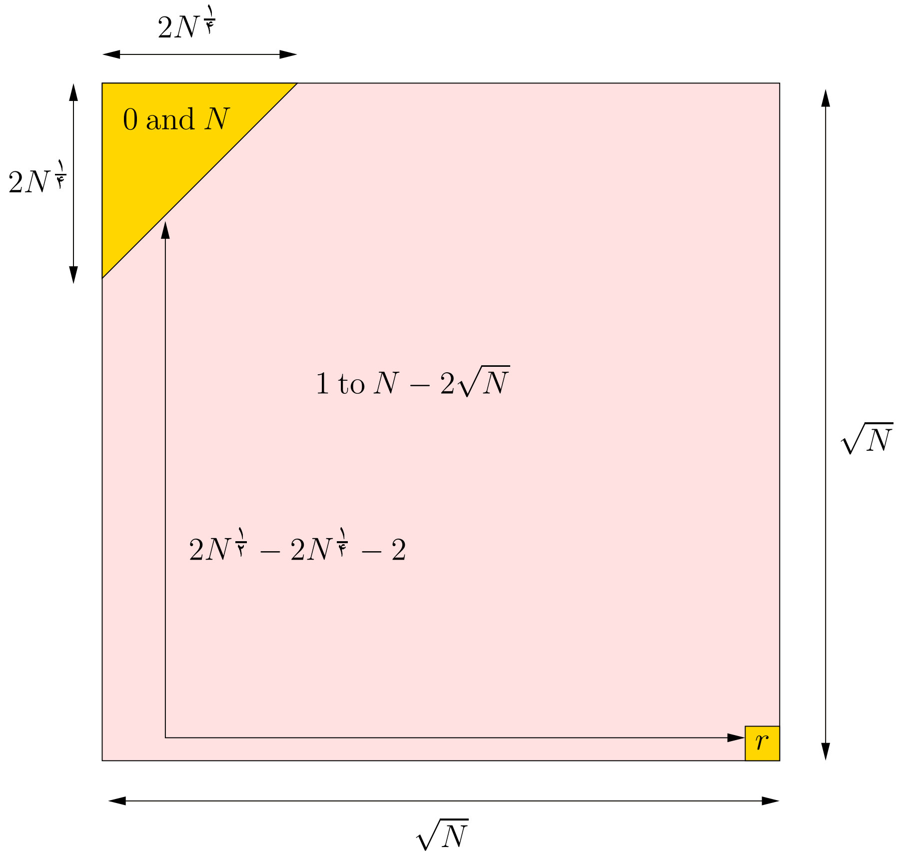
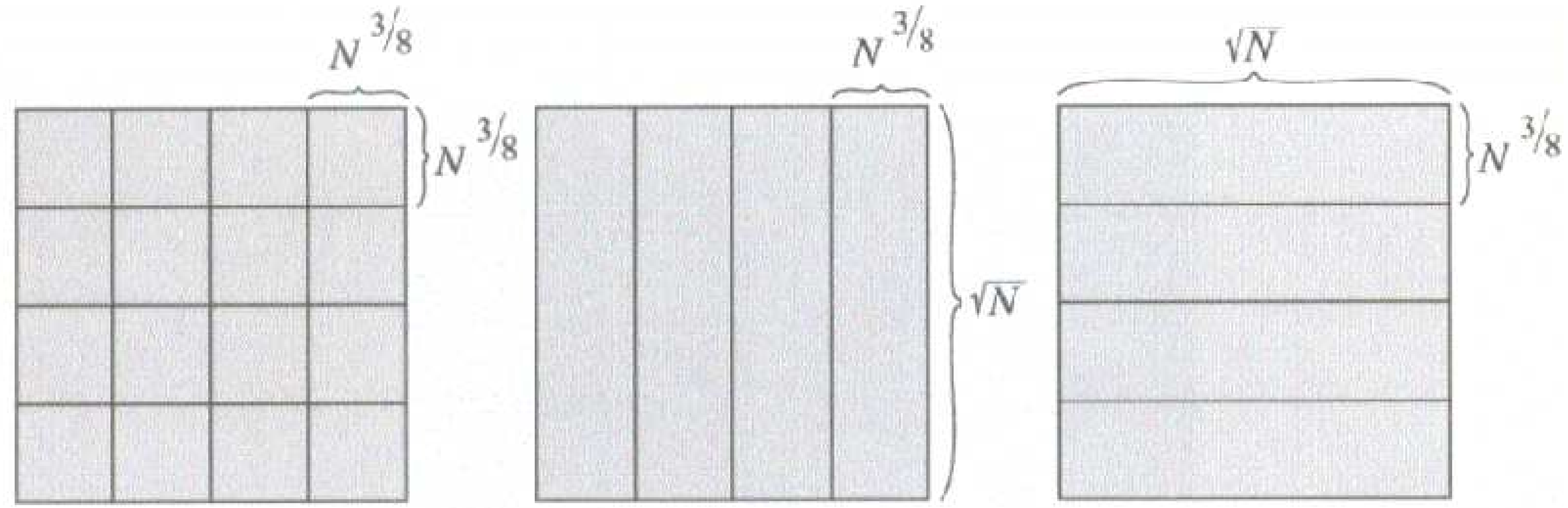
کران پایین مرتب‌سازی مارپیچی بر روی توری



