CON } \xi^{(k)} \in (x^*, x^{(k)})$$

$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $x^* = g(x^*)$

Th. VAL. MEDIO → "LA VARIAZIONE DI UNA FUNZIONE E' CONTROLLATA DALLA SUA DERIVATA"

$$\underbrace{\text{PENDENZA SECANTE (TRA DUE PUNTI)} = \frac{g(x^{(k)}) - g(x^*)}{x^{(k)} - x^*} = \underbrace{g'(\xi^{(k)})}_{\text{DERIVATA IN UN PUNTO MEDIO}}}_{\text{CI PERMETTE DI TRASFORMARE LA VARIAZIONE DELLA FUNZIONE IN QUALCOSA DI CONTROLLABILE}}$$

$\exists$ IL RAPPORTO INCREMENTALE $\xi \in (x^{(k)}, x^*)$

PASSANDO AI MODULI SI HA: $|x^{(k+1)} - x^*| = \overbrace{|g'(\xi^{(k)})|}^{\lambda}|x^{(k)} - x^*|$

$$\underbrace{|x^{(k+1)} - x^*|}_{} \leq \lambda |x^{(k)} - x^*| \quad \forall k \leq \lambda^2 |x^{(k-1)} - x^*| \leq \lambda^2 (x^{(k-2)} - x^*) \leq \dots\dots \leq \lambda^k |x^{(0)} - x^*|$$

$(x^{(k)} - x^*) \leq \lambda |x^{(k-1)} - x^*|$ $\quad$ $(x^{(k-1)} - x^*) \leq \lambda |x^{(k-2)} - x^*|$

QUINDI

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq \lambda^k |x^{(0)} - x^*| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x^{(k+1)} - x^*| \leq \lim_{k\to\infty} \underbrace{\lambda^k}_{0 \text{ PER } k \to \infty} |x^{(0)} - x^*| = 0 \iff x^{(k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$$

QUESTO DIMOSTRA CHE TUTTI GLI ITERATI APPARTENGONO ALL'INTERVALLO $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ E CHE LA SUCCESSIONE CONVERGA A x^*.

PER DIMOSTRARE INVECE L'UNICITÀ DEL PUNTO FISSO, RAGIONIAMO PER ASSURDO E SUPPONIAMO CHE I PUNTI FISSI SIANO DUE, x_1^* E x_2^* $\in [x^* - \rho, x^* + \rho]$. ALLORA:

$$|x_1^* - x_2^*| = |g(x_1^*) - g(x_2^*)| = \underbrace{|g'(\xi)|}_{<1} |x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

Th. VAL MEDIO

$\Rightarrow$ ASSURDO!!!

RECAP → SVILUPPO DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE: SIA $g \in C^{(n+1)}(I)$, ALLORA, $\forall x \in I$, ESISTE $\xi \in (\hat{x}, x)$ t.c.:

$$g(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{g^{(s)}(\hat{x})}{s!}(x - \hat{x})^s + \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \hat{x})^{n+1} \quad \text{E} \quad \xi \in (\hat{x}, x).$$

(F2)

Th. (ORDINE DI CONVERGENZA DELLA SUCCESSIONE): SIA $\{x^{(k)}\}$ LA SUCCESSIONE GENERATA DA: $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ E SIA CONVERGENTE AD x^*.

ASSUMIAMO CHE LA FUNZIONE g ABBIA DERIVATE CONTINUE FINO A UN ORDINE OPPORTUNO IN UN INTORNO DI x^*.

ALLORA LA SUCCESSIONE HA ORDINE DI CONVERGENZA "p" SE E SOLO SE:

$$g'(x^*) = g''(x^*) = g'''(x^*) = \dots\dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0 \quad \text{E} \quad g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

Dim. PARTIAMO DA: $\underline{x^{(k+1)} - x^*} = g(x^{(k)}) - g(x^*)$, APPLICHIAMO LO SVILUPPO DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE INTORNO A x^*:

$$g(x^{(k)}) = g(x^*) + g'(x^*) \cdot (x^{(k)} - x^*) + \frac{g''(x^*)}{2!}(x^{(k)} - x^*)^2 + \dots + \frac{g^{(p)}(x^*)}{p!}(x^{(k)} - x^*)^p + \frac{g^{(p+1)}(\xi^{(k)})}{(p+1)!}(x^{(k)} - x^*)^{p+1}$$

USANDO LA CONDIZIONE $g'(x^*) = g''(x^*) = g'''(x^*) = \cdots\cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0$ RESTA:

$$\underline{x^{(k+1)} - x^*} = \frac{g^{(p)}(x^*)}{p!}(x^{(k)} - x^*)^p + O\left((x^{(k)} - x^*)^{p+1}\right) \quad \text{DA CUI:} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - x^*|}{|x^{(k)} - x^*|^p} = \frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!} = \gamma$$

CHE E' LA DEFINIZIONE DI ORDINE DI CONVERGENZA "p".

