

Retiming

لم: فرض کنید S یک مدار نیمه‌تپنده و f یک تابع تأخیر (lag) است به طوری که

$$lag(host) = 0$$

$$weight_S(e) + lag(head(e)) - lag(tail(e)) \geq 0 \quad \bullet \text{ برای هر یال } e$$

هم‌چنین فرض کنید S' یک مدار با همان گراف پایه‌ی S باشد به طوری که برای هر یال e آن

$$weight_{S'}(e) = weight_S(e) + lag(head(e)) - lag(tail(e))$$

در آن صورت S' نیمه‌تپنده و معادل S است.

اثبات:

- نشان می‌دهیم که S' را با تعدادی از عمل‌های قابل قبول lag قابل تبدیل به S است.
- اثبات با استقرا بر روی L مجموع مقدار مطلق تابع lag بر روی همه‌ی گره‌های گراف.
- اگر $L = 0$ که S و S' معادلند.
- فرض استقرا: برای مقدار $K \geq 1$ حکم برای $L = K$ برقرار است.
- مجموعه‌ی رأس‌هایی بنام A^+ را در نظر بگیرید که تابع lag برای آن‌ها مثبت است.
- اگر وزن تمام یال‌های خروجی یک رأس $v \in A^+$ مثبت باشد، می‌توان v را retime کرد و از هر یال خروجی یک میانگیر برداشت و به هر یال ورودی آن یک عدد اضافه کرد. در آن صورت $lag(v)$ و در نتیجه L یک واحد کم می‌شود. پس با استقرا می‌توان L را صفر کرد.

- اگر رأس v وجود نداشته باشد، یعنی هر رأس در A^+ دارای دست کم یک یال خروجی با درجه‌ی صفر است. اگر وزن یال $e = u \rightarrow v$ صفر باشد و $u \in A^+$ ، حتماً $v \in A^+$. پس این دور ایجاد می‌کند که غیر ممکن است.
- اگر A^+ تهی باشد. مجموعه رأس‌هایی را در نظر می‌گیریم که تابع lag در آن‌ها منفی است (A^-). مشابهی استدلال فوق در این جا هم برقرار است.

تبدیل یک مدار نیمه تپینده به مدار تپندهی معادل

قضیه: فرض کنید G گراف وزن دار یک مدار نیمه تپنده است. یک تابع lag برای رأس های این گراف وجود دارد که اعمال آن باعث تولید یک مدار تپندهی معادل G شود، اگر و فقط اگر گراف $G - 1$ دور با وزن نامنفی نداشته باشد.

گراف $G - 1$ همان گراف G است که وزن هر یال آن یک واحد کم شده باشد.

اثبات:

• فرض کنید که گراف $G - 1$ یک دور با وزن کل منفی داشته باشد. در آن صورت در G تعداد یال‌های این دور از مجموع وزن آن بیش‌تر است. این دور را نمی‌توان تپنده کرد.

• اگر $G - 1$ چنین دوری نداشته باشد، ما تابع $lag(v)$ را برای هر رأس v به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$lag(v)$ برابر وزن کوتاه‌ترین مسیر از v به $host$ در گراف $G - 1$

با این ترتیب $lag(host) = 0$ و برای هر یال $e = (u, v)$

$$newweight(e) = oldweight(e) + lag(v) - lag(u)$$

می‌دانیم که

$$\text{lag}(u) \leq (\text{oldweight}(e) - 1) + \text{lag}(v)$$

بنابراین

$$\text{newweight}(e) = \text{oldweight}(e) + \text{lag}(v) - \text{lag}(u) \geq 1$$

اگر $G - 1$ دارای دور منفی بود کوچک‌ترین عدد صحیح k را پیدا می‌کنیم که گراف $kG - 1$ دور منفی نداشته باشد.