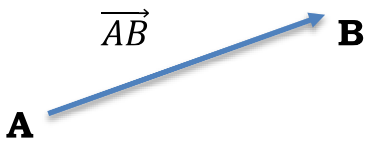
CALCUL VECTORIEL

Les vecteurs sont des outils mathématiques qui ont été créés (merci Leibniz, philosophe et scientifique allemand du XVIIème siècle) pour représenter des déplacements (= translations). Vous utiliserez les vecteurs au cours de physique pour représenter les forces, les déplacements, les vitesses,…

1) <u>Définitions</u> :

Vidéo 1 : Qu'est-ce qu'un vecteur ? (6'26'')

Le **<u>vecteur $\overrightarrow{AB}$</u>** représente le déplacement (=la translation) du point **A** au point **B** :



A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et **B** est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par ***<u>trois caractéristiques</u>*** :

1) Une direction : celle du segment $[AB]$
2) Un sens : du point A au point B
3) Une longueur : celle du segment $[AB]$. La longueur d'un vecteur est aussi appelée norme. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit : $\|AB\|$

<u>Vecteurs égaux</u>

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils représentent le même déplacement. Ils ont alors les trois mêmes caractéristiques :

1° même direction, 2° même sens, 3° même norme (=longueur).

Vecteurs opposés

Deux vecteurs opposés ont la même direction, la même norme mais des sens opposés.

Le **vecteur opposé *au vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ représente donc un déplacement du point **B** au point **A**. On le note $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$

Vecteur nul

Le **vecteur nul** est un vecteur dont l'origine coïncide avec l'extrémité :

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

2) Opérations sur les vecteurs :

2.1 Addition de deux vecteurs

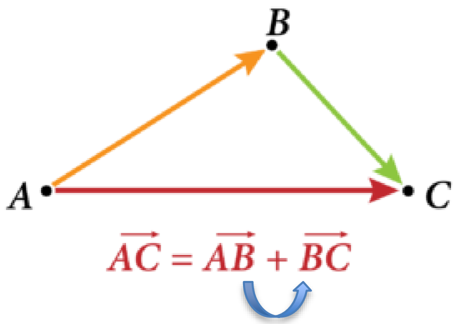
Vidéo 2 : Que représente la somme de deux vecteurs ? (3'20'')

Additionner deux vecteurs consiste à mettre bout à bout les deux translations correspondant à ces vecteurs (= on cumule les déplacements)

Cas 1 : les vecteurs sont consécutifs

Vidéo 3 : Comment comprendre la relation de Chasles ? (3'43'')

Deux **vecteurs** sont dits **consécutifs** lorsque l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du second. Dans ce cas, nous utilisons la **relation de Chasles** (mathématicien français, 1793-1880) :

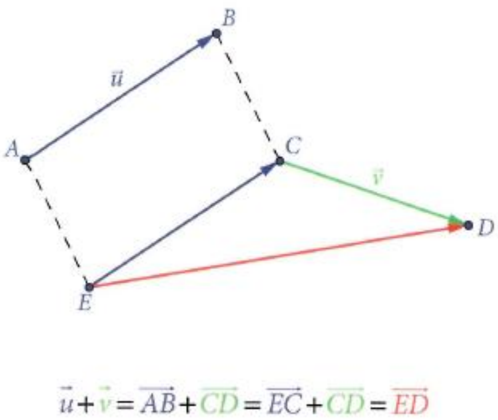


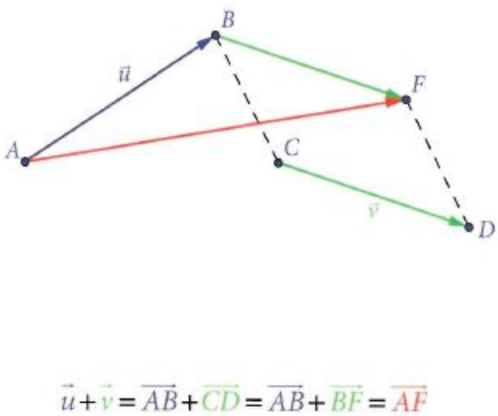
L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point B. Le point B est également l'origine du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Cas 2 : les vecteurs ne sont pas consécutifs.

Etape 1 : rendre les vecteurs consécutifs. Pour rendre deux vecteurs consécutifs, on déplace un des vecteurs par une translation de manière à ce que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre.

