

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки  
«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе № 2  
дисциплина "Математическая статистика"

Выполнил студент гр. 5030102/00201  
Преподаватель:

Трусов Н.А.  
Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

**2023**

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>6</b>
2.1	Двумерное нормальное распределение . . . . .	6
2.2	Корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции	6
2.3	Выборочные коэффициенты корреляции . . . . .	6
2.3.1	Выборочный коэффициент корреляции Пирсона . . . . .	6
2.3.2	Выборочный квадратный коэффициент корреляции . . . . .	7
2.3.3	Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена .	7
2.4	Эллипсы рассеивания . . . . .	7
2.5	Простая линейная регрессия . . . . .	8
2.5.1	Модель простой линейной регрессии . . . . .	8
2.5.2	Метод наименьших квадратов . . . . .	8
2.5.3	Расчетные формулы для МНК-оценок . . . . .	8
2.6	Робастные оценки коэффициентов линейной регрессии . . . . .	9
2.7	Метод максимального правдоподобия . . . . .	9
2.8	Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хм-квадрат . . . . .	10
2.9	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения . . . . .	11
2.9.1	Доверительный интервал для математического ожидания $m$ нормального распределения . . . . .	11
2.9.2	Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$ нормального распределения . . . . .	11
2.10	Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольного распределения при большом объеме выборки. Асимптотический подход . .	11
2.10.1	Доверительный интервал для математического ожидания $m$ произвольной генеральной совокупности при большом объеме выборки . . . . .	12
2.10.2	Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольной генеральной совокупности при большом объеме выборки . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Результаты</b>	<b>13</b>
3.1	Выборочные коэффициенты корреляции . . . . .	13
3.2	Эллипсы рассеивания . . . . .	14
3.3	Оценки коэффициентов линейной регрессии . . . . .	16

3.3.1	Выборка без возмущений . . . . .	16
3.3.2	Выборка с возмущениями . . . . .	17
3.4	Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хи-квадрат . . . . .	18
3.5	Доверительные интервалы для параметров нормального распределения . . . . .	20
3.6	Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>22</b>
4.1	Выборочные коэффициенты корреляции . . . . .	22
4.2	Оценки коэффициентов линейной регрессии . . . . .	22
4.3	Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хи-квадрат . . . . .	22
4.4	Доверительные интервалы для параметров распределения . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Литература</b>	<b>23</b>

## Список иллюстраций

1	Двумерное нормальное распределение, $n = 20$ . . . . .	15
2	Двумерное нормальное распределение, $n = 60$ . . . . .	15
3	Двумерное нормальное распределение, $n = 100$ . . . . .	16
4	Выборка без возмущений . . . . .	17
5	Выборка с возмущениями . . . . .	18
6	Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров . . . . .	20
7	Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров. Асимптотический подход . . . . .	21

## 1 Постановка задачи

1. Сгенерировать двумерные выборки размерами 20, 60, 100 для нормального двумерного распределения  $N(x, y, 0, 0, 1, 1, \rho)$ . Коэффициент корреляции  $\rho$  взять равным 0, 0.5, 0.9. Каждая выборка генерируется 1000 раз и для неё вычисляются: среднее значение, среднее значение квадрата и дисперсия коэффициентов корреляции Пирсона, Спирмена и квадрантного коэффициента корреляции. Повторить все вычисления для смеси нормальных распределений:

$$f(x, y) = 0.9N(x, y, 0, 0, 1, 1, 0.9) + 0.1N(x, y, 0, 0, 10, 10, -0.9)$$

Изобразить сгенерированные точки на плоскости и нарисовать эллипс равновероятности.

2. Найти оценки коэффициентов линейной регрессии  $y_i = a + bx_i + e_i$ , используя 20 точек на отрезке  $[-1.8; 2]$  с равномерным шагом равным 0.2. Ошибку  $e_i$  считать нормально распределённой с параметрами  $(0, 1)$ . В качестве эталонной зависимости взять  $y_i = 2 + 2x_i + e_i$ . При построении оценок коэффициентов использовать два критерия: критерий наименьших квадратов и критерий наименьших модулей. Прodelать то же самое для выборки, у которой в значения  $y_1$  и  $y_{20}$  вносятся возмущения 10 и -10.
3. Сгенерировать выборку объёмом 100 элементов для нормального распределения  $N(x, 0, 1)$ . По сгенерированной выборке оценить параметры  $\mu$  и  $\sigma$  нормального закона методом максимального правдоподобия. В качестве основной гипотезы  $H_0$  будем считать, что сгенерированное распределение имеет вид  $N(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ . Проверить основную гипотезу, используя критерий согласия  $\chi^2$ . В качестве уровня значимости взять  $\alpha = 0.05$ . Привести таблицу вычислений  $\chi^2$ .

