

# INTERPOLAZIONE POLINOMIALE:

DATI

DATI LE INFO  $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$  DETERMINARE IL POLINOMIO SOBBISSO /  
REFUGI SITI DI INTERPOLAZIONE  $P(x) \in P_n$  (PROBLEMA BEN POSTO),  $P(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, n$   
RISULTATO

SI PASSA A DEI METODI NUMERICI PER RISPONDERE A QUESTO PROBLEMA

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$O(n^2)$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) \quad x \in [a, b] \rightarrow \text{Quanto costa? (costo computazionale)}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x) \rightarrow \text{Quanto costa?} \Rightarrow \text{nulla} \quad \left. \begin{array}{l} \text{POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE} \\ \text{(SOLUZIONE ESPlicita)} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow \quad L_{i,n}(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{SE } i = s \\ 0 & \text{SE } i \neq s \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{E' LA SOLUZIONE ESPlicita} \\ \hookrightarrow \text{LA VALUTAZIONE AURA' UN COSTO} \end{array}$$

$$L_{i,n}(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad \left. \begin{array}{l} (n+1) \text{ ADD/SORT} \\ (n+1) \cdot (2n-1) \text{ MOLT/DIV} \end{array} \right\} \text{COSTO DI 1 VALUTAZIONE}$$

$$P(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(\bar{x}) \quad \begin{array}{l} n \text{ ADD/SORT} \\ n \text{ MOLT/DIV} \end{array}$$

Diminuisce il costo:

calcolo una volta sola

$$w_i = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq s}^n (x_i - x_s)} \quad O(n^2)$$

## I FORM DI INTERPOLAZIONE

$$L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$L_{i,n}(x) = \frac{L(x)}{x - x_i} w_i$$

calcolo una volta sola

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x) = \overbrace{\ell(x) \sum_{i=0}^n y_i \frac{1}{(x - x_i)} w_i}^{\text{non posso}}$$

LI CONOSCO I VALORI  $x_i, w_i$  DAREBBE VALUTARE IN PUNTI AL DENOMINATORE 0

VALUTARE  $\Rightarrow x_i = y_i$

## II FORMA BAZILENTRICA (PRIMA FORMA DIVISO 2)

$$P(x) = \ell(x_1) \cdot \sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x - x_i)}$$

\*  $\ell = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x)$

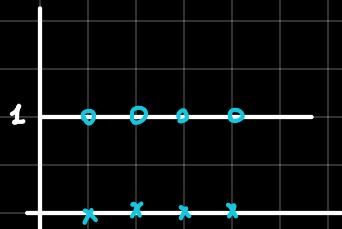
$(x_i, l)$   
 $i = 0, \dots, n$

z ↗ IN FORMA DI LA GRANGE?

$$\ell = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x)$$

$(x_i, l)$   
 $i = 0, \dots, n$

$$\sum_{i=0}^n L_{i,n}(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x - x_i)}$$



$$P(x) = \frac{\ell(x) \cdot \sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x - x_i)}}{\ell(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x - x_i)}}$$

ALGORITMO RICONTENENTE  
STABILE

$$P(x) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x - x_i)}}$$

USUALI  
LI CALCOLO  
UNA VOLTA  
SOLO?

P(x) =  $\frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x - x_i)}}$

QUINDI

3 · (n+1) SOT/ADD

2 · (n+1) MUL/DIV

$O(n)$  → PER PUNTO  
DI VALUTAZIONE

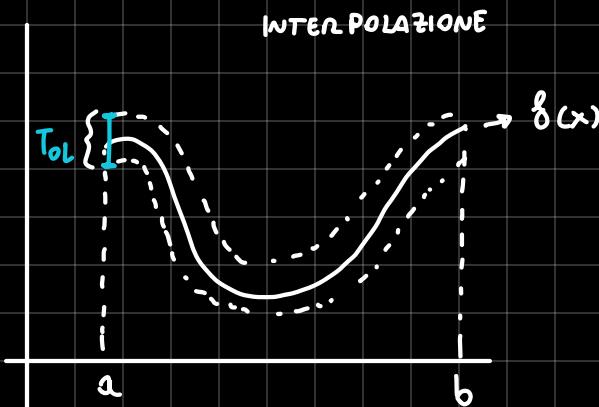
## INTERPOLAZIONE POLINOMALE DI FUNZIONE