Etape 2 : utiliser la relation de Chasles pour additionner deux vecteurs consécutifs.





je choisis de <u>déplacer $\vec{u}$</u> pour que le point B coïncide avec le point C

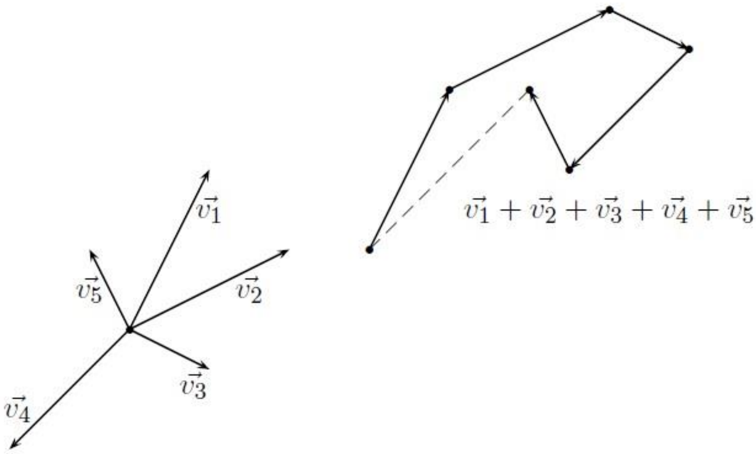
je choisis de <u>déplacer $\vec{v}$</u> pour que le point C coïncide avec le point B

<u>Exercice 1</u> : que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AF}$?

Compare ta réponse avec la solution Page16.

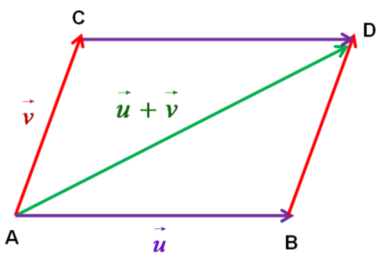
Relation de Chasles généralisée

La relation de Chasles peut s'appliquer à un nombre quelconque de vecteurs : 3, 4, 5,…



Application à la physique : le parallélogramme des forces.

Lorsque l'on doit faire la somme de deux forces $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (représentées par deux vecteurs) appliquées au même point A, on applique la règle du parallélogramme.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas consécutifs ☹. On doit donc commencer par effectuer la translation d'un des deux pour les rendre consécutifs :

Choix 1 : translation de $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ qui est consécutif à $\vec{u}$ et donc par la relation de Chasles nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

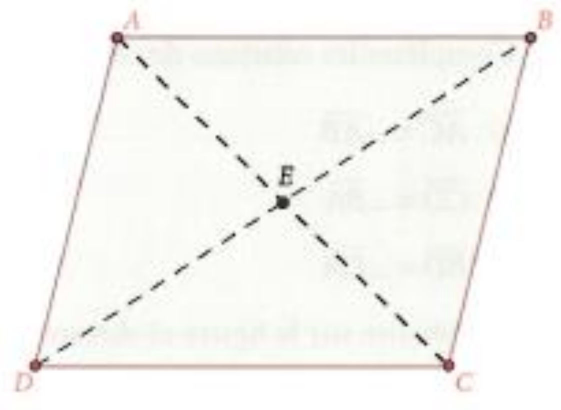
Choix 2 : translation de $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ qui est consécutif à $\vec{v}$ et donc par la relation de Chasles nous avons $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 2 :

Soit le parallélogramme $ABCD$ et ses diagonales qui se coupent en E.

Recherche le vecteur dont la somme vaut

1. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$
2. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$
3. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$
4. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}$
5. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}$
7. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DE}$
8. $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}$



2.2 Soustraction de deux vecteurs

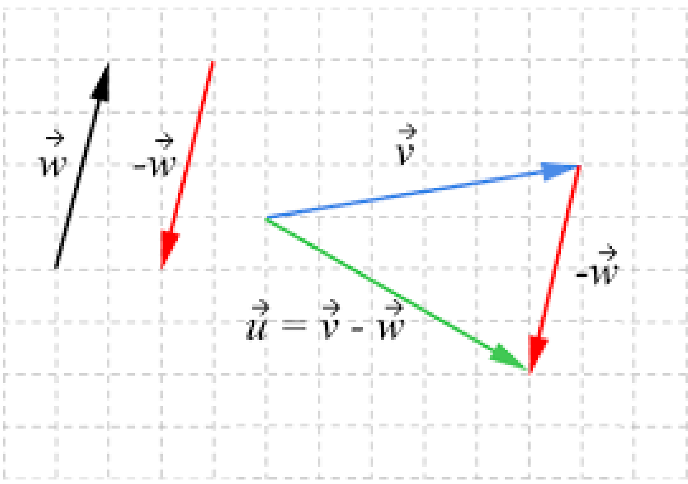
Nous avons vu que le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$ *ou* **-$\overrightarrow{AB}$** .