- مقدار r را پس از $2N^{\frac{1}{2}} - 2N^{\frac{1}{4}} - 3$ مرحله از الگوریتم را در نظر بگیرید.
- این مقدار متأثر از مقادیر موجود در مثلث نیست.
- برای $0 \le q \le 2N^{\frac{1}{2}}$، فرض کنید که $C(q)$ شماره‌ی ستون محل نهایی r است، وقتی که در مثلث q تا صفر باشند و بقیه N.
- برای مقادیر مختلف q، $C(q)$ می‌تواند هر ستون (۱ تا $\sqrt{N}$) حداکثر دو بار باشد.
- ما q را طوری انتخاب می‌کنیم که بسته به زوج یا فرد بودن تعداد سطرها، $C(q) = 1$.
- پس الگوریتم مرتب‌سازی دستِ‌کم به $3N^{\frac{1}{2}} - 2N^{\frac{1}{4}} - 4$ یا $3N^{\frac{1}{2}} - o(N^{\frac{1}{2}})$ مرحله نیازمند است.

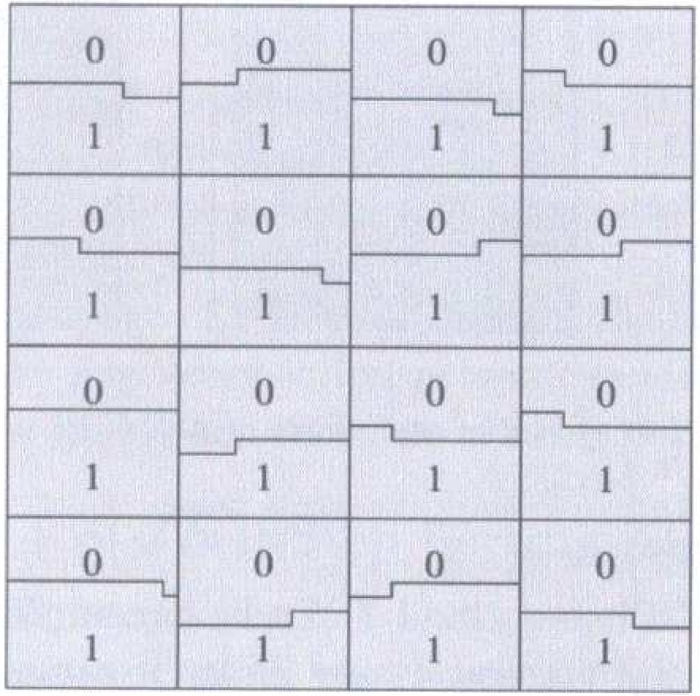
مرتب‌سازی $3\sqrt{N}+o(\sqrt{N})$ مرحله‌ای بر روی توری

توری $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ را تقسیم می‌کنیم به $N^{\frac{1}{8}}$ عدد نوار افقی و همین تعداد نوار عمودی و بلوک‌های $N^{\frac{3}{8}}\times N^{\frac{3}{8}}$



مراحل الگوریتم

۱) بلوک‌ها را به‌صورت مارپیچی مرتب کن.

