概率与期望题目选讲

jiangly

「USACO18DEC」Balance Beam

- 数轴上 $1,2,\ldots,n$（$2 \le n \le 10^5$）处的每一个点都有一个收益 g_i（$0 \le g_i \le 10^9$），你可以执行两种行动中的一种：
- 等概率向左或向右移动一步，如果移至 0 或 $n+1$ 则结束行动，无收益。
- 结束行动，获得当前位置的收益。
- 对每个位置，求从当前位置开始使用最优策略的的期望收益。

「USACO18DEC」Balance Beam

「USACO18DEC」Balance Beam

- 显然有

$$f_0 = f_{n+1} = 0$$
$$f_i = \max\left(g_i, \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_{i+1})\right)$$

「USACO18DEC」Balance Beam

- 显然有

$$f_0 = f_{n+1} = 0$$
$$f_i = \max\left(g_i, \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_{i+1})\right)$$

- 构造 $(0,0), (i, g_i), (n+1, 0)$ 的上凸包，则每个位置的纵坐标即是答案，时间复杂度 $O(n)$。

「USACO18DEC」Balance Beam

- 显然有

$$f_0 = f_{n+1} = 0$$
$$f_i = \max\left(g_i, \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_{i+1})\right)$$

- 构造 $(0,0), (i, g_i), (n+1, 0)$ 的上凸包，则每个位置的纵坐标即是答案，时间复杂度 $O(n)$。
- 也可以认为是每个点在左右各有一个目标，假设是 l, r，则点 i 的答案为

「USACO18DEC」Balance Beam

- 显然有

$$f_0 = f_{n+1} = 0$$
$$f_i = \max\left(g_i, \frac{1}{2}(f_{i-1} + f_{i+1})\right)$$

- 构造 $(0,0), (i, g_i), (n+1,0)$ 的上凸包，则每个位置的纵坐标即是答案，时间复杂度 $O(n)$。
- 也可以认为是每个点在左右各有一个目标，假设是 l, r，则点 i 的答案为

$$\frac{1}{r-l}\left((i-l)g_l + (r-i)g_r\right)$$

「CF280C」Game on tree

- 给定一棵 n（$1 \le n \le 10^5$）个点的树，初始时每个点都是白色。每次等概率随机选一个白点将它子树内的所有点染黑。求染黑所有点的期望次数。

「CF280C」Game on tree

「CF280C」Game on tree

- 由期望的线性性，设 p_u 为点 u 被选择的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{u \in T} p_u$$

「CF280C」Game on tree

- 由期望的线性性，设 p_u 为点 u 被选择的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{u \in T} p_u$$

- 一个结点被选当且仅当它第一次被覆盖时选的是自己。

「CF280C」Game on tree

- 由期望的线性性，设 p_u 为点 u 被选择的概率，则答案为
$$\text{ans}=\sum_{u\in T}p_u$$
- 一个结点被选当且仅当它第一次被覆盖时选的是自己。
- 能覆盖结点 u 的点的个数为 dep_u+1，且选择它们的概率相等，所以 $p_u=\frac{1}{\text{dep}_u+1}$。

「CF280C」Game on tree

- 由期望的线性性，设 p_u 为点 u 被选择的概率，则答案为
$$\text{ans} = \sum_{u \in T} p_u$$
- 一个结点被选当且仅当它第一次被覆盖时选的是自己。
- 能覆盖结点 u 的点的个数为 $\text{dep}_u + 1$，且选择它们的概率相等，所以 $p_u = \frac{1}{\text{dep}_u+1}$。
- 所以答案即为 $\text{ans} = \sum_{u \in T} \frac{1}{\text{dep}_u+1}$。

「CF280C」Game on tree

- 由期望的线性性，设 p_u 为点 u 被选择的概率，则答案为
$$\text{ans}=\sum_{u\in T}p_u$$
- 一个结点被选当且仅当它第一次被覆盖时选的是自己。
- 能覆盖结点 u 的点的个数为 dep_u+1，且选择它们的概率相等，所以 $p_u=\frac{1}{\text{dep}_u+1}$。
- 所以答案即为 $\text{ans}=\sum_{u\in T}\frac{1}{\text{dep}_u+1}$。
- 时间复杂度 $O(n)$。