Pour soustraire le vecteur $\vec{w}$ du vecteur $\vec{v}$, on va donc faire la somme du vecteur $\vec{v}$ et du vecteur $-\vec{w}$: $\boxed{\vec{v}-\vec{w} = \vec{v}+(-\overrightarrow{w})}$

1° je représente le vecteur $\overline{-w}$, qui est le vecteur opposé de $\vec{w}$. Ces deux vecteurs ont la même direction, la même longueur mais sont de sens opposés.

2° je rends les vecteurs $\vec{v}$ et $-\vec{w}$ consécutifs par une translation de $-\vec{w}$

3° j'utilise la relation de Chasles pour calculer $\vec{v}+\overline{-w}$



Exercice 3 : Tu places six points A, M, N,P, K et O où tu veux sur la feuille quadrillée Page18. Représente ensuite les vecteurs ci-dessous et puis simplifie les écritures.

1° $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$

2° $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$

3° $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$

4° $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON}$

Exercice 4 : Démontre les égalités suivantes. (Tu peux t'aider en représentant les points A, B, C, E et les vecteurs indiqués sur ta feuille quadrillée).

1° $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

2° $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$

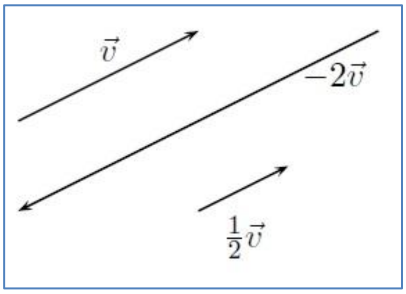
2.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire (=nombre)

Vidéo 4 : multiplication d'un vecteur par un scalaire (5'10'')

Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un nombre r différent de zéro est un vecteur $r\vec{v}$ dont les caractéristiques sont :

1) Direction : la même que $\vec{v}$
2) Sens : le même que $\vec{v}$ si r est *positif* et le sens contraire si r est *négatif*
3) Longueur : celle de $\vec{v}$ multipliée par la valeur absolue de r, $|r|$

Le produit d'un vecteur par zéro est le vecteur nul.



Définition :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** (=parallèles) si et seulement si l'un est multiple de l'autre. En d'autres termes, il existe un réel k tel que

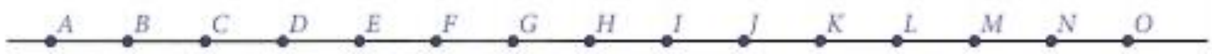
$$\vec{u} = k.\vec{v} \qquad k \neq 0$$

Propriété : les **points A, B, C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \qquad k \neq 0$$

Exercice 5 :

Soient $A, B, \ldots, O$, 15 points alignés et régulièrement espacés.



Compléter les égalités suivantes :

1. $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{GD} = \ldots\overrightarrow{IO}$ *et* $\overrightarrow{IO} = \ldots\overrightarrow{GD}$
3. $\overrightarrow{CL} = \ldots\overrightarrow{EB}$ *et* $\overrightarrow{EB} = \ldots\overrightarrow{CL}$
4. $\overrightarrow{GG} = \ldots\overrightarrow{IL}$ *et* $\overrightarrow{IL} = \ldots\overrightarrow{GG}$
5. $\overrightarrow{DH} = \ldots\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{FA} = \ldots\overrightarrow{HD}$
6. $\overrightarrow{BM} = \ldots\overrightarrow{GO}$ *et* $\overrightarrow{GO} = \ldots\overrightarrow{MB}$
7. $\overrightarrow{OH} = \ldots\overrightarrow{OE}$ *et* $\overrightarrow{OE} = \ldots\overrightarrow{OH}$
8. $\overrightarrow{AO} = \ldots\overrightarrow{LG}$ *et* $\overrightarrow{OA} = \ldots\overrightarrow{LG}$
9. $\overrightarrow{NF} = \ldots\overrightarrow{IE}$ *et* $\overrightarrow{FN} = \ldots\overrightarrow{EI}$
10. $\overrightarrow{JE} = \ldots\overrightarrow{DK}$ *et* $\overrightarrow{KD} = \ldots\overrightarrow{JE}$

