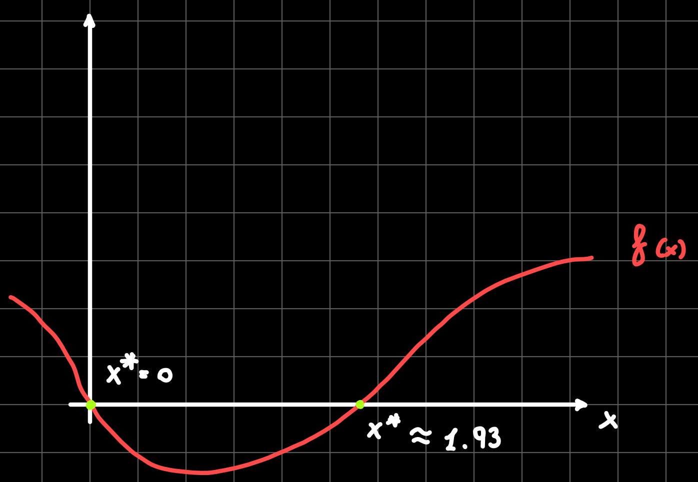
METODI NUMERICI PER RISOLVERE EQ. "NON" LINEARI

DATA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ VOGLIAMO DETERMINARE x^* t.c. $f(x^*) = 0$

x^* E' DETTO ZERO DI f O RADICE DELL'EQ. $f(x) = 0$

ES: $f(x) = x^2 - 4\sin(x)$



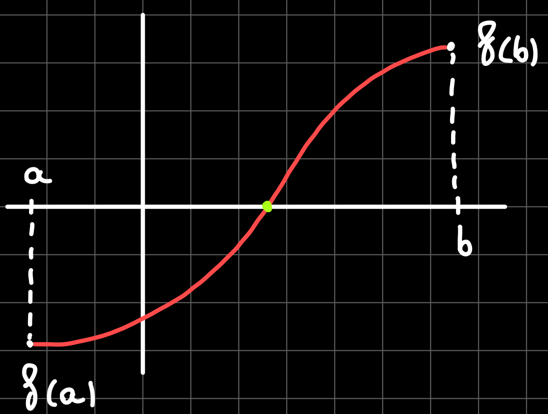
* UN' EQ. NON LINEARE PUO' AVERE UN NUMERO ARBITRARIO DI ZERI (RADICI).

ES:
- $e^x + 1$ = NESSUNA SOL
- $e^{-x} - x$ = 1 SOL.
- $x^2 - 4\sin x = 0$ DUE SOL
- $\sin(x) = 0$ → INFINITE SOL.

Th. DI BOLZANO $\xrightarrow{}$ MATEMATICO :

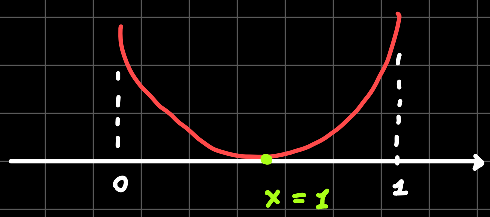
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA (NO SALTI) E SIA $[a, b] \in \mathbb{R}$

t.c. $\operatorname{sign}(f(a)) \neq \operatorname{sign}(f(b))$



*MOLTEPLICITA' DI UNA RADICE:

ES: $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

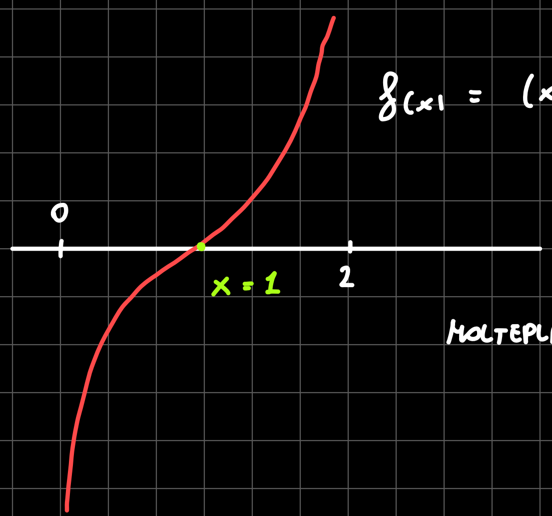


RADICE HA MOLT. 2

x^* HA MOLTEPLICITA' m SE $f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ E $f^{(m)}(x^*) = 0$

$f(x) = (x - x^*)^m \, q(x)$ t.c. $q(x^*) \neq 0$

QUANDO $m = 1$ ($f(x^*) = 0$ $f'(x^*) = 0$) x^* E' UNA RADICE SEMPLICE



$f(x) = (x-1)^3$

MOLTEPLICITA' 3

ERRORE INERENTE:

INPUT (IN ARITMETICA ESATTA) FUNZIONE $f(x)$ ES: $f(x) = a x^2 + b x + c$

(IN ARITMETICA FINITA) $\hat{f}(x)$ $\hat{f}(x) = \hat{a} x^2 + \hat{b} x + \hat{c}$

x^* RADICE DI f

$\hat{x}^*$ RADICE DI $\hat{f}$

$(\hat{f}(\hat{x}^*) = 0)$

* IN RELAZIONE SONO ERRORE SUI DATI ED ERRORE SUL RISULTATO?