Criterio di arresto:
- Err. assoluto (IDEALMENTE) $= |x^{(k)} - x^*| \leq Tol_{ABS}$
- Err. relativo $= \dfrac{|x^{(k)} - x^*|}{|x^*|} \leq Tol_{REL}$ (SICCOME x^* E' IGNOTO, NON SI PUO' USARE NELLA PRATICA)

NON CONOSCENDO x^* DEVO TROVARE UN METODO ALTERNATIVO.

Metodi pratici (PERCHE x^* NON E' NOTO):

UNITA' DI ARROTONDAMENTO

$\varepsilon = 2u$ (PRECISIONE MACCHINA)

1. **Test sull'incremento:** $\dfrac{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|}{\min(|x^{(k)}|, |x^{(k-1)}|)} \leq Tol_1$ (NON TROPPO PICCOLA) — NELLA PRATICA $\longrightarrow |x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq Tol_1 + \varepsilon \min(|x^{(k)}|, |x^{(k-1)}|)$

2. **Test sul residuo:** $|g(x^{(k)})| \leq Tol_2$

3. **Numero massimo di iterazioni:**
La convergenza non e' garantita $\longrightarrow$ IMPOSTO: $k > k_{MAX} \longrightarrow$ MI FERMO

Metodo di Newton (METODO PER LA RISOLUZIONE DI EQ. NON LINEARI): PARTIAMO DAL POLINOMIO DI TAYLOR,

$$g(x^*) = g(\hat{x}) + g'(\hat{x})\cdot(x^* - \hat{x}) + \frac{g''(\xi)(x^* - \hat{x})^2}{2!} + \ldots$$

SE $|x^* - \hat{x}|$ PICCOLO, $(x^* - \hat{x})^2$ SARA' ANCORA PIU' PICCOLO, E ANCORA PIU' PICCOLI SARANNO I TERMINI SUCCESSIVI.

$$g(x^*) \simeq g(\hat{x}) + g'(\bar{x})(x^* - \hat{x}) \Rightarrow 0 \simeq g(\hat{x}) + g'(\hat{x})(x^* - \hat{x})$$

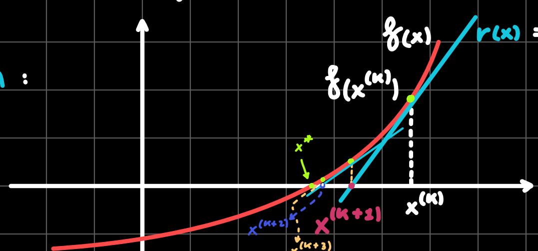
L'IDEA DEL METODO DI NEWTON (O DELLE TANGENTI) CONSISTE NEL GENERARE UNA SUCCESSIONE DI VALORI t.c.:

$$\{x^{(k)}\}_k \qquad \underbrace{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g(x^{(k)})}{g'(x^{(k)})}}_{\text{MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI } x^{(k+1)} \text{ RISPETTO A } x^k} \qquad \text{SUPPONENDO CHE } g'(x^{(k)}) \neq 0 \quad \forall k$$

Metodo di Newton (APPROSSIMAZIONE DI x^*): Sia $g \in C^2_{[a,b]}$ E SIA $\hat{x} \in [a,b]$ UN' APPROSSIMAZIONE DI x^* t.c. $f'(\hat{x}) \neq 0$ E $|\hat{x} - x^*|$ SIA PICCOLO.

Idea:

$r(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$



* Ponendo $r(x) = 0$ (INTERSEZIONE TANGENTE CON L'ASSE x) $\Rightarrow 0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)})$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad k \geq 0 \text{ E } f'(x^{(k)}) \neq 0 \ \forall k.$$

$x^{(k)} \longrightarrow x^{(k+1)}$ MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI x^*, $x^{(k+1)} \longrightarrow x^{(k+2)}$ ANCORA MEGLIO, E COSI' VIA FINO A CONV. A x^*.

Studio della convergenza e condizioni di velocità: $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

(F3)

Si vuole sfruttare il Th. (F1) per dimostrare il seguente risultato: Se $f(x) \in C^2_{[a,b]}$, $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$, allora $\exists$ un intervallo $[x^*-\rho, x^*+\rho]$ t.c. se $x^{(0)} \in [x^*-\rho, x^*+\rho]$ il metodo di Newton converge a x^*.