Исследовать точность (чувствительность) критерия  $\chi^2$  — сгенерировать выборки равномерного распределения и распределения Лапласа малого объёма (например, 20 элементов). Проверить их на нормальность.

4. Для двух выборок размерами 20 и 100 элементов, сгенерированных согласно нормальному закону  $N(x, 0, 1)$ , для параметров положения и масштаба построить асимптотически нормальные интервальные оценки на основе точечных оценок метода максимального правдоподобия и классические интервальные оценки на основе статистик  $\chi^2$  и Стьюдента. В качестве параметра надёжности взять  $\gamma = 0.95$ .

## 2 Теория

### 2.1 Двумерное нормальное распределение

Двумерная случайная величина  $(X, Y)$  называется распределённой нормально (или просто нормальной), если её плотность вероятности определена формулой

$$N(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} \quad (1)$$

Компоненты  $X, Y$  двумерной нормальной случайной величины также распределены нормально с математическими ожиданиями  $\bar{x}, \bar{y}$  и средними квадратическими отклонениями  $\sigma_x, \sigma_y$  соответственно [1, с. 133-134].

Параметр  $\rho$  называется коэффициентом корреляции.

### 2.2 Корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции

Корреляционный момент, иначе ковариация, двух случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$K = cov(X, Y) = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})]. \quad (2)$$

Коэффициент корреляции  $\rho$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$ :

$$\rho = \frac{K}{\sigma_x\sigma_y} \quad (3)$$

### 2.3 Выборочные коэффициенты корреляции

#### 2.3.1 Выборочный коэффициент корреляции Пирсона

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{K}{s_X s_Y}, \quad (4)$$

где  $K, s_X^2, s_Y^2$  - выборочные ковариация и дисперсии с.в.  $X$  и  $Y$  [1, с. 535]

### 2.3.2 Выборочный квадратный коэффициент корреляции

Выборочный квадратный коэффициент корреляции

$$r_Q = \frac{(n_1 + n_3) - (n_2 + n_4)}{n}, \quad (5)$$

где  $n_1, n_2, n_3, n_4$  - количества точек с координатами  $(x_i, y_i)$ , попавшими соответственно в  $I, II, III, IV$  квадранты декартовой системы с осями  $x' = x - medx, y' = y - medy$  и с центром в точке с координатами  $(medx, medy)$  [1, с. 539].

### 2.3.3 Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Обозначим ранги, соответствующие значениям переменной  $X$ , через  $u$ , а ранги, соответствующие значениям переменной  $Y$ , - через  $v$ .  
Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

$$r_S = \frac{\frac{1}{n} \sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (u_i - \bar{u})^2 \frac{1}{n} \sum (v_i - \bar{v})^2}}, \quad (6)$$

где  $\bar{u} = \bar{v} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2}$  - среднее значение рангов [1, с. 540-541].

## 2.4 Эллипсы рассеивания

Уравнение проекции эллипса рассеивания на плоскость  $xOy$ :

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} = const \quad (7)$$

Центр эллипса (7) находится в точке с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ ; оси симметрии эллипса составляют с осью  $Ox$  углы, определяемые уравнением

$$tg 2\alpha = \frac{2\rho \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (8)$$

## 2.5 Простая линейная регрессия

### 2.5.1 Модель простой линейной регрессии

Регрессионную модель описания данных называют простой линейной регрессией, если

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  - заданные числа (значения фактора);  $y_1, \dots, y_n$  - наблюдаемые значения отклика;  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  - независимые, нормально распределенные  $N(0, \sigma)$  с нулевым математическим ожиданием и одинаковой (неизвестной) дисперсией случайные величины (ненаблюдаемые);  $\beta_0, \beta_1$  - неизвестные параметры, подлежащие оцениванию.

