

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE:

→ Dati $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$ $p(x) \in P_n$ $p(x_i) = y_i$ $i=0, \dots, n$

→ Funzioni $\delta(x) \ x \in [a, b] \leftarrow p(x) \in P_n \quad | \delta(x) - p(x) | < \tau_{0,1}$

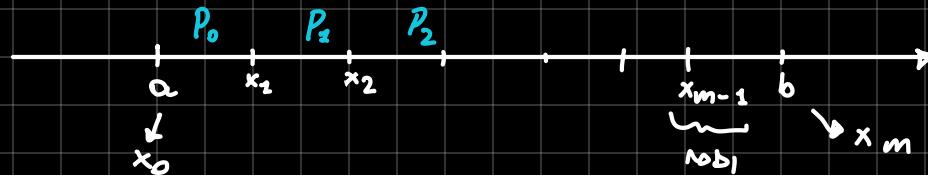
→ $x_i \in [a, b]$ $\delta(x_i)$ $(x_i, \delta(x_i))_{i=0, \dots, n}$

LE FUNZIONI SONO IN FLESSIBILI, NON POSSONO AVERE UNO MASSONE DI SO

→ QUI SI CERCA QUALCOSA DI MIGLIORE DEI POLINOMI

→ I POLINOMI A TRATTI PP DA CUI RISOLVEREMO L'INTERPOLAZIONE A TRATTI
IN INGLESE PIECEWISE POLYNOMIAL

Def: Sia data la partizione $\{x_i\}_{i=0, \dots, m-1}$ di $[a, b]$



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

Allora si definiscono polinomi a tratti delle seguenti funzioni:

$$PP(x) = \begin{cases} P_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ P_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ P_{m-1}(x) & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

Dove, i $P_i(x) \in P_n$ e soddisfano le seguenti condizioni:

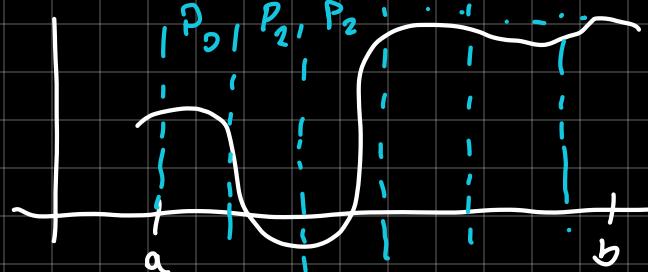
$$\begin{aligned} P_{i-1}(x_i) &\equiv P_i(x_i) & i = 1, \dots, m-1 \\ (k) & \text{DERIVATE} & \text{REGOLARE?} \\ (k) & = 0, 1, 2, \dots, K & (K < n) \end{aligned}$$

↓
FUNZIONI SIAN

UNI POLINOMIO SI
DI UNO ALTRÒ)

OLTRA SI UN TRATTO (DARÒ UN UNICO POL

ES



ORA LE FUNZIONI SONO
(PENSARE DI RECURRENZA)

FLESSIBILI

CON CONTINUITÀ LIMITATA

PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE DI POLINOMI A MATTI DI DATI:

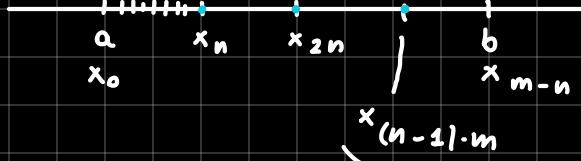
↪ Polinomi a matti di interpolazione di dati

$$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, m-n}$$

x_i DISTINTI E IN ORDINE CRESLENTE $x_i < x_{i+1}$

$$P_{0,n}$$

$$P_{1,n}$$



ROI DELLA
PARTIZIONE
DEI POLINOMI
A MATTI

$P_{0,n}(x)$ INTERPOLA
TUTTI I PUNTI MM

x_0 A x_n



x_n E' IN COMUNE MA $P_{0,n}(x) \neq P_{1,n}(x)$

$$PP(x) = \begin{cases} P_{0,n}(x) & x \in [x_0, x_n] \\ P_{1,n}(x) & x \in [x_n, x_{2n}] \\ \vdots \\ P_{m-1,n}(x) & x \in [x_{(m-1)n}, x_{mn}] \end{cases}$$