「NOIP2016」换教室

- 给定一张无向连通图（$1 \le |V| \le 300, |V| - 1 \le |E| \le 90000$），边有权值（$w_e \le 100$）。给定一个长度为 n（$1 \le n \le 2000$）的结点序列 a_i，你可以选择不超过 m 个位置，选择位置 i 有 p_i 的概率将 a_i 变为 b_i，最小化序列中相邻点的最短路之和的期望，求这个最小值。

「NOIP2016」换教室

「NOIP2016」换教室

- 首先 Floyd 求出每对点的最短路。

「NOIP2016」换教室

- 首先 Floyd 求出每对点的最短路。
- 设 $f_{i,j,k}$（$k \in \{0,1\}$）表示现在在序列中的第 i 个点，选了 j 个位置，选了/没有选第 i 个位置的期望的最小值，则转移为

「NOIP2016」换教室

- 首先 Floyd 求出每对点的最短路。
- 设 $f_{i,j,k}$（$k \in \{0,1\}$）表示现在在序列中的第 i 个点，选了 j 个位置，选了/没有选第 i 个位置的期望的最小值，则转移为

$$f_{i,j,0} = \min\begin{Bmatrix} f_{i-1,j,0} + \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i}, \\ f_{i-1,j,1} + (1 - k_{i-1}) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + k_{i-1} \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},a_i} \end{Bmatrix}$$

「NOIP2016」换教室

- 首先 Floyd 求出每对点的最短路。
- 设 $f_{i,j,k}$（$k \in \{0,1\}$）表示现在在序列中的第 i 个点，选了 j 个位置，选了/没有选第 i 个位置的期望的最小值，则转移为

$$f_{i,j,0} = \min\left\{\begin{matrix} f_{i-1,j,0} + \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i}, \\ f_{i-1,j,1} + (1 - k_{i-1}) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + k_{i-1} \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},a_i} \end{matrix}\right\}$$

$$f_{i,j,1} = \min\left\{\begin{matrix} f_{i-1,j-1,0} + (1 - k_i) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + k_i \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},b_i}, \\ f_{i-1,j-1,1} + (1 - k_{i-1}) \cdot (1 - k_i) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + (1 - k_{i-1}) \cdot k_i \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},b_i} \\ +k_{i-1} \cdot (1 - k_i) \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},a_i} + k_{i-1} \cdot k_i \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},b_i} \end{matrix}\right\}$$

「NOIP2016」换教室

- 首先 Floyd 求出每对点的最短路。
- 设 $f_{i,j,k}$ （$k \in \{0,1\}$）表示现在在序列中的第 i 个点，选了 j 个位置，选了/没有选第 i 个位置的期望的最小值，则转移为

$$f_{i,j,0} = \min\left\{\begin{matrix} f_{i-1,j,0} + \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i}, \\ f_{i-1,j,1} + (1-k_{i-1}) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + k_{i-1} \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},a_i} \end{matrix}\right\}$$

$$f_{i,j,1} = \min\left\{\begin{matrix} f_{i-1,j-1,0} + (1-k_i) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + k_i \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},b_i}, \\ f_{i-1,j-1,1} + (1-k_{i-1}) \cdot (1-k_i) \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},a_i} + (1-k_{i-1}) \cdot k_i \cdot \mathrm{dis}_{a_{i-1},b_i} \\ +k_{i-1} \cdot (1-k_i) \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},a_i} + k_{i-1} \cdot k_i \cdot \mathrm{dis}_{b_{i-1},b_i} \end{matrix}\right\}$$

时间复杂度 $O(|V|^3 + n^2)$。

「CERC2017」Gambling Guide

- 给定一张 n（$1 \le n \le 3 \cdot 10^5$）个点，m（$1 \le m \le 3 \cdot 10^5$）条边的无向图，在每个时刻每个点会随机开放一条出边，你可以不动或沿着开放的边走，求最优策略下从 1 到达 n 的时刻。

「CERC2017」Gambling Guide

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有

$$f_u = 1 + \left(1 - \frac{\mathrm{cnt}_u}{\deg_u}\right) f_u + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v$$

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有

$$f_u = 1 + \left(1 - \frac{\mathrm{cnt}_u}{\deg_u}\right) f_u + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v$$

- 即

$$f_u = \frac{\deg_u + \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v}{\mathrm{cnt}_u}$$

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有

$$f_u = 1 + \left(1 - \frac{\mathrm{cnt}_u}{\deg_u}\right) f_u + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v$$