### 2.5.2 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК):

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1}. \quad (10)$$

### 2.5.3 Расчетные формулы для МНК-оценок

МНК-оценки параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad (11)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x} \hat{\beta}_1. \quad (12)$$



## 2.6 Робастные оценки коэффициентов линейной регрессии

Метод наименьших модулей:

$$\sum_{i=1}^n |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i| \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1}. \quad (13)$$

$$\hat{\beta}_{1R} = r_Q \frac{q_y^*}{q_x^*}, \quad (14)$$

$$\hat{\beta}_{0R} = \text{med } y - \hat{\beta}_{1R} \text{med } x, \quad (15)$$

$$r_Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i - \text{med } x) \text{sgn}(y_i - \text{med } y), \quad (16)$$

$$q_y^* = \frac{y^{(j)} - y^{(l)}}{k_q(n)}, \quad q_x^* = \frac{x^{(j)} - x^{(l)}}{k_q(n)}. \quad (17)$$

$$l = \begin{cases} [n/4] + 1 & \text{при } n/4 \text{ дробном,} \\ n/4 & \text{при } n/4 \text{ целом.} \end{cases}$$

$$l = n - l + 1$$

$$\text{sgn } z = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z = 0, \\ -1 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Уравнение регрессии здесь имеет вид

$$y = \hat{\beta}_{0R} + \hat{\beta}_{1R}x. \quad (18)$$

## 2.7 Метод максимального правдоподобия

$L(x_1, \dots, x_n, \theta)$  - функция правдоподобия (ФП), рассматриваемая как функция неизвестного параметра  $\theta$ :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta)\dots f(x_n, \theta) \quad (19)$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta). \quad (20)$$

Система уравнений правдоподобия (в случае дифференцируемости функции правдоподобия):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \text{ или } \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (21)$$

## 2.8 Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хм-квадрат

Выдвинута гипотеза  $H_0$  о генеральном законе распределения с функцией распределения  $F(x)$ .

Рассматриваем случай, когда гипотетическая функция распределения  $F(x)$  не содержит неизвестных параметров.

Правило проверки гипотезы о законе распределения по методу  $\chi^2$ :

1. Выбираем уровень значимости  $\alpha$
2. По таблице [3, с. 358] находим квантиль  $\chi_{1-\alpha}^2(k-1)$  распределения хи-квадрат с  $k-1$  степенями свободы порядка  $1-\alpha$ .
3. С помощью гипотетической функции распределения  $F(x)$  вычисляем вероятности  $p_i = P(X \in \Delta_i), i = 1, \dots, k$ .
4. Находим частоты  $n_i$  попадания элементов выборки в подмножества  $\Delta_i, i = 1, \dots, k$ .
5. Вычисляем выборочное значение статистики критерия  $\chi^2$ :

$$\chi_B^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

6. Сравниваем  $\chi_B^2$  и квантиль  $\chi_{1-\alpha}^2(k-1)$ .

- (а) Если  $\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$ , то гипотеза  $H_0$  на данном этапе проверки принимается.
- (б) Если  $\chi_B^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается, выбирается одно из альтернативных распределений, и процедура проверки повторяется.

## 2.9 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

### 2.9.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ нормального распределения

Дана выборка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объёма  $n$  из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочное среднее  $\bar{x}$  и выборочное среднее квадратическое отклонение  $s$ . Параметры  $m$  и  $\sigma$  нормального распределения неизвестны. Доверительный интервал для  $m$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$P\left(\bar{x} - \frac{sx}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{sx}{\sqrt{n-1}}\right) = 2F_T(x) - 1 = 1 - \alpha, \quad (22)$$
$$P\left(\bar{x} - \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha,$$

### 2.9.2 Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$ нормального распределения

Дана выборка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  объёма  $n$  из нормальной генеральной совокупности. На её основе строим выборочную дисперсию  $s^2$ . Параметры  $m$  и  $\sigma$  нормального распределения неизвестны.

Задаёмся уровнем значимости  $\alpha$ .

Доверительный интервал для  $\sigma$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}\right) = 1 - \alpha, \quad (23)$$

## 2.10 Доверительные интервалы для математического ожидания $m$ и среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольного распределения при большом объёме выборки. Асимптотический подход

При большом объёме выборки для построения доверительных интервалов может быть использован асимптотический метод на основе центральной предельной теоремы.

### 2.10.1 Доверительный интервал для математического ожидания $m$ произвольной генеральной совокупности при большом объеме выборки

Предполагаем, что исследуемое генеральное распределение имеет конечные математическое ожидание  $m$  и дисперсию  $\sigma^2$ .

$u_{1-\alpha/2}$  - квантиль нормального распределения  $N(0, 1)$  порядка  $1 - \alpha/2$ .

Доверительный интервал для  $m$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ :

$$P\left(\bar{x} - \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \approx \gamma \quad (24)$$

### 2.10.2 Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$ произвольной генеральной совокупности при большом объеме выборки

Предполагаем, что исследуемая генеральная совокупность имеет конечные первые четыре момента.

$u_{1-\alpha/2}$  - квантиль нормального распределения  $N(0, 1)$  порядка  $1 - \alpha/2$ .

