

Síntese das Leis de Kepler

Kepler's laws synthesis

Marco Antonio Garms^{*1}, Iberê Luiz Caldas²

¹Universidade Paulista, São Paulo, SP, Brasil

²Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 14 de Agosto, 2017. Revisado em 16 de Outubro, 2017. Aceito em 18 de Outubro, 2017.

O objetivo deste artigo é apresentar a concepção das leis de Kepler utilizando os aplicativos (livres) *Stellarium* e *Geogebra* para obter e analisar dados semelhantes aos que Kepler teve acesso. Embora o procedimento apresentado não seja exatamente igual ao de Kepler, ele permite, de forma didática, entender e aplicar a orientação seguida por ele para obter as leis sobre o movimento de planetas. Espera-se que o estudo quantitativo aqui desenvolvido esclareça o significado de algumas discussões qualitativas em diversas referências sobre este assunto e possa ser usado em aplicações didáticas.

Palavras-chave: leis de Kepler, órbita elíptica, Marte, planetas, sistema solar.

The aim of this paper is to present the conception of the laws of planetary motion using the free softwares *Stellarium* and *Geogebra* to get and process data similar to those accessible to Kepler. Although this procedure is not exactly equal to the one accomplished by Kepler, it allows, in a didactic way, to understand and to apply the orientation followed by him in order to obtain his laws about the planetary motion. It is expected that the quantitative study here developed make clear the meaning of some qualitative discussions in several references on this subject and have didactic application.

Keywords: Kepler's laws, elliptical orbit, Mars, planets, solar system.

1. Introdução

Em 1600, Kepler aceitou o convite de Tycho Brahe para trabalhar com ele em Praga. Pouco depois, com a morte de Brahe, Kepler o sucedeu como Matemático Imperial na corte de Rudolph II de Habsburgo [1].

Kepler herdou de Brahe um volumoso conjunto de registros astronômicos realizados no observatório de Uraniborgo na ilha de Hven na Dinamarca. Tais observações, com boa precisão, foram realizadas por Brahe mesmo sem telescópio, inexistente naquela época [1].

Com base em suas observações, Brahe havia solicitado que Kepler desenvolvesse uma nova teoria para os movimentos irregulares de Marte. Resultou que em 1609, após extenso estudo, Kepler apresentou sua obra *Astronomia Nova* [2] considerada um dos maiores trabalhos sobre ciências naturais de todas as épocas, na qual anunciou ao mundo a primeira e segunda leis do movimento planetário [1, 3].

Kepler buscou a descrição mais simples possível dos movimentos planetários para validar o modelo de Copérnico das órbitas em torno do Sol e, a partir dela, explicar a dinâmica do sistema solar.

Nota-se uma evolução desta posição com relação à Astronomia Antiga, que a priori considerava as órbitas circulares em torno da Terra [3, 4].

A segunda e a terceira leis de Kepler sugerem que o Sol influencia o movimento dos planetas. Kepler discutiu os conceitos de *espécie immateriata* [4] e de força à distância [3], mas não conseguiu deles derivar uma dinâmica para os movimentos planetários. Coube a Newton, a partir dos trabalhos de Kepler e Galileu, introduzir as equações da dinâmica e obter a lei da gravitação [3].

O estudo direto da *Astronomia Nova* pode ser árduo por dois motivos: a notação empregada em geral não é atual, como também são discutidos muitos detalhes, incluindo tentativas sem êxito o que, embora seja interessante para o estudo das motivações do autor, talvez não seja a melhor abordagem inicial para fins didáticos.

No entanto, quando se enunciam as três leis de Kepler sem se detalhar como foram estabelecidas, o que é compreensível perto da complexidade deste trabalho, perde-se a oportunidade de apreciar como os dados experimentais suportam as previsões de um modelo teórico.

Analises geométrica e matemática e a aplicação de técnicas de medida devem fazer parte da formação de futuros cientistas e o estudo da obtenção das leis de Kepler pode ser uma boa oportunidade para exercitar essas análises e aplicação. Dentre outros esforços, com a finalidade de compreender aspectos quantitativos do trabalho de Kepler, a referência [5] apresenta um método, sugerido por ele, para a construção da órbita marciana em torno do Sol.

*Endereço de correspondência: magarms@terra.com.br.

Neste artigo apresentamos detalhes quantitativos não comumente tratados nas obras sobre as leis de Kepler, tais como [1, 3, 6, 7, 8], de modo a complementá-las sob este ponto de vista.

Para compreender a contribuição de Kepler empregase o aplicativo *Stellarium* [9] com o intuito de gerar as observações, das órbitas de Marte e do Sol, vistas da Terra. Este aplicativo simula a esfera celeste permitindo obter as coordenadas astronômicas de planetas, estrelas, constelações e outros astros num determinado instante do passado, presente ou futuro, escolhido pelo operador.

Com esse procedimento obtém-se medidas, como as que Kepler teve acesso para sintetizar suas leis, visando tratá-las de modo equivalente ao que ele fez. Não serão discutidos todos os pormenores apresentados por ele, mas apenas os considerados essenciais para o estabelecimento das leis de Kepler sobre o movimento dos planetas no sistema solar. Para executar esta sequência são necessárias observações em momentos de oposição de Marte, como também observações separadas dessas oposições por um ou mais anos marcianos.

Complementarmente, usaremos o aplicativo *Geogebra* [10] para analisar essas observações e obter as características principais das órbitas de Marte e da Terra. Este é um aplicativo, sobre álgebra e geometria, pelo qual é possível desenhar-se pontos, vetores, segmentos, retas e cônicas bem como realizar operações para se determinar, entre outros resultados, intersecções, áreas, ângulos e curvas.

Os dois aplicativos utilizados, *Stellarium* e *Geogebra*, simplificam enormemente a obtenção das leis de Kepler, além de viabilizar o desenvolvimento de material didático sobre este tema.

Desse modo, com base nos procedimentos de Kepler, será determinada, inicialmente, uma órbita circular para a Terra, em torno do Sol, com precisão suficiente para usá-la na determinação da órbita de Marte [3]. A seguir serão feitos um ajuste circular e outro elíptico para a órbita de Marte, comparando os erros desses ajustes, para assim estabelecer a primeira lei de Kepler sobre as órbitas elípticas. Finalmente, a partir dos dados e resultados obtidos com os aplicativos usados, serão também verificadas a segunda e terceira leis de Kepler.

2. Modelo inicial de Kepler para a órbita de Marte

Inicialmente, na Figura 1, é apresentado sucintamente o modelo geocêntrico de Ptolomeu [11]. (Posteriormente, esse modelo será usado para introduzir o modelo heliocêntrico adotado a princípio por Kepler, inspirado em Copérnico, para a sequência de análise a ser desenvolvida).

O modelo geocêntrico simplificado de Ptolomeu [11] é apresentado na Figura 1:

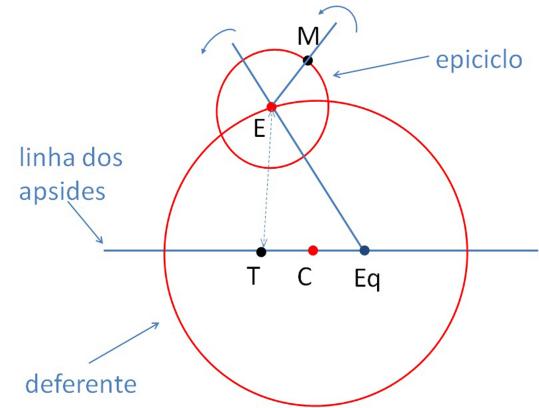


Figura 1: Modelo de Ptolomeu para as trajetórias de um planeta, como Marte, em torno da Terra.

1. Relativamente à órbita de Marte (M), a Terra (T), fixa, não está no centro (C) de um círculo, denominado deferente. Marte (M) move-se com velocidade constante, em torno do ponto E, ao longo de um círculo denominado epicílio. O ponto E por sua vez percorre o deferente.
2. A linha dos apsides une o apogeu e o perigeu, que são, respectivamente, a maior e a menor distância TE.
3. Na linha dos apsides, deslocado igualmente do centro C, mas do lado contrário ao da Terra (T), localiza-se um ponto privilegiado, denominado ponto equante (Eq), para o qual é constante a velocidade angular do centro do epicílio (E).