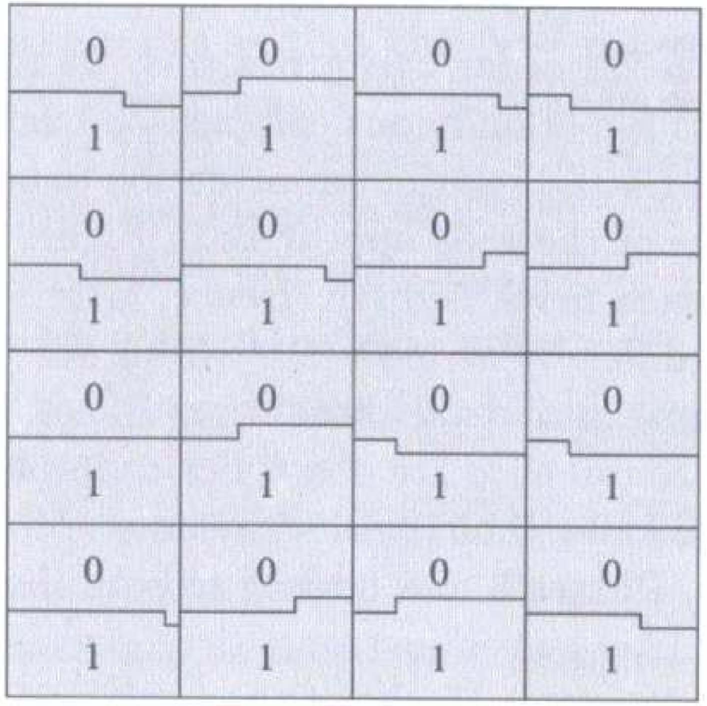


۲) عمل $N^{\frac{1}{8}}$-way Unshuffle **را برروی ستون‌ها انجام بده. یعنی** $N^{\frac{3}{8}}$ **ستون هر بلوک به‌طور مساوی در هر** $N^{\frac{1}{8}}$ **نوار عمودی توزیع شوند.**

بعد از این مرحله حداکثر اختلاف تعداد ۱ های دو بلوک در یک نوار افقی برابر $N^{\frac{1}{8}}$ **خواهد بود.**

چون اگر سطرهای کثیف را در نظر نگیریم تعداد یک ها برابر می‌شود. حداکثر $N^{\frac{1}{8}}$ **تعداد سطر کثیف داریم که هر کدام به‌صورت مثلاً** 0....011...11 **است.**

۳) هر بلوک را به‌صورت مارپیچی مرتب کن.



پس از این مرحله حداکثر ۲ سطر در هر نوار افقی کثیف است.

بیش‌تر از ۲ سطر، بیش‌تر از $N^{\frac{1}{8}}$ اختلاف تولید می‌کند.

۴) ستون‌ها را از بالا به پایین مرتب کن.

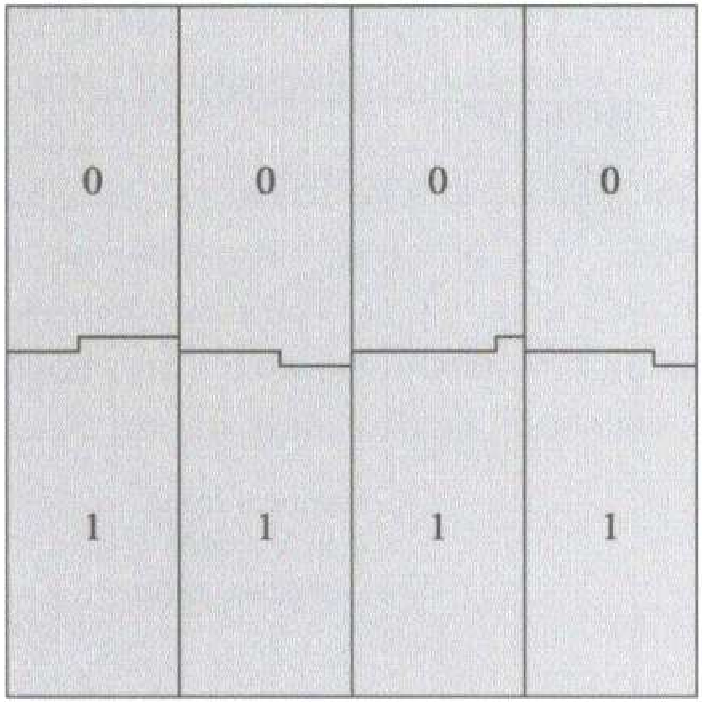
بعد از این مرحله می‌دانیم که در مجموع حداکثر $N^{\frac{1}{8}}$ سطر کثیف در هر نوار عمودی داریم و سطرهای کثیف هم کنار هم هستند.

