

数据结构与算法笔记

X

2017 年 10 月 25 日

本文是作者关于数据结构与算法的读书笔记，侧重于记录和总结算法相关的数学方法，主要参考了Mark Allen Weiss的数据结构与算法分析(*C语言描述*)。本文的章节顺序，数学符号等都尽量与该书保持一致，同时也参考了网络资源或者其他书籍，均在对应章节或者习题序号下列出。由于水平所限，文中谬误在所难免，欢迎指正。

目录	3
----	---

目录

前言	2
1 初等数论基础	4
1.1 基本概念	4
1.1.1 整除性	4
2 算法分析	5
2.1 算法复杂度的数学定义	5
2.2 算法复杂度的性质	5

1 初等数论基础

[夜深人静写算法：初等数论，<http://www.cppblog.com/menjitianya/archive/2015/12/02/212395.html>]

1.1 基本概念

1.1.1 整除性

若 a, b 为整数， a 整除 b 是指 b 是 a 的倍数， a 是 b 的约数，记做 $a|b$ 。关于整除的性质有

1. 任意性：若 $a|b$ ，则对于任意非零整数 m ，都有 $am|bm$ 。
2. 传递性：若 $a|b$ ， $b|c$ ，则 $a|c$ 。
3. 可消性：若 $a|bc$ 且 a, c 互素，则 $a|b$ 。
4. 组合性：若 $c|a$ 且 $c|b$ ，则对于任意整数 m, n ，都有 $c|ma + nb$ 。

Exercise 1.1. 假设 x, y, z 均为整数，若 $11|(7x + 2y - 5z)$ ，求证 $11|(3x - 7y + 12z)$ 。

Solution 1.1.

Proof. 令 $3x - 7y + 12z = m(7x + 2y - 5z) + 11(ax + by + cz)$ ，其中 m, a, b, c 均为整数。

如果等式要成立，则两边 x, y, z 的系数均要相等，得到

$$\begin{cases} 7m + 11a = 3 \\ 2m + 11b = -7 \\ -5m + 11c = 12 \end{cases} \quad (1)$$

可知其中的一个解为 $m = 2, a = -1, b = -1, c = 2$ 。

故可以得到 $3x - 7y + 12z = 2(7x + 2y - 5z) + 11(-1x - 1y + 2z)$ 。即 $(3x - 7y + 12z)$ 可以分解为 11 与 $(7x + 2y - 5z)$ 的加权之和。

又因为 $11|(7x + 2y - 5z)$ ，以及 $11|11$ ，故根据整除性的组合性质， $11|(3x - 7y + 12z)$ 。

□

2 算法分析

2.1 算法复杂度的数学定义

Definition 2.1. 关于算法的复杂度本文使用如下定义

1. 如果对于所有足够大的 n , $T(N)$ 的上界由 $f(N)$ 的常数倍决定, 也就是说, 如果存在正常数 c 和 n_0 , 使得当 $N \geq n_0$ 时, 都有 $T(N) \leq cf(N)$, 则记为 $T(N) = \mathcal{O}(f(N))$ 。
2. 对于所有足够大的 n , $T(N)$ 的下界由 $g(N)$ 的常数倍决定, 也就是说, 如果存在正常数 c 和 n_0 , 使得当 $N \geq n_0$ 时, 都有 $T(N) \geq cg(N)$, 则记为 $T(N) = \Omega(g(N))$ 。
3. 如果对于所有足够大的 n , $T(N)$ 的上界和下界由 $h(N)$ 的常数倍决定, 也就是说, 如果存在正常数 c_1, c_2 和 n_0 , 使得当 $N \geq n_0$ 时, 都有 $c_1g(N) \leq T(N) \leq c_2g(N)$, 则记为 $T(N) = \Theta(g(N))$ 。
4. 如果 $T(N) = \mathcal{O}(p(N))$ 且 $T(N) \neq \Theta(p(N))$, 则 $T(N) = o(p(N))$ 。

2.2 算法复杂度的性质

Theorem 2.1. 如果 $T_1(N) = \mathcal{O}(f(N))$ 且 $T_2(N) = \mathcal{O}(g(N))$, 那么

- $T_1(N) + T_2(N) = \max(\mathcal{O}(f(N)) + \mathcal{O}(g(N)))$ 。
- $T_1(N)T_2(N) = \mathcal{O}(f(N)g(N))$ 。

Proof.

□

Theorem 2.2.

对于任意常数 k , $\log^k N = \mathcal{O}(N)$ 。该条定理说明对数增长非常缓慢。