Copérnico, embora tenha considerado o Sol no centro das órbitas dos planetas, descartou o ponto Equante de Ptolomeu, para manter a hipótese de Platão e Aristóteles que estabelecia o movimento circular uniforme como base para os corpos celestes. Por isto o ajuste das órbitas em torno do Sol exigiu-lhe um maior número de círculos complementares ao epicílio acima mencionado [6].

De outra forma, Kepler defendia o heliocentrismo de Copérnico, mas considerou que adotando o ponto Equante poderia simplificar o modelamento das órbitas [3, 7]. Assim, Kepler mudou a referência da Terra para o Sol (fixo) resultando a princípio, para uma dada órbita planetária, um círculo ao redor do Sol. Portanto, como no modelo de Ptolomeu, Kepler considerou o centro da órbita circular deslocado do Sol.

Como indicado na Figura 2, Kepler considerou, em torno do centro (O) da órbita circular planetária, os deslocamentos, opostos entre si, do Sol (S) e do ponto equante (Eq), que neste modelo de órbita passa a ser o ponto para o qual é constante a velocidade angular do planeta, sendo que a direção destes deslocamentos determina a linha periélia pontilhada na Figura 2 [3].

Este é o modelo de partida do tipo circular excêntrico com equante que será denominado, ao longo deste texto, simplesmente de órbita circular [12].

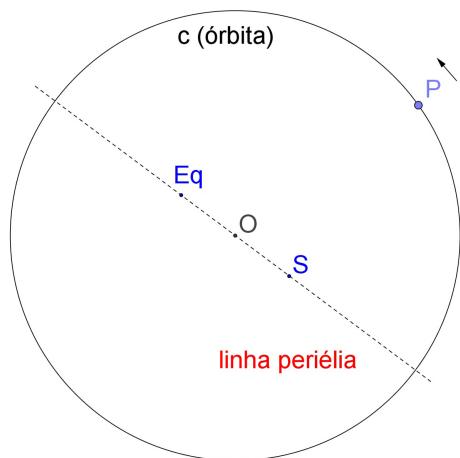


Figura 2: Modelo de órbita circular de Marte ou da Terra (P), em torno do Sol (S), adotado inicialmente por Kepler.

3. Coordenadas astronômicas relevantes

As coordenadas astronômicas geocêntricas empregadas ao longo deste artigo, estão indicadas na Figura 3: a longitude eclíptica geocêntrica de Marte, ângulo λM , e a longitude eclíptica geocêntrica do Sol, ângulo λS . Estes ângulos são obtidos utilizando-se o aplicativo *Stellarium*.

Na Figura 3 o eixo x indica a direção do equinócio vernal (dia e noite com 12 horas no verão do hemisfério norte) relativamente à Terra. Este eixo define a referência para a medida dos ângulos λM e λS .

Também necessária é a coordenada heliocêntrica da Terra, ângulo λT (Terra-Sol-eixo x), calculada a partir

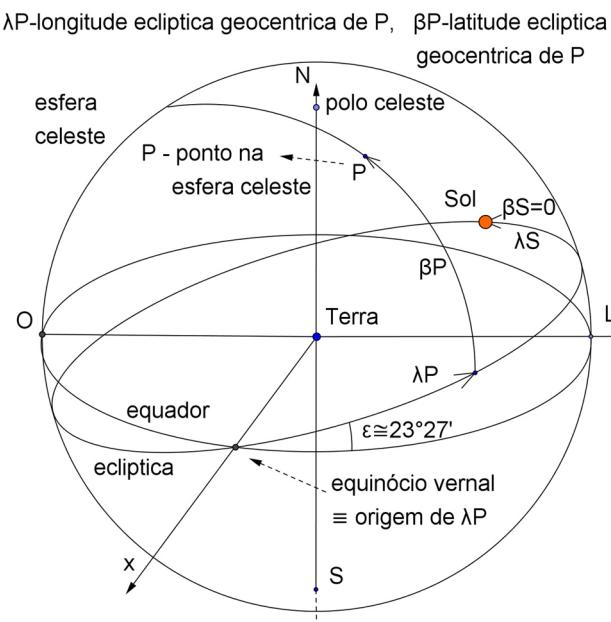


Figura 3: Longitudes eclípticas geocêntricas de um ponto P na esfera celeste (λP) e do Sol (λS). Se P representar Marte, então $\lambda P = \lambda M$. Neste caso $\beta M \approx 0^\circ$, pois o plano da órbita de Marte encontra-se muito próximo do plano eclíptico.

do ângulo λS de acordo com as expressões deduzidas a partir da Figura 4. Assim, se λS for menor que 180° então λT será igual a $\lambda S + 180^\circ$ e se λS for maior ou igual a 180° então λT será igual a $\lambda S - 180^\circ$.

Observa-se que, por ser relativamente pequena, a latitude eclíptica geocêntrica de Marte (βM) será desprezada neste artigo de modo a reduzir a complexidade da análise a ser desenvolvida. Na seção 11 (Conclusões) será discutido o impacto desta aproximação.

4. Alinhamento Sol Terra Marte.

Na Tabela 1 apresentam-se os 8 dias com oposição de Marte (o ângulo δ entre Sol, Terra e Marte torna-se igual a 180° , isto é, estes astros ficam alinhados) que foram selecionados para realizar as medidas para estabelecer as órbitas da Terra e de Marte.

Para ajustar uma órbita elíptica a princípio são necessários cinco pontos [13]. Optou-se por amostrar mais três pontos para utilizá-los na determinação dos erros deste ajuste.

Usando o aplicativo *Stellarium* para a data da primeira oposição, registraram-se a cada 3 horas (a partir de 00:00:00), os ângulos λM e λS . São calculados também os valores dos ângulos $\delta = \lambda M - \lambda S$ e $\Delta = \delta - 180^\circ$. Os resultados encontram-se na Tabela 2.

Com estes dados é possível interpolar a grandeza $\Delta = \delta - 180^\circ$ buscando o valor da hora do dia em que ela passa pelo valor zero, conforme indicado na Figura 5. Nestas condições o ângulo δ assume o valor de 180° o que significa que exatamente neste momento ocorre uma oposição entre a Terra e Marte.

Este instante é obtido pela raiz da equação da reta apresentada no gráfico da Figura 5, “ $\Delta \times$ hora do dia”:

$$\begin{aligned} \text{oposição} &= 0,7581/0,051 = 14,86471 \text{ horas} \\ &= 14 : 51 : 52 = 0,619363 \text{ dias} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda S - 180^\circ; \lambda T = \theta \\ &\quad (\text{alternos internos}) \\ \therefore \lambda T &= \lambda S - 180^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta &= \lambda T - 180^\circ; \lambda S = \theta \\ &\Rightarrow \lambda S = \lambda T - 180^\circ \\ \therefore \lambda T &= \lambda S + 180^\circ \end{aligned}$$

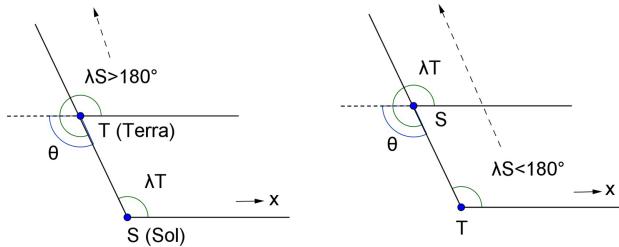


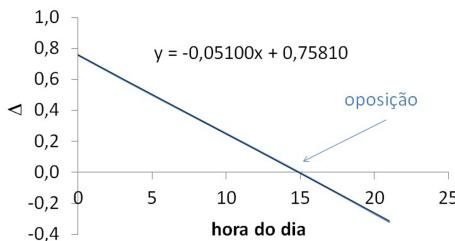
Figura 4: Obtenção da longitude eclíptica heliocêntrica da Terra (λT) a partir da longitude eclíptica geocêntrica do Sol (λS).

