

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE :

DATI
DATE LE INFO $(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$ DETERMINARE IL POLINOMIO SODDISFACENTE
REQUISITI DI INTERPOLAZIONE $P(x) \in \mathbb{P}_n$ (PROBLEMA BEN POSTO), $P(x_i) = y_i \quad i=0, \dots, n$
RISULTATO

SI PASSA A DEI METODI NUMERICI PER RISPONDERE A QUESTO PROBLEMA

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$O(n^2)$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(x) \quad x \in [a, b] \rightarrow \text{QUANTO COSTA? (COSTO COMPUTAZIONALE)}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x) \rightarrow \text{QUANTO COSTA?} \Rightarrow \text{MOLTA} \quad \left. \begin{array}{l} \text{POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE} \\ \text{E' LA SOLUZIONE ESPLICITA} \\ \text{LA VALUTAZIONE AVRA' UN COSTO} \end{array} \right\}$$

$$L_{i,n}(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$i = 0, \dots, n$
 $s = 0, \dots, n$

$$L_{i,n}(x) = \frac{\prod_{s=0, s \neq i}^n (x - x_s)}{\prod_{s=0, s \neq i}^n (x_i - x_s)}$$

$(n+1)$ ADD / SORT
 $(n+1) \cdot (2n-1)$ MOLT / DIV

COSTO DI 1 VALUTAZIONE

$$p(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(\bar{x})$$

n ADD / SORT
 n MOLT / DIV

DIMINUISCO IL COSTO :

calcolo una volta sola

$$w_i = \frac{1}{\prod_{s=0, s \neq i}^n (x_i - x_s)} \quad O(n^2)$$

I FORME BARYCENTRICHE

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$L_{i,n}(x) = \frac{l(x)}{x - x_i} w_i$$

calcolo una volta sola

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{i,n}(x) = l(x) \sum_{i=0}^n y_i \frac{1}{(x - x_i)} w_i$$

non posso

VALUTARE IN PUNTI

x_i , MI DAREBBE

AL DENOMINATORE 0

LI CONOSCO

GLI ALI VALORI

VALUTARE $\Rightarrow x_i = y_i$

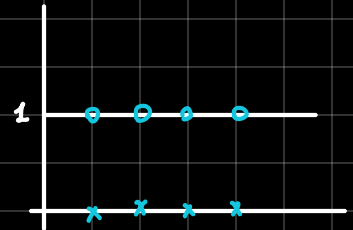
II FORMA BARILENTICA (PRIMA FORMA DIVISO 1)

$$p(x) = \frac{f(x) \cdot \sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x-x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x-x_i)}}$$

* $1 = \sum_{i=0}^n \overset{\text{SENZA 1}}{\uparrow} y_i L_{i,n}(x)$
 $(x_i, 1)$
 $i = 0, \dots, n$

$1 = \sum_{i=0}^n \overset{\text{SENZA 1}}{\uparrow} y_i L_{i,n}(x)$ \rightarrow IN FORMA DI LAGRANGE?

$$\sum_{i=0}^n L_{i,n}(x) = f(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x-x_i)}$$



$$p(x) = \frac{\cancel{f(x)} \cdot \sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x-x_i)}}{\cancel{f(x)} \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x-x_i)}}$$

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x-x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x-x_i)}}$$

UAGLI
 \downarrow
 LI CALCOLO
 UNA VOLTA
 SOLA?

ALGORITMO RIENTRANTE
 STABILE

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{w_i}{(x-x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{(x-x_i)}}$$

AVINDI
 \downarrow

3. (n+1) SOTT/ADD

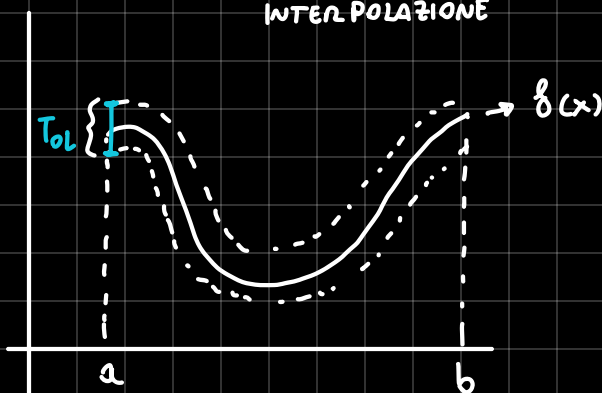
2. (n+1) MOLT/DIV

$O(n) \rightarrow$ PER PUNTO
 DI VALUTAZIONE

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE DI FUNZIONE

DATO \leftarrow $f(x)$ $x \in [a, b]$ INTERPOLAZIONE APPROSSIMAZIONE CON UN POLINOMIO

