

# INTERPOLAZIONE POLINOMIALE :

↳ DATI  $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$   $p(x) \in P_n$   $p(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, n$

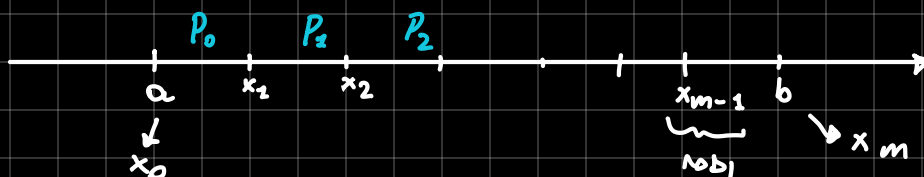
↳ FUNZIONI  $f(x) \quad x \in [a, b] \leftarrow p(x) \in P_n \quad |f(x) - p(x)| < Tol$   
 ↳  $x_i \in [a, b] \quad f(x_i) \quad (x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, n}$

LE FUNZIONI SONO IN FLESSIBILI, NON POSSONO AVERE UNO MAGGIORE DI 100

↳ QUINDI SI CEEA QUALCOSA DI MIGLIORE DEI POLINOMI

↳ 1. POLINOMI A TRATTI PP DA CUI RISOLVEREMO L'INTERPOLAZIONE A TRATTI  
 IN INGLESE  
 PIECEWISE POLYNOMIAL

DEF : SIA DATA LA PARTIZIONE  $\{x_i\}_{i=0, \dots, m-1}$  DI  $[a, b]$



$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m \equiv b$$

ALLORA SI DEFINISCONO POLINOMI A TRATTI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$$pp(x) = \begin{cases} P_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ P_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ P_{m-1}(x) & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

DOVE  $P_i(x) \in P_n$  E SODDISFAN LE SEGUENTI CONDIZIONI :

$$P_{i-1}^{(k)}(x_i) \equiv P_i^{(k)}(x_i) \quad i = 1, \dots, m-1$$

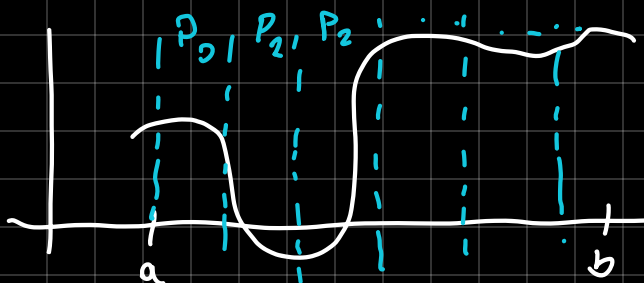
DERIVATE

$$(k) = 0, 1, 2, \dots, K \quad \text{REQUANTITA' ?} \quad (K < n)$$

FUNZIONI SIAN

OGNI POLINOMIO SI OCCUPA DI UN TRATTO (DATO UN UNICO POL DI UNO ALTO)

ES



ORA LE FUNZIONI SONO  
(PERDITA DI FLESSIBILITÀ)

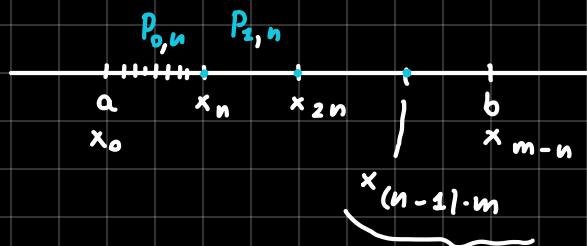
**FLESSIBILI**

CON CONTINUITÀ LIMITATA

PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE DI POLINOMI A TUPPI DI DATI:

↳ POLINOMI A TUPPI DI INTERPOLAZIONE DI DATI

$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, m-n}$   $x_i$  DISTINTI E IN ORDINE CRESCENTE  $x_i < x_{i+1}$   $y_i$



$$PP(x) = \begin{cases} P_{0,n}(x) & x \in [x_0, x_n] \\ P_{2,n}(x) & x \in [x_n, x_{2n}] \\ \vdots & \\ P_{m-n}(x) & x \in [x_{(m-1)n}, x_{m-n}] \end{cases}$$