Il Th. (F1) regola la convergenza ad x^* della successione $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ e dice che questo avviene se $|g'(x)| < 1$ per $x \in [x^*-\rho, x^*+\rho]$; nel nostro caso per $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ è:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

sulle ipotesi date sulla f, la $g'(x)$ è continua e non si annulla in x^* allora $\exists\, \rho > 0$ t.c. $|g'(x)| < 1$ e quindi per la (F1) si ha convergenza.

Nota:
- $g'(x)$ è continua se $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sono continue, ovvero $f \in C^2_{[x^*-\rho, x^*+\rho]}$.
- $g'(x)$ è ben definita s.s.s. $f'(x) \neq 0$ in $[x^*-\rho, x^*+\rho]$.
- $g'(x^*) = 0 \Rightarrow |g'(x^*)| < 1$ in un opportuno intervallo di x^*.

Th. Se $f(x) \in C^3_{[a,b]}$, $f(x^*) = 0$ e $f'(x^*) \neq 0$, allora esiste un intervallo $[x^*-\rho, x^*+\rho]$ t.c. se $x^{(0)}$ appartiene all'intervallo $[x^*-\rho, x^*+\rho]$ il metodo di Newton ha ordine di convergenza "2".

Per il Th. (F2), essendo $g'(x^*) = 0$, si ha che l'ordine di convergenza è due (almeno).
Se poi calcoliamo la derivata seconda di $g(x)$ troviamo:

$$g''(x) = \frac{[f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)]^2 - 2f(x)f'(x)[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}$$ valutandola in x^* si ha $g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$

ne segue che se $f''(x^*) \neq 0$ allora anche $g''(x^*) \neq 0$ e quindi per il Th. (F1), l'ordine "p" è esattamente 2. Se invece $f''(x^*) \neq 0$ allora anche $f''(x^*) = 0$ allora l'ordine è almeno pari a 3.

Il Th. (F3) vale nell'ipotesi che $f'(x^*) \neq 0$, cioè se x^* è una radice semplice di $f(x)$.
Se invece la radice ha molteplicità $m > 1$, l'ordine di convergenza del metodo non sarà più 2.
Infatti se scriviamo: $f(x) = (x-x^*)^m q(x)$, $q(x) \neq 0$ la funzione $g(x) =$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-x^*)\,q(x)}{m(x-x^*)^{m-1}q(x) + (x-x^*)^m q'(x)} = x - \frac{(x-x^*)\,q(x)}{m\,q(x) + (x-x^*)\,q'(x)},$$ da cui

si può determinare che $g'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$ $\to$ $m > 0 \Rightarrow |g'(x^*)| < 1$ in un intorno di x^* e per il Th. (F1) il metodo risulta ancora convergente ma, per il Th. (F2) l'ordine di convergenza è solo 1.

Punto debole del metodo di Newton:

*Punto debole: avendo scelto come p.to iniziale $x^{(0)}$ il metodo applicato fa salti "a destra e sinistra" impiegando molto più tempo a divergere verso x^* (radice). Non accade se invece avessi scelto un punto iniziale opportuno.

$$\overbrace{\text{Strategia: Applicare il metodo di bisezione}}^{\text{Nota: ha convergenza globale (converge sempre ma è lento)}}$$

Strategia: Applicare il **metodo di bisezione** (con un opportuno intervallo iniziale) per determinare una approssimazione della radice che vogliamo trovare.
Fatto ciò, usare $\tilde{x}^*$ come **punto iniziale** ($x^{(0)} = \tilde{x}^*$) del metodo di **Newton**

Nota: Se il costo del calcolo della derivata è molto alto oppure impossibile si utilizza il seguente metodo:

Metodo delle Secanti: Quando si cercano gli zeri di una funzione per la quale la valutazione della $f'(x)$ è difficoltosa, il **metodo delle secanti** è spesso una scelta migliore che quella di Newton.

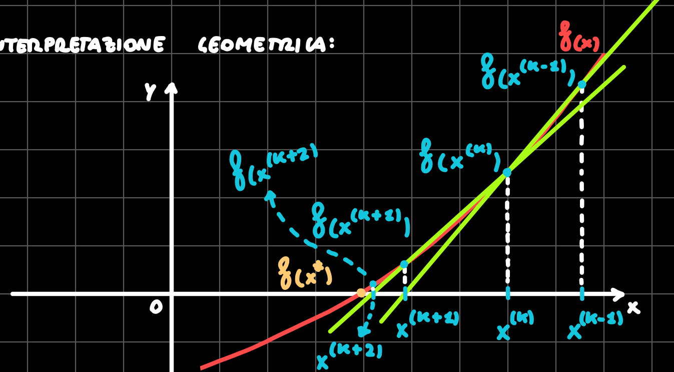
Tale metodo parte da due $\overbrace{\text{valori } x^{(0)} \text{ e } x^{(1)}}^{\text{valori di innesco del metodo}}$. Ad ogni iterazione si determina $x^{(k+1)}$ come l'intersezione fra la **retta** passante per i punti $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ e $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)}))$ e l'asse x.