Tabela 1: Oito oposições de Marte.

28/08/2003	07/11/2005	24/12/2007	29/01/2010
03/03/2012	08/04/2014	22/05/2016	27/07/2018

Tabela 2: Ângulo Δ de 3 em 3 horas ao longo de 28/08/2003.

	0h	3h	6h	9h	12h	15h	18h	21h
$\lambda M (^{\circ})$	335,19	335,15	335,12	335,09	335,06	335,03	334,99	334,95
$\lambda S (^{\circ})$	154,43	154,55	154,67	154,79	154,91	155,03	155,15	155,27
$\delta (^{\circ})$	180,76	180,60	180,45	180,30	180,15	180,00	179,84	179,68
$\Delta (^{\circ})$	0,758	0,602	0,451	0,300	0,150	-0,003	-0,159	-0,318

**Figura 5:** Ângulo Δ de 3 horas ao longo de 28/08/2003.**Tabela 3:** Datas e instantes de ocorrência no dia para oito oposições.

Oposição	Data	Hora do dia
1a	28/08/2003	14 51 52
2a	07/11/2005	5 47 52
3a	24/12/2007	17 43 8
4a	29/01/2010	17 40 14
5a	03/03/2012	17 7 41
6a	08/04/2014	18 1 29
7a	22/05/2016	8 10 46
8a	27/07/2018	2 1 31

Interpolando os valores da Tabela 2 e considerando a reta mostrada na Figura 5, obtemos o horário da oposição entre Marte e a Terra. Tal procedimento é repetido para todas as demais datas da Tabela 1, resultando a Tabela 3 onde se apresenta as datas e instantes de ocorrência no dia de cada uma das oposições.

5. Órbita Circular Terrestre

Nesta seção usaremos as posições da Terra e de Marte para calcularmos a distância da Terra em torno do Sol, r_T .

Para isso, na Tabela 4 apresentamos mais cinco observações (*Stellarium*) dessas posições deslocadas de múltiplos de 687 dias da primeira oposição. Este valor corresponde ao ano marciano considerado neste trabalho (o valor medido atualmente é de 686,98 dias). Na seção 11 (Conclusões) será discutido o impacto desta aproximação.

Para ajustar uma órbita circular a princípio são necessários três pontos. Optou-se por amostrar mais dois pontos para utilizá-los na determinação dos erros deste ajuste.

Na Figura 6 apresenta-se o cálculo da posição da Terra, por exemplo, em 15/07/2005, às 14:51:52. Nessa Figura adota-se a distância de Marte ao Sol como sendo a unidade utilizada nos valores que se deseja obter para as distâncias da Terra ao Sol (pois nesses instantes separa-

dos pelo período de Marte, esse planeta está no mesmo local).

Define-se o ângulo λT_0 como sendo a longitude eclíptica heliocêntrica da Terra na data 28/08/2003 da primeira oposição, Tabela 4 – primeira linha, como também as longitudes eclípticas geocêntricas da Terra (λT) e de Marte (λM), lidos na Tabela 4 em 15/07/2005, segunda linha.

Seguindo a sequência indicada na Figura 6, obtém-se os ângulos do triângulo TSM, correspondentes às posições destes astros em 15/07/2005 às 14:51:52.

Com estes valores e aplicando a lei dos senos no triângulo TSM (Figura 6) pode-se então escrever:

$$\frac{ST}{SM} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 0,736$$

$$ST = r'_T = 0,736 \text{ (na unidade em que } SM = 1)$$

Repetem-se estes cálculos para os dias 02/06/2007, 19/04/2009, 10/10/2001 e 23/11/1999 resultando a Tabela 5 correspondente às posições da Terra nestas observações (resultados semelhantes aos apresentados no capítulo 27 da *Astronomia Nova* [2]).

Os valores na coluna de r_T correspondem aos de r'_T em unidades astronômicas de distância (UA): 1UA é definida como sendo a distância média entre a Terra e o Sol.

Para obter r_T divide-se cada valor r'_T pelo valor $r'_{T\text{máximo}}$. Nestas condições obriga-se o valor médio de r_T tornar-se unitário pois:

$$\overline{r_T} = \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{r'_T}{r'_T}}{5} = \frac{\sum_{i=1}^5 r'_T}{\sum_{i=1}^5 \frac{1}{r'_T}} = 1 \text{ UA}$$

As colunas x e y são calculadas pelas seguintes expressões:

$$x = r_T \cos \lambda T$$

$$y = r_T \sin \lambda T$$

6. Erro de ajuste para a órbita circular terrestre

Na Figura 7 é apresentada a órbita circular da Terra (obtida do aplicativo *Geogebra*) por um ajuste dos pontos de A a E, da Tabela 5, de acordo com o procedimento indicado nessa Figura.

Para estimar o erro no ajuste da órbita da Terra, introduzimos a Figura 8. Nela apresenta-se o procedimento para a determinação do erro resultante do ajuste da órbita

Tabela 4: Ângulos λM , λS (obtidos do aplicativo Stellarium) e λT (calculado pela Figura 4) de dados em instantes separados por um ano marciano, durante, após e antes da primeira oposição. Deslocamentos positivos e negativos fazem com que atrasos e avanços em torno desta oposição se compensem diminuindo o erro devido ao arredondamento (de 686,98 para 687 dias) do ano marciano.

	(às 14:51:52)	Deslocamento [ano M]	$\lambda M(^{\circ})$	$\lambda S(^{\circ})$	$\lambda T = \lambda S \pm 180^{\circ}$
1ª opos.	28/08/2003	0	335,03	155,02	335,02
A	15/07/2005	1	22,43	113,33	293,33
B	02/06/2007	2	13,68	71,83	251,83
C	19/04/2009	3	357,81	29,80	209,80
D	10/10/2001	-1	288,72	197,50	17,50
E	23/11/1999	-2	298,04	240,95	60,95

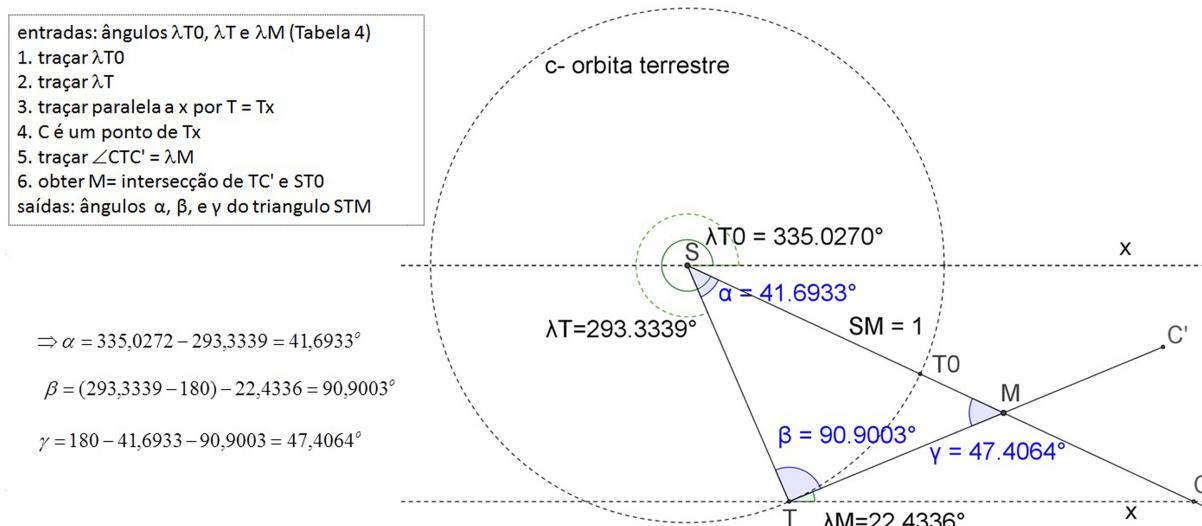


Figura 6: Figura com a posição de Marte fixa e duas posições da Terra, T_0 e T , respectivamente, na oposição considerada na Tabela 4 e após um ano marciano. Triângulo MTS, determinado pelas posições do Sol, de Marte e da Terra (T), e seus ângulos internos α , β e γ . Os ângulos λT_0 e λT indicados são os da Tabela 4. O ângulo λM é a coordenada geocêntrica de Marte obtida pelo Stellarium.

circular de um planeta P similar à órbita da Terra na Figura 7: sendo fixado o instante correspondente ao ponto P (medido) da órbita então o ângulo M fica estabelecido e, portanto P' (previsto pelo ajuste) deve encontrar-se na intersecção da órbita ajustada com o segmento EqP, que une o ponto equante à posição medida do planeta.

