高等数学结束习题

戚海军

学号: MP1533024

Email: 2316828815@qq.com

1 第一部分

1. 设V是有序实数对的集合：$V = \{(a,b)|a,b \in \in R\}$。规定其加法(⊕)和数乘(∘)运算为$(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$，与$k \circ (a,b) = (ka,kb)$。请问V关于运算⊕、∘是否构成R上的线性空间。

答:

要想V构成R上的线性空间，必须满足加法和数乘的所有性质。

加法性质： 对$\forall x, y \in V$, 定义$x + y \in V$，且满足:

1. 交换律 $x + y = y + x$

2. 结合律 $x + (y + z) = (x + y) + z$

3. 存在唯一的零元素，记作0，且 $x + 0 = x$

4. 加法的逆运算，记作 $-x + (-x) \equiv x - x = 0$

数乘性质： 对$\forall k \in R, x \in V$，定义kx满足:

5. $kx \in V$

6. 结合率 $k(ax) = (ka)x$

7. 分配律 $k(x + y) = kx + ky; (a + b)x = ax + bx$

8. F中存在单位元(记成1)，满足 $1x = x$

验证:

$(c,d) \oplus (a,b) = (c,d)$

$(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$

得出$(c,d) \oplus (a,b) \neq (a,b) \oplus (c,d)$

由此可见运算⊕不满足加法交换律，不能构成R上的线性空间。

2. 假定$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一组基，试求由$\beta_1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_3 = 4\alpha_1 + 13\alpha_2$生成的子空间$Span(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$的基底。

答:

设$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ -2k_1 + 3k_2 + 13k_3 = 0 \\ 3k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 13 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2k_3 \\ k_2 = -3k_3 \end{cases} \Rightarrow 2k_1 - 3k_2 + k_3 = 0$$

$dimSpan\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 2$；

基底为β_1, β_2或β_2, β_3或β_1, β_3。

3. 设V_1是内积空间V^n的任一子空间，试证明存在唯一的子空间$V_1^{\perp} \subset V^n$使得$V_1 \oplus V_1^{\perp} = V^n$。

证:

存在性:

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m (m < n)$为$V_1$的标准正交基，经扩充后$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$为V的标准正交基。若取

$$V_2 = Span(\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n)$$

显然$V_1 \perp V_2$且有$V^n = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_1^{\perp}$。

唯一性:

若另有V_1的正交补空间V_3使

$$V_1 \oplus V_3 = V^n$$

则对任意$0 \neq \beta \in V_3$，有$\beta \notin V_1$，且

$$(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in V_1$$

所以$\beta \in V_2$，即$V_3 \subset V_2$，同理可证$V_2 \subset V_3$，故有$V_2 = V_3$。

结论：存在唯一的子空间$V_1^{\perp} \subset V^n$使得$V_1 \oplus V_1^{\perp} = V^n$。

2 第二部分

以下数据是2010年度美国总统经济报告中的部分数据，其中反映了从2001到2007年五个国家的GDP（国内生产总值）的增长率。在经济全球化的形势下，欧美国家的经济相互依存，相互影响。

试根据这组数据利用最小二乘法，建立美国GDP增长率与德国、法国、意大利、西班牙四国经济增长率的线性模型。并假设某一年度受金融危机影响，这四个国家的经济增长率分别为1.2，0.3，-1.0和0.9时，预测美国的预期增长率是多少?

Country	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
United States	1.1	1.8	2.5	3.6	3.1	2.7	2.1
Germany	1.2	0	-0.2	1.2	0.7	3.2	2.5
France	1.8	1.1	1.1	2.3	1.9	2.4	2.3
Italy	1.8	0.5	0	1.5	0.7	2.0	1.6
Spain	3.6	2.7	3.1	3.3	3.6	4.0	3.6

答:

设德国、法国、意大利和西班牙分别为x_0, x_1, x_2, x_3。建立线性模型

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3$$

把数据代入模型，得到以下不相容的线性方程组:

$$\begin{cases} 1.2a + 1.8b + 1.8c + 3.6d = 1.1 \\ 1.1b + 0.5c + 2.7d = 1.8 \\ -0.2a + 1.1b + 3.1d = 2.5 \\ 1.2a + 2.3b + 1.5c + 3.3d = 3.6 \\ 0.7a + 1.9b + 0.7c + 3.6d = 3.1 \\ 3.2a + 2.4b + 2.0c + 4.0d = 2.7 \\ 2.5a + 2.3b + 1.6c + 3.6d = 2.1 \end{cases}$$

相应的不相容线性方程组是$Ax = b$，其中:

$$A=\begin{bmatrix}1.2&1.8&1.8&3.6\\0&1.1&0.5&2.7\\-0.2&1.1&0&3.1\\1.2&2.3&1.5&3.3\\0.7&1.9&0.7&3.6\\3.2&2.4&2.0&4.0\\2.5&2.3&1.6&3.6\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1.1\\1.8\\2.5\\3.6\\3.1\\2.7\\2.1\end{bmatrix}$$

正规方程$A^TAc=A^Tb$

$$\begin{bmatrix}19.9&19.5&14.9&32\\19.5&25.6&17&45.2\\14.9&17&12.8&29\\32&45.2&29.1&82.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21.2\\32.2\\19.2\\58\end{bmatrix}$$

得出$a=-0.31,b=2.74,c=-1.21,d=-0.25$，则该线性模型为：

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=-0.31x_0+2.74x_1-1.21x_2-0.25x_3$$

当这四个国家的经济增长率分别为1.2，0.3，-1.0和0.9时，代入可得美国的预期增长率为：

$f(1.2,0.3,-1.0,0.9)=-0.31\times1.2+2.74\times0.3-1.21\times(-1.0)-0.25\times0.9=1.44$