تبدیل فوریه‌ی سریع

دو روش نمایش برای چندجمله‌ای

۱) **روش «ضرایب» با دنباله‌ی ضرایب** $a = \langle a_۰, a_۱, \cdots, a_{n-۱} \rangle$

$$A(x) = \sum_{j=۰}^{n-۱} a_j x^j$$

مقدار $A(x_۰)$ **از قانون هورنر** (Horner's) **و با** $\mathcal{O}(n)$ **به‌دست می‌آید:**

$$A(x_۰) = a_۰ + x_۰(a_۱ + x_۰(a_۲ + \cdots + x_۰(a_{n-۲} + x_۰ a_{n-۱}))\ldots))$$

۲) روش نقطه‌ای چندجمله‌ای از درجه‌ی n با n نقطه مدل می‌شود.

$$\{(x_۰, y_۰), (x_۱, y_۱), \cdots, (x_{n-۱}, y_{n-۱})\}$$

که $y_i = A(x_i)$

قضیه: برای هر نمایش نقطه‌ای با n نقطه‌ی متمایز تنها یک چندجمله‌ای با نمایش ضرایب وجود دارد.

اثبات: ماتریس وندرمود (Vander Mode matrix)

$$\begin{pmatrix} ۱ & x_۰ & x_۰^۲ & \cdots & x_۰^{n-۱} \\ ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^{n-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x_{n-۱} & x_{n-۱}^۲ & \cdots & x_{n-۱}^{n-۱} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_۰ \\ a_۱ \\ \vdots \\ a_{n-۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_۰ \\ y_۱ \\ \vdots \\ y_{n-۱} \end{pmatrix}$$

معکوس پذیر است.

معکوس به طور عادی در $\mathcal{O}(n^۳)$ و با استفاده از فرمول لاگرانژ در $\mathcal{O}(n^۲)$ قابل محاسبه است.

- در حالت عادی: از نمایش ضرایب با $\mathcal{O}(n^۲)$ می‌توان نمایش نقطه‌ای و هم‌چنین از نمایش نقطه‌ای نمایش ضرایب را به‌دست آورد (دومی با محاسبات ماتریسی).
- اما اگر نقاط به‌دقت انتخاب شوند این‌کار در $\mathcal{O}(n \lg n)$ امکان‌پذیر است (تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی سریع)

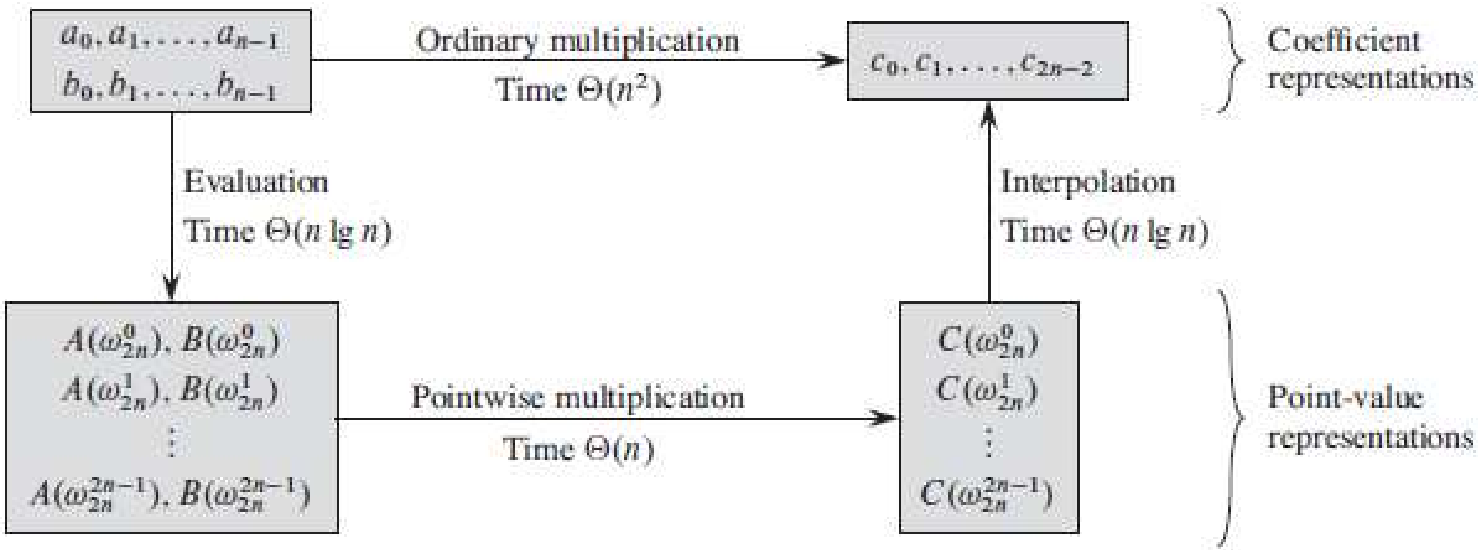
در نمایش نقطه‌ای

جمع دو چندجمله‌ای:

$$
\begin{aligned}
&\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})\} \\
+\ &\{(x_0, y'_0), (x_1, y'_1), \cdots, (x_{n-1}, y'_{n-1})\} \\
=\ &\{(x_0, y_0 + y'_0), (x_1, y_1 + y'_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1} + y'_{n-1})\}
\end{aligned}
$$