Assim sendo, na Figura 8 o valor do erro é dado pelo ângulo φ entre os pontos P'SP.

Na Figura 9 o procedimento da Figura 8 é realizado, por meio do *Geogebra*, para todos os pontos de A a E da Tabela 5 e com a órbita obtida na Figura 7, sendo os resultados apresentados na Tabela 6, onde o erro encontra-se em minutos de arco: igual a $\varphi_i \times 60$ (conversão de graus em minutos).

Nesta figura, φ_1 corresponde ao erro no ponto B e φ_2 corresponde ao erro no ponto D. Note que nos pontos A,

Tabela 6: Círculo por ACE com centro em O: erro deste ajuste circular para a órbita terrestre.

	A	B	C	D	E
erro	0'	0,043534'	0'	0,00918'	0'

Tabela 7: Coordenadas polares (centro no Sol) em oito pontos.

$\lambda T(^{\circ})$	293,333	251,829	209,799	17,4976
r_T (UA)	1,01066	1,00944	1,00349	0,99266
$\lambda T(^{\circ})$	60,9532	158,358	112,22	358,226
r_T (UA)	0,98374	0,99043	0,98247	0,99758

C e E o erro é igual à zero, pois o círculo foi ajustado para conter estes pontos.

Em conclusão, nota-se (Tabela 6) que os erros deste ajuste estão abaixo de 0,05' sendo menores que o valor

Tabela 5: Coordenadas das posições da Terra em A, B, C, D e E (veja Tabela 4).

	$\lambda T (^{\circ})$	$\alpha (^{\circ})$	$\beta (^{\circ})$	$\gamma (^{\circ})$	r'_T	r_T (UA)	x	y
A	293,334	41,693	90,900	47,406	0,736	1,011	0,400	-0,928
B	251,827	83,200	58,144	38,656	0,735	1,009	-0,315	-0,959
C	209,801	125,226	31,990	22,784	0,731	1,003	-0,871	-0,499
D	17,498	42,470	91,219	46,311	0,723	0,993	0,947	0,298
E	60,953	85,926	57,082	36,992	0,717	0,984	0,478	0,860
				Média	0,729	1,000		

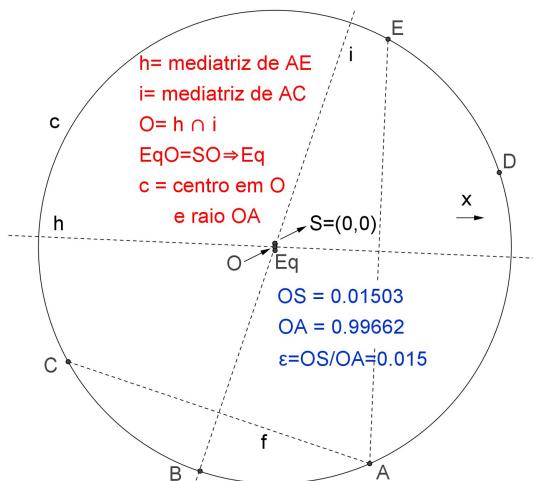


Figura 7: Círculo determinado pelos pontos A, C, E com centro em O: ajuste circular da órbita terrestre por meio de mediatriizes. Também é estimada a excentricidade ε desta órbita.

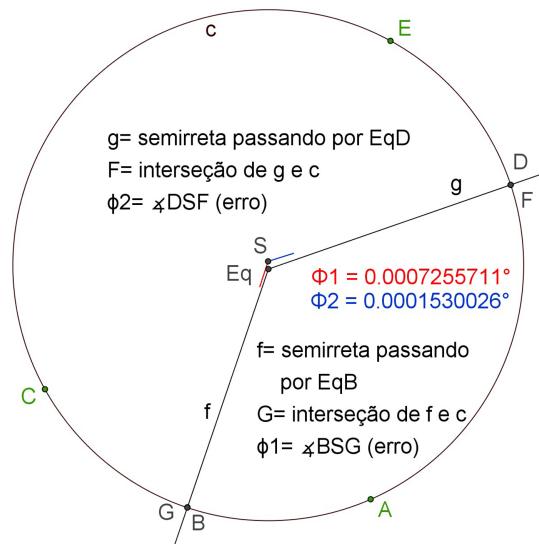


Figura 9: Círculo por ACE com centro em O: erro deste ajuste circular para a órbita terrestre.

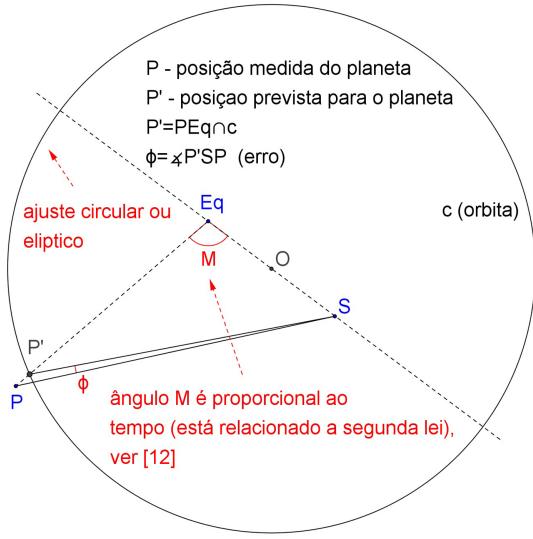


Figura 8: Cálculo do erro de ajuste da órbita de um planeta definido pelo ângulo $P'SP$ sendo P' e P respectivamente a posição prevista e a medida deste planeta e S a posição do Sol.

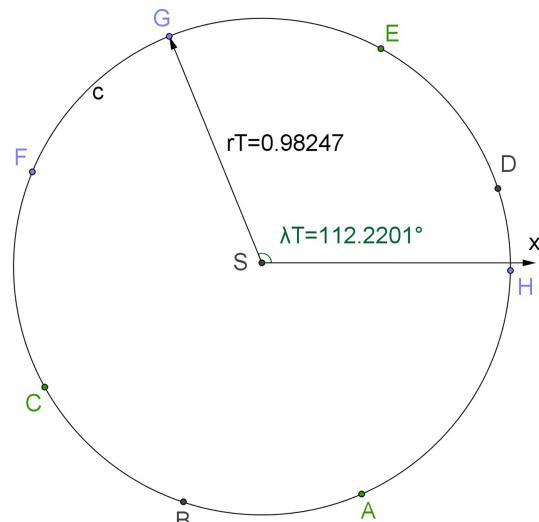


Figura 10: Círculo por ACE com centro em O: coordenadas polares (centro no Sol), da órbita terrestre sendo $r_T = ST$.

de 2' correspondente ao máximo adotado neste trabalho como referência (este valor corresponde ao erro típico relativo às medidas realizadas por Tycho Brahe [8]).

7. Órbita circular para Marte

Na Tabela 7 são apresentadas as coordenadas polares, λ_T e r_T , obtidas pelo *Geogebra*, de diversos pontos (A, ... H) da órbita da Terra (centro no Sol) indicados na Figura 10.

Com os valores da Tabela 7 obteve-se a função polinomial $r_T = f(\lambda T)$, apresentada na Figura 11, que será a seguir utilizada em interpolações.