- 即

$$f_u = \frac{\deg_u + \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v}{\mathrm{cnt}_u}$$

- 每次确定一个 f_u 后更新相邻点未确定的 f_v 和 cnt_v。

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有

$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$

- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有

$$f_u = 1 + \left(1 - \frac{\mathrm{cnt}_u}{\deg_u}\right) f_u + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v$$

- 即

$$f_u = \frac{\deg_u + \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v}{\mathrm{cnt}_u}$$

- 每次确定一个 f_u 后更新相邻点未确定的 f_v 和 cnt_v。
- 实现类似于 Dijkstra。

「CERC2017」Gambling Guide

- 设 f_u 为从 u 到 n 的期望时刻，显然有
$$f_u = 1 + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E} \min\{f_u, f_v\}$$
- 可以按 f_u 从小到大依次确定。
- 记 cnt_u 为与 u 相邻的已经确定的点的个数，则有
$$f_u = 1 + \left(1 - \frac{\mathrm{cnt}_u}{\deg_u}\right) f_u + \frac{1}{\deg_u} \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v$$
- 即
$$f_u = \frac{\deg_u + \sum_{(u,v)\in E, f_v < f_u} f_v}{\mathrm{cnt}_u}$$
- 每次确定一个 f_u 后更新相邻点未确定的 f_v 和 cnt_v。
- 实现类似于 Dijkstra。
- 时间复杂度 $O\big((n+m)\lg m\big)$。

「SDOI2017」硬币游戏

- 给定 n（$1 \le n \le 300$）个互不相同长度为 m（$1 \le m \le 300$）的 01 串 s_i，对每个 i（$1 \le i \le n$），求一个随机的 01 串中最早出现的给出的串是 s_i 的概率。

「SDOI2017」硬币游戏

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。
- 答案即为 $F_i = \sum_{l\geq 0} f_{i,l}$。

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。
- 答案即为 $F_i = \sum_{l\geq 0} f_{i,l}$。
- 在长度为 l 的没有给定串出现的前缀后拼接 s_i，则有

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。
- 答案即为 $F_i=\sum_{l\geq 0} f_{i,l}$。
- 在长度为 l 的没有给定串出现的前缀后拼接 s_i，则有

$$g_l\cdot\frac{1}{2^m}=\sum_j\sum_k\left[\mathrm{suf}_{s_j,k}=\mathrm{pre}_{s_i,k}\right]\cdot f_{j,l+k}\cdot\frac{1}{2^{m-k}}$$

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。
- 答案即为 $F_i=\sum_{l\geq 0} f_{i,l}$。
- 在长度为 l 的没有给定串出现的前缀后拼接 s_i，则有

$$g_l\cdot\frac{1}{2^m}=\sum_j\sum_k\left[\mathrm{suf}_{s_j,k}=\mathrm{pre}_{s_i,k}\right]\cdot f_{j,l+k}\cdot\frac{1}{2^{m-k}}$$

- 两边对 $l\geq 0$ 求和，设 $G=\sum_{l\geq 0} g_l$，则

「SDOI2017」硬币游戏

- 建出 AC 自动机转化成路径然后高斯消元，时间复杂度 $O(n^3m^3)$，无法通过。
- 设 g_l 为长度为 l 的前缀不包含任何给定串的概率，$f_{i,l}$ 表示 s_i 第一个出现且结束位置为 l 的概率。
- 答案即为 $F_i=\sum_{l\ge 0} f_{i,l}$。
- 在长度为 l 的没有给定串出现的前缀后拼接 s_i，则有

$$g_l\cdot\frac{1}{2^m}=\sum_j\sum_k\left[\mathrm{suf}_{s_j,k}=\mathrm{pre}_{s_i,k}\right]\cdot f_{j,l+k}\cdot\frac{1}{2^{m-k}}$$

- 两边对 $l\ge 0$ 求和，设 $G=\sum_{l\ge 0} g_l$，则

$$G\cdot\frac{1}{2^m}=\sum_j\sum_k\left[\mathrm{suf}_{s_j,k}=\mathrm{pre}_{s_i,k}\right]\cdot\sum_{l\ge k} f_{j,l}\cdot\frac{1}{2^{m-k}}$$

「SDOI2017」硬币游戏

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以
$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$
- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n+1$ 个未知数。