Errore sui dati : distanza fra $f(x)$ e $\hat{f}(x)$

$$E(x) := |f(x) - \hat{f}(x)|$$

*| dati sono la funzione e il risultato sono le radici

Errore (Assoluto) sul risultato : $|\hat{x}^* - x^*|$

Th. del val medio : $\dfrac{f(\overset{a}{\hat{x}^*}) - f(\overset{b}{x^*})}{\underset{a}{\hat{x}^*} - \underset{b}{x^*}} = f'(\xi), \ \xi \in (\overset{a}{x^*}, \overset{b}{\hat{x}^*})$ → rapporto incrementale

ξ — csi

$$E(\hat{x}^*) = |f(\hat{x}^*) - \underbrace{\hat{f}(\hat{x}^*)}_{0}| = |f(\hat{x}^*)| \Rightarrow \frac{|f(\hat{x}^*) - \overbrace{f(x^*)}^{0}|}{|\hat{x}^* - x^*|} = \frac{|f(\hat{x}^*)|}{|\hat{x}^* - x^*|} =$$

$$= \frac{E(\hat{x}^*)}{|\hat{x}^* - x^*|} = |f'(\xi)| \Rightarrow |\hat{x}^* - x^*| = \frac{E(\hat{x}^*)}{|f'(\xi)|}, \ \xi \in (x^*, \hat{x}^*)$$

$E(\hat{x}^*)$ → errore sui dati

$|\hat{x}^* - x^*|$ → errore sul risultato

- Concetto generale (nel vivo dei metodi numerici per la risoluzione di eq. non lineari)

Sono metodi iterativi :

(guess sulla soluzione!) → questa x sarà vicina alla sol. ← guardo ad occhio dal plot.

partiamo da un punto iniziale $x^{(0)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(1)}$

applicando una regola si genera $x^{(1)}$ più vicino alla soluzione

In modo iterativo continuo

$$x^{(0)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(1)} \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(2)} \xrightarrow{\text{Black Box}} \cdots \xrightarrow{\text{Black Box}} x^{(K)}$$

Dato $x^{(0)}$ si genera una successione di valori $x^{(k)}$

Successione $\Rightarrow \{x^{(k)}\}_k$

- Convergenza: La successione $x^{(k)}$ converge, cioè $\exists \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$?
- Consistenza: supponendo che il limite esista, è una sol. di $f(x)=0$?

Si ha convergenza alla sol. s.s.s. $\iff$ $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x^*$ e $f(x^*)=0$

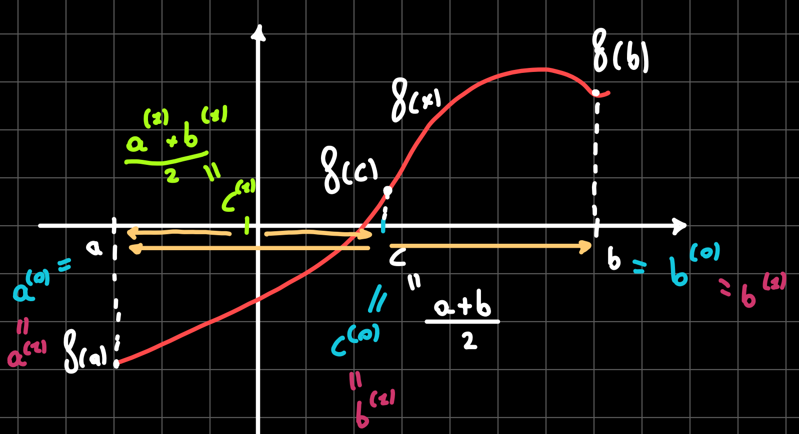
minor num. di passaggi per la sol.

- Velocità di convergenza → quanto velocemente $|x^{(k)} - x^*| \to 0$?

Importante: così otteniamo una sola sol → le radici possono essere più di 1.