Realizaram-se observações (*Stellarium*), ângulos λM e λS , em cada oposição da Tabela 1 e um ano marciano

(aproximadamente 687 dias) após cada uma delas, sendo os resultados apresentados na Tabela 8.

As duas primeiras linhas, referentes à 1^aoposição e 687 dias após, são utilizadas para se obter o triângulo STM (Figura 6) correspondente as posições de Marte, Sol e Terra no dia 15/07/2005 às 14:51:52.

Note que agora a distância SM não é assumida unitária, mas é o valor que se deseja obter em unidades astronômicas (UA).

Com esta Tabela calculam-se os ângulos α , β e γ (Figura 5) e a distância SM (pela lei dos senos - ver seção 5).

Neste caso se utiliza a expressão apresentada na Figura 11 para interpolar a distância ST correspondente ao ângulo λT de $293,334^\circ$, isto é, $ST = f(293,334) = 1,011$ UA.

Tabela 8: Medidas (*Stellarium*) dos ângulos λM e λS nas oposições da Tabela 1 e um ano marciano após cada uma delas. O ângulo λT é igual a $\lambda S + 180^\circ$ caso $\lambda S < 180^\circ$ e igual a $\lambda S - 180^\circ$ caso $\lambda S \geq 180^\circ$ (ver Figura 4).

		t		λM (°)	λS (°)	λT (°)
A	1a.	28/08/2003	14	51 52	335,0272	155,0233
	+1 ano M	15/07/2005	14	51 52	22,4336	293,3339
B	2a.	07/11/2005	5	47 52	45,0094	225,0119
	+1 ano M	25/09/2007	5	47 52	88,3033	181,9192
C	3a.	24/12/2007	17	43 8	92,6156	272,6144
	+1 ano M	10/11/2009	17	43 8	131,2158	228,5478
D	4a.	29/01/2010	17	40 14	129,7939	309,7928
	+1 ano M	17/12/2011	17	40 14	165,9153	265,5089
E	5a.	03/03/2012	17	7 41	163,6544	343,6533
	+1 ano M	19/01/2014	17	7 41	199,2358	299,6300
F	6a.	08/04/2014	18	1 29	198,9472	18,9467
	+1 ano M	24/02/2016	18	1 29	235,9686	335,6881
G	7a.	22/05/2016	8	10 46	241,7917	61,7917
	+1 ano M	09/04/2018	8	10 46	282,6364	19,5561
H	8a.	27/07/2018	2	1 31	304,1467	124,1489
	+1 ano M	13/06/2020	2	1 31	350,6958	82,6614

Tabela 9: Coordenadas das posições de Marte em A, B, C, D, E, F, G e H veja Tabela 8.

	λT (°)	λT_0 (°)	α (°)	β (°)	γ (°)	ST	rM	x	y
A	293,334	335,027	41,693	90,900	47,406	1,011	1,373	1,244	-0,579
B	1,920	45,009	43,093	93,616	43,291	0,995	1,448	1,023	1,024
C	48,548	92,616	44,067	97,332	38,601	0,986	1,568	-0,072	1,566
D	85,509	129,794	44,284	99,594	36,123	0,981	1,641	-1,051	1,261
E	119,630	163,654	44,023	100,394	35,583	0,983	1,662	-1,595	0,468
F	155,688	198,947	43,259	99,720	37,022	0,990	1,621	-1,533	-0,526
G	199,556	241,792	42,236	96,920	40,845	1,001	1,519	-0,718	-1,339
H	262,661	304,147	41,488	91,966	46,547	1,010	1,391	0,781	-1,151

$$r_T = f(\lambda T) =$$

$$-6,6654 \times 10^{-16} (\lambda T)^6 + 8,4504 \times 10^{-13} (\lambda T)^5$$

$$-4,0958 \times 10^{-10} (\lambda T)^4 + 8,7271 \times 10^{-8} (\lambda T)^3$$

$$-6,4787 \times 10^{-6} (\lambda T)^2 - 2,5688 \times 10^{-5} (\lambda T)^6 + 0,99465$$

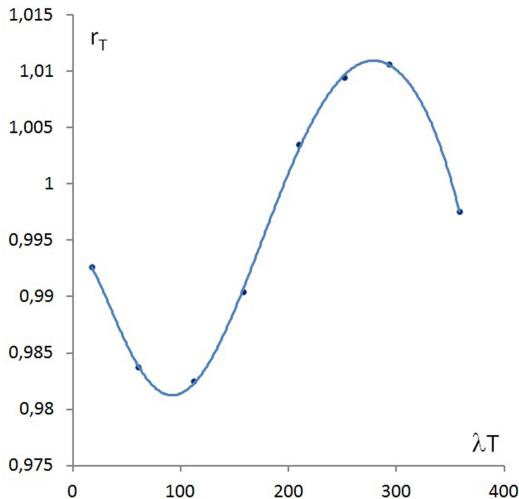


Figura 11: Função polinomial $r_T = f(\lambda T)$.

Logo:

$$\frac{SM}{ST} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1,358; ST = 1,011 \text{ UA}$$

$$SM = rM = 1,358 \times 1,011 = 1,373 \text{ UA}$$

Repete-se este procedimento para as demais linhas construindo-se assim a Tabela 9.

Note que a coluna λT_0 da Tabela 9 provém da coluna λT da Tabela 8 referindo-se a cada oposição selecionada e, portanto igual ao ângulo que Marte forma com o Sol e a direção do equinócio vernal (x), Figura 6.

Para as colunas x e y utilizam-se as seguintes expressões (pois Terra e Marte estão alinhados em λT_0 , Figura 6):

$$x = r_M \cos \lambda T_0$$

$$y = r_M \sin \lambda T_0$$

Usando o *Geogebra* os pontos de A a H (Tabela 9) são plotados na Figura 12 (ajuste circular da órbita marciana) e na Figura 13 (cálculo do erro de ajuste – ver Figura 8) nas quais são empregados procedimentos, semelhantes aos das Figuras 7 e 9, para realizar o ajuste e estimar o erro deste ajuste.

Resultam os erros correspondentes aos ângulos α , β , δ , ε e γ (da Figura 13) os quais são apresentados na Tabela 10 já convertidos para minutos de arco.

Em conclusão nota-se que os erros deste ajuste podem ser maiores que $7'$ o que é inadequado à precisão de $2'$ adotada como limite.

8. Órbita elíptica para Marte

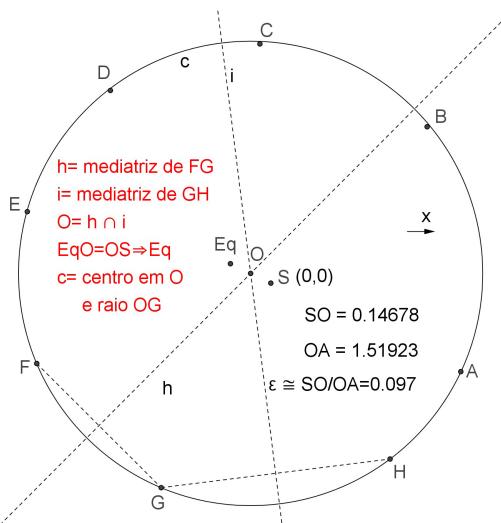
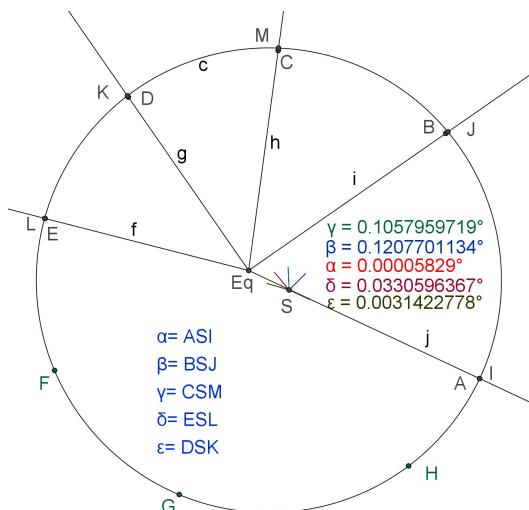
Ao detectar um erro desta ordem de grandeza Kepler abandonou o ajuste circular e na busca de alternativas notou que na órbita havia um “achatamento no raio” perpendicular à linha periélia (ver observação na Figura

Tabela 10: Círculo por FGH com centro em O: erro deste ajuste circular para a órbita de Marte.