RISULTATO \leftarrow $p(x) \in P_n$ t.c. $R(x) = |f(x) - p(x)| < Tol$ \rightarrow TOLLERANZA ASSEGNATA $x \in [a, b]$
 ERRORE DI INTERPOLAZIONE

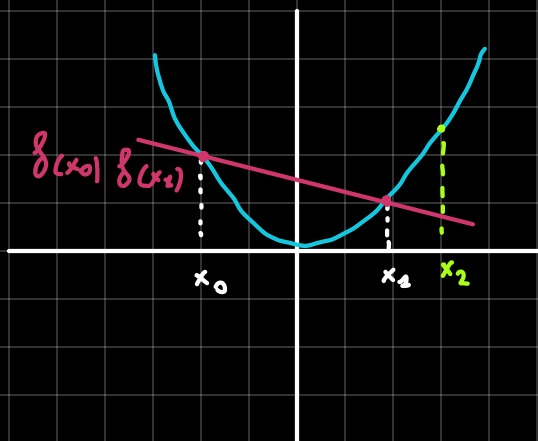


* $x_i \in [a, b]$ DISTINTI t.c. $(x_i, f(x_i))$ INTERPOLAZIONE
 RISOLVEREBBERO IL PROBLEMA POSTO

INT. DI DATI (x_i, y_i) ; INTER. DI FUNZIONI $(x_i, f(x_i))$

\leftarrow
 VOLTA NO
 RILASCIARE
 A

Es: $f(x) = x^2$ $x \in [-1, 1]$ $p(x) \in P_1$



$p(x) \in P_2 \mid p(x) = ?$

$R(x) \rightarrow \phi$
 $n \rightarrow \infty$

FUNZIONE MOLTO SEMPLICE (SEMPLICE DA COSTRUIRE)

TEOREMA: SIA $f(x) \in C^{n+1}_{[a,b]}$. SIANO x_0, x_1, \dots, x_n DISTINTI IN $[a,b]$ E \bar{x} UN PUNTO DI $[a,b]$. ALLORA ESISTE UN PUNTO $\xi \in (a,b)$ INTERVALLO APERTO PER CUI:

$$f(\bar{x}) - p(\bar{x}) = \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{con} \quad w(\bar{x}) = \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i)$$

FORSE NON
E' UNGUARITO

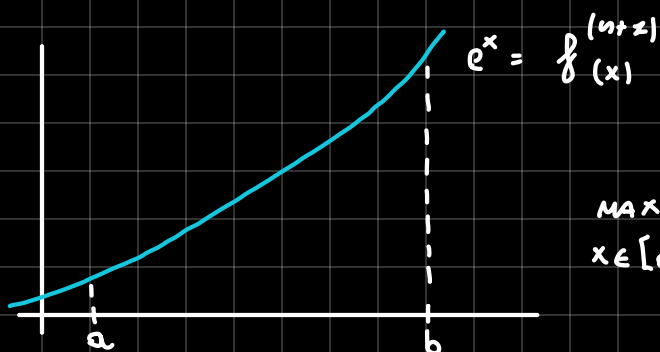
SE SOSTITUIBILE
TUTTO SI PENSA DA \rightarrow UPPER BOUND
UNA COSTANTE

CONCETTUALE: Posto $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, UN LIMITE SUPERIORE ALL'ERRORE DI INTERP. E' DATO DA:

$$R(x) \leq \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} M_{n+1}$$

ERRORE ANALITICO
* $R(x) = |f(x) - p(x)| \rightarrow$ SU MACCHINA SARA' ERRORE TOT, COMPRESA ANCHE GLI ALTRI ERRORI (RELATIVO, ALGORITMICO)
ERRORE DI INTERPOLAZIONE