2.4 Propriétés des opérations : associativité, distributivité, élément neutre

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

- L'addition des vecteurs est **interne et partout définie** : $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur
- L'addition des vecteurs est **associative** : $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Le vecteur nul est **neutre** pour l'addition des vecteurs : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$
- L'addition des vecteurs est **symétrisable** : $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0} = \left(-\vec{u}\right) + \vec{u}$

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} \in V$, quels que soient les réels non nuls a et b, la multiplication d'un vecteur par un réel vérifie :

- **L'associativité mixte** : $a.\left(b.\vec{u}\right) = \left(a.b\right).\vec{u}$
- La **distributivité par rapport à l'addition des réels** : $\left(a+b\right).\vec{u} = a.\vec{u} + b.\vec{u}$
- La **distributivité par rapport à l'addition des vecteurs** : $a.\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = a.\vec{u} + a.\vec{v}$
- Le réel 1 est **neutre** pour la multiplication d'un vecteur par un réel : $1.\vec{u} = \vec{u}$

3) <u>Représentation d'un vecteur dans un repère orthogonal orthonormé</u>

Vidéo 5 : Vecteurs et coordonnées (8'51'')

Soit le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ qui correspond au déplacement du point A de coordonnées (x_A, y_A) au point B de coordonnées (x_B, y_B).

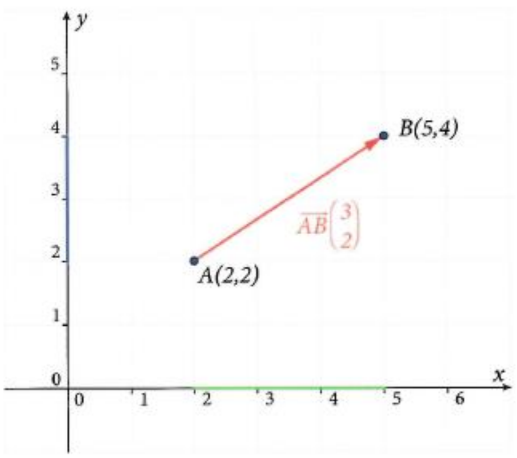
Les **composantes du vecteur** $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$(x_B - x_A)$ correspond au déplacement selon l'axe des abscisses

$(y_B - y_A)$ correspond au déplacement selon l'axe des ordonnées.

On <u>arrive</u> au point B en <u>partant</u> du point A

<u>Exemple</u> :

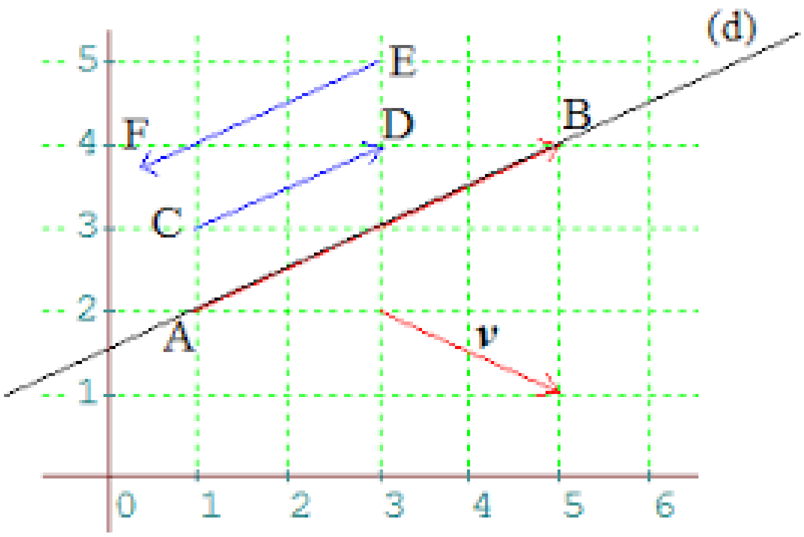


Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 6</u> : Détermine les composantes des quatre vecteurs ci-dessous :

(les coordonnées du point F sont (0,5 ; 3,8))



Exercice 7 : Représente sur la Page18 quatre vecteurs dont les signes des composantes sont respectivement : $\binom{+}{+}$ $\binom{+}{-}$ $\binom{-}{+}$ $\binom{-}{-}$. Tu peux choisir la longueur des déplacements 😉

4) Opérations sur les vecteurs dans un repère

Reprenons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de l'exercice précédent.