$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$  - эксцесс генерального распределения,  $e = \frac{m_4}{s^4} - 3$  - выборочный эксцесс;  $m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$  - четвёртый выборочный центральный момент.

$$s(1 + U)^{-1/2} < \sigma < s(1 - U)^{-1/2}, \quad (25)$$

или

$$s(1 - 0.5U) < \sigma < s(1 + 0.5U) \quad (26)$$

где  $U = u_{1-\alpha/2} \sqrt{(e + 2)/n}$

Формулы (25) или (26) дают доверительный интервал для  $\sigma$  с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  [1, с. 461-462].

Замечание. Вычисления по формуле (25) дают более надёжный результат, так как в ней меньше грубых приближений.

### 3 Результаты

#### 3.1 Выборочные коэффициенты корреляции

$\rho = 0$	$r(4)$	$r_S(6)$	$r_Q(5)$
$E(z)$	0.007	0.006	0.0
$E(z^2)$	0.025	0.026	0.04
$D(z)$	0.053	0.054	0.052
$\rho = 0.5$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.509	0.481	0.4
$E(z^2)$	0.259	0.232	0.16
$D(z)$	0.031	0.035	0.05
$\rho = 0.9$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.905	0.878	0.8
$E(z^2)$	0.819	0.771	0.64
$D(z)$	0.003	0.005	0.026

Таблица 1: Двумерное нормальное распределение,  $n = 20$

$\rho = 0$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.002	0.006	0.0
$E(z^2)$	0.008	0.008	0.004
$D(z)$	0.017	0.016	0.016
$\rho = 0.5$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.509	0.486	0.333
$E(z^2)$	0.26	0.236	0.111
$D(z)$	0.01	0.011	0.015
$\rho = 0.9$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.901	0.886	0.733
$E(z^2)$	0.812	0.785	0.538
$D(z)$	0.001	0.001	0.009

Таблица 2: Двумерное нормальное распределение,  $n = 60$

$\rho = 0$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.002	0.003	0.0
$E(z^2)$	0.005	0.005	0.006
$D(z)$	0.01	0.01	0.011
$\rho = 0.5$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.5	0.481	0.32
$E(z^2)$	0.25	0.232	0.102
$D(z)$	0.006	0.007	0.009
$\rho = 0.9$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.902	0.889	0.72
$E(z^2)$	0.813	0.791	0.518
$D(z)$	0.0	0.001	0.005

Таблица 3: Двумерное нормальное распределение,  $n = 100$

$size = 20$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.8	0.878	0.6
$E(z^2)$	0.639	0.771	0.36
$D(z)$	0.008	0.004	0.037
$size = 60$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.796	0.886	0.6
$E(z^2)$	0.634	0.785	0.36
$D(z)$	0.002	0.001	0.011
$size = 100$	$r$	$r_S$	$r_Q$
$E(z)$	0.792	0.889	0.56
$E(z^2)$	0.627	0.791	0.314
$D(z)$	0.001	0.001	0.006

Таблица 4: Смесь нормальных распределений

### 3.2 Эллипсы рассеивания

Для уравнения эллипса выбиралась константа равная  $const = 2 \cdot (2 \cdot \sigma)$   
 $\sigma_x = \sigma_y = 1$