$$PP(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m-n$$

$$P_{i,n}(x_{i,n} + s) = y_{i,n+s} \quad s=0, \dots, n \\ i=0, \dots, m-1$$

VANTAGGI DI FORMA DI POLINOMIO A MATTI CHE
RISULTANO Oltre A VANTAGGI DI COMPUTAZIONE

Polinomi a matti di interpolazione di dati di grado $n=1$

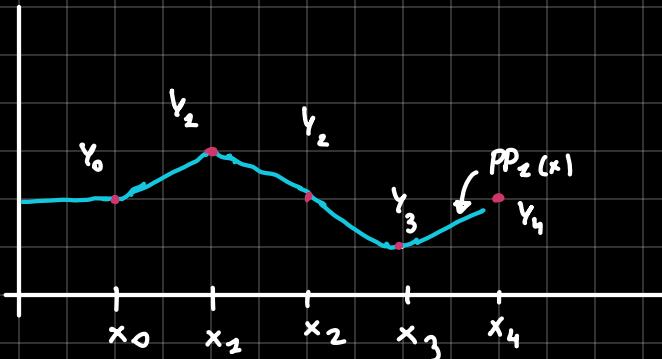
$$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, m}$$

$$PP_1(x) = \begin{cases} P_{0,1}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ P_{1,1}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ P_{m-1,1}(x) & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

$$P_{i,1}(x) \in P_1 \quad i=0, \dots, m-1 \quad \Rightarrow \quad PP_1(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m$$

$$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$$

LEZIONE 2 = SPEZIALE

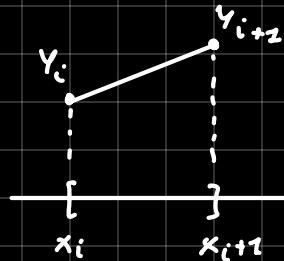


$$B_{0,2}(x) = \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i}$$

$$B_{2,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i}$$

$$P_{i,2}(x) = \sum_{s=0}^i b_{s,i} B_{s,2}(x) \quad x \in [x_i, x_{i+2}]$$

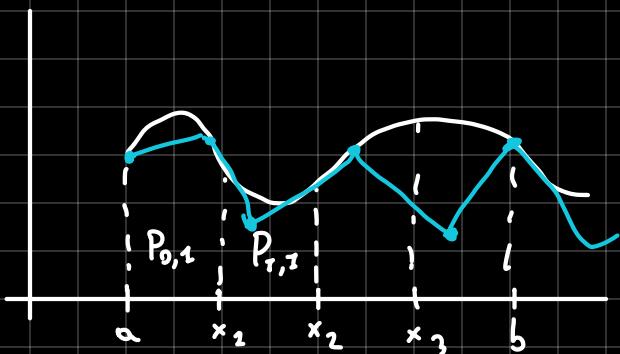
$$b_{0,i} = y_i \quad b_{2,2} = y_{i+2}$$



Se affermo una funzione considerasse:

$$f(x) \quad x \in [a, b] \quad x_i \text{ DISTINTI E IN ORDINE CRESCENTE } x_i < x_{i+1} \quad \forall i$$

$$(x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, m}$$



Se i punti aumentano



LA SOVRAPPRAZIONE APPROSSIMA SEMPRE DI PIU' LA FUNZIONE

↓
(Th. di convergenza)

Th. : Siano $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ punti di Γ ,
 e h la massima distanza fra i punti $h = \max \{ x_{i+1} - x_i \}$