4.1 Addition de deux vecteurs

Pour additionner deux vecteurs, on doit additionner les composantes des deux vecteurs (= on cumule les déplacements)

Exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \binom{4}{2} + \binom{2}{1} = \binom{6}{3}$

4.2 Soustraction de deux vecteurs

Pour soustraire un vecteur d'un autre vecteur, on doit additionner le premier vecteur avec l'opposé du second vecteur.

Exemple : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \binom{4}{2} + \binom{-2}{-1} = \binom{2}{1}$

4.3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Il faut multiplier les composantes du vecteur par ce scalaire.

Exemples : $2.\overrightarrow{AB} = 2.\binom{4}{2} = \binom{8}{4}$

$\frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}.\binom{4}{2} = \binom{2}{1}$

$-\frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}.\binom{4}{2} = \binom{-2}{-1}$

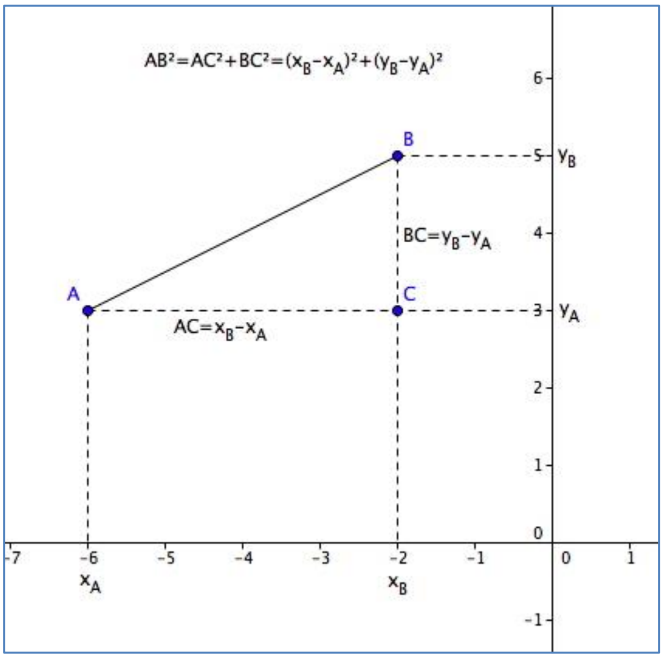
Exercice 8 : représente ces cinq vecteurs dans le repère de la Page18. Il s'agit de déplacements, tu peux donc choisir où les représenter dans le plan !

5) Norme d'un vecteur

Vidéo 6 : calcul de la norme d'un vecteur (8'07'')

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine A de coordonnées (x_A, y_A) et d'extrémité B de coordonnées (x_B, y_B) est donnée par la formule (merci Pythagore 😊) :

$$\|AB\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



A (-6,3)
B (-2,5)

On peut également calculer la norme d'un vecteur $\vec{v}$ à partir de ses composantes $\binom{x}{y}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 9 : Ces deux formules sont-elles équivalentes ? Pourquoi ?
(Vérifie ta réponse avec la solution Page17)

Exemple : le déplacement du point A (-6,3) au point B (-2,5) est représenté par un vecteur de composantes $\vec{v} = \binom{-2- -6}{5-3} = \binom{4}{2}$.

La norme de ce vecteur est $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4.47$

Exercice 10 : calcule la norme des vecteurs de l'exercice 6. Compare ensuite tes réponses avec les solutions Page17.

Exercice 11: calcule la norme des vecteurs ci-dessous. Compare ensuite tes réponses avec les solutions Page17.

Cet exercice est plus difficile : tu dois *d'abord* calculer les composantes des vecteurs et *puis* calculer leur norme.

1° $\overrightarrow{AB}$, avec A (-2,4) et B (1,5)

2° $\overrightarrow{CD} = \binom{-4}{-2}$

3° $\overrightarrow{EF}$, avec E (0,4) et F (3,0)

4° -2*$\overrightarrow{EF}$

5° $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

6° $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} * \overrightarrow{EF}$

Exercice 12 : Imagine un triangle avec les trois points suivants : A (-2 ;1), B (3 ;4) et C (3 ;1). Peux-tu calculer le périmètre et l'aire de ce triangle ?