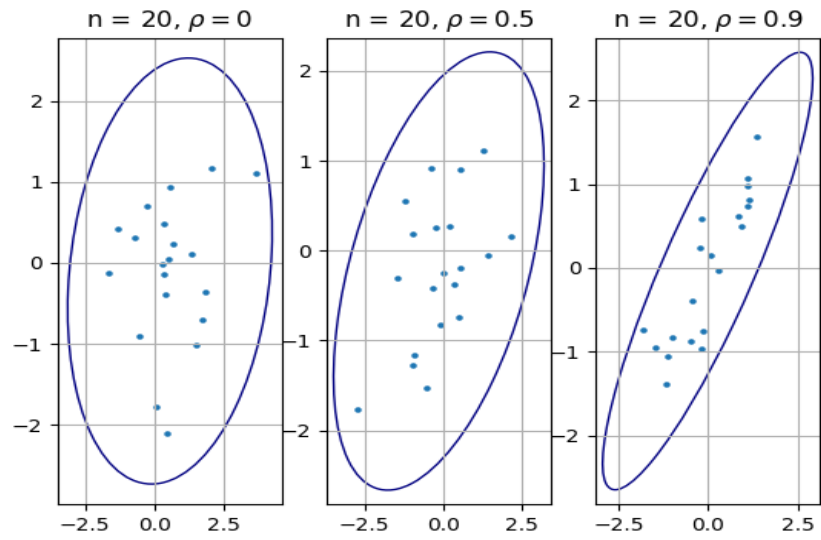


Рис. 1: Двумерное нормальное распределение,  $n = 20$

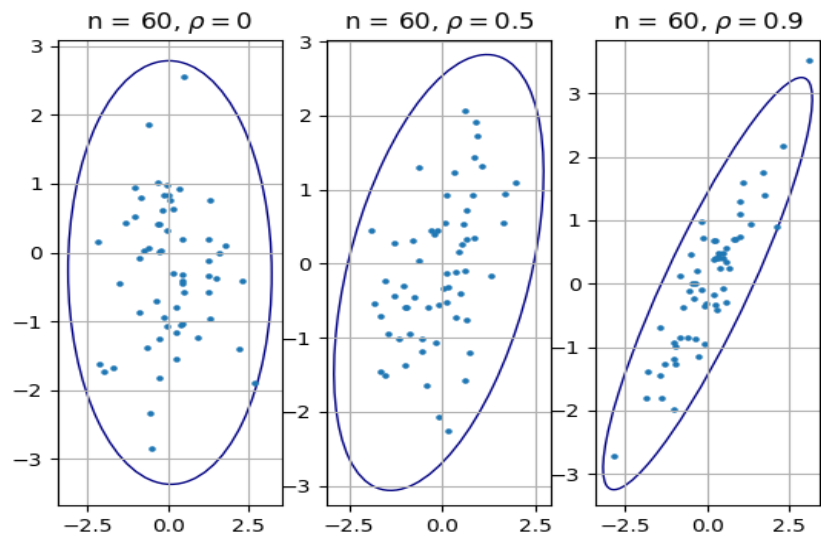


Рис. 2: Двумерное нормальное распределение,  $n = 60$

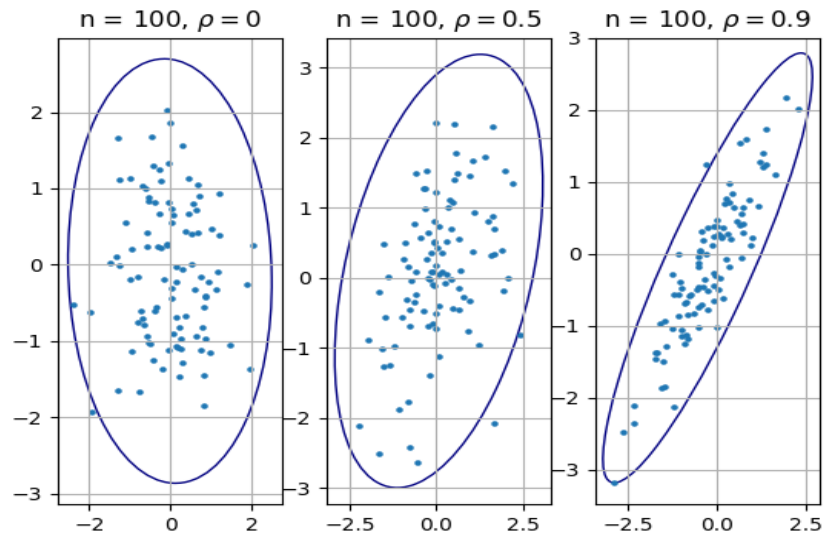


Рис. 3: Двумерное нормальное распределение,  $n = 100$

### 3.3 Оценки коэффициентов линейной регрессии

Метрика удаленности:

$$\text{distance} = \sum_{i=0}^n (y_{\text{model}}[i] - y_{\text{regr}}[i])^2 \quad (27)$$

#### 3.3.1 Выборка без возмущений

1. Критерий наименьших квадратов:  $\hat{a} \approx 2.11$ ,  $\hat{b} \approx 2.31$

2. Критерий наименьших модулей:  $\hat{a} \approx 1.90$ ,  $\hat{b} \approx 2.27$