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$

- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n + 1$ 个未知数。
- 由于我们只考虑有给定串出现的情况，所以

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$

- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n+1$ 个未知数。
- 由于我们只考虑有给定串出现的情况，所以

$$\sum_i F_i = 1$$

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$

- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n+1$ 个未知数。
- 由于我们只考虑有给定串出现的情况，所以

$$\sum_i F_i = 1$$

- $n+1$ 个方程，$n+1$ 个未知数，高斯消元即可。

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l < m$ 时 $f_{i,l} = 0$，所以

$$G \cdot \frac{1}{2^m} = \sum_j \sum_k \left[\mathrm{suf}_{s_j,k} = \mathrm{pre}_{s_i,k}\right] \cdot F_j \cdot \frac{1}{2^{m-k}}$$

- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n+1$ 个未知数。
- 由于我们只考虑有给定串出现的情况，所以

$$\sum_i F_i = 1$$

- $n+1$ 个方程，$n+1$ 个未知数，高斯消元即可。
- 前后缀的匹配可以使用字符串哈希。

「SDOI2017」硬币游戏

- 由于当 $l<m$ 时 $f_{i,l}=0$，所以

$$G\cdot\frac{1}{2^m}=\sum_j\sum_k\left[\mathrm{suf}_{s_j,k}=\mathrm{pre}_{s_i,k}\right]\cdot F_j\cdot\frac{1}{2^{m-k}}$$

- 这样我们得到了 n 个方程，但有 $n+1$ 个未知数。
- 由于我们只考虑有给定串出现的情况，所以

$$\sum_i F_i=1$$

- $n+1$ 个方程，$n+1$ 个未知数，高斯消元即可。
- 前后缀的匹配可以使用字符串哈希。
- 时间复杂度 $O\left(n^2(n+m)\right)$。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 给定一张 n（$1 \le n \le 10$）个点 m（$n-1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$）的简单无向连通图，每条边的边权是 $[0,1]$ 中等概率分布的实数，求最小生成树最大边权的期望。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\ge 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\ge 0} \sum_{l>k} p_l$$

西南大學附中

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\geq 0} \sum_{l>k} p_l$$

- 由于每种排列的出现概率是相等的，则可以把原问题转化为计数问题。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\ge 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\ge 0} \sum_{l>k} p_l$$

- 由于每种排列的出现概率是相等的，则可以把原问题转化为计数问题。
- 设 $f_{S,i,j}$ 为点集 S 中连了 i 条边，连通性为 $j \in \{0,1\}$ 的方案数。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\geq 0} \sum_{l>k} p_l$$

- 由于每种排列的出现概率是相等的，则可以把原问题转化为计数问题。
- 设 $f_{S,i,j}$ 为点集 S 中连了 i 条边，连通性为 $j \in \{0,1\}$ 的方案数。

$$f_{S,i,0} = \sum_{T\subset S, u\in T} \sum_{k} f_{T,k,1} \cdot \binom{\text{edge}_{S\setminus T}}{i-k}, \forall u \in S$$

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\geq 0} \sum_{l>k} p_l$$

- 由于每种排列的出现概率是相等的，则可以把原问题转化为计数问题。
- 设 $f_{S,i,j}$ 为点集 S 中连了 i 条边，连通性为 $j \in \{0,1\}$ 的方案数。

$$f_{S,i,0} = \sum_{T\subset S, u\in T} \sum_{k} f_{T,k,1} \cdot \binom{\text{edge}_{S\setminus T}}{i-k}, \forall u \in S$$

$$f_{S,i,1} = \binom{\text{edge}_S}{i} - f_{S,i,0}$$

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 有两条边权值相等的情况概率为 0，以下认为边权是一个排列。
- 假设 p_i 为连了权值最小的 i 条边后图恰好连通的概率，则答案为

$$\text{ans} = \sum_{k\ge 0} \frac{k}{m+1} \cdot p_k = \frac{1}{m+1} \sum_{k\ge 0} \sum_{l>k} p_l$$

