试谈向量系的极大线性无关组

戚海军

学号: MP1533024

Email: 2316828815@qq.com

1 定义

设V是一个向量系，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$是它的一个子系，如果$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$线性无关，且V中任一向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$这个子系线性表示出来，则称$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$是向量系V的一个极大线性无关组。

一般来说向量系的极大线性无关组不是唯一的，但它们一定是等价的，所以下面就以向量系的某一个极大线性无关组来讨论。

2 坐标系与坐标

极大线性无关组就是线性空间的一个基底，定理给出线性空间中的任一向量都可以由基底唯一的线性表示出来。基底可以看作线性空间的坐标系，有了坐标系，加上坐标就可以表示线性空间里的任何对象，此时的坐标就是一般所说的向量。一般所说的通过基底和对应的向量可以唯一表示一个对象，其实就是先选定坐标系，再确定在此坐标系中的坐标，即可确定此对象。

例如V是一个n维的线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$是V的一个极大线性无关组，作为V的基底，也可称之为坐标系。则$\forall \beta \in S$可以唯一地表示成

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3, + \ldots + x_n\alpha_n$$

，此时$[x_1, x_2, x_3, \ldots x_n]^T$就是$\beta$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n$下的坐标或坐标向量，所以通过坐标系和坐标可唯一表示某个向量。

3 线性变换与坐标变换

在做开发的过程中经常会用到动画效果，其中有个变换叫做仿射变换，当然这个是仿射空间的变换，线性空间同样也存在变换，称之为线性变换。线性变换就是在给定的基底下，从线性空间中的一个点变换到另一个点，这个变换不是和动画一样逐步变化的，而是瞬时变化，有点像电子跃迁。这个变换可以用矩阵来描述，变换过程就是表示该对象的向量乘以表示这个变换的矩阵，结果就是变换结束的那个对象，但是所有的操作都是在选定的基底下进行的，即坐标系是大家依赖的基础，脱离了坐标系，这一切都无从谈起。由于线性变换是线性算子（线性映射）的特殊形式，推广到线性算子也同样成立。

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$是线性空间V的两组基，且

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n]P$$

其中$P = [p_1, p_2, p_3, \ldots p_n]$，其中第i列是$\beta_i$在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$基下的坐标，P可逆，称P是由基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n\}$的转换矩阵。

用矩阵来表示线性变换还有另外一种说法，众所周知运动是相对的，其实线性变换也是相对的。可以在选定的坐标系下从一点变换到另一点；也可以说是点不动，变换一下坐标系也可以达到相同的目的，这里说的点不动其实是相对于其他坐标系来说的，相对于原来的坐标系来说肯定是动了的。