	A	B	C	D	E	F	G	H
erro	0,0034'	7,246'	6,351'	0,188'	1,987'	0'	0'	0'

Tabela 11: Elipse de focos F' e S passando por H: erro deste ajuste elíptico da órbita de Marte.

	A	B	C	D	E	F	G	H
erro	0,03'	0,73'	0,21'	0,41'	0,039'	0,066'	0,51'	0'

**Figura 12:** Círculo por FGH com centro em O: ajuste circular para a órbita de Marte.**Figura 13:** Círculo por FGH com centro em O: erro deste ajuste circular para a órbita de Marte.

14) o que o levou a equação da elipse para trajetória de Marte (primeira lei) em torno do Sol, Apêndice B, não sem antes considerar outros tipos de curvas [7, 8].

Nesta seção será apenas verificada experimentalmente esta possibilidade: modela-se uma elipse pelos pontos de A a H (Tabela 9) da órbita de Marte sendo a seguir calculado o erro máximo deste ajuste para finalmente

realizar a comparação com o erro máximo obtido para a órbita circular da seção 7 e assim confirmar a primeira lei de Kepler.

Descreve-se a seguir um procedimento geométrico-numérico (com o uso do *Geogebra*), desenvolvido neste trabalho, para se definir o centro (O) da elipse procurada, ver alternativa na referência [5].

Na Figura 14 são assinalados os pontos de A a H, da Tabela 9, e traçadas todas as mediatrizes entre dois pontos consecutivos. O encontro de cada duas mediatrizes “consecutivas” (Figura 15) estabelece o centro de uma circunferência que passa pelos pontos que definem estas mediatrizes. Tomando-se a média aritmética dos centros destas circunferências (pontos de I a Q desta Figura) resulta o ponto O que será considerado como sendo o centro da elipse procurada.

Tendo sido identificado o centro O e sabendo-se que o Sol está posicionado em um dos focos, resultado assumido no modelo circular excêntrico com Equante inicialmente adotado por Kepler (seção 2), obtém-se o outro foco desta elipse (F’ da Figura 14).

Pode-se construir uma elipse definida pelos seguintes elementos: os dois focos e um ponto que a ela pertence (Figura 16), [14].

O *Geogebra* disponibiliza a seguinte ferramenta de ajuste: “cônica definida pelos focos (F’, S) e passando por um dado ponto (H)”, a qual poderia se basear no procedimento da Figura 16. Utilizando-se esta ferramenta com os pontos da Tabela 9 resultou a Figura 17 (ajuste elíptico).

A Figura 18 utiliza o mesmo procedimento de cálculo de erros apresentado na Figura 7 sendo que os resultados obtidos, em unidade de minutos de arco, estão compilados na Tabela 11 (ângulos da Figura 18 multiplicados por 60).

Em conclusão nota-se que os erros deste ajuste são menores que 0,8° o que pode ser considerado adequado à precisão de 2' adotada como limite.

Deste modo (compare com a conclusão da seção 7) comprova-se que o ajuste elíptico tem um melhor desempenho para a modelagem da órbita de Marte: primeira lei de Kepler.

9. Lei das áreas (Segunda lei)

Construiu-se a Tabela 12 com as observações (*Stellarium*) em três oposições de Marte e, deslocados de 96 horas

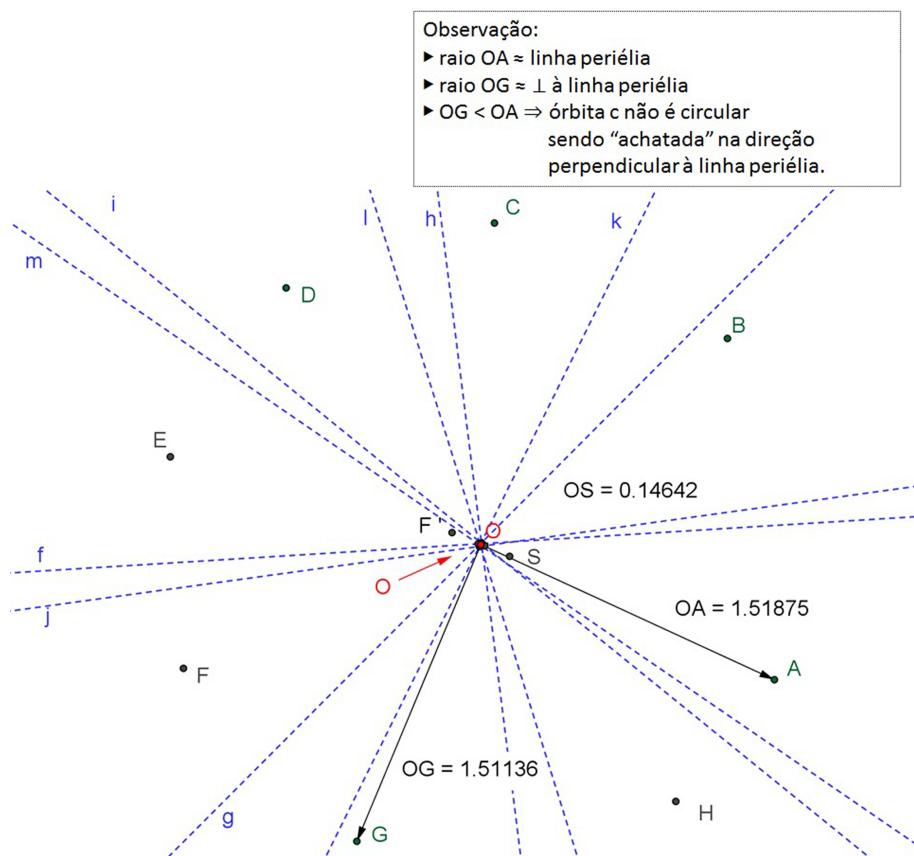


Figura 14: Procedimento geométrico-numérico para definir o centro da elipse, ajustada aos pontos de A a H (veja Tabela 9), a partir das mediatrizes f, ..., m.

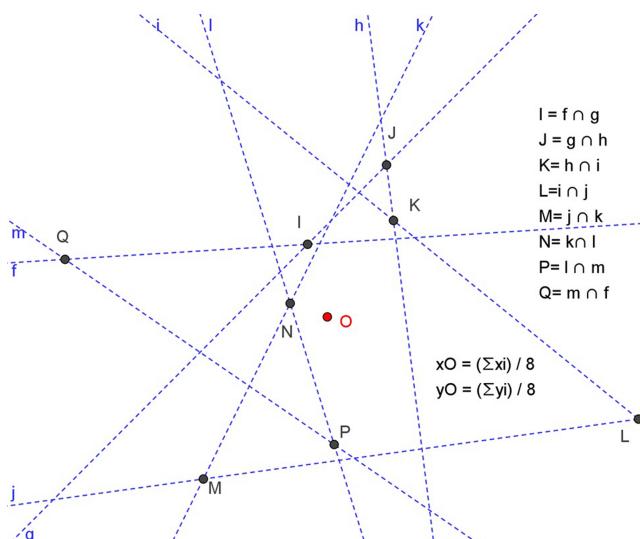


Figura 15: Ampliação da Figura 14 em torno do ponto O → centroide de IJKLMNPQ.

(quatro dias) de cada uma delas, outras três observações. Com estes dados e usando as órbitas obtidas anteriormente, elipse para Marte e círculo para a Terra, foram geradas na Figura 19 (*Geogebra*) além das posições, as áreas varridas pela Terra e por Marte.

Os resultados são apresentados nas duas últimas colunas da Tabela 12. Por estas colunas verifica-se que praticamente não houve alteração no valor das áreas para cada astro uma vez que o intervalo de tempo de varredura foi fixado num valor constante (96horas): segunda lei de Kepler [4].