۵) در هر نوار عمودی بلوک‌های ۱ و ۲، بلوک‌های ۳ و ۴، و .. را به‌صورت یک بلوک در نظر گرفته و هر کدام را به‌صورت مارپیچی مرتب کن.

۶) در هر نوار عمودی بلوک‌های ۲ و ۳، بلوک‌های ۴ و ۵، و .. را به‌صورت یک بلوک در نظر گرفته و هر کدام را به‌صورت مارپیچی مرتب کن.

می‌دانیم که سطرهای کثیف در یک یا حداکثر ۲ بلوک قرار خواهند گرفت. پس در انتهای این مراحل هر نوار عمودی فقط یک سطر کثیف خواهد داشت.

پس از این دو مرحله فقط یک سطر در هر نوار عمودی کثیف خواهد بود. ولی در کل فقط ۲ سطر توری کثیف خواهد بود. چون اگر بیش‌تر باشد با حداکثر اختلاف تعداد ۱ هاتناقض خواهد داشت .



۷) هر سطر را به‌صورت مستقل و در جهت ترتیب نهایی مرتب کن.

توجه: اگر پس از مرحله‌ی ۶ فقط یک سطر کثیف داشتیم، مرحله‌ی ۷ کار را تمام می‌کند.

اگر دو سطر در کل توری کثیف باشد، فرض کنید سطر اول کثیف قرار است به سمت راست و دومی به‌سمت چپ مرتب کند. قبل از این مرتب‌سازی

(a) حتماً در سطر اول کثیف یک سطر از یک بلوک کاملاً صفرند.

(b) می‌دانیم که حداکثر اختلاف تعداد ۱ های دو نوار عمودی $N^{۱/۴}$ است (حداکثر اختلاف در دو بلوک در هر نوار افقی $N^{۱/۸}$ است و تعداد بلوک‌ها در هر نوار عمودی $N^{۱/۸}$ است. پس تعداد کل اختلاف حداکثر $N^{۱/۴}$ است.)

(c) پس حداکثر $N^{۱/۴} \times N^{۱/۸} = N^{۳/۴}$ ۱ در سطر کثیف اول خواهد بود.

(d) با همین استدلال، حداکثر همین تعداد هم صفر در سطر دوم کثیف وجود داد.

پس از این مرحله طول بخش کثیف از نوار مارپیچی $۲N^{\frac{۳}{۸}}$ خواهد بود.

۸) عمل Odd-Even-Transposition **را** $۲N^{\frac{۳}{۸}}$ **مرحله روی کل توری (به‌صورت مارپیچی) اجرا کن.**

تحلیل

- مرحله‌ی ۱، ۳، ۵، و ۶ $\longleftarrow O(N^{\frac{۳}{۸}} \lg N)$
- مرحله‌ی ۴ و ۷ $\longleftarrow ۲\sqrt{N}$
- مرحله‌ی ۲ $\longleftarrow \sqrt{N} + O(N^{\frac{۳}{۸}} \lg N)$
- مرحله‌ی ۸ $\longleftarrow ۲N^{\frac{۳}{۸}}$

در مجموع $\longleftarrow ۳\sqrt{N} + o(\sqrt{N})$