$P_{0,n}(x)$  INTERPOLA  
TUTTI I PUNTI DA  
 $x_0$  A  $x_n$

MODI DELLA  
PARTIZIONE  
DEI POLINOMI  
A TUPPI



$x_n$  È IN COMUNE TRA  $P_{0,n}(x)$  E  $P_{2,n}(x)$

$$PP(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m-n$$

$$P_{i,n}(x_{i \cdot n + s}) = y_{i \cdot n + s} \quad \begin{matrix} s=0, \dots, n \\ i=0, \dots, m-1 \end{matrix}$$

VANTAGGI DI FORMA DI POLINOMIO A TUPPI CHE TROVEREMO COME  
RISULTATO OLME A VANTAGGI DI COMPUTAZIONE

POLINOMI A TUPPI DI INTERPOLAZIONE DI DATI DI GRADO  $n=1$

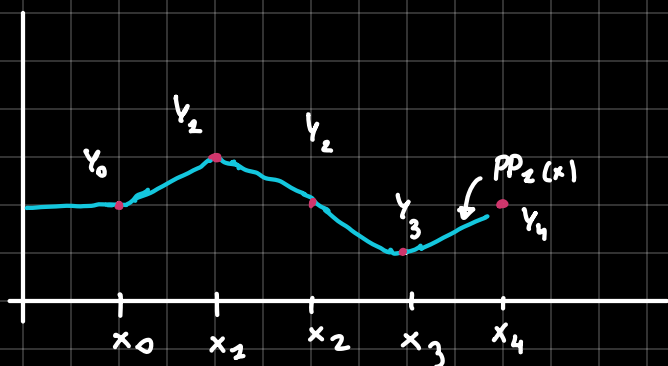
$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, m}$

$$PP_2(x) = \begin{cases} P_{0,1}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ P_{2,1}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ P_{m-1,1}(x) & x \in [x_{m-1}, x_m] \end{cases}$$

$$P_{i,1}(x) \in P_1 \quad i=0, \dots, m-1 \quad \Rightarrow \quad PP_2(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, m$$

$$(x_i, y_i) \quad i=0, \dots, n$$

LABO 2 = SPEZZATA

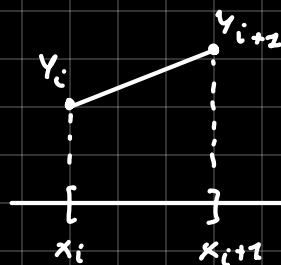


$$B_{0,2}(x) = \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_i}$$

$$B_{2,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+2} - x_i}$$

$$P_{i,2}(x) = \sum_{s=0}^2 b_{s,i} B_{s,2}(x) \quad x \in [x_i, x_{i+2}]$$

$$b_{0,i} = y_i \quad b_{2,i} = y_{i+2}$$

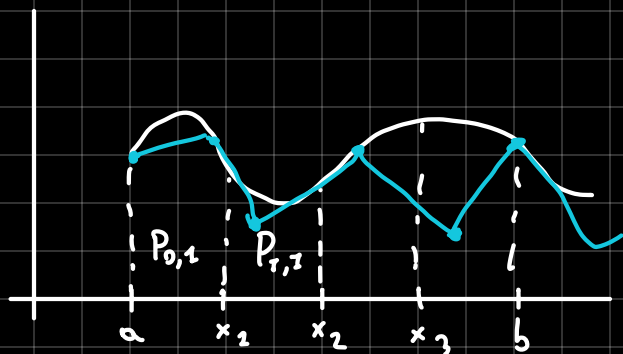


SE ALESSIMO UNA FUNZIONE LAMBIERRE :

$$f(x) \quad x \in [a, b]$$

$x_i$  DISTINTI E IN ORDINE CRESCENTE  $x_i < x_{i+1}$

$$(x_i, f(x_i)) \quad i=0, \dots, m$$



SE I PUNTI AUMENTANO



LA SPEZZATA APPROSSIMA  
SEMPRE DI PIU' LA  
FUNZIONE



(Th. di CONVERGENZA)

Th: Siano  $a \equiv x_0 < x_2 < \dots < x_{m-2} < x_m \equiv b$  punti dati,  
 e  $h$  la massima distanza tra i punti  $h = \max \{x_{i+2} - x_i\}$