10. Terceira Lei de Kepler

Kepler aplicou as suas duas primeiras leis para ajustar as órbitas de todos os planetas conhecidos em sua época. Ele acreditava na existência de relações harmônicas, entre as grandezas associadas a estas órbitas, devido a uma dinâmica comum imposta aos planetas pelo Sol [15].

Em sua busca [15] ele descobriu que a razão entre a distância média de um planeta ao Sol elevada ao cubo sobre o período orbital elevado ao quadrado era a mesma para todos os planetas considerados, e este é o enunciado de sua terceira lei apresentada em seu livro *Epitome Astronomia*, nove anos após a publicação do livro *Astronomia Nova* com as duas primeiras leis.

A seguir a terceira lei será verificada para as órbitas da Terra e Marte, consideradas anteriormente. Para tal a Tabela 13 foi construída a partir dos pontos das órbitas na Tabela 5, para a Terra, e Tabela 9, para Marte.

Tabela 12: Observações em três oposições de Marte e em três momentos deslocados de 96 horas (quatro dias) de cada uma delas. O deslocamento é escolhido para que a área varrida possa ser aproximada por um triângulo (exemplo MSM_0) e, também, visualizada na Figura 19.

		t	λM (°)			λS (°)	λT (°)	Área $T_i ST_f$	Área $M_i SM_f$
(i) 1 ^a opos.	28/08/2003	14	51	52	335,03	155,02	335,02	0,034	0,042
(f) +96h	01/09/2003	14	51	52	333,97	158,89	338,89		
(i) 2 ^a opos.	07/11/2005	5	47	52	45,01	225,01	45,01	0,034	0,042
(f) +96h	11/11/2005	5	47	52	43,63	229,03	49,03		
(i) 5 ^a opos.	03/03/2012	17	7	41	163,65	343,65	163,65	0,034	0,042
(f) +96h	07/03/2012	17	7	41	162,08	347,67	167,67		

dados F1, F2 e Y0
 $h = \text{circulo (diretor) de centro } F1 \text{ e raio } F1Y0+F2Y0$
 $Xi \text{ é ponto de } h$
 $m = \text{mediatriz de } F2Xi \text{ (1)}$
 $Yi = m \cap FiXi \quad (2); \quad \text{de (1), (2)} \Rightarrow Y_i X_i = F_2 Y_i$
 $Yi \in e$
 $e = \text{elipse pois: raio de } h = F_1 Y_i + Y_i X_i = F_1 Y_i + F_2 Y_i = F_1 Y_0 + F_2 Y_0 = \text{constante}$

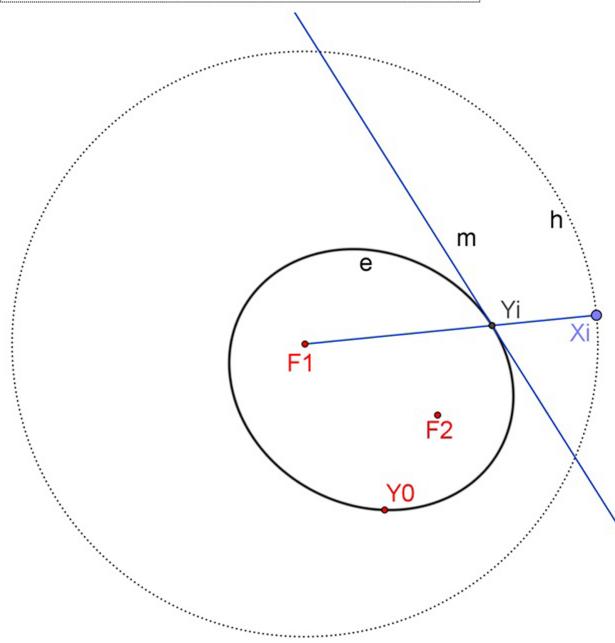


Figura 16: Obtenção de uma elipse definida pelos focos (F_1 e F_2) e por um ponto (Y_0) a ela pertencente.

Para estes dois planetas a relação entre a distância média ao Sol elevada ao cubo sobre período orbital elevado ao quadrado é praticamente a mesma, sendo igual a 1 nas unidades adotadas (última linha da Tabela 13), confirmando neste caso a validade da terceira lei de Kepler.

11. Conclusões

Este artigo contém uma apresentação simplificada mas não usual procurando tornar acessível e didático o trabalho desenvolvido por Kepler para obter as suas leis. Para isso, alguns detalhes sobre elas foram discutidos e comprovados quantitativamente:

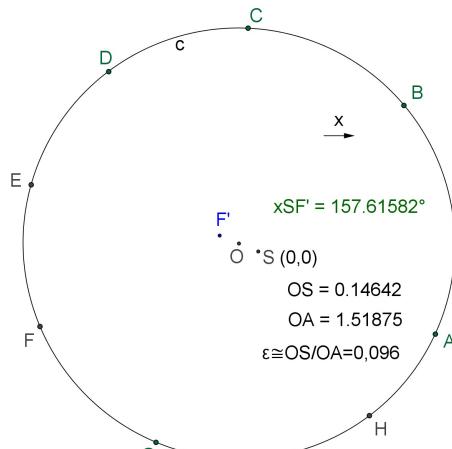


Figura 17: Elipse de focos F' e S passando por H : ajuste elíptico da órbita de Marte.

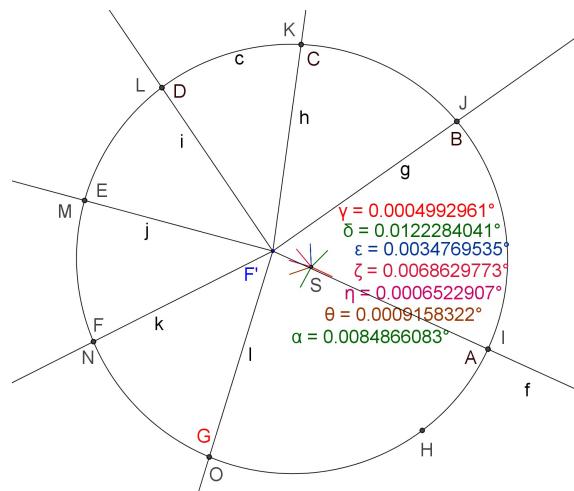


Figura 18: Elipse de focos F' (Figura 13) e S passando por H : erro deste ajuste elíptico da órbita de Marte.

- Obtenção de coordenadas, mensuráveis por observadores localizados na Terra, utilizando o aplicativo *Stellarium*.
 - A órbita da Terra foi ajustada, com erro inferior a $0,1'$, por uma órbita circular excêntrica com Equante.
 - Inicialmente, a órbita de Marte foi também ajustada como uma órbita circular excêntrica com

$\lambda T_0 = \angle xST_0 \Rightarrow$ define ponto T0 (1ª oposição)
 $\lambda T = \angle xST \Rightarrow$ define ponto T (96h depois da 1ª oposição)
 $M_0 T_0 S$ alinhados na 1ª oposição \Rightarrow define ponto M_0
 $\lambda M = \angle xTM \Rightarrow$ define ponto M (96h depois da 1ª oposição)
Área varrida \approx Área do triângulo TST_0
Área varrida \approx Área do triângulo MSM_0
Idem para demais oposições

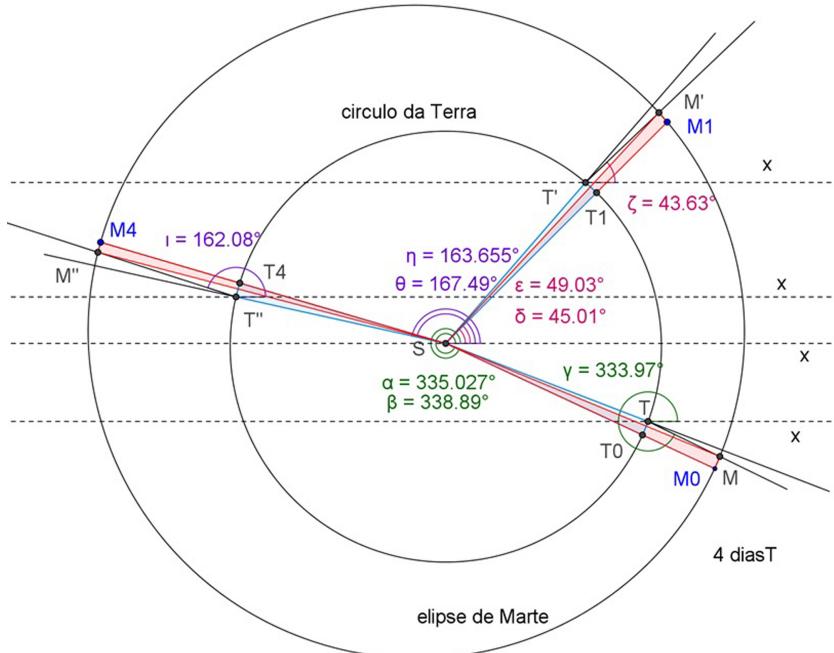


Figura 19: Posições e áreas varridas pela Terra e por Marte relacionadas à Tabela 12.