Commence par représenter le triangle dans un repère orthonormé, ce sera plus facile 😊

Condition de colinéarité de deux vecteurs

Vidéo 7 : vecteurs colinéaires = déterminant nul (10'38")

Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (=parallèles) si et seulement si leurs composantes $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ vérifient l'égalité suivante :

$$det\,(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x.y' - x'y = 0$$

On définit le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme suit :

$$det\,(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Démonstration : (Actimath à l'infini, p.199)

★ *Si un des deux vecteurs est le vecteur nul*, **l'assertion est triviale.**

En effet, supposons $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{0}$ est colinéaire à tout autre vecteur : $0y'-x'0=0$

★ *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous deux différents de $\vec{0}$,*

Condition nécessaire $\boxed{\Rightarrow}$: Si $\vec{u}\parallel\vec{v}$, il existe un réel non nul k tel que

$$\vec{v}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$$

Donc, $x'=kx$ et $y'=ky$.

Par conséquent, $xy'-x'y=0$ puisque $x\times ky-kx\times y=0$

Condition suffisante $\boxed{\Leftarrow}$: Réciproquement, supposons que $xy'-x'y=0$ $\quad(*)$

Comme $\vec{u}\neq\vec{0}$, nous avons $x\neq 0$ ou $y\neq 0$.

Supposons que $x\neq 0$, nous pouvons prendre par exemple $k=\dfrac{x'}{x}$,

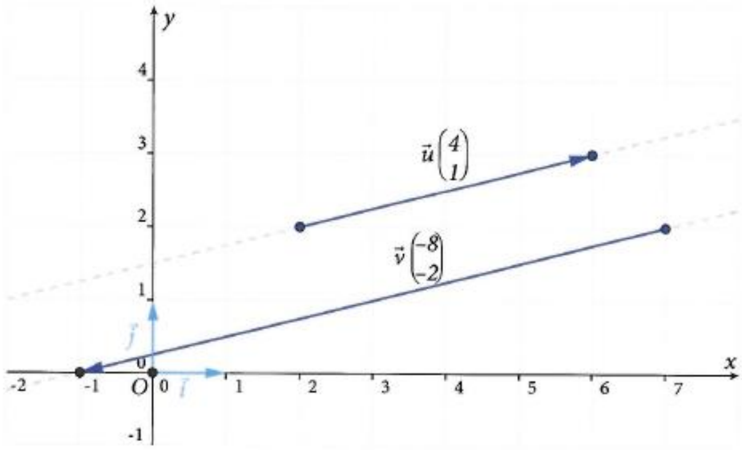
c'est-à-dire $x'=kx$.

En divisant l'égalité $(*)$ par x, il vient $y'-\dfrac{x'}{x}y=0\Leftrightarrow y'-ky=0\Leftrightarrow y'=ky$

Ainsi, nous avons trouvé un réel k non nul tel que $x'=kx$ et $y'=ky$,
c'est-à-dire $\vec{v}=k\vec{u}$. D'où $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

Nous raisonnons de manière analogue si $y\neq 0$ en prenant $k=\dfrac{y'}{y}$.

Exemple



$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

car $4\times(-2)=(-8)\times 1$

Disposition pratique

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix}4 & -8\\1 & -2\end{vmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \vec{u} \quad \vec{v}\end{array} = 4\times(-2)-1\times(-8)=0$$

6) Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs composantes $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ vérifient l'égalité suivante :

$$x.x' + yy' = 0$$

On définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme suit $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + yy'$.

On dira donc que le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est zéro.

Démonstration : (Actimath à l'infini, p.201)

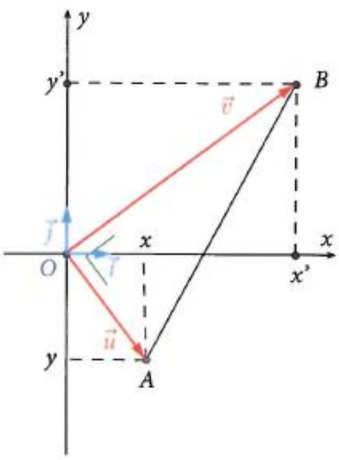
Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$

$\vec{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et

$\vec{v}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

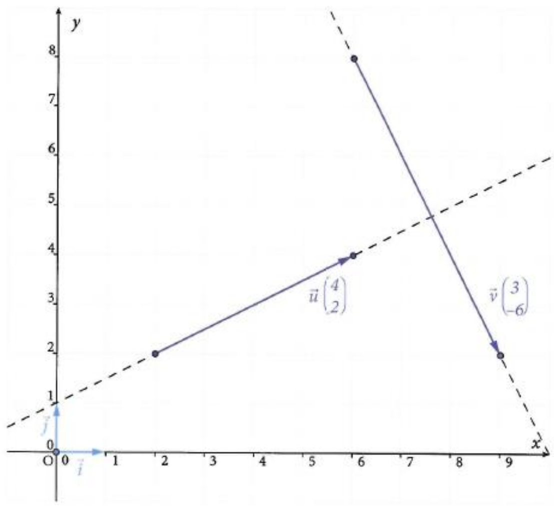
D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque dans le triangle OAB,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{AB}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$