DATO  $f(x)$   $x \in [a, b]$  INTERPOLAZIONE

APPROSSIMAZIONE CON UN POLINOMIO

RISULTATO  
 $p(x) \in P_n$  t.c.  $|f(x) - p(x)| < Tol$   $\Rightarrow$  TOLISCIATA ASSEGNATA  $x \in [a, b]$

ERRORE DI  
INTERPOLAZIONE

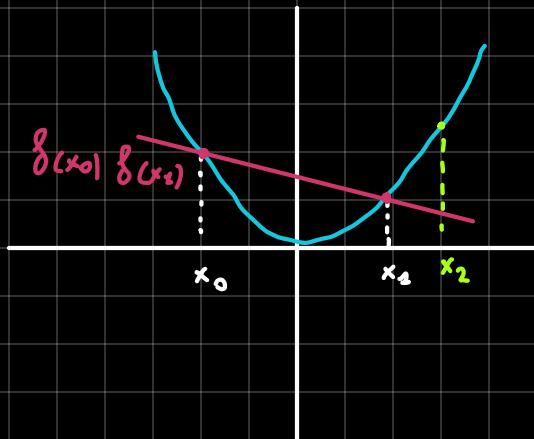


\*  $x_i \in [a, b]$  DISTINTI t.c.  $(x_i, f(x_i))$   
RISOLVEVOLGONO IL PROBLEMA POSSO

INT. DI DATI  
 $(x_i, y_i)$ ; INT. DI FUNZIONI  
 $(x_i, f(x_i))$

VOLGONO  
RIORDINARLI  
A

Es :  $f(x) = x^2$   $x \in [-1, 1]$   $P(x) \in P_1$



$$P(x) \in P_2 \quad | P(x) -$$

$$R(x) \rightarrow \emptyset$$

$$n \rightarrow \infty$$

FUNZIONE MOLTO REGOLARE (SEMPLICE DA COSTRUIRE)

**Teorema :** Sia  $f(x) \in C^{n+2} [a, b]$ . Siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$  distinti in  $[a, b]$  e  $\bar{x}$  un punto di  $[a, b]$ . Allora esiste un punto  $\xi \in (a, b)$  nell'intervallo

aperto per cui :

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{con } w(\bar{x}) = \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i)$$

SE BOSTITUITO  
FORSE NON  
 $\xi$  CORRETTO

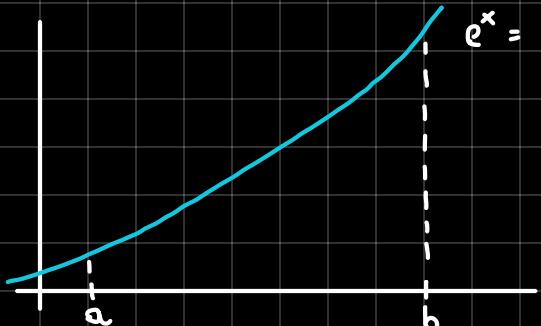


**Corollario :** Posto  $M_{n+2} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+2)}(x)|$ , un limite superiore all'errore di interp. è dato da :

$$R(x) \leq \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} M_{n+2}$$

ERRORE ANATOMICO  
 \*  $R(x) = |f(x) - P(x)| \rightarrow$  SU GLI ALTRI ERRORE SARÀ TOT, COMPRENSIVI ANCHE  
 ERRORE DI INTERPOLAZIONE

