

باسمه تعالی

یادگیری برخط

پاییز ۱۴۰۳

تمرین سری اول : احتمال و تجمع اندازه

(۱) فرض کنید X یک متغیر تصادفی σ -زیرگوسی باشد. نشان دهید $\mathbb{E}[X] = 0$ و $\text{Var}[X] \leq \sigma^2$.

(۲) نشان دهید اگر X_1, X_2 به ترتیب σ_1, σ_2 -زیرگوسی باشند، $X_1 + X_2$ $(\sigma_1 + \sigma_2)$ -زیرگوسی است. (توجه کنید که ممکن است متغیرها مستقل نباشند.)

(۳) نشان دهید اگر $X \in [a, b]$ و $\mathbb{E}[X] = 0$ ، آنگاه X $\frac{b-a}{2}$ -زیرگوسی است.

(۴) نشان دهید اگر X یک متغیر برنولی با پارامتر p باشد، $\sqrt{\frac{1-2p}{2 \ln((1-p)/p)}}$ -زیرگوسی است.

(۵) فرض کنید $\lambda > 0$ و $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(\lambda/n)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $S_n = X_1 + \dots + X_n$. نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$. چرا این نتیجه با قضیه‌ی حد مرکزی در تناقض نیست؟

(۶) نشان دهید احتمال آنکه در n بار پرتاب یک سکه‌ی سالم کم‌تر از $n/3$ بار شیر دیده شود بر حسب n به طور نمایی کوچک است و یک کران برای این نما بیابید.

(۷) فرض کنید $Q_d = [-1, 1]^d$ یک مکعب d -بعدی به مرکز مبدا و طول ضلع ۲ باشد. همین‌طور فرض کنید B_d گوی به مرکز مبدا و به شعاع ۱۰۰۰۰۰۰ باشد! ثابت کنید که اگر یک نقطه به تصادف در Q_d انتخاب کنیم، احتمال آن که در B_d هم باشد با افزایش d به طور نمایی به صفر میل می‌کند و کرانی برای این نما بیابید. به عبارت دیگر، در ابعاد بزرگ، حجم B_d بسیار کمی از Q_d را اشغال می‌کند!