Idea: si vuole sostituire la $f'(x)$ con la sua **approssimazione** che è il **rapporto incrementale**:

R.I. $\rightarrow \dfrac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$, con **Newton** era (**innesco** da $x^{(0)}$): $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$.

Con il metodo delle **Secanti** (**innesco** da $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$): $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} (x^{(k)} - x^{(k-1)})$

Interpretazione geometrica:



Passi: prendi la **retta** passante per i **due punti** di **innesco** e interseca in x, l'intersezione diventa il **nuovo valore approssimato** della funzione.

Th: Sia $f \in C^2_{[a,b]}$, $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$, allora $\exists$ un intervallo $[x^* - \rho, x^* + \rho]$ t.c. se $x^{(0)}$ e $x^{(1)} \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$ il metodo delle secanti **converge** ad x^*. Inoltre il:

$\lim_{k \to \infty} \dfrac{|e^{(k+1)}|}{|e^{(k)}|^p} = \gamma \neq 0$, per buoni valori iniziali, il metodo delle secanti converge ad una **radice** semplice con ordine di convergenza "p" $\simeq$ 1.618.... (**Newton** $\rightarrow p = 2$); il **problema** del metodo è determinare $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ abbastanza prossimi a x^* da garantire **convergenza**.

Risoluzione numerica di equazioni non lineari

- Intervallo iniziale → Metodo di Bisezione
  - → Metodo della Falsa Posizione

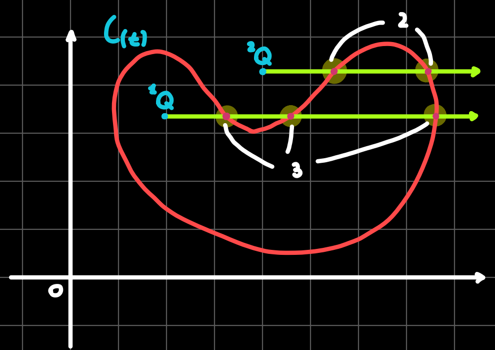
  } Sotto opportune ipotesi si ha convergenza globale (convergono sempre).
- Punto iniziale → Iterazioni di Punto Fisso → Metodo di Newton
  - → Metodo delle Secanti

  } Sotto opportune ipotesi sulla funzione si ha convergenza locale. Convergono se il punto iniziale è appropriato.

Applicazioni: le applicazioni sul quale abbiamo fondato il nostro studio sono nella determinazione di radici di un'equazione polinomiale in un intervallo, per problemi di modellazione e interpolazione di curve di Bézier.

Punto interno / esterno ad una curva (chiusa): data una curva chiusa $C(t)$ con $t \in [0,1]$ nella forma di Bézier (o Bézier a tratti) e punto Q del piano, determinare se il punto è interno o esterno alla regione di piano delimitata dalla curva.

Soluzione: determinare le intersezioni fra una semiretta (orizzontale per semplicità, uscente da Q e la curva $C(t)$.
- n° intersezioni pari ⟶ esterno
- n° intersezioni dispari ⟶ interno



Sia $C(t) = (\overbrace{x(t)}^{C_1(t)}, \overbrace{y(t)}^{C_2(t)})$, per trovare l'intersezione deve essere soddisfatta la condizione della curva e della retta (in forma cartesiana, eq. 1° grado, nel piano): $r = ax + by + c$.

Deve essere soddisfatta: $aC_1(t) + bC_2(t) + c = 0$

Essendo che lavoriamo con curve nella base di Bernstein:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1], \; P_i = (x_i, y_i) \; = \; \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} x_i B_{i,n}(t)}_{C_1(t)}, \underbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i B_{i,n}(t)}_{C_2(t)}\Big)$$

* ∀ valore di t corrisponde univocamente ad un punto sulla curva.

Quindi:

$$aC_1(t) + bC_2(t) + c = 0 \Rightarrow a\sum_{i=0}^{n} x_i B_{i,n}(t) + b\sum_{i=0}^{n} y_i B_{i,n}(t) + c \underbrace{\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)}_{1 \,\to\, \text{partizione dell'unità}} = 0$$

$$\Rightarrow a\sum_{i=0}^{n} x_i B_{i,n}(t) + b\sum_{i=0}^{n} y_i B_{i,n}(t) + c = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a x_i B_{i,n}(t) + b y_i B_{i,n}(t) + c B_{i,n}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} (a x_i + b y_i + c) B_{i,n}(t) = 0} \longrightarrow \text{zeri di un polinomio di grado } n \text{ nell'intervallo } [0,1].$$

Polinomio di grado n nella base di Bernstein con coeff. $a x_i + b y_i + c = 0$ (Eq. non lin.)