Es :  $f(x) = e^x$   $x \in [a, b]$



$$e^x = f^{(n+2)}(x)$$

$$M_{n+2} = \max_{x \in [a, b]} |e^x| = e^b$$

$$\max_{x \in [a, b]} |R(x)| \leq \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} e^b \leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} e^b \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

\* [Rus] Runge diede un controsenso di tutti i risultati elaborati ad ora

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

→ punti equispaziati in  $[-5, 5]$

$$x_i = \frac{10}{n} \cdot i - 5 \quad i = 0, \dots, n$$

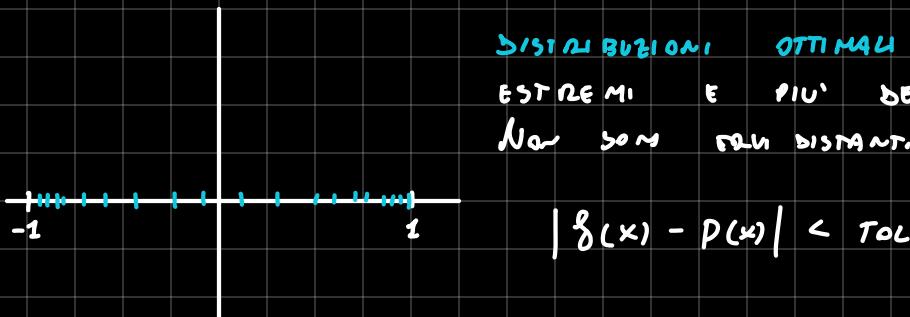


Al aumentare di  $n$   
invece di convergere,  
diverge dalla funzione.

⇒ Sol. i punti devono essere  
diseguali e non ordine.

Th. di Convergenza: Sia  $I = [-1, 1]$  i punti di interpolazione, siano gli zeri del polinomio di Chebyshev di grado  $n+2$  (zeri positivi) se  $f(x) \in C_I^1$  allora il polinomio interp. converge ad  $f(x)$  su  $I$  per  $n \rightarrow \infty$

DISTRIBUZIONI OTTIMALI NABA DISTANTI DALLI ESTREMI E PIÙ DESSI VICINO ALI ESTREMI.  
Non sono più distanti.



$E_{in}$  = Se i dati sono perturbati, quando variai  
perturbando il risultato.

\* Condizionamento del problema di interpolazione

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{i,n}(x)$$

$$f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$x_i \text{ distanti in } [a, b] \text{ in modo esatto } \in \mathbb{F}$$

$$f(x_i) \in \mathbb{R} \quad f(f(x_i)) = f(x_i)(1 + \varepsilon_i) \quad |\varepsilon_i| < u$$

$$(x_i, y_i) \quad x_i \in \mathbb{F}$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad f(y_i) = y_i + \delta y_i$$

$$= f(x_i) + \delta f_i$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) + \delta f_i) L_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n \delta f_i L_{i,n}(x) = \%$$

$$\% \quad p(x) + \sum_{i=0}^n \delta g_i L_{i,n}(x)$$

ES:  $u$   
g

$$| \tilde{p}(x) - p(x) | = \left| \sum_{i=0}^n \delta g_i L_{i,n}(x) \right| \leq \sum_{i=0}^n |\delta g_i| |L_{i,n}(x)| \leq \max_i |\delta g_i| \cdot \sum_{i=0}^n |L_{i,n}(x)|$$

SE GRANDE

ERRORE CHE  
ESPLORANO

SE PICCOLO

$$\Delta_n(p(x)) = M_q x \quad C_{\text{INT}}(p(x)) \quad C_{\text{INT}}(p(x))$$

$$x \in [a, b]$$

costante si le besche

INDIZIONATORI

### REQUISITI (ALCUNI)

- FUNZIONI ABBASSAMENTI REVERSI
- NUMERI CON OPPORTUA DISTRIBUZIONE

CRESCE  $\log n$  PER CHE BY CHEF