$$\|\overrightarrow{AB}\|^2=\|\overrightarrow{OA}\|^2+\|\overrightarrow{OB}\|^2$$
$$\Leftrightarrow (x'-x)^2+(y'-y)^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x'^2}-2x'x+\cancel{x^2}+\cancel{y'^2}-2y'y+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{x'^2}+\cancel{y'^2}$$
$$\Leftrightarrow -2x'x-2y'y=0$$
$$\Leftrightarrow -2(x'x+y'y)=0$$
$$\Leftrightarrow xx'+yy'=0$$

Exemple



$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $4\times 3+2\times(-6)=0$

Exercice 13 : on considère les points A (-1 ;3), B(2 ;5), C(4 ;6) et D(-8 ;-21)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

Solution des exercices

Exercice 1 : les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont les trois mêmes caractéristiques : direction, sens et longueur. Ils sont donc égaux.

Exercice 2 : 1. $\overrightarrow{AC}$, 2. $\overrightarrow{AE}$, 3. $\overrightarrow{AD}$, 4. $\vec{0}$, 5. $\vec{0}$, 6. $\overrightarrow{CB}$, 7. $\overrightarrow{DC}$, 8. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

Exercice 3 : 1. $\overrightarrow{AN}$, 2. $\overrightarrow{AP}$, 3. $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$, 4. $\overrightarrow{KO}$ Si tes réponses ne sont pas correctes, tu peux regarder la correction dans la ***vidéo 3bis*** (Smartschool)

Exercice 4 : voir la ***vidéo 3ter*** dans Smartschool

Exercice 5 :

1. $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{GD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{IO}$ *et* $\overrightarrow{IO} = -2\overrightarrow{GD}$
3. $\overrightarrow{CL} = -3\overrightarrow{EB}$ *et* $\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CL}$
4. $\overrightarrow{GG} = 0\overrightarrow{IL}$ *et* $\overrightarrow{IL} = \ldots\overrightarrow{GG}$ *impossible*
5. $\overrightarrow{DH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AF}$ *et* $\overrightarrow{FA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HD}$
6. $\overrightarrow{BM} = \frac{11}{8}\overrightarrow{GO}$ *et* $\overrightarrow{GO} = \frac{-8}{11}\overrightarrow{MB}$ ✓
7. $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OE}$ *et* $\overrightarrow{OE} = \frac{10}{7}\overrightarrow{OH}$ ✓
8. $\overrightarrow{AO} = \frac{-14}{5}\overrightarrow{LG}$ *et* $\overrightarrow{OA} = \cancel{\frac{5}{14}}\overrightarrow{LG}$ $+\frac{14}{5}$
9. $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{IE}$ *et* $\overrightarrow{FN} = 2\overrightarrow{EI}$
10. $\overrightarrow{JE} = \frac{-5}{7}\overrightarrow{DK}$ *et* $\overrightarrow{KD} = \frac{7}{5}\overrightarrow{JE}$

Exercice 6 :

Vecteur $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0.5-3 \\ 3.8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.2 \end{pmatrix}$

Vecteur $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 : les deux formules sont identiques car les composantes du vecteur peuvent être exprimées directement, ou à partir des deux points origine et extrémité : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exercice 10 :

$\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \sqrt{(-2.5)^2 + (-1.2)^2} = \sqrt{7.69} = 2.77$

$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} = 2.24$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = 4.47$

$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = 2.24$

Exercice 11 :

1° $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(1+2)^2+(5-4)^2} = \sqrt{10}$ = 3.16

2° $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$ = 4.47 3° $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25}$ = 5

4° $\left\|-2.\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|-2.\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-6)^2+(8)^2} = \sqrt{100}$ = 10

5° $\left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(7)^2+(3)^2} = \sqrt{58}$ = 7.61

6° $\left\|\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(4.5)^2+(-1)^2} = \sqrt{21.25}$ = 4.61

Exercice 12 :

Le périmètre est la somme des trois côtés du triangle :