↳ Idea → qualora convergente il metodo genera una radice (scegliere diversi guess iniziali per generare tutte le radici) La convergenza dipende fortemente dalla scelta del guess iniziale)

Metodo di Bisezione: Sia $f(x) \in C([a,b])$ t.c. $f(a)f(b) < 0$



$\Rightarrow \exists$ almeno una sol. di $f(x)=0$ in $[a,b]$

se $f(c) == 0$ stop ($x^*=c$)

se $f(a)f(c) < 0$ (la radice $\in [a,c]$

↳ restringo la ricerca a $[a,c] \Rightarrow a^{(1)}=a^{(0)}, b^{(1)}=c^{(0)}$

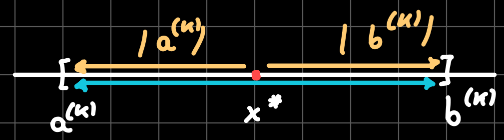
altrimenti ($f(a)f(c) > 0$ $f(c)f(b) < 0$, la radice $\in [c,b]$) restringo la ricerca a $[c,b]$ $= a^{(1)}=c^{(0)}, b^{(1)}=b^{(0)}$

Costruisco una successione di intervalli $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ contenenti la soluzione.

Mi fermo se sono abbastanza vicino alla radice o uguale alla radice, oppure, se l'intervallo diventa troppo piccolo.

$$\frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{\min(|a^{(k)}|, |b^{(k)}|)} < \underset{\text{Tolleranza}}{\mathrm{TOL.}}$$

Nota 2) $\Rightarrow$ $x^* = 0$



$$|b^{(k)} - a^{(k)}| > \min(|a^{(k)}|, |b^{(k)}|)$$

$$\frac{|b^{(k)} - a^{(k)}|}{\min(\dots, \dots)} > 1$$

Nota 2) $\Rightarrow$ (criterio di arresto) $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq \mathrm{Toll.} + 2u \min(|a^{(k)}|, |b^{(k)}|)$

Pro e contro:

Pro
- lavora sui segni
- Buona approssimazione $\rightarrow$ convergenza globale (localizzare una radice)

Contro
- Lento $\rightarrow$ sfrutto meno le informazioni generali che ho per ottimizzare il problema.

↗ misurare la velocità di convergenza

Ordine di convergenza: Sia $\{x^{(k)}\}_k$ successione numeri reali $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x^*$

Definiamo: $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ ("distanza" tra $x^{(k)}$ e il limite o "errore")

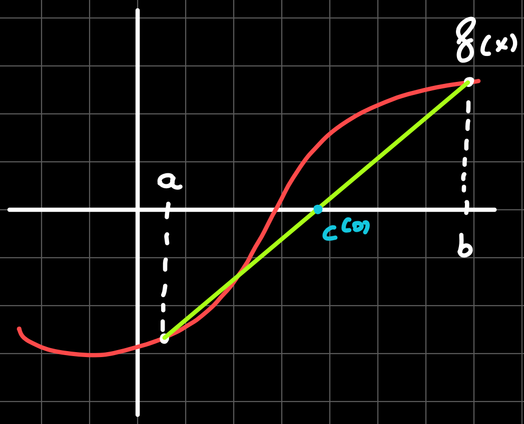
La successione ha ordine di convergenza p se $\exists\ \gamma$ costante e per $\mathbb{R}$, $p \geq 1$ t.c.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e^{(k+1)}|}{|e^{(k)}|^p} = \gamma \quad \begin{cases} 0 < \gamma < 1 & \text{se } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Terminologia:

$p = 1$	$0 < \gamma < 1$	convergenza	lineare
$p = 1$	$\gamma = 1$	"	sublineare
$p > 0$	$\gamma > 0$	"	superlineare
$p = 2$	$\gamma > 0$	"	quadratica
$p = 3$	$\gamma > 0$	"	cubica

* METODO DELLA FALSA POSIZIONE : STESSA IPOTESI DEL METODO DI BISEZIONE



SI PONE $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$

SI CALCOLA $c^{(0)}$ COME PUNTO DI INTERSEZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER $f(a)$ E $f(b)$ CON L'ASSE DELLE x.

- SE $f(c^{0}) = 0$ STOP!

ALTRIMENTI

SI DEFINISCE UN NUOVO INTERVALLO CHE CONTENGA LA RADICE :

SE $f(a^{(0)})\, f(c^{(0)}) < 0 \Rightarrow a^{(1)} = a^{(0)}$
$b^{(1)} = c^{(0)}$

SE $f(a^{(0)})\, f(c^{(0)}) > 0 \Rightarrow a^{(1)} = c^{(0)}$
$b^{(1)} = b^{(0)}$

SI ITERA IL PROCEDIMENTO A PARTIRE DA $[a^{(1)}, b^{(1)}]$