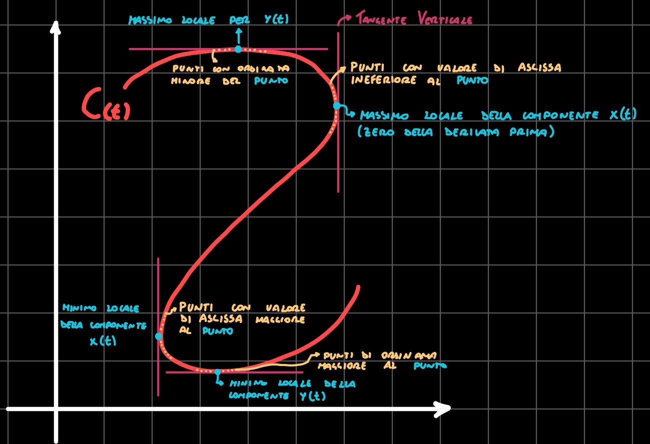
Le soluzioni saranno i parametri della curva in corrispondenza dei quali la curva e la retta si intersecano. Parametri i valori di t per cui il punto della curva soddisfa l'equazione della retta.

Una retta nel piano è: $r = ax + by + c$, la curva, sostituita nella retta: $aC_1(t) + bC_2(t) + c = 0$ che diventa un polinomio in t. Le soluzioni di questo polinomio sono i parametri di intersezione.

Esempio: se la soluzione è: $t = 0.27$, $t = 0.81$ significa che la retta interseca la curva nei punti: $C(0.27)$, $C(0.81)$.

La valutazione della curva in corrispondenza di questi parametri fornisce le coordinate cartesiane dei punti di intersezione. Ovvero, se trovo un parametro t^* che soddisfa l'equazione della retta, allora il punto $C(t^*) = (C_1(t^*), C_2(t^*))$ sta sia sulla retta che sulla curva, quindi è un punto di intersezione.

Punti esterni alla curva: Data una curva piana $C(t)$ $t \in [0,1]$ nella forma di Bézier (o Bézier a tratti) si vogliono determinare i punti estremi.



$C(t) = (x(t), y(t))$ [$\delta(t) \in C^1$, i massimi e minimi locali sono gli zeri della derivata prima]

- Tangente verticale: sono i p.ti t.c. $x'(t) = 0$ e $y'(t) \neq 0$
- Tangente orizzontale: sono i p.ti t.c. $x'(t) \neq 0$ e $y'(t) = 0$

Si tratta di determinare le radici di equazioni polinomiali e verificare che in corrispondenza di tali soluzioni l'altra componente si annulli.

Curva nella base di Bernstein: $C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$, $t \in [0,1] \Rightarrow C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n(P_{i+1} - P_i) B_{i,n-1}(t)$

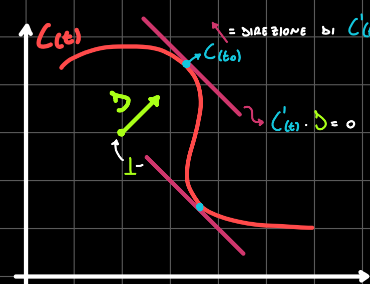
$$C'(t) = \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} n(x_{i+1}, x_i) B_{i,n-1}(t)}_{x'(t)}, \underbrace{\sum_{i=0}^{n} n(y_{i+1}, y_i) B_{i,n-1}(t)}_{y'(t)} \Big)$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t),\ t \in [a,b] \overset{!}{\Rightarrow} C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{b-a}(P_{i+1} - P_i) B_{i,n-1}(t) = \Big(\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{b-a}(x_{i+1} - x_i) B_{i,n-1}(t), \sum_{i=0}^{n} \frac{n}{b-a}(y_{i+1} - y_i) B_{i,n-1}(t)\Big)$$

Se si cercano i punti estremi in una data direzione $D = (d_x, d_y)$, basta determinare le radici dell'equazione polinomiale $C'(t) \cdot D = 0$ (perpendicolarità cioè $\Rightarrow v \perp w$ quando $v \cdot w = 0$ dove $v = (v_x, v_y)$ e $w = (w_x, w_y)$, $v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y = 0$, prodotto scalare $= 0 \Rightarrow$ perpendicolarità).

