SG函数

nantf

约定

- 若无特殊说明，接下来所有的博弈论题中，两人都绝顶聪明，都想让自己赢，在自己不可能赢的情况下想平局。

一些不太重要的定义

- 必胜态：在一个游戏中，到了这个状态后，当前操作者有必胜策略，就是必胜态。
- 必败态：在一个游戏中，到了这个状态后，当前操作者无必胜策略，就是必败态。
- 当不能操作者输时，游戏结束状态是必败态，反之亦然。（一般来说我们讨论的游戏都是不能操作者输）
- 从必胜态一定有一种方法到必败态。（也就是当前操作者有一种方法让对方没有必胜策略）
- 从必败态无论如何都会到必胜态。（也就是当前操作者无论怎么操作对方都有必胜策略）

应该没有出处的题

- n 堆石子，第 i 堆有 ai 个，两人轮流操作，每次可以选一堆石子，然后取走 1 个，2 个或 4 个。不能操作者输。问谁会赢。
- n<=100000，ai<=1000。

SG函数

- 定义：SG(x) 是一个函数，x 表示目前局势状态。比如上一题中，x 表示这堆石子中还剩几个。（当然定义整个游戏局面也行，但是没用，待会就明白为什么了)
- 其中，x 是必败态当且仅当 SG(x)=0。所以 SG(0)=0。
- 定义 mex(S) 为集合 S 中没出现过的最小非负整数。比如 mex({1,2,3,4,5})=0，mex({0,1,2,4,5})=3。
- 令 S 为所有 x 走一步可以到达的状态。比如上一题中，S={x-1,x-2,x-4}（如果 x>=4）。
- 那么 $SG(x) = \mathrm{mex}_{y \in S}(SG(y))$ 。
- 一般求 SG 函数可以暴力求 mex，如果复杂度不对那别想着优化了，不如打表找规律。

SG定理

- 游戏和的 SG 函数就是所有子游戏的 SG 函数的异或和，其中所有子游戏互相独立。
- 比如，上一题中整个游戏的 SG 函数就是每堆石子的 SG 函数的异或和。
- 所以先手必胜当且仅当每堆石子的 SG 函数的异或和不为 0。

洛谷1247 取火柴游戏

- n 堆石子，第 i 堆有 ai 个。现在两个人轮流操作，每次选择一堆还没有空的石子，取走任意个（可以是一个，可以是全部，但不能不拿），不能操作者输，问先手会不会赢。
- 然后如果先手必胜，请找到一个能使先手胜利的第一步操作。若有多种这样的第一步操作，取所选石堆编号最小的那个，若仍有多个取拿走石头个数最少的那个
- n<=500000，ai<=1e9
- （弱化版：洛谷2197 【模板】nim游戏）

洛谷1247 取火柴游戏

- 先判先手必胜。
- 暴力求 SG 函数肯定不行。
- 打表发现 SG(i)=i。
- 证明就数学归纳法就好了。
- 想让先手必胜，就要第一步操作后后手必输。也就是第一步操作后，剩下的石头个数异或和为 0。
- 枚举选哪一堆取走随便计算一下就好。

GFOJ 107 取石子游戏

- 仍然是取石子游戏。规则：（设选中的石堆还剩 x 个石子）
- 要么取走 x 个；
- 要么选择一个满足 1<=y<=x 且 gcd(x,y)=1 的 y，取走 y 个。
- 问谁会赢。
- T 组数据，T<=100，n<=100，ai<=10^6
- （明显暴力 SG 函数不可取）
- （新 OJ 上好像看不了，要去原 OJ）

GFOJ 107 取石子游戏

- 打表可得 SG(x)=rank(p)+1，其中 p 是 x 的最小质因子，rank(p) 是 p 是从小到大第几个质数。
- （虽然我也不知道怎么钉出来的）
- 证明就不难了。还是数学归纳法。

CF1194D 1-2-K Game

- （题面有改动）
- 一堆石子共 n 个。两人轮流操作，每次可以选择取走 1 个，2 个或者 k 个（不是 1 到 k！）。不能操作者输，问谁有必胜策略。
- T<=100，0<=n<=10^9，3<=k<=10^9
- （本题是来训练打表能力的）

CF1194D 1-2-K Game

- 打表可得:
- 当 k 不为 3 的倍数时，先手必胜当且仅当 n 不是 3 的倍数。
- 当 k 为 3 的倍数时，先手必胜当且仅当 n%(k+1) 不是 3 的倍数 或者 n=k。
- （当时我在场上钉了 20min 钉出来了，差点掉分）
- 至于证明，还是贴一下吧:
- 当 k 不为 3 的倍数时，想象下在模 3 意义下进行游戏，就变成每次可以取 1 或 2 个，问最后一步谁取完。
- 当 n 是 3 的倍数时，先手取 x 个，后手就跟着取 3-x 个，最后一步肯定就是后手的。
- 当 n 不是 3 的倍数时，先手取 n%3 个，然后就是上一种情况了。
- 当 k 为 3 的倍数时，给两种证法:

证法1（SG 函数证法）

- 下证 SG(i)=SG(i+k+1)。仍然用数学归纳法。
- n<k 时，就相当于前面那种情况了。
- n=k 时显然先手必胜。
- 手玩+分类讨论得 SG(k+1)=SG(1)。
- 对于更大的 i，因为 i+k+1 走一步能到的状态与 i 在模 k+1 意义下肯定不同余，而且与 i 走一步能到的状态在模 k+1 意义下同余，所以若这些状态满足周期性，那 i 和 i+k+1 也满足周期性。
- 由数学归纳法，得证。

证法2（正经证法）

- 注意，由于这个游戏只有一个子游戏，所以不需要关注 SG 函数的具体值，只需要关注是否为 0，也即是否必胜。
- 当没有 k 这种取法时，k 是必败态（3 的倍数），k+1 是必胜态。
- 有 k 这种取法，k 变成了必胜态，k+1 变成了必败态（1,2,k 都是必胜态）。
- 考虑，当走一步能走到的所有状态中多了一个必胜态，对自己是否是必胜态没有影响。
- 所以 k+1 到 2k 与 1 到 k 的胜负状态一样，因为只是多了一个必胜态（能取 k 个了）。
- 而 2k+1 受到 k+1 的影响会变成必胜态，2k+2 到 3k+1 与 k+2 到 2k+1 的胜负状态一样，3k+2 受到 2k+2 的影响会变成必胜态……
- 得证。