Tabela 13: Distâncias médias ao Sol, períodos orbitais e relação “distância média ao Sol (d_m) ao cubo sobre período (T) orbital ao quadrado (d_m^3 / T^2)” para os planetas Marte e Terra.

	Marte	Terra
	d (UA)	d (UA)
d_m	1,37	1,01
T (anos T)	1,45	1,01
d_m^3 / T^2	1,57	1,00
	1,64	0,99
	1,66	0,98
	1,62	
	1,52	
	1,39	
d_m	1,53	1,00
T (anos T)	1,88	1,00
d_m^3 / T^2	1,01	1,00

Equante, com erro inferior a 7'. Entretanto, foi mostrado que com um ajuste mais preciso obtem-se uma órbita elíptica com um erro menor que 0,8'.

- Com os valores obtidos do aplicativo Stellarium, verificou-se as leis de Kepler (para a Terra e para Marte).

Nos resultados obtidos estão embutidos diversos erros: o relativo a não consideração da latitude eclíptica de Marte ao longo de sua órbita (erro da ordem de 1' na

determinação da posição de Marte), o devido à aproximação para o ano marciano (687 contra 686,98 dias - implica num erro da ordem de 0,6' na determinação posição de Marte), e outros como os de arredondamento, de interpolação e de ajuste de órbita (erro de 0,8' - ver seção 8 deste artigo). Esses erros levam a uma incerteza máxima de 2' nas órbitas, sendo essa precisão suficiente para verificar a validade das leis Kepler com precisão semelhante à obtida por ele.

Os procedimentos apresentados neste artigo foram desenvolvidos com recursos do *Stellarium* e do *Geogebra*, o que mostra a viabilidade de se elaborar futuramente, baseadas nestes aplicativos (livres), experiências e materiais de ensino, como os do CLEA (*Contemporary Laboratory Experiences in Astronomy*) [16], para as leis de Kepler. Como exemplo de material didático desenvolvido com esses aplicativos, indicamos o site da referência [17], na qual pode ser acessado parte do procedimento utilizado na obtenção dos resultados apresentados neste artigo.

Um dos equívocos comuns sobre a obtenção das órbitas planetárias por Kepler é o de se considerar que o seu trabalho foi apenas um ajuste de dados ou ainda uma análise prática da cinemática do movimento. Com as suas duas primeiras leis, Kepler desenvolveu um método (seção 7.7 de [18]) para determinar as posições dos planetas ao longo do tempo, que utilizou na construção de tábuas

astronômicas. Embora suas leis tenham esta aplicação, o que ele realmente buscava eram explicações dinâmicas para os movimentos planetários, como a ação da *espécie immateriata* que emana do Sol e atua sobre os planetas [4]. Nesse sentido, ele também considerou a existência de forças magnéticas entre estes astros [3, 19].

Tais conceitos dinâmicos foram essenciais para o resultado final. Por exemplo, a *espécie immateriata* serviu de base para estabelecer a lei das áreas como fundamental. Assim, esta lei nunca foi desconsiderada, embora imprecisa para órbitas circulares, sendo chave para suas descobertas [4, 19].

Com um sentido moderno da comprovação teórica por resultados experimentais, não descartou erros “muito pequenos” para finalmente chegar ao destino ao qual ousadamente o levou a trocar o movimento circular pelo elíptico, o que ninguém antes dele havia estabelecido efetivamente e que se tornou um dos passos decisivos para a formulação da Teoria da Gravidade por Newton [3].

Para que se tenha uma ideia do esforço por Kepler empreendido, no Apêndice A discute-se como avaliar grosseiramente o volume de cálculos, processados pelo aplicativo *Geogebra*, equivalentes aos que ele realizou manualmente.

Além disto, com relação à primeira lei discute-se no Apêndice B como se pode induzir previamente a equação da órbita elíptica marciana (passo decisivo na obra de Kepler) de modo a justificar a determinação do erro de ajuste deste tipo de trajetória aos dados experimentais da Tabela 9.

Agradecimento

Agradecimento ao Departamento de Astronomia do IAG/USP (referente ao curso de extensão universitária “Astronomia: uma visão geral”) pela disseminação do aplicativo *Stellarium* [9] e do material de ensino do *CLEA* [16] entre outros.

Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online:

Apêndice A: Processamento numérico

Apêndice B: Indução da primeira Lei de Kepler

Referências

- [1] A. Postl, Am. J. Phys. **40**, 660 (1972).
- [2] J. Kepler, *Astronomie Novelle* (Diffuse par la Librarie A. Blanchard, Paris, 1974).
- [3] I.B. Cohen, *O Nascimento de uma Nova Física* (Editora Edart, São Paulo, 1967).
- [4] E.J. Ailton, A. Beer e P. Beer, *Kepler, Four Hundred Years* (Pergamon Press, Oxford, 1975), p. 573.
- [5] B.E. Morgado e Soares, Rev. Bras. Ens. Fís. **37**, 1305 (2015).
- [6] J.L.E. Dreyder, *A History of Astronomy from Thales to Kepler* (Dover Publications, New York, 1953).
- [7] A. Koestler, *Arthur, Sonâmbulos: História das Concepções dos Homens sobre o Universo* (Ibrasa Editora, São Paulo, 1959).
- [8] J.P. Verdet, *Uma História da Astronomia* (Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1991).
- [9] Stellarium, acessado em 23/01/2017: <http://www.stellarium.org/pt/>.
- [10] Geogebra, acessado em 23/01/2017: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/.
- [11] J. Evans, Am. J. Phys. **52**, 12 (1984).
- [12] M.C.D. Neves e C.A. Arguello, *Astronomia de Réguas e Compasso de Kepler a Ptolomeu* (Papirus Livraria Editora, São Paulo, 1986).
- [13] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra with Applications* (John Wiley & Sons Inc., New York 1991), 5^a ed.
- [14] C. Marmo, *Curso de Desenho, Unidade 4: Cônicas* (Editora Moderna Ltda., São Paulo, 1974).
- [15] A. Medeiros, Física na Escola **4**(1), 19 (2003).
- [16] CLEA, acessado em 23/01/2017: <http://www3.gettysburg.edu/~marschal/clea/CLEAhome.html>.
- [17] Professor M.A.Garms, acessado em 10/10/2017: <http://www.marcogarms.pro.br>.
- [18] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanem and K.J. Donner, *Fundamental Astronomy* (Springer Verlag, New York, 1993), 2^a ed.
- [19] C.R. Tossato, *O Processo de Elaboração das Duas Primeiras Leis Keplorianas dos Movimentos Planetário* (Departamento de Filosofia Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da USP, São Paulo, 1997).
- [20] [20] Wikipedia, acessado em 16/06/2017: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations.
- [21] [21] G. Iezzi, *Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria Analítica* (Atual Editora, São Paulo, 1977), v. 7.
- [22] [22] P.R.M. Contador, *Matemática, uma breve História* (Livraria da Física Editora, São Paulo, 2005), v. 2.