$C(t) = (x(t), y(t))$, $C'(t) = (x'(t), y'(t)) \Rightarrow x'(t)\, d_x + y'(t)\, d_y = 0$

*Interpretazione grafica:



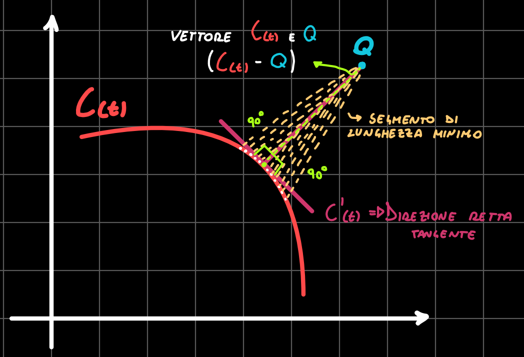
$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$, $t \in [0,1]$, $P_i = (x_i, y_i) \Rightarrow C'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n(P_{i+1} - P_i) B_{i,n-1}(t)$

$$C'(t) = \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{n} n(x_{i+1}, x_i) B_{i,n-1}(t)}_{x'(t)}, \underbrace{\sum_{i=0}^{n} n(y_{i+1}, y_i) B_{i,n-1}(t)}_{y'(t)} \Big)$$

$$dx \sum_{i=0}^{n-1} n(x_{i+1}, x_i) B_{i,n-1}(t) + dy \sum_{i=0}^{n-1} n(y_{i+1}, y_i) B_{i,n-1}(t) = 0$$

$$n \sum_{i=0}^{n-1} \left[dx\,(x_{i+1}, x_i) + dy\,(y_{i+1}, y_i) \right] B_{i,n-1}(t) = 0$$ (CERCHIAMO LE RADICI DI UN POLINOMIO DI GRADO $n-1$)

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA CURVA: DATA UNA CURVA PIANA $C(t)$ $t \in [0,1]$ NELLA FORMA DI BÉZIER (O BÉZIER A TRATTI) E UN PUNTO Q DEL PIANO, SI VUOLE DETERMINARE IL PUNTO DELLA CURVA PIU' PROSSIMO A Q.



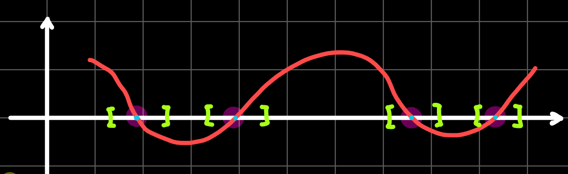
SI TRATTA DI TROVARE QUEL PUNTO DELLA CURVA PER CUI $C(t) - Q$ RISULTA ORTOGONALE ALLA TANGENTE ALLA CURVA, CIOE' DEVE ESSERE RISPETTATA LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA':

$$\underbrace{(C(t) - Q)}_{\text{POL. DI GRADO } n} \cdot \underbrace{C'(t)}_{\text{POL. DI GRADO } n-1} = 0$$ (PRODOTTO SCALARE = 0)

$\rightarrow$ DETERMINARE LE RADICI DI UN POLINOMI DI GRADO $n \cdot (n-1)$

1) DETERMINARE TUTTI GLI ZERI DI UN POLINOMIO DI GRADO n
2) DETERMINARE TUTTI GLI ZERI DI UN POLINOMIO DI GRADO n NELLA FORMA DI BERNSTEIN → LANE-REISENFELD

TH. FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA: SE p (POL. DI GRADO n) $\in \mathbb{P}_n$ (POLINOMI DI GRADO $\leq n$) HA n RADICI REALI O COMPLESSE. SE p HA COEFFICIENTI REALI E UNA RADICE COMPLESSA (NUMERO COMPLESSO $a + ib$, $b \neq 0$) ALLORA LA COMPLESSA CONIUGATA $(a - ib)$ SARA' UNA RADICE.



* SI ISOLANO LE RADICI E SI APPLICANO I METODI.

* RADICI AL PIU' n → REALI / → COINCIDENTI / → COMPLESSE

METODO DI LANE-REISENFELD: METODO PER ISOLARE LE RADICI REALI DI UN POLINOMIO NELLA BASE DI BERNSTEIN. METODO BASATO SULLA PROPRIETA' DI VARIATION DIMINISHING DEI COEFFICIENTI DEL POLINOMIO NELLA BASE DI BERNSTEIN E NELL'USO DI UNA TECNICA DI BISEZIONE RICORSIVA (VEDI "SUDDIVISIONE" CAP. 2)