1) Se  $f \in C[a, b]$  allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  
 se  $h < \delta$  allora  $|f(x) - p_{p_2}(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$

2) Se  $f \in C^2[a, b]$ , allora  $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - p_{p_2}(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(2)}(\xi)|$

$$|f^{(2)}(x)| < M \quad x \in [a, b], \quad \frac{1}{8} h^2 M < \varepsilon$$

$$|f(x) - p_{p_2}(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M < \varepsilon \quad h < \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M}}$$

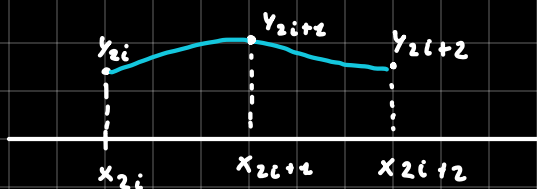
\* FUNZ. PIU' REGOLARE  
 \* FUNZ. MENO REGOLARE

POL. A TRATTI DI INTERPOLAZIONE DI GRADO 2  $n=2$

$(x_i, y_i) \quad i=0, \dots, 2m$

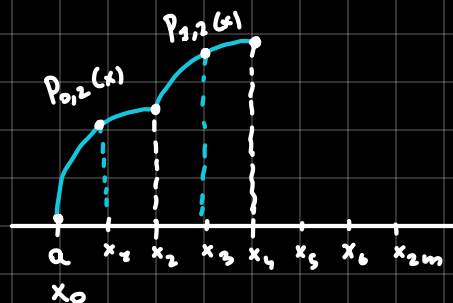
$$p_{p_2}(x) = \begin{cases} p_{0,2}(x) & x \in [x_0, x_2] \\ p_{2,2}(x) & x \in [x_2, x_4] \\ \vdots \\ p_{m-2,2}(x) & x \in [x_{2(m-1)}, x_{2m}] \end{cases}$$

$$p_{i,2}(x) = \sum_{s=0}^2 c_{s,i} B_{s,2}(x) \quad x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$$



con  $p_{i,2}(x) \in \mathcal{P}_2 \quad i=0, \dots, m-1$

$p_{p_2}(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, 2m$



$$P_{i,2}(x_{2i}) = y_{2i} \rightarrow C_{0,i} = y_{2i}$$

$$P_{i,2}(x_{2i+2}) = y_{2i+2} \rightarrow C_{2,i} = y_{2i+2}$$

$$P_{i,2}(x_{2i+1}) = y_{2i+1} = y_{2i} B_{0,1}(x_{2i+1}) + C_{1,i} B_{1,2}(x_{2i+1}) + y_{2i+2} B_{2,2}(x_{2i+1})$$

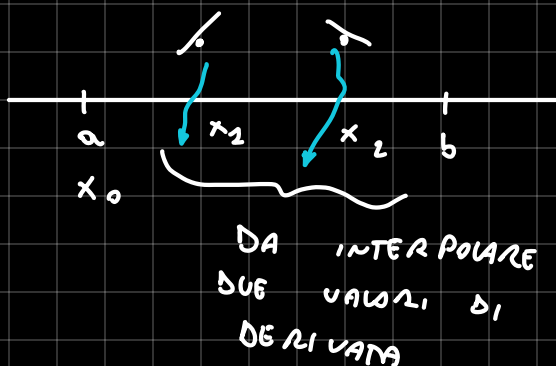
$$C_{1,i} = \frac{y_{2i+1} - y_{2i} B_{0,1}(x_{2i+1}) - y_{2i+2} B_{2,2}(x_{2i+1})}{B_{1,2}(x_{2i+1})}$$

\* Polinomio cubico a tratti  $C_1$  di interpolazione di Hermite

→ siano assegnati 1 se due punti e osservazioni

$$(x_i, y_{i,0}, y_{i,1}) \quad i=0, \dots, n$$

DOVE  $y_{i,0}$  è un'osservazione e  $y_{i,1}$  è il valore di derivata assunto da interpolare



$$\left. \begin{aligned} PP_H(x_i) &= y_{i,0} \\ PP'_H(x_i) &= y_{i,1} \end{aligned} \right\} \text{ COND. DI INTERP.}$$