МНК  $\text{distance} = 16.18$

МНМ  $\text{distance} = 14.90$



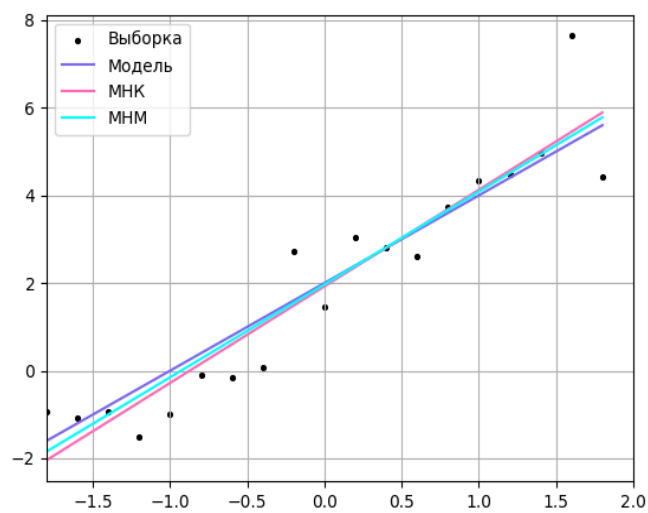


Рис. 4: Выборка без возмущений

### 3.3.2 Выборка с возмущениями

1. Критерий наименьших квадратов:  $\hat{a} \approx 2.07$ ,  $\hat{b} \approx 0.56$
2. Критерий наименьших модулей:  $\hat{a} \approx 1.82$ ,  $\hat{b} \approx 1.94$   
МНК *distance* = 176.38  
МНМ *distance* = 30.19

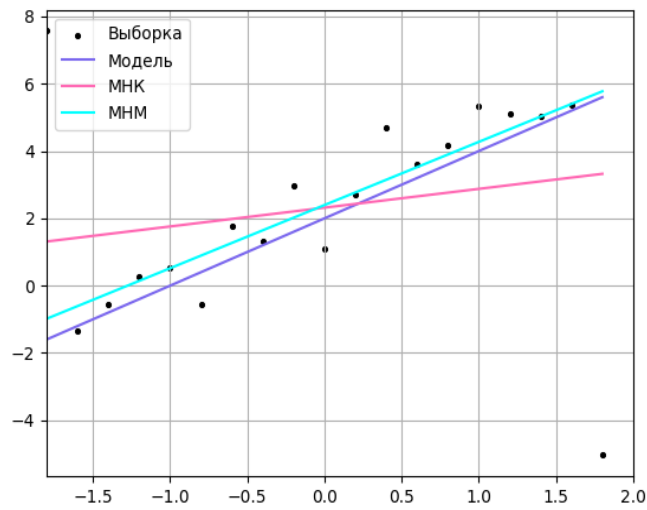


Рис. 5: Выборка с возмущениями

МНМ	$\hat{a}$	$\hat{a}'$	$\hat{b}$	$\hat{b}'$	$\frac{\hat{a} - \hat{a}'}{\hat{a}}$	$\frac{\hat{b} - \hat{b}'}{\hat{b}}$
	1.90	1.82	2.27	1.94	$\frac{1.90 - 1.82}{1.90} \approx 0.042$	$\frac{2.27 - 1.94}{2.27} \approx 0.15$
МНК	$\hat{a}$	$\hat{a}'$	$\hat{b}$	$\hat{b}'$	$\frac{\hat{a} - \hat{a}'}{\hat{a}}$	$\frac{\hat{b} - \hat{b}'}{\hat{b}}$
	2.11	2.07	2.31	0.56	$\frac{2.11 - 2.07}{2.11} \approx 0.019$	$\frac{2.31 - 0.56}{2.31} \approx 0.75$

Таблица 5: Оценка относительного отклонения параметров  $a$  и  $b$

### 3.4 Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хи-квадрат

Метод максимального правдоподобия:

$$\hat{\mu} \approx -0.08, \hat{\sigma} \approx 1.07$$

Критерий согласия  $\chi^2$ :

Количество промежутков  $k = 8$

Уровень значимости  $\alpha = 0.05$

Тогда квантиль  $\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.95}(7)$ . Из таблицы [3, с. 358]  $\chi^2_{0.95}(7) \approx 14.06$ .

$i$	$limits$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$[-\infty, -1.1]$	12	0.1357	13.57	-1.57	0.18
2	$[-1.1, -0.73]$	16	0.096	9.6	6.4	4.26
3	$[-0.73, -0.37]$	12	0.1253	12.53	-0.53	0.02
4	$[-0.37, 0.0]$	13	0.1431	14.31	-1.31	0.12
5	$[0.0, 0.37]$	14	0.1431	14.31	-0.31	0.01
6	$[0.37, 0.73]$	8	0.1253	12.53	-4.53	1.64
7	$[0.73, 1.1]$	10	0.096	9.6	0.4	0.02
8	$[1.1, \infty]$	15	0.1357	13.57	1.43	0.15
$\sum$	-	100	1	100	-0	6.4

Таблица 6: Вычисление  $\chi^2_B$  при проверке гипотезы  $H_0$  о нормальном законе распределения  $N(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$

Сравнивая  $\chi^2_B = 6.4$  и  $\chi^2_{0.95}(7) \approx 14.06$ , видим, что  $\chi^2_B < \chi^2_{0.95}(7)$ .