La proposta consiste in una procedura *root_isolate* per determinare degli intervalli contenenti una sola radice controllando che il polinomio, ristretto a quell'intervallo nella base di Bernstein, abbia una sola variazione di segno dei coefficienti. Praticamente si esamina il numero di variazioni di segno dei coefficienti del polinomio: se questo è 0 non ci sono radici; se è 1 c'è una radice; se è > 1 si suddivide il polinomio nel punto medio e si procede sui due polinomi fino a che questi non abbiano una radice o nessuna. Alla fine si avranno in uno stack tanti polinomi che hanno una sola radice nel sottointervallo di definizione dell'intervallo iniziale. Viene quindi utilizzata una procedura *find_root* che per ogni polinomio memorizzato nello stack, cerca la sua unica radice. Si tratta di una routine che suddivide il polinomio fino a che uno dei due coefficienti estremi non sia così piccolo (tolleranza richiesta), da indicare nell'estremo corrispondente la radice. La tecnica di suddivisione non avviene nel punto medio, ma nel punto in cui la poligonale interseca l'asse x. Questa scelta è dettata dal fatto che per suddivisione la poligonale converge alla funzione e quindi lo zero della poligonale deve convergere allo zero della funzione.

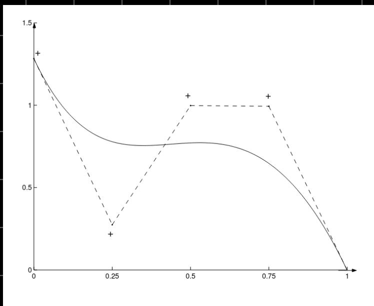


Figura 7.6: Zero in un estremo dell'intervallo.

Osservazione 7.11 *Si osservi che una situazione come quella presentata in Fig.7.6, dove la radice del polinomio coincide con un estremo dell'intervallo di definizione, non presenterebbe variazioni di segno dei coefficienti, e quindi la radice non verrebbe localizzata. Una implementazione corretta deve accorgersi di una tale situazione.*

Es. B2. es7

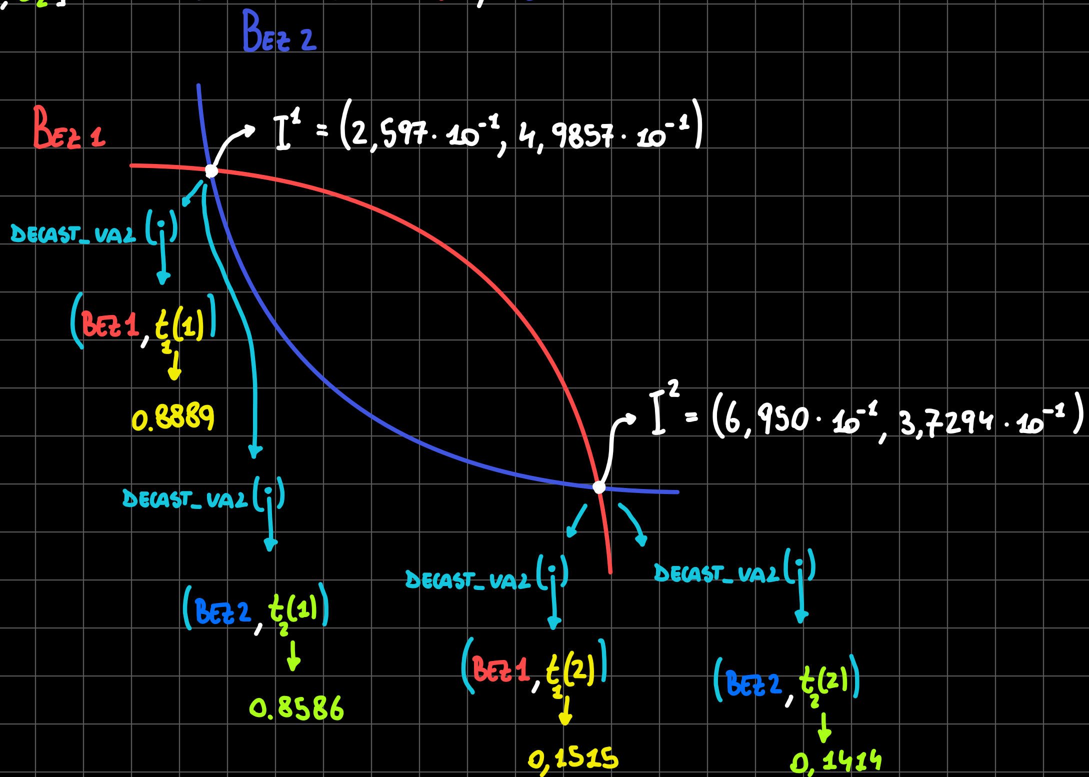
1° Passo: $[IP1P2, t_1, t_2]$ = curv2_intersect(Bez 1, Bez 2)