- 由于每种排列的出现概率是相等的，则可以把原问题转化为计数问题。
- 设 $f_{S,i,j}$ 为点集 S 中连了 i 条边，连通性为 $j \in \{0,1\}$ 的方案数。

$$f_{S,i,0} = \sum_{T\subset S, u\in T} \sum_{k} f_{T,k,1} \cdot \binom{\text{edge}_{S\setminus T}}{i-k}, \forall u \in S$$

$$f_{S,i,1} = \binom{\text{edge}_S}{i} - f_{S,i,0}$$

- 时间复杂度 $O(3^n m^2)$。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。
- 设 $P(x) = [X \geq x]$，则答案为 $\mathrm{ans} = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$。

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。
- 设 $P(x) = [X \geq x]$，则答案为 $\mathrm{ans} = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$。
- 设 $P_S(x)$ 为点集 S 仅考虑权值 $\leq x$ 的边时不连通的概率，则

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。
- 设 $P(x)=[X\ge x]$，则答案为 $\mathrm{ans}=\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$。
- 设 $P_S(x)$ 为点集 S 仅考虑权值 $\le x$ 的边时不连通的概率，则

$$P_S(x)=\sum_{T\subset S,u\in T}(1-x)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\left(1-P_T(x)\right),\forall u\in S$$

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。
- 设 $P(x)=[X\geq x]$，则答案为 $\text{ans}=\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$。
- 设 $P_S(x)$ 为点集 S 仅考虑权值 $\leq x$ 的边时不连通的概率，则

$$P_S(x)=\sum_{T\subset S,u\in T}(1-x)^{\text{edge}_{T,S\setminus T}}\left(1-P_T(x)\right),\forall u\in S$$

- 两边求 $[0,1]$ 上的定积分，得

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 设最小生成树中最大边权为 X。
- 设 $P(x)=[X\ge x]$，则答案为 $\mathrm{ans}=\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$。
- 设 $P_S(x)$ 为点集 S 仅考虑权值 $\le x$ 的边时不连通的概率，则

$$P_S(x)=\sum_{T\subset S,u\in T}(1-x)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\left(1-P_T(x)\right),\forall u\in S$$

- 两边求 [0,1] 上的定积分，得

$$\int_0^1 P_S(t)\mathrm{d}t=\sum_{T\subset S,u\in T}\int_0^1(1-t)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\left(1-P_T(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{T\subset S,u\in T}\left(\int_0^1(1-t)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\mathrm{d}t-\int_0^1(1-t)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}P_{T(t)}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\sum_{T\subset S,u\in T}\left(\frac{1}{1+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}-\int_0^1(1-t)^{\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}P_{T(t)}\mathrm{d}t\right),\forall u\in S$$

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 发现还用到了 $\int_0^1 (1-t)^k P_{S(T)} \mathrm{d}t$，类似地有

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 发现还用到了 $\int_0^1 (1-t)^k P_{S(T)}\mathrm{d}t$，类似地有

$$\int_0^1 (1-t)^k P_S(t)\mathrm{d}t = \sum_{T\subset S,u\in T} \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\left(1-P_T(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{T\subset S,u\in T} \left(\int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} P_{T(t)}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \sum_{T\subset S,u\in T} \left(\frac{1}{1+k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} - \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} P_{T(t)}\mathrm{d}t\right), \forall u\in S$$

「ZJOI2015」地震后的幻想乡

- 发现还用到了 $\int_0^1 (1-t)^k P_{S(T)} \mathrm{d}t$，类似地有

$$\int_0^1 (1-t)^k P_S(t) \mathrm{d}t = \sum_{T \subset S, u \in T} \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} \left(1 - P_T(t)\right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{T \subset S, u \in T} \left(\int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} \mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} P_{T(t)} \mathrm{d}t \right)$$

$$= \sum_{T \subset S, u \in T} \left(\frac{1}{1 + k + \mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} - \int_0^1 (1-t)^{k+\mathrm{edge}_{T,S\setminus T}} P_{T(t)} \mathrm{d}t \right), \forall u \in S$$

- 时间复杂度 $O(3^n m)$。

「CF183D」T-shirt

- 有 n（$1 \le n \le 3000$）个人，m（$1 \le m \le 300$）种物品，每个人有恰好一种需要的物品。给出每个人需要每种物品的概率，你可以带 n 个物品，最大化得到需要的物品的人数的期望。

「CF183D」T-shirt

「CF183D」T-shirt

- 设 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 个人至少 k 个人想需要物品 j 的概率，则最大的 n 个 $f_{n,j,k}$ 值的和就是答案。