Рассмотрим гипотезу  $H_0^*$ , что выборка распределена согласно закону  $Laplace(x, \hat{\mu}, \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2}})$

$$\hat{\mu} \approx -0.16, \hat{\sigma} \approx 0.93$$

Количество промежутков  $k = 5$

Уровень значимости  $\alpha = 0.05$

$\chi^2_{0.95}(7) \approx 9.49$

$i$	$limits$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$[-\infty, -1.1]$	4	0.1357	2.71	1.29	0.61
2	$[-1.1, -0.37]$	4	0.2213	4.43	-0.43	0.04
3	$[-0.37, 0.37]$	5	0.2861	5.72	-0.72	0.09
4	$[0.37, 1.1]$	5	0.2213	4.43	0.57	0.07
5	$[1.1, \infty]$	2	0.1357	2.71	-0.71	0.19
$\sum$	-	20	1	20	-0	1

Таблица 7: Вычисление  $\chi^2_B$  при проверке гипотезы  $H_0$  о законе распределения  $L(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ ,  $n = 20$

Сравнивая  $\chi^2_B = 1$  и  $\chi^2_{0.95}(4) \approx 9.49$ , видим, что  $\chi^2_B < \chi^2_{0.95}(4)$ .

Проведём аналогичный анализ для равномерного распределения

$$\hat{\mu} \approx -0.28, \hat{\sigma} \approx 1.0$$

Количество промежутков  $k = 5$

Уровень значимости  $\alpha = 0.05$

$\chi_{0.95}^2(7) \approx 9.49$

$i$	$limits$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$[-\infty', -1.1]$	6	0.1357	2.71	3.29	3.98
2	$[-1.1, -0.37]$	4	0.2213	4.43	-0.43	0.04
3	$[-0.37, 0.37]$	5	0.2861	5.72	-0.72	0.09
4	$[0.37, 1.1]$	3	0.2213	4.43	-1.43	0.46
5	$[1.1, \infty]$	2	0.1357	2.71	-0.71	0.19
$\Sigma$	-	20	1	20	-0	4.76

Таблица 8: Вычисление  $\chi_B^2$  при проверке гипотезы  $H_0$  о законе распределения  $U(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ ,  $n = 20$

Сравнивая  $\chi_B^2 = 4.76$  и  $\chi_{0.95}^2(4) \approx 9.49$ , видим, что  $\chi_B^2 < \chi_{0.95}^2(4)$ .

### 3.5 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

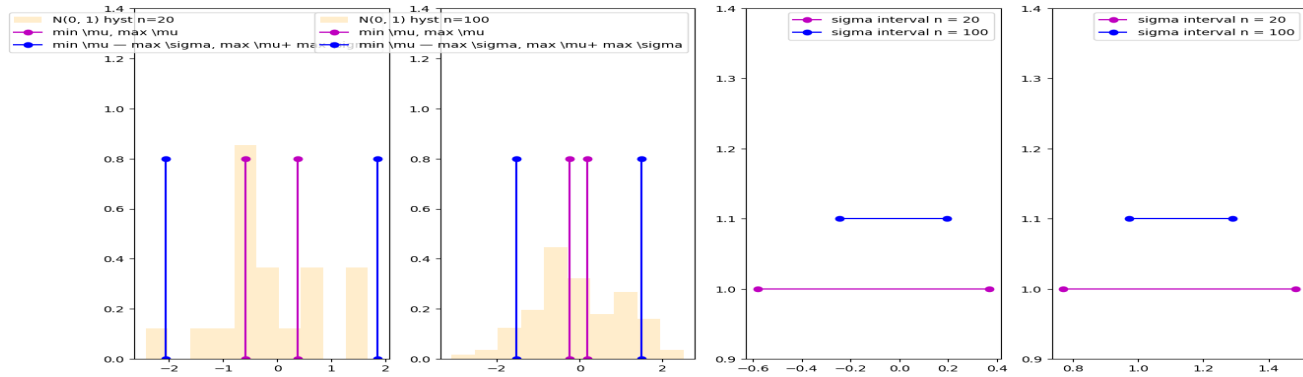


Рис. 6: Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров

n = 20	$m$	$\sigma$	$x$ twin 20	внутренняя оценка к внешней
	$-0.27 < m < 0.55$	$0.67 < \sigma < 1.28$	$[-0.27, 0.55] [-1.55, 1.83]$	0.24
n = 100	$m$	$\sigma$	$x$ twin 100	внутренняя оценка к внешней
	$-0.29 < m < 0.08$	$0.81 < \sigma < 1.07$	$[-0.29, 0.08] [-1.36, 1.15]$	0.15