ضرب:

$$
\begin{aligned}
&\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{2n-1}, y_{2n-1})\} \\
\times\ &\{(x_0, y'_0), (x_1, y'_1), \cdots, (x_{2n-1}, y'_{2n-1})\} \\
=\ &\{(x_0, y_0 \times y'_0), (x_1, y_1 \times y'_1), \cdots, (x_{2n-1}, y_{2n-1} \times y'_{2n-1})\}
\end{aligned}
$$


$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$
$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$
Ordinary multiplication
Time $\Theta(n^2)$
$c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$
Coefficient representations
Evaluation
Time $\Theta(n \lg n)$
Interpolation
Time $\Theta(n \lg n)$
$A(\omega_{2n}^0), B(\omega_{2n}^0)$
$A(\omega_{2n}^1), B(\omega_{2n}^1)$
$\vdots$
$A(\omega_{2n}^{2n-1}), B(\omega_{2n}^{2n-1})$
Pointwise multiplication
Time $\Theta(n)$
$C(\omega_{2n}^0)$
$C(\omega_{2n}^1)$
$\vdots$
$C(\omega_{2n}^{2n-1})$
Point-value representations

تبدیل فوریه‌ی سریع (Fast Fourier Transform)

چندجمله‌ای از درجه‌ی n

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

را در n نقطه‌ی

$$w_n^0, w_n^1, \ldots, w_n^{n-1}$$

محاسبه می‌کنیم.

که w_n^i ریشه‌ی i ام مختلط واحد است.

یعنی

$$\begin{aligned} y_k &= A(x_k) \\ &= \sum_{j=۰}^{n-۱} a_j w_n^{kj} \end{aligned}$$

$$y = \langle y_۰, y_۱, \ldots, y_{n-۱} \rangle$$

را تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی Discrete Fourier Transform (DFT)

$$\langle a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱} \rangle$$

می‌گوییم. یا $y = DFT_n(a)$.

خواص w_n

- w_n ریشه‌ی مختلط n ام واحد است.
- $w_n^n = ۱$ و برای $۱ \leq j < n$، $w_n^j \neq ۱$.
- دقیقاً n ریشه‌ی مختلط واحد وجود دارد:

  $w_n = e^{۲\pi ik/n}$ برای $k = ۰, ۱, \ldots n - ۱$. که $e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$.
- مثلاً، $w_۳ = -۱/۲ + i\sqrt{۳}/۲$ و $w_۴ = ۱$
- هم‌چنین: $w_n^k = w_{dn}^{dk}$. اثبات ساده از فرمول بالا.
- برای n زوج داریم: $w_n^{n/۲} = w_۲ = ۱$

یا به زبان محاسبات ماتریسی

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & \dots & w_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & \dots & w_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

معکوس تبدیل فوریه

از $\vec{y}$ می‌توان $\vec{a}$ را به روش «معکوس تبدیل فوریه» به‌دست آورد:

$$a_i = \frac{۱}{n} \sum_{j=۰}^{n-۱} w_n^{-ij} y_j$$

راه‌حل کورکورانه‌ی: $\mathcal{O}(n^۲)$

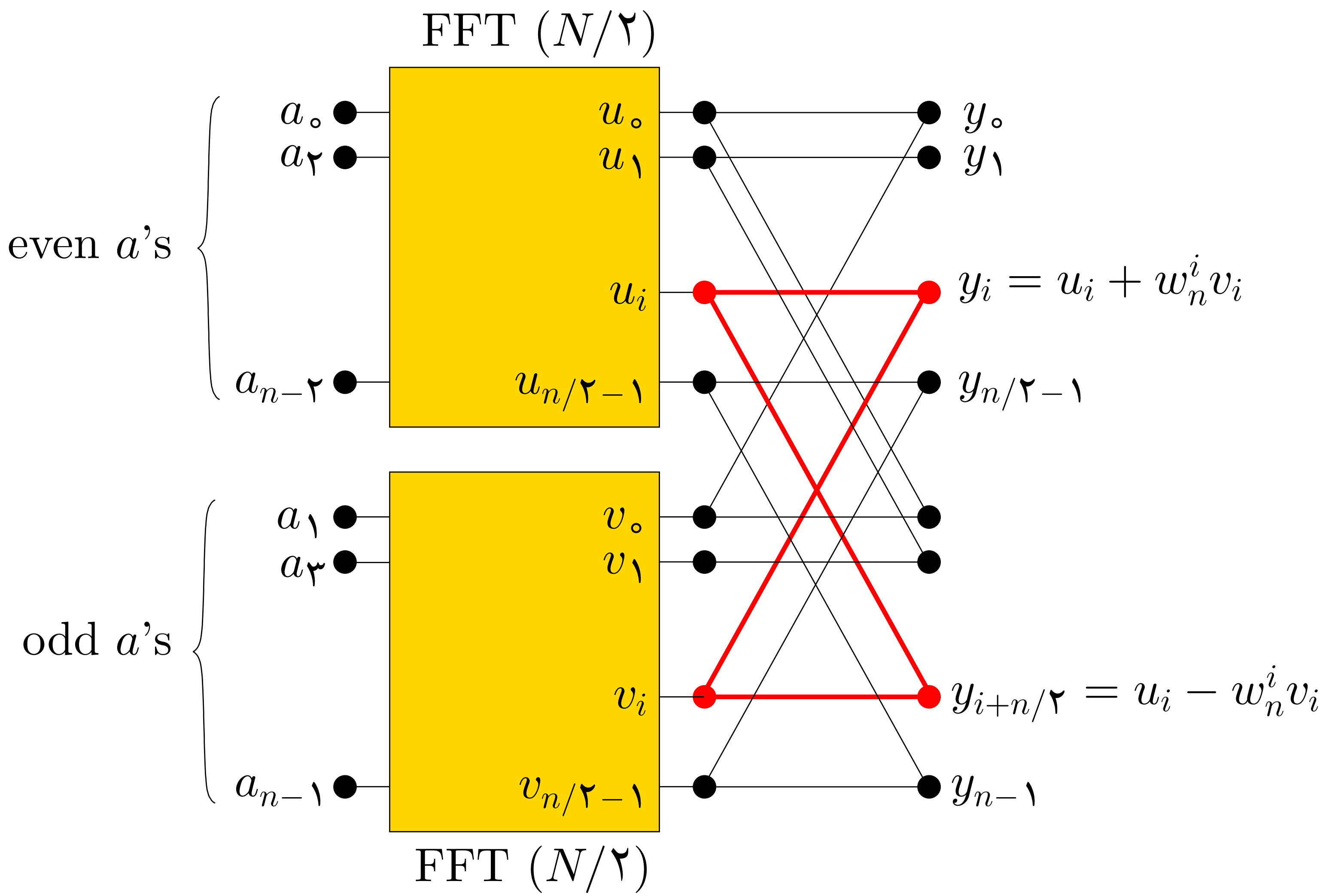
اما برای $۰ \leq i < n/۲$

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=۰}^{n-۱} w_n^{ij} a_j \\ &= \sum_{j=even(۲r)} w_n^{ij} a_j + \sum_{j=odd(۲r+۱)} w_n^{ij} a_j \\ &= \sum_{r=۰}^{n/۲-۱} w_{n/۲}^{ir} a_{۲r} + w_n^i \sum_{r=۰}^{n/۲-۱} w_{n/۲}^{ir} a_{۲r+۱} \\ &= u_i + w_n^i v_i \end{aligned}$$

و به طور مشابه برای $n/۲ \leq i < n$،

$$y_i = u_{i-n/۲} + w_n^i v_{i-n/۲}$$

البته می‌دانیم که برای n **های زوج** $w_n^{n/۲} = -۱$.



FFT $(N/۲)$
even a's
odd a's
$a_۰$
$a_۲$
$a_{n-۲}$
$a_۱$
$a_۳$
$a_{n-۱}$
$u_۰$
$u_۱$
u_i
$u_{n/۲-۱}$
$v_۰$
$v_۱$
v_i
$v_{n/۲-۱}$
$y_۰$
$y_۱$
$y_i = u_i + w_n^i v_i$
$y_{n/۲-۱}$
$y_{i+n/۲} = u_i - w_n^i v_i$
$y_{n-۱}$
FFT $(N/۲)$

<u>Recursive-FFT</u> (a)

$n \leftarrow \mathit{length}[a]$ ▷ assuming that n is a power of 2
if $n = 1$
  then return a
$w_n \leftarrow e^{2\pi i/n}$
$w \leftarrow 1$
$a^{[0]} \leftarrow (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
$a^{[1]} \leftarrow (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
$u \leftarrow$ Recursive-FFT$(a^{[0]})$
$v \leftarrow$ Recursive-FFT$(a^{[1]})$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n/2 - 1$
  do $y_k \leftarrow u_i + w v_i$
    $y_{k+n/2} \leftarrow u_i - w v_i$
    $w \leftarrow w w_n$
return y

تحلیل

$$T(n) = ۲T(n/۲) + \mathcal{O}(n)$$

پس

$$T(n) = \mathcal{O}(n \lg n)$$