「CF183D」T-shirt

- 设 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 个人至少 k 个人想需要物品 j 的概率，则最大的 n 个 $f_{n,j,k}$ 值的和就是答案。
- 转移为

$$f_{i,j,k} = f_{i-1,j,k-1} \cdot p_{i,j} + f_{i-1,j,k} \cdot (1 - p_{i,j})$$

「CF183D」T-shirt

- 设 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 个人至少 k 个人想需要物品 j 的概率，则最大的 n 个 $f_{n,j,k}$ 值的和就是答案。
- 转移为

$$f_{i,j,k} = f_{i-1,j,k-1} \cdot p_{i,j} + f_{i-1,j,k} \cdot (1 - p_{i,j})$$

- 直接计算的时间复杂度为 $O(n^2m)$。

「CF183D」T-shirt

- 设 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 个人至少 k 个人想需要物品 j 的概率，则最大的 n 个 $f_{n,j,k}$ 值的和就是答案。
- 转移为

$$f_{i,j,k} = f_{i-1,j,k-1} \cdot p_{i,j} + f_{i-1,j,k} \cdot \left(1 - p_{i,j}\right)$$

- 直接计算的时间复杂度为 $O(n^2m)$。
- 当我们取到 $f_{n,j,k}$ 后再计算 $f_{n,j,k+1}$。

「CF183D」T-shirt

- 设 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 个人至少 k 个人想需要物品 j 的概率，则最大的 n 个 $f_{n,j,k}$ 值的和就是答案。
- 转移为

$$f_{i,j,k}=f_{i-1,j,k-1}\cdot p_{i,j}+f_{i-1,j,k}\cdot\left(1-p_{i,j}\right)$$

- 直接计算的时间复杂度为 $O(n^2m)$。
- 当我们取到 $f_{n,j,k}$ 后再计算 $f_{n,j,k+1}$。
- 时间复杂度 $O\big(n(n+m)\big)$。

「ECPC2016」Touristic Trip

- 给定一张 n（$1 \le n \le 20$）个结点的图，从结点 u 走向 v 的概率为 $p_{u,v}$，你从 1 号点开始游走，共到达 k（$1 \le k \le 15$）个结点，可能重复。
- 有 m（$1 \le m \le 10$）种物品，每次到达一个结点时（包括初始在 1 号点），会获得一个物品，在结点 u 获得物品 i 的概率为 $q_{u,i}$。
- 给定最后的物品序列，求路径上的第 x 个结点是 y 的概率。
- 多组数据。

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。

「ECPC2016」Touristic Trip

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

- 要计算 $P(A \mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

- 要计算 $P(A \mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

- 要计算 $P(A \mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

$$f_{1,1} = q_{1,t_1}$$

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

- 要计算 $P(A\mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

$$f_{1,1}=q_{1,t_1}$$

$$f_{i,u}=\sum_{v} f_{i-1,v}\cdot p_{v,u}\cdot q_{u,t_i}$$

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

- 要计算 $P(A\mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

$$f_{1,1}=q_{1,t_1}$$

$$f_{i,u}=\sum_v f_{i-1,v}\cdot p_{v,u}\cdot q_{u,t_i}$$

- 则 $P(B)=\sum_u f_{k,u}$。

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

- 要计算 $P(A \mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

$$f_{1,1} = q_{1,t_1}$$

$$f_{i,u} = \sum_{v} f_{i-1,v} \cdot p_{v,u} \cdot q_{u,t_i}$$

- 则 $P(B) = \sum_u f_{k,u}$。
- 计算 $P(A \mid B)$ 只需强制第 x 步走 y 即可。

「ECPC2016」Touristic Trip

- A：路径上的第 x 个结点是 y。
- B：物品序列与给定的相同。

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B)$$

- 要计算 $P(A \mid B)$，只需计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$。
- 考虑 dp 求出 $P(B)$，设输入序列中的第 i 个物品为 t_i，$f_{i,u}$ 为第 i 个结点为 u，且前 i 个结点的物品与给定序列相同，则

$$f_{1,1} = q_{1,t_1}$$

$$f_{i,u} = \sum_{v} f_{i-1,v} \cdot p_{v,u} \cdot q_{u,t_i}$$

- 则 $P(B) = \sum_u f_{k,u}$。
- 计算 $P(A \mid B)$ 只需强制第 x 步走 y 即可。
- 时间复杂度 $O(n^2k)$。