$\Downarrow$

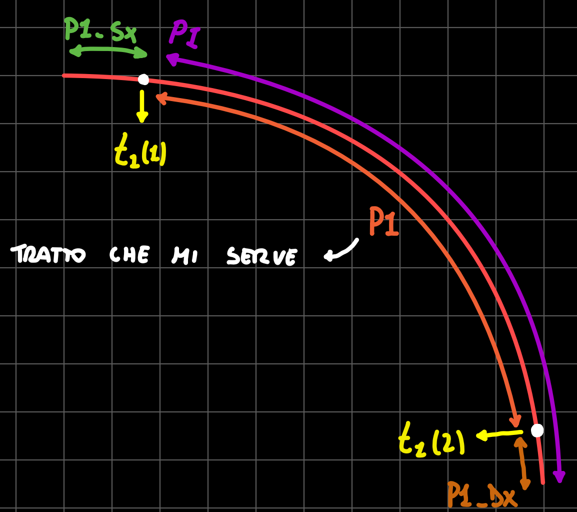
$[I^1, I^2]$

$t_1 = [0,8889; 0,1515]$

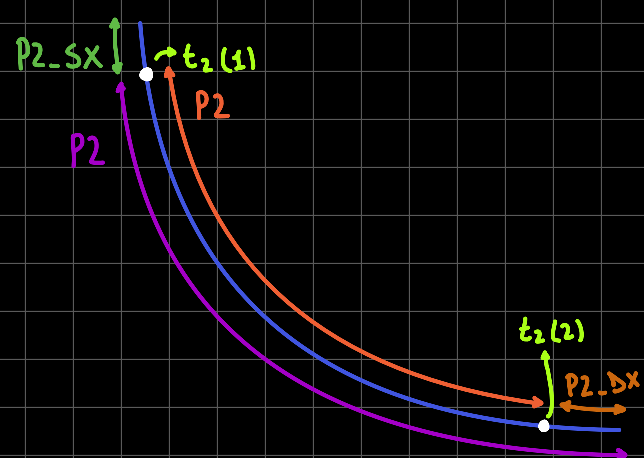
$t_2 = [0,8586; 0,1414]$



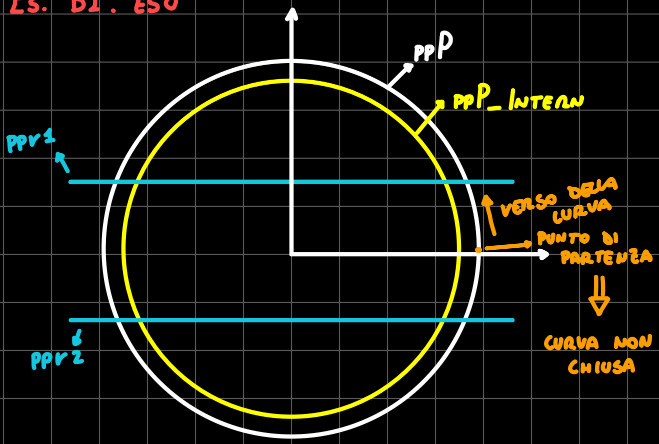
2° Passo: [P1_sx, P1] = decast_subdiv(Bez1, $t_1(1)$), [P1, P1_dx] = decast_subdiv(P1, $t_1(2)$)

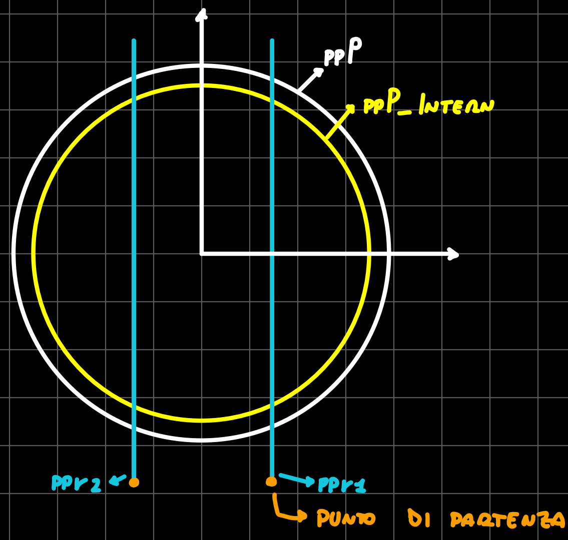


3° Passo: [P2_sx, P2] = decast_subdiv(Bez2, $t_2(1)$), [P2, P2_dx] = decast_subdiv(P1, $t_2(2)$)



Es. B1. es8





1° Passo: $[IP1P2, t_1, t_2]$ = curv2_intersect(ppr1, ppP_intern)

$\Downarrow$

$[I^1, I^2]$