Таблица 9: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

### 3.6 Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

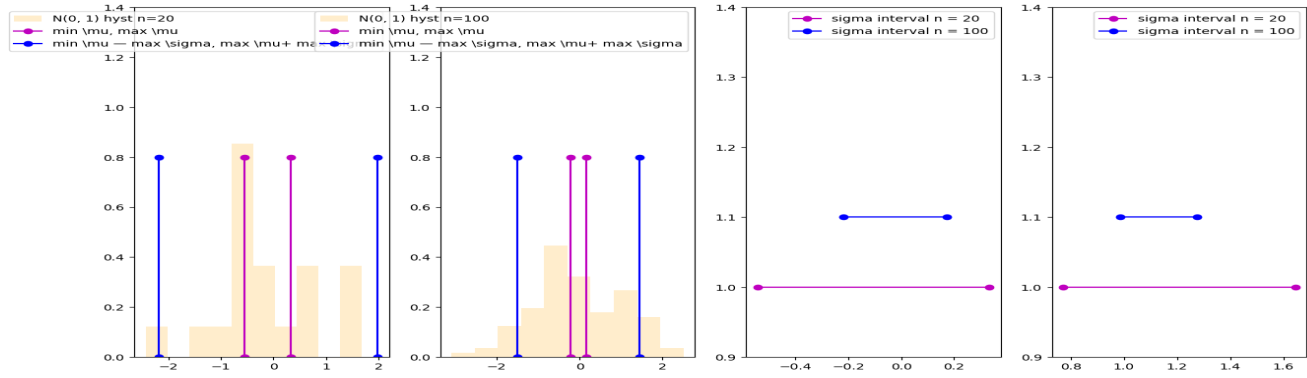


Рис. 7: Гистограммы нормальных распределений и доверительные интервалы их параметров. Асимптотический подход

n = 20	$m$	$\sigma$	$x$ twin 20	внутренняя оценка к внешней
	$-0.30 < m < 0.58$	$0.68 < \sigma < 1.33$	$[-0.30, 0.58] [-1.63, 1.90]$	0.25
n = 100	$m$	$\sigma$	$x$ twin 100	внутренняя оценка к внешней
	$-0.30 < m < 0.09$	$0.81 < \sigma < 1.08$	$[-0.30, 0.09] [-1.38, 1.18]$	0.15

Таблица 10: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения. Асимптотический подход

## 4 Обсуждение

### 4.1 Выборочные коэффициенты корреляции

Для двумерного нормального распределения дисперсии выборочных коэффициентов корреляции упорядочены следующим образом:  $r < r_S < r_Q$ ; для смеси распределений получили обратную картину:  $r_Q < r_S < r$ .

Процент попавших элементов выборки в эллипс рассеивания (95%-ная доверительная область) примерно равен его теоретическому значению (95%).

### 4.2 Оценки коэффициентов линейной регрессии

По полученным результатам можно сказать, что критерий наименьших квадратов точнее оценивает коэффициенты линейной регрессии на выборки без возмущений. Если же редкие возмущения присутствуют, тогда лучше использовать критерий наименьших модулей, поскольку он более устойчив

### 4.3 Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хи-квадрат

Закключаем, что гипотеза  $H_0$  о нормальном законе распределения  $N(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$  на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  согласуется с выборкой для нормального распределения  $N(x, 0, 1)$ .

Также видно, что гипотеза  $H_0$  оказалась принята для выборок сгенерированных по равномерному закону и закону Лапласа.

По исследованию на чувствительность видим, что при небольших объемах выборки уверенности в полученных результатах нет, критерий может ошибиться. Это обусловлено тем, что теорема Пирсона говорит про асимптотическое распределение, а при малых размерах выборки результат не будет получаться достоверным

### 4.4 Доверительные интервалы для параметров распределения

- Генеральные характеристики ( $m = 0$  и  $\sigma = 1$ ) накрываются построенными доверительными интервалами.
- Также можно сделать вывод, что для большей выборки доверительные интервалы являются соответственно более точными, т.е. меньшими по длине.
- Кроме того, при большом объеме выборки асимптотические и классические оценки практически совпадают.

## 5 Литература

Язык программирования *Python* 3.11

Подключенные библиотеки для *Python*: *numpy*, *math*, *seaborn*, *matplotlib*, *scipy*, *tabulate*

Ссылка на Github: <https://github.com/iMaanick/MathStatLab5-8>