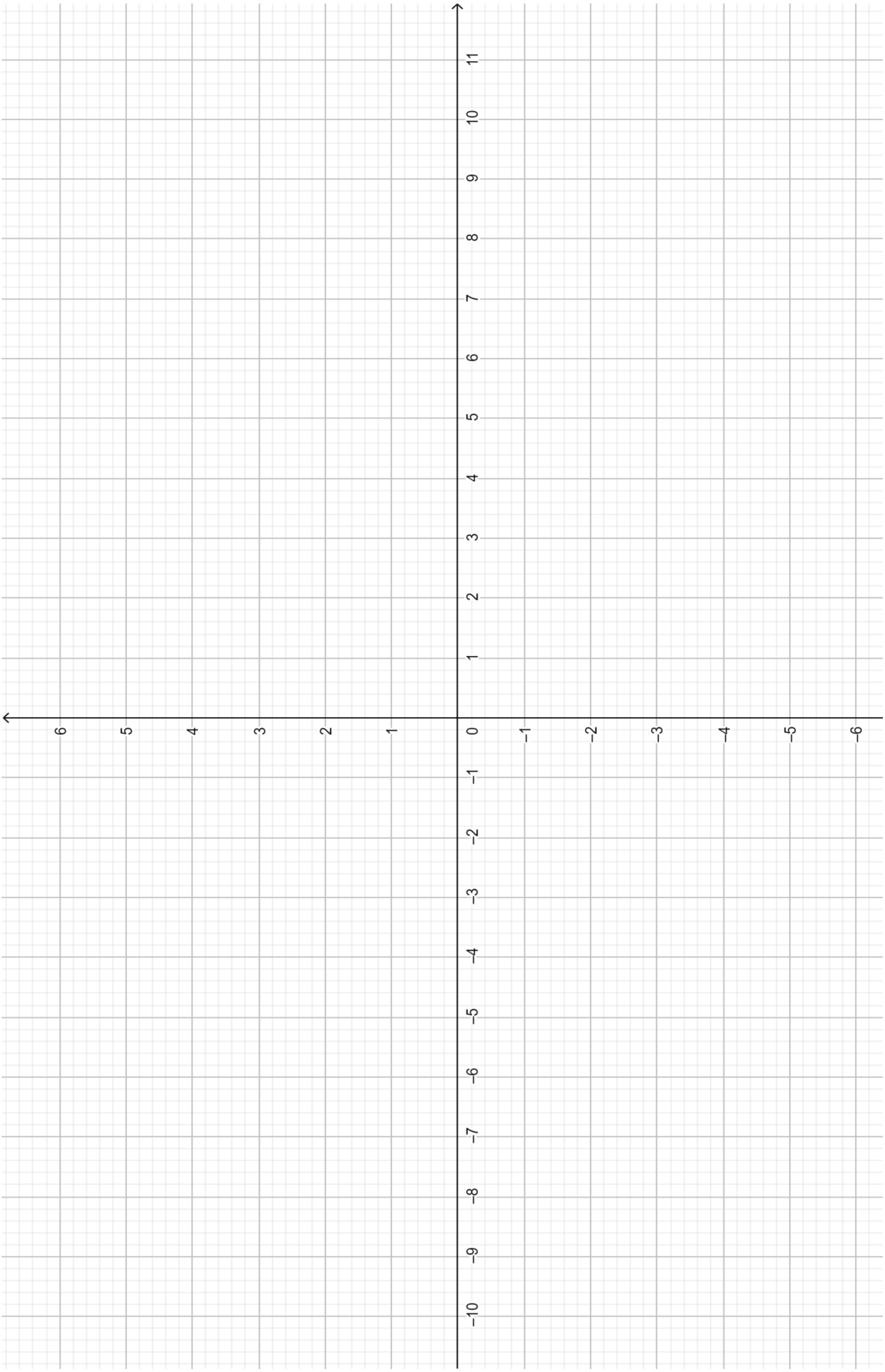
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(5)^2+(3)^2} = \sqrt{34}$ = 5.83 $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(0)^2+(-3)^2}$ = 3

$\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{(-5)^2+(0)^2} = 5$ → Périmètre = 5.83 + 3 + 5 = 13.83

L'aire d'un triangle est la (Base x Hauteur) / 2. Heureusement que nous avons un triangle rectangle !

Base = $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$ = 5 ; Hauteur = $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ = 3 → Aire = (5 x 3) / 2 = 7.5

Exercice 13 : Non car leur produit scalaire égale -90. Voir la ***vidéo 8*** pour le détail des calculs.


6 5 4 3 2 1 0 –1 –2 –3 –4 –5 –6
11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 –1 –2 –3 –4 –5 –6 –7 –8 –9 –10