2) Se $f \in C_{[a, b]}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$ allora $|f(x) - pp_1(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$

$$2) \text{ se } f \in C^2_{[a,b]}, \text{ entza } \forall x \in [a,b] \quad |f(x) - Pp_2(x)| \leq \frac{1}{3} h^2 \max_{a \leq z \leq b} |f''(z)|$$

$$\left| f_{(x)}^{(2)} \right| < M \quad x \in [a, b] , \quad \frac{1}{8} h^2 M < \varepsilon$$

$$|f(x) - pp_e(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M < \varepsilon \quad h < \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M}}$$

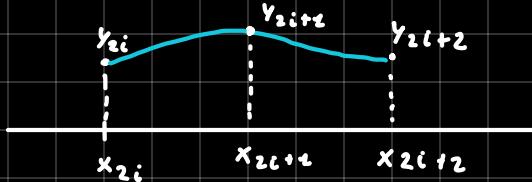
* FUNZ. PIU' RECOLA RE
* FUNZ. MENO RECOLA RE

Pol. A TRATTI DI INTERPOLAZIONE DI MABO 2 $u = 2$

$$(x_i, y_i) \quad i=0, \dots, 2 \cdot m$$

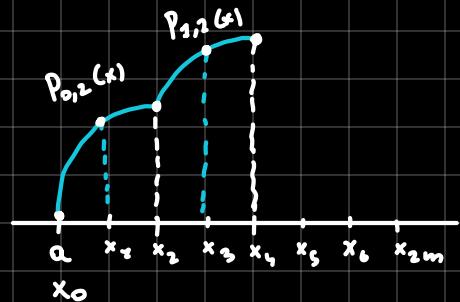
$$Pp_2(x) = \begin{cases} P_{0,2}(x) & x \in [x_0, x_2] \\ P_{2,2}(x) & x \in [x_2, x_4] \\ \vdots & \\ P_{m-2,2}(x) & x \in [x_{2(m-1)}, x_{2m}] \end{cases}$$

$$P_{i,2}(x) = \sum_{s=0}^2 c_{s,i} B_{s,2}(x) \quad x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$$



$$\text{con } P_{i,2}(x) \in \mathbb{P}_2 \quad i=0, \dots, m-1$$

$$PP_2(x_i) = \gamma_i \quad i=0, \dots, 2m$$



$$P_{i,2}(x_{2i}) = y_{2i} \rightarrow C_{0,i} = y_{2i}$$

$$P_{i,2}(x_{2i+2}) = y_{2i+2} \rightarrow C_{2,i} = y_{2i+2}$$

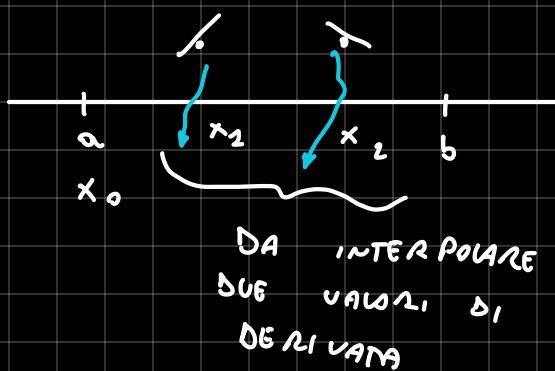
$$P_{i,2}(x_{2i+2}) = y_{2i+2} = y_{2i} B_{0,1}(x_{2i+2}) + C_{1,i} B_{1,2}(x_{2i+2}) + y_{2i+2} B_{2,2}(x_{2i+2})$$

$$C_{1,i} = \frac{y_{2i+2} - y_{2i} B_{0,1}(x_{2i+2}) - y_{2i+2} B_{2,2}(x_{2i+2})}{B_{1,2}(x_{2i+2})}$$

Paronomia cubico a maggiori di interpolazione \rightarrow Henry, TC

Siamo assieme a i punti di osservazione

$$(x_i, y_{i,0}, y_{i,1})_{i=0, \dots, n}$$



Dove $y_{i,0}$ è un'osservazione di $y_{i,1}$ è il valore di derivata prima da interpolare

$$\left. \begin{array}{l} PP_H(x_i) = y_{i,0} \\ PP_H'(x_i) = y_{i,1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cond. di} \\ \text{interpol.} \end{array}$$