Es: $f(x) = e^x$ $x \in [a,b]$

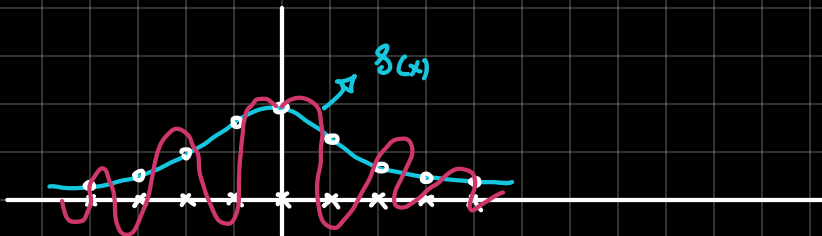


$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |e^x| = e^b$$

$$\max_{x \in [a,b]} |R(x)| \leq \frac{w(\bar{x})}{(n+1)!} e^b \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^b \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

* [RUG] RUNGE DEDUCE UN CONTROESEMPIO DI TUTTI I RISULTATI ELABORATI AD ORA

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

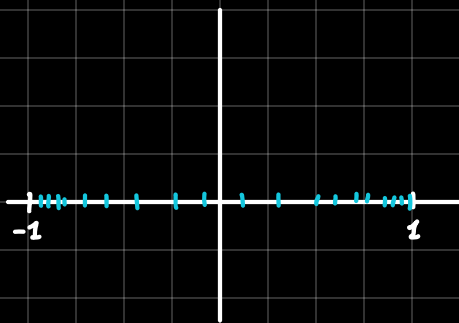


→ PUNTI EQUISPACIATI IN $[-5, 5]$
 $x_i = \frac{10}{n} \cdot i - 5$
 $i = 0, \dots, n$

↓
 ALL'AUMENTARE DI n
 INVOLVE DI CONVERGENTE,
 DIVERGENTE DALLA FUNZIONE.

=> SOL. I PUNTI DEVONO ESSERE
 DISTRIBUITI IN UN CERTO ORDINE.

Th. di CANTOR: SIA $I = [-1, 1]$ E I PUNTI DI INTERPOLAZIONE, SIANO
 GLI ZERI DEL POLINOMIO DI CHEBYSHEV DI GRADO $n+1$ (ZERI POSITIVI)
 SE $f(x) \in C^1_I$ ALLORA IL POLINOMIO INTERP. CONVERGE AD $f(x)$ SU I
 PER $n \rightarrow \infty$



DISTRIBUZIONI OTTIMALI NADA DISTANTI DALLI
 ESTREMI E PIU' DENSI VICINO ALI ESTREMI.
 NON SONO EQUIDISTANTI.

$$|f(x) - p(x)| < \text{TOL}$$

E_{in} = SE I DATI SONO PERTURBATI, QUANTO VARIA
 PERTURBATO IL RISULTATO.

* CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{i,n}(x)$$

$$f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$x_i \text{ DISTINTI IN } [a, b] \quad \text{IN MODO ESATTO } \in \mathbb{F}$$

$$f(x_i) \in \mathbb{R} \quad f(f(x_i)) = f(x_i)(1 + \epsilon_i) \quad |\epsilon_i| < \epsilon$$

$$= f(x_i) + \delta f_i$$

$$(x_i, y_i) \quad x_i \in \mathbb{F}$$

$$y_i \in \mathbb{R}$$

$$f(y_i) = y_i + \delta y_i$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) + \delta f_i) L_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n \delta f_i L_{i,n}(x) = \%$$

% $p(x) + \sum_{i=0}^n \delta f_i L_{i,n}(x)$

$$|\bar{p}(x) - p(x)| = \left| \sum_{i=0}^n \delta f_i L_{i,n}(x) \right| \leq \sum_{i=0}^n |\delta f_i| |L_{i,n}(x)| \leq \max_i |\delta f_i| \cdot \sum_{i=0}^n |L_{i,n}(x)|$$

SE UNA ADE
ERRORE CHE
ESPLORANO

SE PICCOLO

$$\Delta_n(p(x)) = \max_{x \in [a, b]} (L_{INT}(p(x)) - L_{INT}(p(x)))$$

CONSTANTE DI LE BESGHE

CONDIZIONAMENTO

REQUISITI (ALCUNI)

- FUNZIONI ADASSIMAZI RELEVANTI
- NUMERI CON OPPOSITA DISTRIBUZIONI

CASSE $\log n$ PER CHE BY CHEF